УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Ивана Јововић, Тамара Коледин, Братислав Ирчанин

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2

Зборник решених тестова основног знања

- Интегрални рачун
- Диференцијалне једначине
- Нумерички и степени редови
- Булове алгебре
- Комбинаторика и графови
- Линеарна алгебра
- Аналитичка геометрија

Београд 2018.

Ивана Јововић, Тамара Коледин, Братислав Ирчанин

ПРАКТИКУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2

Зборник решених тестова основног знања

Рецензенти

др Ненад Цакић

др Небојша Ралевић

др Зоран Станић

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета
Универзитета у Београду, број 1005/4–17 од 06. 11. 2018. године,
ова књига је одобрена као уџбеник у електронском облику
на Електротехничком факултету у Београду.

Издаје и штампа:

Електротехнички факултет Универзитета у Београду,
Булевар краља Александра 73, Београд

Београд 2018.

Тираж: 50 примерака

ISBN: 978-86-7225-070-1

Предговор

Овај зборник решених тестова основног знања припремљен је за студенте прве године Електротехничког факултета и природно се надовезује на већ постојеће уџбенике и збирке „Математичка анализа, теорија и хиљаду задатака, за студенте технике“, „Математика 1, Алгебра“, „Збирка задатака из алгебре, I део“ и „Збирка задатака из алгебре, II део“ (видети Литературу), који се већ дуги низ година користе у настави математике. Зборник има две целине: у првом делу налазе се решени тестови који су били саставни део испита из Математике 2 и сви садрже по десет задатака, а у другом делу налазе се колоквијуми из предмета Практикум из Математике 2 са по петнаест задатака.

Сви тестови су решени, а у случају неких задатака дато је више начина за њихово решавање. Коришћене су следеће ознаке:

- ✓ тачни одговори (у задацима у којима је потребно заокружити тачне одговоре);
- ¡ код задатака у којима студенти најчешће греше;
- ♣ референца на сличне или исте задатке (кликом на датум теста прелази се на страницу на којој се налази референсан задатак);
- ♢ други поступак за решавање задатка.

Решењима већине задатака претходи кратко теоријско излагање, које је посебно истакнуто и уоквирено, па се тестови не морају читати у изложеном редоследу.

Тестове основног знања из 2007, 2008, 2009. и 2011. године, као и три колоквијума из Практикума из Математике 2 решила је Ивана Јововић, а тестове основног знања из 2010, 2013, 2014, 2015. године, и преостала три колоквијума из Практикума из Математике 2 решила је Тамара Коледин. Братислав Иричанин решио је тестове из 2012. године.

Ивана Јововић и Тамара Коледин захваљују Славици Коледин на уложеном труду приликом лекторисања ове књиге. Њен рад је у великој мери допринео да у књизи буде што мање пропуста и грешака.

Аутори

Садржај

– Тест основног знања – 03. 02. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x} + 7^x\right) \mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x-10}} \mathrm{d}x.$

2. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}.$$

3. Заокружити слова испред интеграбилних функција на сегменту $[0,2]$:

(а) $y = \begin{cases} \ln x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ **(б)** $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(в) $y = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ **(г)** $y = \sin x;$

(д) $y = e^x - 1;$

(ђ) ниједна од претходних функција није интеграбилна на сегменту $[0,2]$.

4. Одредити типове следећих диференцијалних једначина првог реда:

(а) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$ ....

(б) $y' + \sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}} = 0;$ ....

(в) $2y' + e^x y = (\sin x)\, y^3;$ ....

(г) $y' + 2xy = \ln x;$ ....

(д) $y' + (\operatorname{tg} x)\, y^2 + (\sin x)\, y + \cos x = 0$.........

5. Ако је познато да диференцијална једначина $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$ има линеарно независна партикуларна решења $y_1 = \sin(2x)$, $y_2 = \cos(2x)$ и $y_3 = e^{2x}$, одредити опште решење дате једначине.

6. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n;$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3};$ **(в)** $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n^3};$

(г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n;$ **(д)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n;$

(ђ) ниједан од претходних редова није конвергентан.

7. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \vee \overline{p};$ **(б)** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q);$

(в) $p \wedge \overline{p};$ **(г)** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q});$

(д) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p;$ **(ђ)** $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r);$

(е) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

8. На шаховском турниру учествује десет шахиста. Сваки треба да одигра по једну партију са сваким. Колико ће укупно бити одиграно партија?

9. За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ могуће је одредити:

(а) ранг; **(б)** минимални полином;

(в) карактеристични полином; **(г)** сопствене вредности;

(д) сопствене векторе; **(ђ)** ништа од наведеног.

10. Дата је раван $\alpha : x+y+z=2$ у простору $\mathbb{R}^3$.

(а) Одредити једну тачку која припада равни α.

(б) Одредити један вектор који је ортогоналан на раван α.

– Решења –

1. Интеграл у примеру **(а)** збир је два таблична интеграла; интеграл у примеру **(б)** решавамо сменом:

$$\text{(а)}\quad \int\left(\frac{3}{x}+7^x\right)\mathrm{d}x = 3\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int 7^x\,\mathrm{d}x = 3\ln|x|+\frac{7^x}{\ln 7}+C;$$

$$\text{(б)}\quad \int\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x-10}}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} t & = & \sqrt{x^2-3x-10} \\ \mathrm{d}t & = & \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-10}}\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = 2\int\mathrm{d}t = 2t+C = 2\sqrt{x^2-3x-10}+C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо

$$\int_0^{\frac12}\frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac12\int_0^{\frac12}\frac{\mathrm{d}(2x)}{1+(2x)^2} = \frac12\operatorname{arctg}(2x)\Big|_0^{\frac12} = \frac12(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0) = \frac12\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

3.

> Свака интеграбилна функција на сегменту $[a,b]$ ограничена је на том сегменту, односно свака функција која није ограничена на сегменту $[a,b]$ није интеграбилна на том сегменту.
>
> Свака непрекидна функција на сегменту $[a,b]$ интеграбилна је на том сегменту.
>
> Ограничена функција са највише пребројиво много тачака прекида на сегменту $[a,b]$ јесте интеграбилна на том сегменту.

(а) Функција $y=\begin{cases}\ln x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ није ограничена на сегменту $[0,2]$, па није ни интеграбилна на том сегменту.

(б) Како функција $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ није ограничена на сегменту $[0,2]$, закључујемо да није ни интеграбилна на том сегменту.

(в) Функција $y=\begin{cases}0, & x<1,\\ 3, & x=1,\\ 1, & x>1;\end{cases}$ ограничена је и има једну тачку прекида $x=1$ на сегменту $[0,2]$; према томе, дата функција је интеграбилна на том сегменту.

(г) Функција $y=\sin x$ непрекидна је на сегменту $[0,2]$, одакле следи да је и интеграбилна на том сегменту.

(д) Функција $y=e^x-1$ непрекидна је на сегменту $[0,2]$, па је и интеграбилна на том сегменту.

Тачни одговори су **(в)**, **(г)** и **(д)**.

4.

Подсетимо се типова диференцијалних једначина првог реда:

- једначина која раздваја променљиве има облик $f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0$, где су функције f и g непрекидне на одговарајућим интервалима;
- хомогена једначина има облик $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где је функција f непрекидна на задатом интервалу;
- линеарна једначина има облик $y' + P(x)\,y = Q(x)$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу;
- Бернулијева једначина има облик $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha}$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу и $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Рикатијева једначина има облик $y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$, где су P, Q и R непрекидне функције на задатом интервалу.

(а) Једначина $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ јесте **хомогена диференцијална једначина** за $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

(б) Једначина $y' + \sqrt{\dfrac{1+y^2}{1+x^2}} = 0$ трансформише се у **диференцијалну једначину која раздваја променљиве** $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

(в) Једначина $2\,y' + e^x\,y = (\sin x)\,y^3$ јесте **Бернулијева диференцијална једначина**. Имамо да је $P(x) = \frac{1}{2}\,e^x$, $Q(x) = \frac{1}{2}\,\sin x$ и $\alpha = 3$.

(г) Једначина $y' + 2\,x\,y = \ln x$ јесте **линеарна диференцијална једначина** за $P(x) = 2\,x$ и $Q(x) = \ln x$.

(д) Једначину $y' + (\operatorname{tg} x)\,y^2 + (\sin x)\,y + \cos x = 0$ можемо записати у одговарајућем облику $y' = -(\operatorname{tg} x)\,y^2 - (\sin x)\,y - \cos x$, одакле закључујемо да је у питању **Рикатијева диференцијална једначина** за $P(x) = -\operatorname{tg} x$, $Q(x) = -\sin x$ и $R(x) = -\cos x$.

5. Разматрамо хомогену линеарну диференцијалну једначину трећег реда са константним коефицијентима $y''' - 2\,y'' + 4\,y' - 8\,y = 0$. Пошто су дата њена три партикуларна линеарно независна решења $y_1 = \sin(2\,x)$, $y_2 = \cos(2\,x)$ и $y_3 = e^{2\,x}$, одмах закључујемо да је опште решење полазне једначине њихова линеарна комбинација $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 \sin(2\,x) + C_2 \cos(2\,x) + C_3 e^{2\,x}$.

♣ У задатку је дато више података него што је потребно. И да нам нису дата одговарајућа партикуларна решења, до њих би се могло доћи стандардним поступком. Погледати теорију у трећем задатку са теста 13. 10. 2007.

6.

Ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Еквивалентно, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Подсетимо се да почетна вредност индекса n не утиче на конвергенцију реда. Нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, јесу еквиконвергентни, оба реда су или конвергентна или дивергентна.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

Заиста, парцијалне суме геометријског реда јесу $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ за $q \neq 1$ и $S_n = n+1$ за $q = 1$. Како је $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$, следи да је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. За $q = 1$ ред је одређено дивергентан, јер је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ако је $q > 1$ ред је одређено дивергентан, јер је $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, па је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. За $q \leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ не постоји, па према томе ни $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји и ред је неодређено дивергентан.

(а) Како $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0$ (чак и не постоји), закључујемо да нумерички ред са алтернирајућим члановима $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ дивергира.

✓**(б)** Како је $\alpha = 3 > 1$, ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ конвергира.

✓**(в)** Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ и његов остатак $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ јесу еквиконвергентни. Према томе, ред $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ конвергира.

✓**(г)** Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$ је геометријски ред са количником $q = \frac{5}{6}$. Како је $|q| < 1$, ред конвергира.

(д) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ је геометријски ред са количником $q = \frac{6}{5}$. Како је $q > 1$, ред дивергира.

Тачни одговори су **(б)**, **(в)** и **(г)**.

7.

Уређену тројку $(B, \vee, \wedge)$, где је B непразан скуп, а $\vee$ и $\wedge$ бинарне операције на скупу B, називамо Буловом алгебром ако важи:

- $(\forall a, b \in B)\, a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$ (комутативност);
- $(\forall a, b, c \in B)\, (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ \ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (асоцијативност);
- $(\forall a, b, c \in B)\, a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),\ \ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (дистрибутивност);
- $(\exists 0, 1 \in B)\, (\forall a \in B)\, a \vee 0 = a,\ \ a \wedge 1 = a,\ \ 0 \neq 1$ (постојање неутралних елемената);
- $(\forall a \in B)\, (\exists \overline{a} \in B)\, a \vee \overline{a} = 1,\ \ a \wedge \overline{a} = 0$ (постојање комплемената).

Наведимо неке важније теореме Булове алгебре:

- $(\forall a \in B)\, a \vee a = a,\ \ a \wedge a = a$ (идемпотентност);
- $(\forall a \in B)\, a \vee 1 = 1,\ \ a \wedge 0 = 0$;
- $(\forall a, b \in B)\, a \vee (a \wedge b) = a,\ \ a \wedge (a \vee b) = a$ (апсорпција);
- $(\forall a \in B)\, \overline{\overline{a}} = a$ (инволуција);
- $\overline{0} = 1,\ \ \overline{1} = 0$;
- $(\forall a, b \in B)\, \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b},\ \ \overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ (Де Морганови закони).

Исказна алгебра је Булова алгебра. Заиста, може се показати да за скуп $B = \{0, 1\}$, бинарне операције $\vee$ (дисјункцију) и $\wedge$ (конјункцију), које су дефинисане помоћу Кејлијевих таблица

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

и унарну операцију $^-$ (негацију) дату са

a	1	0
$\overline{a}$	0	1

важе аксиоме Булове алгебре.

Поред наведених, у исказној алгебри се помоћу Кејлијевих таблица дефинишу и следеће бинарне операције:

- импликација
- еквиваленција
- ексклузивна дисјункција
- Шеферова (ни) функција
- Пирсова (нили) функција

$\Rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\Leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\veebar$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\uparrow$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

Симболи исказне алгебре су:

- исказна слова $(p, q, r, \ldots)$;
- симболи операција $(\vee, \wedge, ^-, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \uparrow, \downarrow)$;
- отворена и затворена заграда.

Исказне формуле су:

- исказна слова;
- $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $\overline{A}$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$, $(A \veebar B)$, $(A \uparrow B)$, $(A \downarrow B)$, где су A и B исказне формуле;
- низови симбола који се могу добити искључиво применом претходна два правила коначан број пута.

Исказна слова могу узимати вредност 0 или 1. Две исказне формуле A и B једнаке су ако имају исте вредности за све вредности исказних слова која се у њима појављују. Исказна формула која за све вредности својих исказних слова има вредност 1 назива се таутологија. Исказна формула која за све вредности својих исказних слова има вредност 0 назива се контрадикција. Исказна формула $A \Leftrightarrow B$ јесте таутологија ако и само ако су исказне формуле A и B једнаке.

(а) У Буловој алгебри $(B, \vee, \wedge)$ за сваки елемент $p \in B$ важи да је $p \vee \overline{p} = 1$ (постојање комплемента). Исказна алгебра је бинарна (двочлана) Булова алгебра. Према томе, за све вредности исказног слова $p \in \{0, 1\}$ важи да је вредност исказне формуле $p \vee \neg p$ једнака 1, одакле закључујемо да је дата формула таутологија. Ова таутологија се назива закон искључења трећег.

(б) На основу таблице истинитости

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

закључујемо да су исказне формуле $p \Rightarrow q$ и $\overline{p} \vee q$ једнаке. Одакле директно следи да је исказна формула $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$ таутологија.

(в) У Буловој алгебри $(B, \vee, \wedge)$ за сваки елемент $p \in B$ важи да је $p \wedge \overline{p} = 0$ (постојање комплемента). Истим резоновањем као у претходном примеру закључујемо да је дата формула контрадикција, негација закона противречности.

(г) У Буловој алгебри важи Де Морганов закон $\overline{p \vee q} = (\overline{p} \wedge \overline{q})$; према томе исказна формула $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ јесте таутологија.

(д) На основу теореме о инволуцији у Буловој алгебри $(B, \vee, \wedge)$ за сваки елемент $p \in B$ важи да је $\overline{\overline{p}} = p$, одакле следи да је исказна формула $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ таутологија, закон двојне негације.

(ђ) Формирајмо таблицу истинитости за исказну формулу $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Из таблице видимо да је дата формула таутологија. Ова таутологија се назива закон транзитивности за импликацију.

Тачни одговори су **(а)**, **(б)**,**(г)**, **(д)** и **(ђ)**.

8. Сваки од 10 шахиста је одиграо по једну партију са осталих 9 шахиста. Ако је шахиста A одиграо партију са шахистом B, онда је и шахиста B одиграо партију са шахистом A. Према томе, укупан број партија је $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Упоредити задатак са седмим задатком са теста 19. 09. 2007.

9. Карактеристични и минимални полином, сопствене вредности и сопствени вектори дефинисани су само за квадратне матрице. Дата матрица није квадратна, према томе ништа од наведеног није могуће одредити. Ранг матрице се може одредити за матрицу произвољног типа, одакле закључујемо да је једини тачан одговор **(а)**. Ранг матрице A једнак је реду њене највеће регуларне подматрице. Имамо да је $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$, али и да је $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ па је $\operatorname{rang} A = 2$.

10.

Једначина равни која садржи тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и нормална је на вектор $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ гласи $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

(а) Координате тачке која припада равни задовољавају једначину те равни. Произвољна тачка која припада равни α има координате $(t, s, 2 - t - s)$, где су t и s реални бројеви. Нпр. за $t = 0$ и $s = 0$ имамо тачку $(0, 0, 2)$.

(б) Вектор нормале равни α јесте сваки вектор облика $t\,(1, 1, 1) = (t, t, t)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Нпр. за $t = 2$ имамо вектор $\vec{n}_\alpha = (2, 2, 2)$.

– Тест основног знања – 28. 02. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \sin(2\,x)\,\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4\,x^2}}.$

2. Одредити вредности реалне позитивне константе c тако да важи једнакост $\displaystyle\int_0^c x^2\,\mathrm{d}x = 9.$

3. Дата је диференцијална једначина

$$y' + x\left(y + y^{\alpha^2-5\,\alpha+6}\right) = 0.$$

За које је вредности реалног параметра α дата једначина линеарна?

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' = y$.

5. За које вредности реалног параметра γ ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3\,n^4-5\,n^3+2}{11\,n^\gamma+5\,n-1}$ конвергира?

6. На колико различитих начина је могуће поређати у низ три беле и четири црне куглице?

7. Нека је $(B,\vee,\wedge)$ Булова алгебра и нека су a и b произвољни елементи скупа B. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $a\wedge(a\vee b)=a;$ **(б)** $a\wedge(a\wedge b)=a;$

(в) $a\wedge 0=0;$ **(г)** $a\vee 0=0;$

(д) $a\wedge\overline{a}=a;$

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Одредити ранг матрице

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&5&0\\3&6&9&0\end{bmatrix}.$$

9. Нека је A реална квадратна матрица реда $n\in\mathbb{N}$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) матрица M има n различитих сопствених вредности;

(б) минимални полином матрице M јесте степена n;

(в) карактеристични полином матрице M јесте степена n;

(г) све нуле карактеристичног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног минималног полинома исте вишеструкости;

(д) све нуле минималног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног карактеристичног полинома;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Дати су вектори $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$ и $\vec{w}=(1,0,1)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $\vec{u}\perp\vec{v};$ **(б)** $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{0};$

(в) $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v};$ **(г)** $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{u}\times\vec{v};$

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1. Дати интеграли се директно своде на табличне. Имамо:

(а) $\displaystyle\int \sin(2\,x)\,\cos(2\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(4\,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\cos(4\,x) + C;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4\,x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2\,x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(2\,x) + C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

На основу Њутн–Лајбницове формуле важи $\displaystyle\int_0^c x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^c = \frac{c^3}{3}$. Према услову задатка имамо да је $\dfrac{c^3}{3} = 9$, односно $c = 3$.

3. Линеарна диференцијална једначина првог реда јесте једначина облика $y' + P(x)\,y = Q(x)$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу. Да би диференцијална једначина $y' + x\,(y + y^{\alpha^2-5\,\alpha+6}) = 0$ била линеарна, мора да важи да је или $\alpha^2 - 5\,\alpha + 6 = 0$ или $\alpha^2 - 5\,\alpha + 6 = 1$. У првом случају диференцијална једначина постаје $y' + x\,y = -x$ ($P(x) = x$ и $Q(x) = -x$). У другом случају добијамо хомогену линеарну диференцијалну једначину $y' + 2\,x\,y = 0$ ($P(x) = 2\,x$ и $Q(x) = 0$). Важи да је $\alpha^2 - 5\,\alpha + 6 = 0$ за $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$, а $\alpha^2 - 5\,\alpha + 5 = 0$ за $\alpha = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. Дакле, дата диференцијална једначина је линеарна за $\alpha \in \left\{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, 2, 3, \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Обратимо пажњу да је за произвољно $\alpha \in \mathbb{R}$ једначина $y' + x\,(y + y^{\alpha^2-5\,\alpha+6}) = 0$ диференцијална једначина која раздваја променљиве.

4. Једначина $y'' - y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^2 - 1 = 0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_{1,2} = \pm 1$, реални и различити бројеви. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

5.

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha>1$.

II поредбени критеријум. Ако је $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$, $0<K<+\infty$, онда су редови са позитивним члановима $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ еквиконвергентни (оба реда су или конвергентна или дивергентна).

Почевши од неког члана елементи реда $\frac{3n^4-5n^3+2}{11n^\gamma+5n-1}$ позитивни су. На основу другог поредбеног критеријума следи да су редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^4-5n^3+2}{11n^\gamma+5n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\gamma-4}}$ еквиконвергентни. Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\gamma-4}}$ је конвергентан за $\gamma-4>1$, односно за $\gamma>5$.

6. У питању су пермутације са понављањем скупа од $3+4=7$ елемената, код којих се један елемент понавља три, а други четири пута. Број различитих начина на који можемо поређати три беле и четири црне куглице у низ јесте $\frac{7!}{3!\cdot4!}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2}=35$.

◇ Други начин на који можемо доћи до решења јесте да од седам позиција низа у који треба поређати куглице изаберемо три на које ћемо ставити беле куглице. Од седам позиција три можемо изабрати на $\binom{7}{3}=35$ начина, што је број комбинација треће класе скупа који има седам елемената. На преостале четири позиције стављамо црне куглице, што можемо урадити на један начин. Према принципу производа закључујемо да је број различитих начина на које можемо поређати три беле и четири црне куглице у низ 35.

7.

(а) Једнакост $a\wedge(a\vee b)=a$ тачна је за свако $a,b\in B$ и зове се теорема о апсорпцији.

(б) Бинарна операција $\wedge$ је асоцијативна. Према томе, важи $a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b$. У Буловој алгебри $(B,\vee,\wedge)$ сваки елемент је идемпотентан у односу на бинарну операцију $\wedge$, па је $a\wedge a=a$, тј. $(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b$. Дакле имамо $a\wedge(a\wedge b)=(a\wedge a)\wedge b=a\wedge b\neq a$ јер за свако $a,b\in B$ не важи $a\wedge b=a$. Заиста, нпр. за $a=1$ и $b=0$ имамо $1\wedge(1\wedge 0)=1\wedge 0=0\neq 1$, јер је 1 неутрални елемент за бинарну операцију $\wedge$. Закључујемо да тврђење није тачно.

(в) Једнакост $a\wedge 0=0$ јесте теорема Булове алгебре.

(г) У Буловој алгебри $(B,\vee,\wedge)$ елемент 0 је неутрални елемент за бинарну операцију $\vee$, тј. за свако $a\in B$ важи $a\vee 0=a$. Закључујемо да тврђење $a\vee 0=0$ не важи за $a\neq 0$.

(д) Елемент $\overline{a}$ је комплемент елемента a у Буловој алгебри $(B,\vee,\wedge)$, односно за произвољан елемент $a\in B$ важи да је $a\wedge\overline{a}=0$. Према томе, тврђење $a\wedge\overline{a}=a$ није тачно за $a\neq 0$.

Тачни одговори су **(а)** и **(в)**.

8. Множењем елемената прве врсте са -2, односно са -3, и додавањем одговарајућим елементима друге, односно треће врсте, а затим заменом места одговарајућим елементима друге и треће колоне, добијамо

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&4&5&0\\3&6&9&0\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1&3&2&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

одакле закључујемо да је $\operatorname{rang}A=2$.

Приметимо да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће врсте, и да нису пропорционални елементима друге врсте. Према томе, ранг матрице A једнак је 2. Слично, прва и друга колона линеарно су зависне, док су прва и трећа колона линеарно независне. Одатле следи да је $\operatorname{rang} A = 2$.

9.

Карактеристични полином (сопствени полином) реалне квадратне матрице M реда n јесте полином $\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{I})$. Карактеристични полином матрице M понекад се дефинише и као $\varphi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - M)$. Полином $\varphi_M(\lambda)$ је степена n, па има n (не обавезно различитих!) нула.

Сопствени вектор (карактеристични вектор) матрице M јесте комплексна матрица-колона X (типа $n \times 1$) различита од нула-матрице за коју постоји комплексан број λ такав да важи $M\,X = \lambda\,X$. Број λ назива се сопственом вредношћу (карактеристичном вредношћу) матрице M. Сопствене вредности матрице M јесу нуле карактеристичног полинома. Заиста, матрична једначина се може трансформисати у хомогени систем $(M - \lambda\,\mathrm{I})\,X = \mathbf{0}$. Систем има нетривијално решење ако је детерминанта матрице система једнака нули, тј. ако је $\det(M - \lambda\,\mathrm{I}) = 0$.

Минимални полином $\mu_M(\lambda)$ матрице M јесте монични полином најмањег степена који анулира матрицу, односно то је монични полином најмањег степена за који важи $\mu_M(M) = \mathbf{0}$. Минимални полином матрице M дели карактеристични полином. Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, различите нуле карактеристичног полинома. Тада су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, такође нуле истог или мањег реда минималног полинома.

Пређимо сада на разматрање тачности понуђених одговора.

- **(а)** Матрица M реда n има n сопствених вредности које не морају бити различите.
- **(б)** Минимални полином матрице M реда n јесте степена мањег или једнаког n.
- **(в)** Карактеристични полином матрице M реда n јесте полином степена n.
- **(г)** Минимални и карактеристични полином имају исте нуле. Уколико је степен минималног полинома матрице M мањи од n, онда постоји нула која има мању вишеструкост као нула минималног полинома него као нула карактеристичног полинома.
- **(д)** Све нуле минималног полинома матрице M истовремено су и нуле њеног карактеристичног полинома.

Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

10.

- **(а)** Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортоганални су ако и само ако је њихов скаларни производ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ једнак 0. Како је $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -1, 0) \cdot (0, 1, 1) = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1 \neq 0$, тврђење није тачно.
- **(б)** Збир вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ једнак је вектору $\vec{u} + \vec{v} = (1, -1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 0, 1) = \vec{w}$. Према томе, важи $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0}$ будући да су вектори $\vec{u} + \vec{v}$ и $\vec{w}$ колинеарни.
- **(в)** Имамо $\vec{u} + \vec{w} = (1, -1, 0) + (1, 0, 1) = (2, -1, 1) \neq (0, 1, 1) = \vec{v}$. Закључујемо да тврђење није тачно.
- **(г)** За векторски производ произвољних вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ важи особина $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$. Једнакост $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$ еквивалентна је једнакости $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, односно $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, тј. $2\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Из једнакости $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ следи да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни, односно да су им одговарајуће координате пропорционалне, што у случају конкретних вектора $\vec{u} = (1, -1, 0)$ и $\vec{v} = (0, 1, 1)$ није испуњено. Према томе, тврђење није тачно.

Тачан одговор је **(б)**.

– Тест основног знања – 23. 06. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int (3^x - 4^x)\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\,\mathrm{d}x.$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'y - x = 0$.

4. Одредити типове следећих диференцијалних једначина првог реда:

(а) $x\,y' - y = \sqrt{x^2 + y^2};$ ....

(б) $y' - y = e^x;$ ....

(в) $x\,y' + y = y^2\,\ln x;$ ....

(г) $x^2 y' = x^2 y^2 + x\,y + 1.$ ....

5. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n};$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n};$

(в) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}5^n;$ **(г)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{5\,n^2}{n-1};$

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

6. На колико начина је могуће од 20 људи формирати петочлану комисију?

7. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Одредити сопствене вредности матрице

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. Дат је вектор $\vec{v} = (12, 3, 4)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Израчунати интензитет вектора $\vec{v}$.

10. Написати једначину равни у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(-1, 2, -3)$ и нормална је на праву $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{1}$.

– Решења –

1. Интеграл у примеру **(а)** разлика је два таблична интеграла, док интеграл у примеру **(б)** решавамо методом парцијалне интеграције:

(а) $\displaystyle\int (3^x - 4^x)\,\mathrm{d}x = \int 3^x\,\mathrm{d}x - \int 4^x \mathrm{d}x = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4^x}{\ln 4} + C;$

(б) $\displaystyle\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

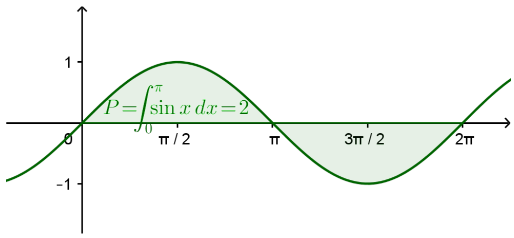
Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо:

(а) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = -1 + 1 = 0;$

(б) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)\,\mathrm{d}(2x) = -\frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{8}.$

Како је график функције $f(x) = \sin x$ централно симетричан у односу на тачку $x_0 = \pi$, закључујемо да је њен интеграл на интервалу симетричном у односу на дату тачку једнак нули. Прецизније, $\displaystyle\int_{\pi-a}^{\pi+a} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$, за свако $a \in \mathbb{R}$. Специјално за $a = \pi$ добијамо $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$



3. Диференцијална једначина $y'\,y - x = 0$ може се трансформисати у диференцијалну једначину $y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x = 0$ која раздваја променљиве. Опште решење те једначине јесте $\int y\,\mathrm{d}y - \int x\,\mathrm{d}x = \widetilde{C}$, односно фамилија хипербола $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \widetilde{C}$, тј. $y^2 = x^2 + C$ или $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$.

4.

Подсетимо се типова диференцијалних једначина првог реда:

- једначина која раздваја променљиве облика је $f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0$, где су функције f и g непрекидне на одговарајућим интервалима;
- хомогена једначина облика је $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где је функција f непрекидна на задатом интервалу;
- линеарна једначина облика је $y' + P(x)\,y = Q(x)$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу;
- Бернулијева једначина облика је $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha}$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу и $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Рикатијева једначина облика је $y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$, где су P, Q и R непрекидне функције на задатом интервалу.

(а) Једначина $x\,y' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ може се трансформисати на интервалу $(0,+\infty)$ у **хомогену диференцијалну једначину** $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$, за $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}$.

(б) Једначина $y' - y = e^x$ јесте **линеарна диференцијална једначина**. У овом случају имамо да је $P(x) = -1$ и $Q(x) = e^x$.

(в) Једначина $x\,y' + y = y^2 \ln x$ еквивалентна је **Бернулијевој диференцијалној једначини** $y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{\ln x}{x}\,y^2$. Имамо да је $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{\ln x}{x}$ и $\alpha = 2$.

(г) Једначина $x^2 y' = x^2 y^2 + x\,y + 1$ на било ком интервалу који не садржи нулу своди се на **Рикатијеву диференцијалну једначину** $y' = y^2 + \frac{1}{x}\,y + \frac{1}{x^2}$. Важи $P(x) = 1$, $Q(x) = \frac{1}{x}$ и $R(x) = \frac{1}{x^2}$.

5.

Ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Еквивалентно, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

(а) Хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ јесте дивергентан.

(б) Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ са количником $q = \frac{1}{2}$ јесте конвергентан.

(в) Геометријски ред $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} 5^n$ са количником $q = 5 > 1$ јесте дивергентан.

(г) Како је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2}{n-1} = +\infty$, закључујемо да је ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{5n^2}{n-1}$ дивергентан.

Тачан одговор је **(б)**.

6. У питању су комбинације без понављања пете класе скупа од 20 елемената. Број комбинација пете класе скупа од 20 елемената једнак је $\binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\cdot 15!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 19\cdot 3\cdot 17\cdot 16 = 15504$.

7. Одузимањем елемената прве врсте од одговарјућих елемената друге добијамо матрицу еквивалентну матрици A код које су друга и трећа врста једнаке. Следећи корак је одузимање елемената друге врсте од одговарјућих елемената треће и на крају множимо елементе прве врсте са -4 и додајемо одговарајућим елементима друге. На тај начин добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одавде закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 2$.

◇ Приметимо да су прва и друга врста матрице A линеарно независне, као и да су елементи треће врсте једнаки разлици одговарајућих елемената друге и прве врсте. Према томе, ранг матрице A једнак је 2.

Прва и друга колона линеарно су независне, елементи треће колоне једнаки су разлици елемената друге колоне помножених са 2 и прве колоне, елементи четврте колоне једнаки су разлици елемената друге колоне помножених са 3 и прве колоне помножених са 2. Одатле следи да је $\operatorname{rang} A = 2$.

8. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$. Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

9. Интензитет вектора $\vec{v} = (12, 3, 4)$ једнак је $|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 9 + 16} = 13$.

10. Вектор равни је вектор нормалан на дату раван. Вектор праве је вектор паралелан са датом правом. Вектор праве p је $\vec{u}_p = (1, 2, 1)$. Раван и права су нормалне ако су им вектори паралелни. Једначина равни α која садржи тачку $M(-1, 2, -3)$ и чији је вектор $\vec{n}_\alpha = (1, 2, 1)$ гласи $1\,(x - (-1)) + 2\,(y - 2) + 1\,(z - (-3)) = 0$, односно $x + 2y + z = 0$.

– Тест основног знања – 25. 08. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \left(\frac{\pi}{x} + \pi^x\right) \mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(e\,x)\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

3. У зависности од вредности реалног параметра ω одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' + \omega^2 y = 0$.

4. Одредити типове следећих диференцијалних једначина првог реда:

(а) $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x$; ....

(б) $y' + \sqrt{\dfrac{1+y^3}{1+x^3}} = 0$; ....

(в) $y' = \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x}$; ....

(г) $y' + (y\,\cos x)^2 + y + \sin^2 x = 0$. ....

5. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Овај ред има област конвергенције:

(а) $(-1,1)$; **(б)** $[-1,1)$; **(в)** $(-1,1]$; **(г)** $[-1,1]$;

(д) ниједан од претходних интервала.

6. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$; **(б)** $\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$; **(в)** $p \wedge \overline{p}$;

(г) $p \uparrow \overline{q}$; **(д)** $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

7. Нека застава има 11 хоризонталних пруга, које могу бити црвене, плаве или беле боје, при чему две суседне пруге не могу бити исте боје. Колико има оваквих застава?

8. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix}.$$

9. Одредити сопствене вредности матрице

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Дати су вектори $\vec{a} = (12,3,4)$ и $\vec{b} = (1,0,-3)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесу ортогонални;

(б) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесу колинеарни;

(в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{a} + 4\,\vec{b}$ јесу копланарни;

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1. Интеграл у примеру **(а)** збир је два таблична интеграла, интеграл у примеру **(б)** решавамо сменом:

(а) $\displaystyle\int\left(\frac{\pi}{x}+\pi^{x}\right)\,\mathrm{d}x=\pi\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\pi^{x}\mathrm{d}x=\pi\ln|x|+\frac{\pi^{x}}{\ln\pi}+C;$

(б) $\displaystyle\int\operatorname{tg}(e\,x)\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{rcl}t&=&e\,x\\ \mathrm{d}t&=&e\,\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\frac{1}{e}\int\operatorname{tg}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{e}\int\frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{rcl}u&=&\cos t\\ \mathrm{d}u&=&-\sin t\,\mathrm{d}t\end{array}\right\}=$ $\displaystyle-\frac{1}{e}\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{e}\ln|u|+C=-\frac{1}{e}\ln|\cos t|+C=-\frac{1}{e}\ln|\cos(e\,x)|+C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо:

(а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1;$

(б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1.$

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[0,a]$. Тада важи да је интеграл $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$. Наведено тврђење се једноставно доказује увођењем смене $x=a-t$. Заиста $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll}x=a-t & x=0\to t=a\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t & x=a\to t=0\end{array}\right\}=-\int_a^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x.$

Применом наведене формуле на интеграл из примера **(а)** добијамо интеграл из примера **(б)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

3. У питању је хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима $y''+\omega^2 y=0$. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^2+\omega^2=0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_{1,2}=\pm\omega\,i$. Разликујемо два случаја, када је $\lambda_1\neq\lambda_2$ и када је $\lambda_1=\lambda_2$, односно када је $\omega\neq 0$ и $\omega=0$. У првом случају корени карактеристичне једначине јесу различити коњуговано-комплексни бројеви, па су одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине $y_1=\sin(\omega\,x)$ и $y_2=\cos(\omega\,x)$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y=C_1\sin(\omega\,x)+C_2\cos(\omega\,x)$. У другом случају, за $\omega=0$ карактеристична једначина има један реалан корен вишеструкости два, па имамо линеарно независна партикуларна решења $y_1=1$ и $y_2=x$, односно опште решење $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1+C_2x$.

У случају $\omega\neq 0$ дата једначина назива се једначином линеарног хармонијског осцилатора кружне учестаности ω.

4.

Подсетимо се класификације диференцијалних једначина првог реда:

- једначина која раздваја променљиве облика је $f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0$, где су функције f и g непрекидне на одговарајућим интервалима;
- хомогена једначина облика је $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, где је функција f непрекидна на задатом интервалу;
- линеарна једначина облика је $y' + P(x)\,y = Q(x)$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу;
- Бернулијева једначина облика је $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha}$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу и $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Рикатијева једначина облика је $y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$, где су P, Q и R непрекидне функције на задатом интервалу.

(а) Једначина $y' - \frac{y}{x} = \ln x$ јесте **линеарна диференцијална једначина**, за $P(x) = -\frac{1}{x}$ и $Q(x) = \ln x$.

(б) Једначина $y' + \sqrt{\frac{1+y^3}{1+x^3}} = 0$ може се трансформисати на интервалу $(-1, +\infty)$ у диференцијалну једначину $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}} = 0$. Добијна једначина је **диференцијална једначина која раздваја променљиве** за $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ и $g(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}$.

(в) Одмах можемо закључити да је диференцијална једначина $y' = \operatorname{tg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$ **хомогена једначина**, у овом случају имамо да је $f\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{tg}\frac{y}{x} - \frac{y}{x}$.

(г) Једначина $y' + (y\cos x)^2 + y + \sin^2 x = 0$ може се записати као $y' = (-\cos^2 x)\,y^2 - y - \sin^2 x$, одакле закључујемо да је у питању **Рикатијева диференцијална једначина**, за $P(x) = -\cos^2 x$, $Q(x) = -1$ и $R(x) = -\sin^2 x$.

5.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се рачунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Полупречник конвергенције реда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ јесте $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. За $x = 1$ ред постаје хармонијски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ који дивергира. За $x = -1$ имамо ред $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ који према Лајбницовом критеријуму конвергира. Област конвергенције полазног степеног реда јесте полуотворени интервал $[-1, 1)$.

Тачан одговор је **(б)**.

6.

Шеферова (ни) функција $\uparrow$ дефинисана је помоћу Кејлијеве таблице $\begin{array}{c|cc} \uparrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$.
Шеферова функција је негација конјункције, важи $p \uparrow q = \overline{p \wedge q}$.
Исказна формула $A \Leftrightarrow B$ јесте таутологија ако и само ако су исказне формуле A и B једнаке. Ако је исказна формула $A \Leftrightarrow B$ таутологија, онда је и исказна формула $A \Rightarrow B$ таутологија.

(а) На основу теореме о инволуцији у Буловој алгебри за сваки елемент p важи да је $\overline{\overline{p}} = p$, одакле следи да је исказна формула $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ таутологија, закон двојне негације.

(б) Како је исказна формула $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ таутологија, закључујемо да је и исказна формула $\overline{\overline{p}} \Rightarrow p$ таутологија.

(в) У Буловој алгебри за сваки елемент p важи да је $p \wedge \overline{p} = 0$ (постојања комплемента). Одавде закључујемо да је дата формула контрадикција, негација закона противречности.

(г) На основу таблице истинитости

p	q	$\overline{q}$	$p \uparrow \overline{q}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1

закључујемо да исказна формула $p \uparrow \overline{q}$ није таутологија.

(д) У Буловој алгебри важи Де Морганов закон $\overline{p \vee q} = (\overline{p} \wedge \overline{q})$, према томе исказна формула $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$ јесте таутологија.

Тачни одговори су **(а)**, **(б)** и **(д)**.

7. Прва пруга може бити било које од понуђене три боје. Пошто смо изабрали боју прве пруге, избор за боју друге пруге сужава нам се на преостале две боје. Свака наредна пруга може бити обојена у две боје. Према принципу производа број различитих застава једнак је $3 \cdot 2^{10} = 3072$.

8. Прво ћемо помножити елементе треће врсте са -2 и додати одговарајућим елементима четврте. Затим ћемо помножити елементе прве врсте са -4, односно са -5, и додати елементима друге, односно треће врсте. На крају ћемо одузети елементе друге врсте од елемената треће

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одавде закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 2$.

9. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1$. Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$.

Приметимо да сопствене вредности реалне матрице могу бити (коњуговани) комплексни бројеви.

10.

(а) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортоганални су ако и само ако је њихов скаларни производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ једнак 0. Имамо $\vec{a} \cdot \vec{b} = (12, 3, 4) \cdot (1, 0, -3) = 12 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) = 0$. Тврђење је тачно.

(б) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни су ако и само ако постоји реалан број t такав да важи $\vec{a} = t\vec{b}$, односно ако и само ако су им одговарајуће координате пропорционалне. Како је $1 : 12 \neq 0 : 3$, закључујемо да тврђење није тачно.

(в) Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни су ако и само ако постоје реални бројеви t и s такви да је $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$. Како је $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$, закључујемо да је тврђење тачно.

Тачни су одговори **(а)** и **(в)**.

– Тест основног знања – 19. 09. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \sqrt{3-4\,x}\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\sin(2x)\,\mathrm{d}x.$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''' + y'' + y' + y = 0$.

4. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{6\sqrt{n}};$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\cos n;$ **(в)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{4\,n^3};$

(г) ниједан од претходних редова није конвергентан.

5. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n.$

6. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које нису ни таутологије ни контрадикције:

(а) $p \Rightarrow p;$ **(б)** $\overline{p} \Rightarrow p;$ **(в)** $p \wedge p;$

(г) $p \wedge \overline{p};$ **(д)** $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p;$

(ђ) ниједна од претходних исказних формула.

7. На математичкој конференцији сваки од учесника руковао се једанпут са свим осталим учесницима. Ако је укупно било 45 руковања, колико је било учесника на тој конференцији?

8. За које вредности реалних параметара α и β систем линеарних алгебарских једначина

$$\alpha x + y = 2$$
$$x + y = \beta$$

нема решење?

9. За које је вредности реалног параметра a ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a \end{bmatrix}$ најмањи?

10. Одредити вредности реалног параметра b за које је једна сопствена вредност матрице

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 17 & 4 \\ 0 & 5 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

једнака нули.

– Решења –

1. Увођењем смена дати интеграли постају таблични:

(а) $\displaystyle\int\sqrt{3-4\,x}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=3-4\,x\\ \mathrm{d}t=-4\,\mathrm{d}x\end{array}\right\}=-\frac{1}{4}\int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{6}(3-4x)^{\frac{3}{2}}+C;$

(б) $\displaystyle\int\cos^2 x\,\sin(2x)\,\mathrm{d}x=2\int\cos^3 x\,\sin x\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=\cos x\\ \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x\end{array}\right\}=-2\int t^3\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}t^4+C=$ $\displaystyle-\frac{1}{2}\cos^4 x+C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

Из адитивности одређеног интеграла следи $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$ Даље, увођењем смене $t=-x$ добијамо

$$\int_{-a}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{cc}x=-t, & x=-a\to t=a\\ \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t, & x=0\to t=0\end{array}\right\}=-\int_{a}^{0}f(-t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{a}f(-t)\,\mathrm{d}t.$$

Како је функција f непарна, претходни интеграл једнак је $\displaystyle-\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$. Заменом у полазну једнакост добијамо $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

(а) Функција $f(x)=\mathrm{arctg}(2x)$ непрекидна је и непарна на сегменту $[-2,2]$. Према томе, важи

$$\int_{-2}^{2}\mathrm{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x=0.$$

(б) Применом особине линеарности одређеног интеграла, дати интеграл је збир два таблична интеграла. Њутн–Лајбницова формула нам даје

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2+x}{x^3}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-1+4-1+2=4.$$

3. Дата једначина $y'''+y''+y'+y=0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=\lambda^2(\lambda+1)+\lambda+1=(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0$ има два проста конјуговано-комплексна корена $\lambda_{1,2}=\pm i$ и један реалан $\lambda_3=-1$. Партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$ и $y_3=e^{-x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3e^{-x}$.

4.

Ако нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, тј. потребан услов да ред конвергира јесте да његов општи члан тежи нули када $n \to +\infty$. Напоменимо да дати услов није и довољан. У примеру **(а)** општи члан тежи нули када $n \to +\infty$ али је одговарајући ред дивергентан (види даље). С друге стране, ако $\lim_{n\to+\infty} a_n$
не постоји или је различит од нуле, онда ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Интегрални критеријум. Нека је f непрекидна, позитивна и нерастућа функција на $[k, +\infty)$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада су $\int_k^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ и $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$ еквиконвергентни.

Користећи интегрални критеријум може се показати да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha$ конвергира ако и само ако за реални параметар α важи $\alpha < -1$. Заиста, ако је $\alpha \geq 0$ општи члан не тежи нули када $n \to +\infty$, па ред дивергира. За $\alpha < 0$ применићемо интегрални критеријум. Функција $f(x) = x^\alpha$ непрекидна је, позитивна и нерастућа на $[1, +\infty)$. Даље важи $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1; \\ \ln x, & \alpha = -1. \end{cases}$ Према томе, имамо $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1}, & \alpha < -1; \\ +\infty, & -1 \leq \alpha < 0. \end{cases}$

(а) Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{6\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ јесте дивергентан, према интегралном критеријуму. До истог закључка можемо доћи и користећи први поредбени критеријум. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи да је $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, па из дивергенције хармонијског реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ следи и дивергенција датог реда.

(б) Како $\lim_{n\to+\infty} \cos n$ не постоји, закључујемо да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos n$ дивергира.

(в) Ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{6\,n^3} = \frac{2}{3}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ јесте конвергентан, према интегралном критеријуму.

Тачан одговор је **(в)**.

5.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се рачунати као $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Полупречник конвергенције реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$ једнак је

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1}\right)^{2n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^2 \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{2n^2+3n+1}\right)^{2n^2+3n+1}\right)^{\frac{2n-1}{2n^2+3n+1}} = 4 \cdot e^0 = 4. \end{aligned}$$

6.

(а) Исказна формула $p \Rightarrow p$ јесте таутологија.

(б) Исказна формула $\overline{p} \Rightarrow p$ једнака је p. Према томе, није ни таутологија ни контрадикција.

(в) Исказна формула $p \wedge p$ једнака је p. Према томе, није ни таутологија ни контрадикција.

(г) Исказна формула $p \wedge \overline{p}$ јесте контрадикција.

(д) Исказна формула $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ једнака је p. Према томе, није ни таутологија ни контрадикција.

Тачни одговори су **(б)**, **(в)** и **(д)**.

7. Нека је на математичкој конференцији било n учесника. Сваки учесник се руковао са осталих $n-1$ учесника. Ако се учесник A руковао са учесником B, онда се и учесник B руковао са учесником A. Према томе, укупан број руковања једнак је $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Имамо да је $\dfrac{n(n-1)}{2} = 45$, односно $n^2 - n - 90 = 0$. Решења те квадратне једначине јесу $n = 10$ или $n = -9$. Како једначину решавамо у скупу $\mathbb{N}$, закључујемо да је број учесника на конференцији био 10.

♣ Упоредити задатак са десетим задатком са теста 13. 02. 2011.

8. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем нема решење ако је ранг матрице система мањи од ранга проширене матрице система. Применимо низ елементарних трансформација на проширену матрицу система

$$\left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \beta \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ \alpha & 1 & 2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1-\alpha & 2-\alpha\beta \end{array}\right].$$

Ранг матрице система једнак је 1 ако је $\alpha = 1$, односно 2 ако је $\alpha \neq 1$. Ранг проширене матрице система једнак је 1 ако је $\alpha = 1$ и $\beta = 2$; у осталим случајевима ранг проширене матрице једнак је 2. Закључујемо да систем није сагласан, тј. нема решење ако је $\alpha = 1$ и $\beta \neq 2$.

9. За матрицу A важи $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & a-a^2 \end{bmatrix}$. За $a - a^2 \neq 0$, тј. за $a \neq 1$ и $a \neq 0$ ранг матрице A једнак је 2. Ранг матрице је најмањи и једнак је 1 ако је $a - a^2 = 0$, односно $a = 1$ или $a = 0$.

♢ Илуструјмо на овом примеру како се рачуна ранг матрице по дефиницији. Ранг матрице дефинишемо као ред њене највеће регуларне подматрице. У случају матрице A имамо да је $\det A = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = a - a^2$. За $a \neq 0$ и $a \neq 1$ важи да је $\det A \neq 0$, па је матрица A регуларна и њен ранг једнак је 2. За $a = 0$ или $a = 1$ матрица A је сингуларна, али постоји регуларна подматрица реда 1 (добијена уклањањем друге врсте и колоне), па закључујемо да је у овом случају ранг најмањи и једнак 1.

10. Сопствене вредности матрице B јесу нуле њеног карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I})$. Вредност полинома $\varphi_B(\lambda)$ у тачки $\lambda = 0$ једнака је слободном члану полинома $\varphi_B(\lambda)$, односно $\varphi_B(0) = \det B$. Према Вијетовим формулама, производ сопствених вредности матрице B једнак је $(-1)^3 \dfrac{\det B}{(-1)^3} = \det B$. Матрица B ће имати једну сопствену вредност једнаку нули ако је детерминанта матрице B једнака нули. Лапласовим развојем по првој колони добијамо

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 17 & 4 \\ 0 & 5 & b \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2\,b = 20 - 2\,b = 0.$$

Према томе, нула ће бити сопствена вредност матрице B ако је $b = 10$.

♢ Урадити задатак одређивањем карактеристичног полинома матрице B.

– Тест основног знања – 13. 10. 2007.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int x\, e^{x^2} \mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \frac{6\,x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x.$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-1}^{0} |\,3\,x\,|\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{x+1}\,\mathrm{d}x.$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0$.

4. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n};$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6+6};$

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n};$

(г) ниједан од претходних редова није конвергентан.

5. Колико различитих природних шестоцифрених бројева може да се напише од цифара $1, 2, 2, 3, 3, 3$?

6. Ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$ јесте:

(а) 0; **(б)** 1; **(в)** 2; **(г)** 3;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x - \ \ y + 3z &= 4 \\ -3x + 3y - 9z &= 11 \end{aligned}$$

(а) има јединствено решење;

(б) има два решења;

(в) има бесконачно решења;

(г) нема решења;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Одредити сопствене векторе матрице

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори векторског простора $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};$ **(б)** $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a};$

(в) $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0;$ **(г)** $\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0};$

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Дате су раван $\alpha : 6x + 4z - 12 = 0$ и права $p : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+1}{2}$ у простору $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $p\,||\,\alpha;$

(б) $p \subset \alpha;$

(в) $p \perp \alpha;$

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1. Увођењем смена добијамо табличне интеграле:

(а) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2\,x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$

(б) $\displaystyle\int \frac{6\,x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t = x^6+5 \\ \mathrm{d}t = 6\,x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln(x^6+5) + C.$

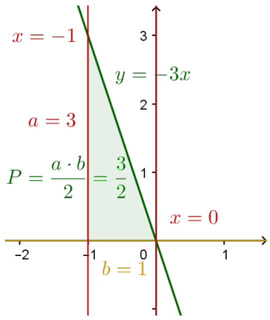
2.

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо:

(а) $\displaystyle\int_{-1}^0 |3\,x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -3\,x\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\,x^2\Big|_{-1}^0 = \frac{3}{2};$

(б) $\displaystyle\int_0^1 e^{x+1}\,\mathrm{d}x = e^{x+1}\Big|_0^1 = e^2 - e.$



♢ Пример **(а)** можемо решити и графички. Вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_{-1}^0 |3\,x|\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине дела равни који ограничавају праве $x=-1$, $y=0$ и $y=-3x$. У питању је правоугли троугао чије су катете дужина 1 и 3, па је величина његове површине једнака $\dfrac{3}{2}$.

3.

Хомогена линеарна диференцијална једначина n-тог реда са константним коефицијентима јесте диференцијална једначина облика $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$, где су a_1, a_2, ..., a_n константе. Потражимо решење дате једначине у облику $y(x)=e^{\lambda x}$. Како је $y^{(k)}(x)=\lambda^k e^{\lambda x}$, заменом у дату једначину добијамо алгебарску једначину $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$, коју називамо карактеристичном једначином, која је придружена полазној диференцијалној једначини. Сваком корену карактеристичне једначине одговара једно партикуларно решење диференцијалне једначине. Тако добијена партикуларна решења чине скуп линеарно независних функција (фундаментални скуп решења).

- Ако је λ прост реалан корен карактеристичне једначине, онда је одговарајуће партикуларно решење диференцијалне једначине $y_p=e^{\lambda x}$.
- Ако је λ реалан корен реда $k, k>1$, карактеристичне једначине, онда су одговарајућа партикуларна решење диференцијалне једначине $y_{p_1}=e^{\lambda x}$, $y_{p_2}=xe^{\lambda x}$, ..., $y_{p_k}=x^{k-1}e^{\lambda x}$.
- Ако је $\lambda=\alpha+i\beta$ прост комплексан корен карактеристичне једначине, онда је и $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ прост комплексан корен карактеристичне једначине, а одговарајућа партикуларна решења диференцијалне једначине јесу $y_{p_1}=e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_{p_2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Ако је $\lambda=\alpha+i\beta$ комплексан корен реда $k,k>1$, карактеристичне једначине, онда је и $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ комплексан корен реда k карактеристичне једначине, а одговарајућа партикуларна решења диференцијалне једначине јесу $y_{p_1}=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{p_2}=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,y_{p_k}=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{p_{k+1}}=e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{p_{k+2}}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,y_{p_{2k}}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Ако су $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линеарно независна решења хомогене диференцијалне једначине, онда је $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ њено опште решење, где су $C_1, C_2, \ldots, C_n$ произвољне константе.

Једначина $y'' + 6\,y' + 9\,y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^2 + 6\,\lambda + 9 = 0$. Карактеристична једначина има један реални корен вишеструкости два, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = xe^{-3x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

4.

Ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, тј. потребан услов да ред конвергира јесте да његов општи члан тежи нули када $n \to +\infty$. Напоменимо да дати услов није и довољан. У примеру **(а)** општи члан тежи нули када $n \to +\infty$ али је одговарајући ред дивергентан (види даље). С друге стране, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или је различит од нуле, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.
Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

(а) Приметимо да је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ хармонијски ред. Дати ред дивергира.

(б) Нумерички редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6+6}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ јесу еквиконвергентни, према другом поредбеном критеријуму. Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ конвергира па конвергира и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6+6}$.

(в) Како је $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = e^3 \neq 0$, закључујемо да ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ дивергира.

Тачан одговор је **(б)**.

5. У питању су пермутације са понављањем скупа од 6 елемената, код којих се један елемент понавља једанпут, други два, а трећи три пута. Број различитих шестоцифрених бројева састављених од цифара $1, 2, 2, 3, 3, 3$ јесте $\frac{6!}{2!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60$.

♢ Задатак можемо решити користећи комбинације без понављања. Од шест позиција у запису одговарајућег броја на три уписујемо цифру 3. Број начина на који то можемо урадити једнак је броју комбинација треће класе скупа од шест елемената, тј. једнак је $\binom{6}{3}$. Затим, од преостале три позиције бирамо две, на које ћемо уписати цифру 2, на $\binom{3}{2}$ начина. Цифру 1 уписујемо на преосталу позицију. Према принципу производа број различитих шестоцифрених бројева састављених од цифара $1, 2, 2, 3, 3, 3$ јесте $\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{2} = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!} = \frac{6!}{3!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{2} = 60$.

6. Приметимо да су елементи прве врсте матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$ пропорционални елементима друге врсте, односно да су елементи друге врсте једнаки елементма прве врсте помноженим са 12. Према томе, ранг матрице A једнак је 1. Слично, прва и трећа колона линеарно су зависне, елементи треће колоне једнаки су елементима прве колоне помноженим са 2, док су елементи друге колоне једнаки нули. Одакле опет закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 1$.
Тачан одговор је **(б)**.

7. Систем линеарних алгебарских једначина

$$x - \ \ y + 3z = 4$$
$$-3x + 3y - 9z = 11$$

нема решење. Када помножимо прву једначину са 3 и додамо је другој добијамо

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 23,$$

што није тачно ни за једну уређену тројку (x, y, z) реалних бројева.
Тачан одговор је **(г)**.

8. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda - 6)(\lambda - 2)$. Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 2$.

9.

(а) За произвољне векторе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из $\mathbb{R}^3$ важи

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = (b_1, b_2, b_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \vec{b} \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Скаларни производ је комутативан.

(б) За произвољне векторе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из $\mathbb{R}^3$ важи

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где је $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Ако у детерминанти две врсте замене места, детерминанта мења знак. Према томе, за произвољна два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ важи $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \neq \vec{a} \times \vec{b}$. Једнакост $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ важи само ако је $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{a} \times \vec{b})$, односно ако је $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, тј. ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни.

(в) Имамо да је $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, тј. ако и само ако је $\vec{a} = (0, 0, 0)$. Према томе, тврђење не важи за произвољан вектор $\vec{a}$.

(г) Из наведене дефиниције векторског производа јасно се види да је $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$, јер је у питању детерминанта у којој су две врсте једнаке.

Тачни одговори су **(а)** и **(г)**.

10. Вектор нормале $\vec{n}_\alpha = (6, 0, 4)$ равни α нормалан је на сваки вектор у равни. Вектор $\vec{u}_p = (3, 0, 2)$ праве p паралелан је са сваким вектором који припада правој. Права и раван паралелне су или права припада равни ако је $\vec{n}_\alpha \perp \vec{u}_p$. Два вектора су ортогонална уколико је њихов скаларни производ једнак нули, што у овом примеру није случај, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_p = (6, 0, 4) \cdot (3, 0, 2) = 6 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 18 + 8 = 26 \neq 0$. Права p је ортогонална на раван α уколико су вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{u}_p$ колинеарни. Важи да је $\vec{n}_\alpha = (6, 0, 4) = 2\,(3, 0, 2) = 2\,\vec{u}_p$, тј. вектори $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{u}_p$ јесу колинеарни.

Тачан одговор је **(в)**.

– Тест основног знања – 26. 01. 2008.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int 3^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^1 x\,7^{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''' - y = 0$.

4. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

5. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

6. Одредити који је од следећих бројева $\binom{2008}{1}, \binom{2008}{2}, \dots, \binom{2008}{2008}$ највећи.

7. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које нису ни таутологије ни контрадикције:

(а) $p \vee \overline{p}$; **(б)** $\overline{p} \Rightarrow p$;

(в) $p \Rightarrow \overline{p}$; **(г)** $(p \vee \overline{p}) \Rightarrow p$;

(д) $p \Rightarrow (p \vee \overline{p})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није ни таутологија ни контрадикција.

8. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Нека је A реална квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) карактеристични полином матрице A увек има n различитих нула;

(б) минимални полином матрице A увек има n различитих нула;

(в) све нуле минималног полинома матрице A истовремено су и нуле њеног карактеристичног полинома;

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Дати су вектори $\vec{a} = (1,2,0)$, $\vec{b} = (0,-2,2)$ и $\vec{c} = (1,1,1)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити мешовити производ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$.

– Решења –

1. Интеграле сводимо на табличне увођењем смена:

$$\textbf{(a)}\quad \int 3^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t=\sin x \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int 3^t\,\mathrm{d}t = \frac{3^t}{\ln 3}+C = \frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C;$$

$$\textbf{(б)}\quad \int \cos\sqrt{x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ \mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} = 2\int \cos t\,\mathrm{d}t = 2\,\sin t + C = 2\,\sin\sqrt{x}+C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Пре него што се упустимо у рачун, подсетимо се услова за увођење смене у одређеном интегралу.

> У одређеном интегралу $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ можемо увести смену $t=\varphi(x)$ уколико су испуњени следећи услови:
> - φ је строго монотона функција на сегменту $[a,b]$;
> - $\psi=\varphi^{-1}$ има непрекидан први извод на интервалу $(\varphi(a),\varphi(b))$;
> - f је непрекидна функција на сегменту $[\varphi(a),\varphi(b)]$;
>
> и тада важи да је $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Интеграл у примеру **(а)** рачунамо увођењем смене $t=\varphi_1(x)=7^{x^2}$ док у примеру **(б)** уводимо смену $t=\varphi_2(x)=\dfrac{1}{\ln x}$. Функције φ_1 и φ_2 јесу строго монотоне функције на понуђеним интервалима. Функција φ_1 је растућа на сегменту $[0,1]$, а φ_2 опадајућа на сегменту $[e,e^2]$. Њихове инверзне функције $\psi_1(x)=\sqrt{\log_7 x}$ и $\psi_2(x)=e^{\frac{1}{x}}$ имају непрекидне прве изводе $\psi_1'(x)=\dfrac{1}{2\,x\ln 7\sqrt{\log_7 x}}$ и $\psi_2'(x)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ на интервалима $(1,7)$ и $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$. Према томе, важи:

$$\textbf{(a)}\quad \int_0^1 x\,7^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=7^{x^2}, & x=0\Rightarrow t=1 \\ \mathrm{d}t=2\,x\,7^{x^2}\ln 7\,\mathrm{d}x, & x=1\Rightarrow t=7 \end{array}\right\} = \frac{1}{2\ln 7}\int_1^7 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\ln 7}\,t\Big|_1^7 = \frac{3}{\ln 7};$$

$$\textbf{(б)}\quad \int_e^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \left\{\begin{array}{ll} t=\dfrac{1}{\ln x}, & x=e\Rightarrow t=1 \\ \mathrm{d}t=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}, & x=e^2\Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{array}\right\} = -\int_1^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}t = t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. Једначина $y'''-y=0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^3-1=0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_1=1$ и $\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, један реалан и два конјуговано-комплексна, сви прости. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1=e^x$, $y_2=e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$ и $y_3=e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_3e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

4.

Ако нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Еквивалентно, ако $\lim_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.
Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.
Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

(а) Редови $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ јесу еквиконвергентни. Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ је конвергентан, јер је $\frac{3}{2} > 1$, па је према другом поредбеном критеријуму и ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ конвергентан.

(б) Геометријски ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ са количником $q = \frac{2}{3}$ јесте конвергентан.

(в) Како је $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$, закључујемо да је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n}$ дивергентан.

(г) Као у претходном примеру, $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ имплицира да је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n$ дивергентан.

Тачни одговори су **(а)** и **(б)**.

5.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се рачунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Полупречник конвергенције реда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ једнак је $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} \frac{2^{n+1}(n+2)}{n+1} = 2$.

6.

За биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ важи $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$. Подсетимо се $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ и $0! = 1$. Биномни коефицијенти $\binom{n}{k}$ јесу коефицијенти у развоју бинома $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$. Важи да је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$. Директно из дефиниције следи рекурентна веза за биномне коефицијенте $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Користећи дату релацију, можемо формирати Паскалов троугао:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Паскалов троугао нам омогућава да закључимо да је за фиксирано $n \in \mathbb{N}$ највећи међу биномним коефицијентима $\binom{n}{k}$, $0 \le k \le n$, онај код кога је $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\Big($највећи природан број мањи од или једнак $\frac{n}{2}\Big)$.

Највећи међу понуђеним бројевима је $\binom{2008}{1004}$.

7. У овом задатку користићемо методу дискусије по слову p за испитивање које од понуђених исказних формула нису ни таутологије ни контрадикције.

(а) Исказна формула $p \vee \overline{p}$ јесте таутологија. Дата таутологија назива се закон искључења трећег.

(б) За $p = 0$ вредност израза $\overline{p} \Rightarrow p$ јесте 0, а за $p = 1$ добијамо вредност 1. Према томе, исказна формула $\overline{p} \Rightarrow p$ једнака је p те није ни таутологија ни контрадикција.

(в) У случају исказне формуле $p \Rightarrow \overline{p}$ за $p = 0$ добијамо 1, док је за $p = 1$ вредност израза 0. Дакле, исказна формула $p \Rightarrow \overline{p}$ једнака је $\overline{p}$. Закључујемо да дата исказна формула није ни таутологија ни контрадикција.

(г) Како је исказна формула $p \vee \overline{p}$ таутологија, за $p = 0$ имамо да је вредност израза $(p \vee \overline{p}) \Rightarrow p$ једнака 0, а за $p = 1$ добијамо 1. Односно, дата исказна формула једнака је p. Према томе, израз није ни таутологија ни контрадикција.

(д) Импликација $p \Rightarrow (p \vee \overline{p})$ јесте таутологија, јер је потребан услов, $p \vee \overline{p}$, таутологија.

Тачни одговори су **(б)**, **(в)** и **(г)**.

8. На примеру матрице A илустроваћемо како се ранг матрице одређује по дефиницији. Ранг матрице једнак је реду њене највеће регуларне подматрице. Уколико је матрица A регуларна, њен ранг ће бити једнак 3. Рачунамо детерминанту матрице A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0.$$

Како је $\det A = 0$, закључујемо да је матрица A сингуларна. Прелазимо на њене подматрице реда 2. Размотримо вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Подматрица матрице A добијена уклањањем треће врсте и треће колоне јесте регуларна, па је ранг матрице A једнак 2.

$\diamondsuit$ Приказаћемо још један поступак за одређивање ранга матрице A. Пре тога ћемо дати кратак преглед потребне теорије.

> Нека је A реална матрица типа $m \times n$. Ако врсте (колоне) матрице A посматрамо као векторе n-димензионалног векторског простора $\mathbb{R}^n$ (m-димензионалног векторског простора $\mathbb{R}^m$) над пољем $\mathbb{R}$, онда је ранг матрице A једнак броју линеарно независних вектора из посматраног скупа вектора.
>
> Нека је V произвољан векторски простор над пољем $\mathbb{F}$. За векторе $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ из V кажемо да су линеарно зависни ако постоје скалари $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ из поља $\mathbb{F}$ који нису сви једнаки 0, такви да важи $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$. За векторе који нису линеарно зависни, кажемо да су линеарно независни. Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ из V јесу линеарно независни ако из једнакости $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$ следи да је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Нека је $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (0,-2,2)$ и $\vec{v}_3 = (1,1,1)$. Испитајмо да ли су вектори $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_3$ линеарно зависни, и уколико јесу нађимо облик те зависности. Једнакост $\alpha_1\,\vec{v}_1+\alpha_2\,\vec{v}_2+\alpha_3\,\vec{v}_3 = \vec{0}$ еквивалентна је хомогеном систему линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad + \alpha_3 &= 0\\ 2\,\alpha_1 - 2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\ 2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Дати систем је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad + \alpha_3 &= 0\\ -2\,\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\\ 2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

односно систему

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\quad + \alpha_3 &= 0\\ 2\,\alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из система добијамо да је $\alpha_1 = -\alpha_3 = 2\,\alpha_2$. Како систем има нетривијално решење, дати вектори су линеарно зависни. Нпр. за $\alpha_2 = 1$ добијам да је $2\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\,\vec{v}_3 = \vec{0}$, тј. да је вектор $\vec{v}_2$ линеарна комбинација линеарно независних вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_3$, одакле закључујемо да је ранг матрице A једнак 2.

Приметимо да су елементи друге колоне матрице A једнаки разлици одговарајућих елемената прве колоне помножених са 2 и треће колоне. Прва и трећа колона јесу линеарно независне. Ранг матрице A једнак је 2.

До истог решења долазимо и претходном методом примењеном на колоне $\vec{k}_1 = (1,0,1)$, $\vec{k}_2 = (2,-2,1)$ и $\vec{k}_3 = (0,2,1)$. Изједначавамо линеарну комбинацију вектора $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}_3$ са нула-вектором, $\beta_1\,\vec{k}_1 + \beta_2\,\vec{k}_2 + \beta_3\,\vec{k}_3 = \vec{0}$. Затим дату једначину расписујемо као систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\,\beta_2 \qquad\quad &= 0\\ -\,2\,\beta_2 + 2\,\beta_3 &= 0\\ \beta_1 + \quad \beta_2 + \quad \beta_3 &= 0, \end{aligned}$$

Дати систем је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\,\beta_2 \qquad\quad &= 0\\ -\,2\,\beta_2 + 2\,\beta_3 &= 0\\ -\quad \beta_2 + \quad \beta_3 &= 0, \end{aligned}$$

односно систему

$$\begin{aligned} \beta_1 + 2\,\beta_2 \qquad &= 0\\ -\quad \beta_2 + \beta_3 &= 0, \end{aligned}$$

који има нетривијално решење $\beta_1 = -2\,\beta_2$ и $\beta_3 = \beta_2$. За $\beta_2 = 1$ линеарна комбинација вектора $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ и $\vec{k}_3$ гласи $-2\,\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = \vec{0}$. Вектор $\vec{k}_2$ је линеарна комбинација линеарно независних вектора $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_3$, одакле закључујемо да је ранг матрице A једнак 2.

9.

Карактеристични полином реалне квадратне матрице A реда n јесте полином $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$. Дати полином има n, не обавезно, различитих нула.

Минимални полином $\mu_A(\lambda)$ матрице A је монични полином најмањег степена који анулира матрицу, односно то јесте монични полином најмањег степена за који важи $\mu_A(A) = \mathbf{0}$. Минимални полином матрице A дели карактеристични полином. Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, различите нуле карактеристичног полинома. Тада су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, такође нуле истог или мањег реда минималног полинома.

Размотримо два примера.

Карактеристични полином јединичне матрице I реда n једнак је $\varphi_{\mathrm{I}}(\lambda) = \det(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{I}) = (1-\lambda)^n$. Тај полином има једну нулу $\lambda = 1$ вишеструкости n. Минимални полином јединичне матрице I реда n једнак је $\mu_{\mathrm{I}}(\lambda) = \lambda - 1$. Овај полином има само једну просту нулу.

Матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ има минимални полином једнак карактеристичном и то је полином $\varphi_A(\lambda) = \mu_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (2-\lambda)^2$, који има један корен $\lambda = 2$ вишеструкости 2. Матрице датог облика називају се Жорданови блокови.

Тачан одговор је **(в)**.

10.

Подсетимо се, мешовити производ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ из $\mathbb{R}^3$ дефинишемо као $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Може се показати да за мешовити производ важи $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

У овом конкретном случају имамо

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0.$$

Како је мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнак нули, можемо закључити да су дати вектори копланарни.

♣ Приметимо да смо у **8**. задатку доказали да су вектори $(1, 2, 0)$, $(0, -2, 2)$ и $(1, 1, 1)$ линеарно зависни, одакле директно следи да је њихов мешовити производ једнак 0.

– Тест основног знања – 20. 02. 2008.

1. Одредити интеграле:

(а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\,x^2+1}$;

(б) $\displaystyle\int_{-3}^{1} |x+2|\,\mathrm{d}x$.

2. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''+y'-6\,y=0$.

3. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2\,n^2-3}$; (б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\,n^2+3}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n^4}$; (г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

4. Нека је дат скуп S који има 16 елемената.

(а) Колико има варијација без понављања четврте класе скупа S?

(б) Колико има комбинација са понављањем шесте класе скупа S?

5. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су контрадикције:

(а) $p \Rightarrow \overline{p}$; (б) $\overline{p} \vee p$; (в) $p \wedge \overline{p}$;

(г) $\overline{p} \Rightarrow p$; (д) $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није контрадикција.

6. Одредити ранг матрице

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Дат је систем линеарних алгебарских једначина

$$2\,x-3\,y=0$$
$$-6\,x+9\,y=1.$$

Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) систем има јединствено решење;

(б) систем нема решење;

(в) систем има бесконачно решења;

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Одредити сопствене вредности матрице

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Дати су вектори $\vec{a}=(1,2,-1)$ и $\vec{b}=(0,3,0)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити:

(а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

(б) $\vec{a}\times\vec{b}$.

10. Одредити једначину праве у простору $\mathbb{R}^3$ која је нормална на раван $\alpha : y=0$ и садржи тачку $M(0,1,2)$.

– Решења –

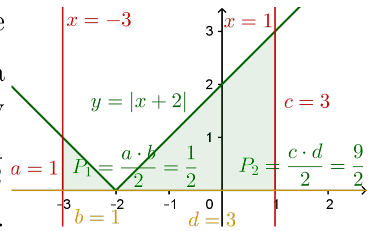
1. Дати интеграли једноставно се своде на табличне.

(а) Имамо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\,x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{3}\,x)}{(\sqrt{3}\,x)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,x + C.$
Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

(б) Важи $\displaystyle\int_{-3}^{1}|x+2|\,\mathrm{d}x = -\int_{-3}^{-2}(x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{1}(x+2)\,\mathrm{d}x = -\frac{(x+2)^2}{2}\bigg|_{-3}^{-2} + \frac{(x+2)^2}{2}\bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}+\frac{9}{2} = 5.$

Пример **(б)** можемо решити и графички.

Вредност интеграла $\displaystyle\int_{-3}^{1}|x+2|\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине дела равни који ограничавају праве $x=-3$, $x=1$, $y=0$ и крива $y=|x+2|$. У питању су два једнакокрака правоугла троугла чије су катете дужина 1 и 3, па је величина њихових површина једнака $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{9}{2}$. Вредност полазног одређеног интеграла једнака је $\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}=5$.



2. Једначина $y''+y'-6\,y=0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^2+\lambda-6=0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_1=-3$ и $\lambda_2=2$, реални и различити бројеви. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1=e^{-3\,x}$ и $y_2=e^{2\,x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, односно $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-3\,x}+C_2e^{2\,x}$.

3.

> Ако нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ конвергира, онда је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$. Еквивалентно, ако $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ дивергира.
>
> Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha>1$.
>
> Геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}q^n$, $q\in\mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q|<1$.

(а) Ред $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2\,n^2-3}$ је ред са позитивним члановима. Важи да је $\dfrac{n}{2\,n^2-3}\sim\dfrac{1}{2\,n}$, $n\to+\infty$.
Према другом поредбеном критеријуму редови $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{2\,n^2-3}$ и $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ јесу еквиконвергентни. Будући да је хармонијски ред дивергентан, и полазни ред је дивергентан.

(б) Редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\,n^2+3}$ и $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ јесу еквиконвергентни према другом поредбеном критеријуму. Како је $\dfrac{3}{2}>1$, дати редови су конвергентни.

(в) Из чињенице да је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n}{n^4}=+\infty$ следи да је нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n^4}$ дивергентан.

(г) Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^n}$ јесте геометријски ред са количником $q=-\dfrac{1}{e}$. Како је $|q|<1$, дати ред је конвергентан.

Тачни одговори су **(б)** и **(г)**.

4.

(а) Варијација без понављања четврте класе скупа S свака је уређена четворка различитих елемената тог скупа. Број варијација без понављања четврте класе скупа који има 16 елемената једнак је (према принципу производа) $16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 43680$.

(б) Комбинација са понављањем шесте класе скупа S сваки је мултискуп састављен од шест, не обавезно различитих, елемената из датог скупа. Број комбинација са понављањем шесте класе скупа који има 16 елемената једнак је $\binom{16+6-1}{6} = \binom{21}{6} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 21 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 8 = 54264$.

5.

(а) Исказна формула $p \Rightarrow \overline{p}$ једнака је исказној формули $\overline{p}$, па према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(б) Исказна формула $\overline{p} \vee p$ јесте таутологија, закон искључења трећег.

(в) Исказна формула $p \wedge \overline{p}$ јесте контрадикција, негација закона искључења трећег.

(г) Исказна формула $\overline{p} \Rightarrow p$ једнака је исказној формули p, према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(д) Како је исказна формула $\overline{p} \vee p$ таутологија, а $p \wedge \overline{p}$ контрадикција, закључујемо да је импликација $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$ контрадикција.

Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

6. Множењем елемената прве врсте са -4, респективно са 2, и додавањем одговарајућим елементима друге, односно треће врсте, добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

одакле закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 2$.

$\diamondsuit$ Приметимо да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће врсте, и да нису пропорционални елементима друге врсте. Према томе, ранг матрице A једнак је 2.
С друге стране, прва и друга колона јесу линеарно независне, елементи им нису пропорционални. Како је елемент $a_{23} = 0$, елементе прве колоне ћемо помножити са $-\frac{3}{2}$ и додати их одговарајућим елементима друге колоне да бисмо добили колону $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$ која је пропорционална трећој колони. Трећу колону можемо добити као линеарну комбинацију прве и друге колоне, односно за елементе треће колоне важи да су једнаки разлици одговарајућих елемената прве колоне помножених са 2 и елемената друге колоне помножених са $-\frac{4}{3}$. Одатле следи да је $\operatorname{rang} A = 2$.

7.

Нека је дат систем линеарних алгебарских једначина у матричном облику $A \cdot x = b$, где је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ реална матрица типа $m \times n$, а $b = [b_i]_{m\times 1}$ и $x = [x_j]_{n\times 1}$ матрице-колоне типова $m \times 1$ и $n \times 1$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Матрицу A називамо матрицом коефицијената или матрицом система, матрицу-колону b називамо матрицом слободних чланова, а матрицу-колону x матрицом непознатих. Нека је $B = [b_{ij}]_{m\times(n+1)}$ матрица типа $m \times (n+1)$ добијена конкатенацијом матрица A и b, односно нека је $b_{ij} = a_{ij}$ и $b_{i\,(n+1)} = b_i$, за $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Матрицу B називамо проширеном матрицом система. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем $A \cdot x = b$ јесте сагласан, има решење, ако и само ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Према томе, уколико је $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$, систем нема решење, није сагласан. Ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$, онда је систем одређен, има јединствено решење. Ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < n$, онда је систем неодређен, има бесконачно решења.

Одредимо ранг матрица A и B. Множењем елемената прве врсте матрице B са 3 и додавањем одговарајућим елементима друге врсте добијамо

$$B = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 0 \\ -6 & 9 & 1 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ранг матрице A једнак је 1, док је ранг матрице B једнак 2. Како је $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$, закључујемо, према Кронекер–Капелијевој теореми, да систем нема решење, тј. није сагласан.

Тачан одговор је **(б)**.

Приметимо да одговор **(г)** нема смисла.

8. Карактеристични полином матрице B једнак је

$$\begin{aligned} \varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda)-2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4). \end{aligned}$$

Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 4$.

9.

Нека су дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из $\mathbb{R}^3$. Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ реалан је број

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте вектор

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2, a_3\, b_1 - a_1\, b_3, a_1\, b_2 - a_2\, b_1), \end{aligned}$$

где је $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$.

За дате векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређујемо њихов скаларни и векторски производ:

(а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1,2,-1) \cdot (0,3,0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 = 6;$

(б) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3, (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = (3,0,3).$

10.

Параметарски облик једначине праве у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и паралелна је вектору $\vec{u} = (a, b, c)$ гласи

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\,t \\ y &= y_0 + b\,t \\ z &= z_0 + c\,t. \end{aligned}$$

Тражена права p нормална је на раван α. Према томе, вектор $\vec{u}_p$ праве p једнак је вектору равни α, $\vec{n}_\alpha = (0,1,0)$. Једначина праве p гласи

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 + t \\ z &= 2. \end{aligned}$$

– Тест основног знања – 28. 06. 2008.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y' = y + 1$.

4. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) збир два конвергентна реда јесте конвергентан ред;

(б) збир два дивергентна реда увек је дивергентан ред;

(в) редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ јесу еквиконвергентни;

(г) ако је ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ конвергентан, онда је и ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергентан;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

5. Навести пример:

(а) конвергентног геометријског реда;

(б) дивергентног геометријског реда.

6. У зависности од вредности реалног параметра r одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & r \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

7. За које вредности реалног параметра q хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$qx + 2y = 0$$
$$2x + (q+3)y = 0$$

има нетривијално решење?

8. Дати су вектори $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,3,5)$ и $\vec{c} = (2,5,8)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити:

(а) $\vec{a} \times \vec{b}$;

(б) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

9. Одредити координате пресечне тачке праве

$$p: \begin{array}{rcl} x &=& 3+2t \\ y &=& t \\ z &=& 4-7t \end{array}$$ и равни $\alpha : 7x+y+2z-30 = 0$

у простору $\mathbb{R}^3$.

10. Дат је скуп од пет баба и две жабе. Одредити број подскупова датог скупа у којима се не мешају бабе и жабе.

– Решења –

1. Интеграл у примеру **(а)** решавамо методом парцијалне интеграције, док интеграл у примеру **(б)** решавамо увођењем смене:

$$\textbf{(а)}\quad \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u=\ln x & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v = \dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C;$$

$$\textbf{(б)}\quad \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \ln x \\ \mathrm{d}t &=& \dfrac{\mathrm{d}x}{x}\end{array}\right\} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

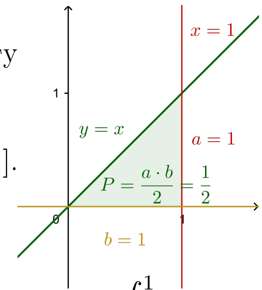
Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
> Ако је f непрекидна и парна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(а) Функција $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрекидна је и непарна на сегменту $[-1,1]$. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = 0$.

(б) Функција $f(x) = |x|$ непрекидна је и парна на сегменту $[-1,1]$. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$.



♢ Пример **(б)** можемо решити и графички. Вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине дела равни који ограничавају праве $x=1$, $y=0$ и $y=x$. У питању је правоугли троугао чије су катете дужина 1, па је величина његове површине једнака $\dfrac{1}{2}$.

3. Диференцијална једначина $y' = y+1$ еквивалентна је диференцијалној једначини $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1} = \mathrm{d}x$ која раздваја промењливе на интервалу који не садржи тачку $y=-1$. Опште решење дате једначине јесте $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int \mathrm{d}x + \widetilde{C}$, односно $\ln|y+1| = x + \widetilde{C}$, тј. $y = Ce^x - 1$.

4.

> Нека је $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Суму свих чланова датог низа називамо редом и означавамо $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Суму првих n чланова датог низа називамо n-том парцијалном сумом реда, и означавамо $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергентан је ако је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Ред је одређено дивергентан ако је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$. Ред је неодређено дивергентан ако $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји.

(а) Збир два конвергентна реда јесте конвергентан ред. Ако су $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ два конвергентна реда, онда из једнакости $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ следи да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = S_1 + S_2$.

(б) Збир два дивергентна реда може бити конвергентан или дивергентан ред. Редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}$ дивергентни су пошто $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}$ не постоје. Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right)$ јесте ред са општим чланом 0, који је, према томе, конвергентан.

(в) Редови са позитивним члановима $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ јесу еквиконвергентни, према другом поредбеном критеријуму, ако је $a_n \sim b_n$, $n \to +\infty$. Како је $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = 1$, закључујемо да је $\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $n \to +\infty$, односно да су редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ еквиконвергентни.

(г) Ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ конвергентан, онда је и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергентан.

Тачни одговори су **(а)**, **(в)** и **(г)**.

5. Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

Заиста, парцијалне суме геометријског реда јесу $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ за $q \neq 1$ и $S_n = n + 1$ за $q = 1$. Како је $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$, следи да је $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. За $q = 1$ ред је дивергентан, јер је $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ако је $q > 1$, ред је дивергентан, јер је $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, па је $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. За $q \leq -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ не постоји, па према томе ни $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не постоји и ред је дивергентан.

6. Приметимо да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће. Такође, елементи прве врсте пропорционални су елементима друге врсте ако и само ако је $r = 16$. Према томе, закључујемо да је ранг матрице A једнак 2 за $r \neq 16$, односно 1 за $r = 16$.

До истог закључка долазимо и посматрајући колоне. Елементи прве колоне пропорционални су елементима друге колоне. Елементи прве и треће колоне пропорционални су ако и само ако је $r = 16$. Важи да је $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 1, & r = 16, \\ 2, & r \neq 16. \end{cases}$

7. Хомогени систем има нетривијално решење ако и само ако је детерминанта матрице система једнака нули. Детерминанта матрице система једнака је

$$\begin{vmatrix} q & 2 \\ 2 & q+3 \end{vmatrix} = q(q+3) - 4 = q^2 + 3q - 4 = (q+4)(q-1).$$

Систем има нетривијално решење ако и само ако је $q = -4$ или $q = 1$.

8.

Нека су дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ из $\mathbb{R}^3$. Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте реалан број

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте вектор

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2, a_3\, b_1 - a_1\, b_3, a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\,,\end{aligned}$$

где је $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ реалан је број $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. За мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Како заменом места двема врстама детерминанта мења знак, важи да је $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right]$.

За дате векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ одређујемо њихов векторски и мешовити производ:

(а) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 5 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 1 - 1 \cdot 5, 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = (1, -2, 1);$

(б) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, 8) \cdot (1, -2, 1) = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = 0.$

Приметимо да важи да је $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, тј. да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно зависни, односно копланарни, одакле директно можемо закључити да је $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$.

9. Координате пресечне тачке праве p и равни α задовољавају параметарски задату једначину праве и једначину равни, па према томе представљају решење система четири линеарне алгебарске једначине са четири непознате

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= t \\ z &= 4 - 7t \\ 7x + y &+ 2z - 30 = 0. \end{aligned}$$

Дати систем своди се на једну једначину $7(3 + 2t) + t + 2(4 - 7t) - 30 = 0$, чије је једино решење $t = 1$. Координате пресечне тачке (тачке продора) јесу $(5, 1, -3)$.

10.

Број подскупова скупа који има n елемената једнак је 2^n. Ево и једног једноставног доказа. Број подскупова који имају k елемената скупа од n елемената једнак је $\binom{n}{k}$. Према томе, број свих подскупова скупа од n елемената једнак је $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

На основу биномног обрасца добијамо $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$.

Број подскупова датог скупа који садржи само бабе једнак је броју свих подскупова скупа од пет елемента 2^5. Број подскупова датог скупа који садржи само жабе једнак је броју свих подскупова скупа од два елемента 2^2. Пресек скупа баба и жаба јесте празан скуп. Према томе, тражени број подскупова једнак је $2^5 + 2^2 - 1 = 32 + 4 - 1 = 35$.

– Тест основног знања – 23. 08. 2008.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$;

(б) $\int 3^{x+1} \mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x)}$;

(б) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\,\mathrm{d}x + (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$.

4. Нека су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 3$ корени карактеристичне једначине хомогене линеарне диференцијалне једначине трећег реда са константним коефицијентима и C_1, C_2 и C_3 произвољне реалне константе. Заокружити слова испред општег решење дате диференцијалне једначине:

(а) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$;

(б) $y = C_1(1+x)e^{-x} + C_2 e^{-3x}$;

(в) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{3x}$;

(г) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-3x}$

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

5. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n}$; (б) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^6+6}$; (в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$;

(г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$; (д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-3n}$;

(ђ) ниједан од претходних редова није конвергентан.

6. У зависности од реалног параметра a решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x-y-z&=1\\ y+z&=a. \end{aligned}$$

7. Одредити сопствене вредности матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Заокружити слова испред једначина правих у простору $\mathbb{R}^3$:

(а) $y = 3x+2$; (б) $x = y = z$;

(в) $x+y+z = 1$; (г) $x = 1-t,\ y = 2,\ z = 0$;

(д) $2x+y-z = 1,\ z = 0$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

9. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су контрадикције:

(а) $p \Rightarrow \overline{p}$; (б) $\overline{p} \vee p$; (в) $p \wedge \overline{p}$;

(г) $\overline{p} \Rightarrow p$; (д) $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није контрадикција.

10. Колико грана има потпуни граф са 9 чворова?

– Решења –

1. Интеграл у примеру **(а)** решавамо увођењем смене, док је интеграл у примеру **(б)** таблични:

(а) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$

(б) $\displaystyle\int 3^{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> У одређеном интегралу $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ можемо увести смену $t = \varphi(x)$ уколико су испуњени следећи услови:
>
> - φ је строго монотона функција на сегменту $[a, b]$;
> - $\psi = \varphi^{-1}$ има непрекидан први извод на интервалу $(\varphi(a), \varphi(b))$;
> - f је непрекидна функција на сегменту $[\varphi(a), \varphi(b)]$;
>
> и тада важи да је $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$
>
> Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула
>
> $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Задатак решавамо увођењем смене и применом Њутн–Лајбницове формуле:

(а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x)} = \left\{ \begin{array}{ll} t = 3x, & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x, & x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0\right) = \frac{1}{3};$

(б) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 5} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{ll} t = x + 2, & x = 2 \Rightarrow t = 4 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x, & x = 3 \Rightarrow t = 5 \end{array} \right\} = \int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t\Big|_4^5 = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} 4.$

3. Диференцијална једначина $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$ јесте диференцијална једначина која раздваја промењиве. Опште решење дате једначине јесте $\displaystyle\int x\mathrm{d}x + \int (y+1)\mathrm{d}y = C$, односно

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2} = C.$$

Приметимо да је опште решење дате једначине фамилија кружница са центром у тачки $(0, -1)$.

4. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 3$. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^x$, $y_2 = x\,e^x$ и $y_3 = e^{3\,x}$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно

$$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3 = C_1\,e^x + C_2\,x\,e^x + C_3\,e^{3\,x}.$$

Тачан одговор је **(в)**.

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

5.

Ако нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, тј. потребан услов да ред конвергира јесте да његов општи члан тежи нули када $n \to +\infty$. Напоменимо да дати услов није и довољан. У примеру **(а)** општи члан тежи нули када $n \to +\infty$ али је одговарајући ред дивергентан (види даље). С друге стране, ако $\lim_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или је различит од нуле, онда ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Подсетимо се да почетна вредност индекса n не утиче на конвергенцију реда. Нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, јесу еквиконвергентни, оба реда су или конвергентна или дивергентна.

(а) Приметимо да је ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ хармонијски ред. Дати ред дивергира.

✓**(б)** Позитивни нумерички редови $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^6+6}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ јесу еквиконвергентни, према другом поредбеном критеријуму. Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ конвергира, па и ред $\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^6+6}$ конвергира.

(в) Како је $\frac{3}{4} < 1$, ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ дивергира.

✓**(г)** Ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$ конвергира, пошто је $\frac{4}{3} > 1$.

(д) Како је $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3n} = e^3 \neq 0$, закључујемо да ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-3n}$ дивергира.

Тачни одговори су **(б)** и **(г)**.

♢ Покажимо по дефиницији да је хармонијски ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ одређено дивергентан. Ред је одређено дивергентан ако је лимес низа парцијалних сума једнак $\pm\infty$. За 2^k-ту парцијалну суму низа $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ важи

$$\begin{aligned} S_{2^k}=\sum_{n=1}^{2^k}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2^k} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^k} \\ &= 1+\frac{k}{2}\to+\infty,\ \ k\to+\infty. \end{aligned}$$

6.

Нека је дат систем линеарних алгебарских једначина у матричном облику $A\cdot x=b$, где је $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ реална матрица типа $m\times n$, а $b=[b_i]_{m\times 1}$ и $x=[x_j]_{n\times 1}$ матрице-колоне типова $m\times 1$ и $n\times 1$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, $m,n\in\mathbb{N}$. Матрицу A називамо матрицом коефицијената или матрицом система, матрицу-колону b називамо матрицом слободних чланова, а матрицу-колону x матрицом непознатих. Нека је $B=[b_{ij}]_{m\times(n+1)}$ матрица типа $m\times(n+1)$ добијена конкатенацијом матрица A и b, односно нека је $b_{ij}=a_{ij}$ и $b_{i\,(n+1)}=b_i$, за $1\le i\le m$, $1\le j\le n$. Матрицу B називамо проширеном матрицом система. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем $A\cdot x=b$ јесте сагласан, има решење, ако и само ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B$. Према томе, уколико је $\operatorname{rang}A<\operatorname{rang}B$, систем нема решење, није сагласан. Ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B=n$, онда је систем одређен, има јединствено решење. Ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B<n$, онда је систем неодређен, има бесконачно решења.

Проширена матрица система јесте

$$B=\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & a\end{array}\right].$$

Одузимањем елемената прве врсте од одговарајућих елемената друге врсте, дељењем елемената друге врсте са -2 и на крају одузмањем елемената друге врсте од одговарајућих елемената треће врсте добијамо

$$B\cong\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & a\end{array}\right]\cong\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & a\end{array}\right]\cong\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right].$$

Уколико је $a\neq 0$, ранг матрице система једнак је 2, док је ранг проширене матрице система једнак 3; како је $2\neq 3$, дати систем нема решење, није сагласан. За $a=0$ важи да је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице система, једнак 2, што је за један мање од броја променљивих; према томе систем има бесконачно решења за која важи

$$x+y+z=1$$

$$y+z=0.$$

У овом случају решење система гласи $\{(1,-\alpha,\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$.

♢ До решења лако можемо доћи и директно. Сабирањем прве и друге једначине система добијамо да је $x = 1$, заменом вредности за промењиву x у систем добијамо еквивалентни систем који се своди на две једначине

$$y + z = 0$$

$$y + z = a,$$

који има решење $z = -y = \alpha \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $a = 0$.

7. Карактеристични полином матрице A једнак је

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).\end{aligned}$$

Сопствене вредности матрице A јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_A(\lambda)$. Према томе, важи да су сопствене вредности $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 4$.

8.

Векторски облик једначине праве p у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и паралелна је са вектором $\vec{u}_p = (a, b, c)$ гласи $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM} = t\vec{u}_p$, где је $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$ вектор произвољне тачке X праве p и $t \in \mathbb{R}$. Заиста, тачка X припада правој p ако и само ако су вектори $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}$ и $\vec{u}_p$ колинеарни. Према томе, једначину праве можемо задати и једначином $(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM}) \times \vec{u}_p = 0$. Из векторског облика једначине праве, изједначавањем одговарајућих координата, добијамо параметарски облик једначине праве

$$p: \begin{array}{rcl} x - x_0 &=& a\,t \\ y - y_0 &=& b\,t \\ z - z_0 &=& c\,t \end{array} \quad \text{односно} \quad p: \begin{array}{rcl} x &=& x_0 + a\,t \\ y &=& y_0 + b\,t \\ z &=& z_0 + c\,t. \end{array}$$

Елиминацијом параметра t из претходних једначина добијамо канонски облик једначине праве

$$p: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

за $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Уколико је $a = 0$ и $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, канонски облик једначине праве гласи $p: x = x_0, \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$. За $a = 0$ и $b = 0$ и $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ канонски облик једначине праве гласи $p: x = x_0, y = y_0$. Једначину праве у простору $\mathbb{R}^3$ можемо задати и као пресек две равни, односно системом две линеарне алгебарске једначине са три непознате.

(а) Дата једначина је једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$, или једначина праве у простору $\mathbb{R}^2$.

✓**(б)** У питању је канонски облик једначине праве $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1}$.

(в) У овом примеру дата је једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$.

✓**(г)** Права у овом примеру дата је у параметарском облику $p: \begin{array}{rcl} x-1 &=& -t \\ y-2 &=& 0 \\ z &=& 0. \end{array}$

✓**(д)** И на крају имамо праву задату као пресек две равни.

Тачни одговори су **(б)**, **(г)** и **(д)**.

9.

(а) Исказна формула $p \Rightarrow \overline{p}$ једнака је исказној формули $\overline{p}$, па према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(б) Исказна формула $\overline{p} \vee p$ јесте таутологија, закон искључења трећег.

(в) Исказна формула $p \wedge \overline{p}$ јесте контрадикција, негација закона искључења трећег.

(г) Исказна формула $\overline{p} \Rightarrow p$ једнака је исказној формули p, према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(д) Како је исказна формула $\overline{p} \vee p$ таутологија, а $p \wedge \overline{p}$ контрадикција, закључујемо да је импликација $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$ контрадикција.

Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

10.

Потпун граф је граф код кога су свака два чвора спојена граном. Ако је $n \in \mathbb{N}$ број чворова потпуног графа, онда је његов број грана једнак $\binom{n}{2}$.

Број грана потпуног графа са 9 чворова једнак је $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

– Тест основног знања – 20. 09. 2008.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2 \operatorname{arctg}(3x)\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |2x|\,\mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'\,y - x = 0$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

5. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n+3}{n}$; (б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{3^n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n^3}$; (г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{3}{n}$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

6. За које вредности реалних параметара a и b систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + 2y &= a\\ x + by &= 3 \end{aligned}$$

има бесконачно решења?

7. Дате су квадратне матрице A и B истог типа над пољем реалних бројева. Матрица B је добијена од матрице A применом коначно елементарних трансформација. Заокружити слова испред тачних одговора.

(а) Матрице A и B увек имају исте карактеристичне полиноме.

(б) Матрице A и B увек имају исте минималне полиноме.

(в) Ранг матрице A једнак је рангу матрице B.

(г) Матрице A и B увек имају исте сопствене вредности.

(д) Ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Који је од следећих исказа потребан услов да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ буду линеарно зависни:

(а) $\vec{a}\|\vec{b}$; (б) $\vec{a}\nparallel\vec{b}$; (в) $\vec{a}\perp\vec{b}$; (г) $\vec{a}\not\perp\vec{b}$.

9. Нека су дате равни α, β и γ у простору $\mathbb{R}^3$ својим једначинама

$$\begin{aligned} \alpha &: \quad x + 4y - 5z = 10\\ \beta &: \quad 3x + 12y - 15z = 2\\ \gamma &: -2x - 8y + 10z = 21. \end{aligned}$$

Број заједничких тачака датих равни једнак је:

(а) 0; (б) 1; (в) 2; (г) 3; (д) бесконачно;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Нека је $(B, \vee, \wedge)$ Булова алгебра и нека су a, b и c произвољни елементи скупа B. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$; (б) $a \vee 0 = 0$;

(в) $\overline{a} \vee \overline{a} = a$; (г) $1 \wedge 0 = 0$;

(д) $a \vee \overline{a} = a$; (ђ) $a \wedge 1 = 1$;

(е) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1. У примеру **(а)** користимо основни тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, док у примеру **(б)** уводимо смену:

(а) $$\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C;$$

(б) $$\int \frac{\ln(2\,x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t = \ln(2\,x) \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \end{array}\right\} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2(2\,x) + C.$$

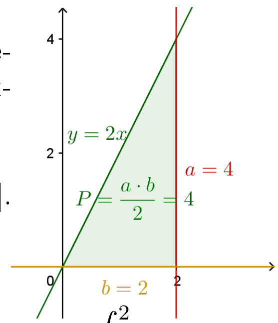
Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a, a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ако је f непрекидна и парна функција на сегменту $[-a, a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(а) Функција $f(x) = x^2 \operatorname{arctg}(3\,x)$ непрекидна је и непарна на сегменту $[-3, 3]$, као производ парне x^2 и непарне $\operatorname{arctg}(3\,x)$ функције. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-3}^{3} x^2 \operatorname{arctg}(3\,x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(б) Функција $f(x) = |2\,x|$ непрекидна је и парна на сегменту $[-2, 2]$. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-2}^{2} |2\,x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 2\,x\,\mathrm{d}x = 2\,x^2\Big|_0^2 = 8$.



Пример **(б)** можемо решити и графички. Вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_0^2 2\,x\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине коју заклапају праве $x = 2$, $y = 0$ и $y = 2\,x$. У питању је правоугли троугао чије су катете дужина 2 и 4, па је величина његове површине једнака 4.

3. Диференцијална једначина $y'\,y - x = 0$ јесте диференцијална једначина која раздваја променљиве. Дату једначину можемо записати и на следећи начин $y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x = 0$. Опште решење дате једначине јесте $\displaystyle\int y\,\mathrm{d}y - \int x\,\mathrm{d}x = \widetilde{C}$, односно фамилија хипербола $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \widetilde{C}$ или $y^2 - x^2 = C$.

4. Разматрамо хомогену линеарну диференцијалну једначину четвртог реда са константним коефицијентима $y^{(4)} + 2\,y'' + y = 0$. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^4 + 2\,\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2+1\right)^2 = 0$. Корени карактеристичне једначине јесу конјуговано-комплексни бројеви $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$. Приметимо да су корени вишеструкости два. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = \sin x$, $y_2 = x \sin x$, $y_3 = \cos x$ и $y_4 = x\cos x$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3 + C_4\,y_4 = C_1 \sin x + C_2\,x \sin x + C_3 \cos x + C_4\,x \cos x$.

За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

5. Подсетимо се неких критеријума за конвергенцију нумеричких редова са позитивним члановима и алтернативних редова.

I поредбени критеријум. Нека је $0 < a_n \le b_n$ за скоро свако $n \in \mathbb{N}$. Тада из дивергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ следи дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, а из конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

II поредбени критеријум. Ако је $a_n \sim b_n$, $n \to +\infty$, онда су редови са позитивним члановима $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ еквиконвергентни (оба реда су или конвергентна или дивергентна).

Интегрални критеријум. Нека је f непрекидна, позитивна и нерастућа функција на $[k, +\infty)$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада су несвојствени интеграл $\displaystyle\int_k^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и ред $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} f(n)$ еквиконвергентни.

Користећи интегрални критеријум може се показати да ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Даламберов критеријум. Нека је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека постоји $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Тада ако је $L < 1$, ред $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ конвергира, ако је $L > 1$, ред $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ дивергира. За $L = 1$ критеријум је неодлучив.

Кошијев критеријум. Нека је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ред са позитивним члановима и нека постоји $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Тада ако је $L < 1$, ред $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ конвергира, ако је $L > 1$, ред $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n$ дивергира. За $L = 1$ критеријум је неодлучив.

Лајбницов критеријум. Алтернативни ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, конвергира ако је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опадајући нула-низ.

Нека су $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергентни редови. Тада је и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ конвергентан и важи да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Нека је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергентан и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ дивергентан ред. Тада је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ дивергентан.

Нека су $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ дивергентни редови. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ може бити и конвергентан и дивергентан.

(а) Алтернативни ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ јесте конвергентан, јер је низ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опадајући нула-низ. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{n}=3\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ јесте дивергентан. Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n+3}{n}$ дивергентан је као збир конвергентног и дивергентног реда. Задатак је могао да се реши и користећи први поредбени критеријум. Како је $\dfrac{(-1)^n+3}{n}\geq\dfrac{2}{n}$ за свако $n\in\mathbb{N}$, имамо да из дивергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n}$ следи и дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n+3}{n}$.

(б) За испитивање конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$ искористићемо Даламберов критеријум. Општи члан датог реда јесте $a_n=\dfrac{n^3}{3^n}$. Одређујемо граничну вредност $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\dfrac{3^n}{n^3}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^3}{n^3}=\dfrac{1}{3}$. Како је $L=\dfrac{1}{3}<1$, закључујемо да је ред конвергентан. Могли смо да применимо и Кошијев критеријум. У овом случају испитујемо лимес $G=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^3}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^3}}{3}=\dfrac{1}{3}<1$. Према томе, користећи Кошијев критеријум долазимо до истог закључка, да је ред конвергентан.

(в) Приметимо да је општи члан реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{n^3}$ једнак реципрочној вредности општег члана из претходног примера. Применом Даламберовог, односно Кошијевог критеријума добијамо да за одговарајуће граничне вредности важи $L=G=3>1$, одакле закључујемо да је ред дивергентан. Могли смо једноставно закључити да је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{n^3}$ дивергентан, пошто је $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n^3}=+\infty\neq 0$.

(г) У овом примеру илустроваћемо II поредбени критеријум. Важи да је $\sin\dfrac{3}{n}\sim\dfrac{3}{n}$, $n\to+\infty$. Према II поредбеном критеријуму редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{3}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{n}$ јесу еквиконвергентни. Хармонијски ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{n}$ јесте дивергентан, одакле закључујемо да је и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{3}{n}$ дивергентан.

Тачан одговор је **(б)**.

6.

Нека је дат систем линеарних алгебарских једначина у матричном облику $A\cdot x=b$, где је $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ реална матрица типа $m\times n$, а $b=[b_i]_{m\times 1}$ и $x=[x_j]_{n\times 1}$ матрице-колоне типова $m\times 1$ и $n\times 1$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, $m,n\in\mathbb{N}$. Матрицу A називамо матрицом коефицијената или матрицом система, матрицу-колону b називамо матрицом слободних чланова, а матрицу-колону x матрицом непознатих. Нека је $B=[b_{ij}]_{m\times(n+1)}$ матрица типа $m\times(n+1)$ добијена конкатенацијом матрица A и b, односно нека је $b_{ij}=a_{ij}$ и $b_{i\,(n+1)}=b_i$, за $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$. Матрицу B називамо проширеном матрицом система. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем $A\cdot x=b$ јесте сагласан, има решење, ако и само ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B$. Према томе, уколико је $\operatorname{rang}A<\operatorname{rang}B$, систем нема решење, није сагласан. Ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B=n$, онда је систем одређен, има јединствено решење. Ако је $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B<n$, онда је систем неодређен, има бесконачно решења.

Проширена матрица система је

$$B=\left[\begin{array}{cc|c}1&2&a\\1&b&3\end{array}\right].$$

Одузимањем елемената прве врсте од одговарајућих елемената друге врсте добијамо

$$B \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & b-2 & 3-a \end{array}\right].$$

Дати систем има бесконачно решења ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 1 < 2$. Дати услов биће испуњен за $a = 3$ и $b = 2$.

$\diamondsuit$ До решења лако можемо доћи и директно. Систем ће имати бесконачно решења ако су коефицијенти уз променљиве x и y пропорционални и ако иста пропорција важи за слободне чланове. Како су коефицијенти уз променљиву x једнаки, систем ће имати бесконачно решења ако су коефицијенти уз променљиву y и слободни чланови једнаки, тј. ако је $a = 3$ и $b = 2$.

7.

Подсетимо се, елементарне трансформације матрице јесу:

- замена места двема врстама (колонама);
- множење елемената једне врсте (колоне) матрице бројем који је различит од нуле;
- додавање елемената једне врсте (колоне), претходно помножених бројем, одговарајућим елементима друге врсте (колоне).

За матрице A и B кажемо да су еквивалентне, и пишемо $A \cong B$, ако се матрица B може добити од матрице A применом коначно елементарних трансформација. Елементарне трансформације не мењају ранг матрице. Према томе, еквивалентне матрице имају исти ранг.

Карактеристични полином, минимални полином и сопствене вредности нису инваријанте елементарних трансформација. Размотримо матрице $A = 2\mathrm{I}$ и $B = \mathrm{I}$ реда 3. Матрица B је добијена од матрице A множењем елемената сваке од врста са $\frac{1}{2}$. Матрице A и B јесу еквивалентне, али имају различите карактеристичне и минималне полиноме и сопствене вредности. Лако се проверава да је карактеристични полином матрице A полином $\varphi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$. Минимални полином матрице A јесте полином $\mu_A(\lambda) = \lambda - 2$, док је $\lambda = 2$ трострука сопствена вредност. Што се тиче матрице $B = \mathrm{I}$, карактеристични полином јесте $\varphi_B(\lambda) = (1-\lambda)^3$, минимални полином јесте $\mu_B(\lambda) = \lambda - 1$, трострука сопствена вредност јесте $\lambda = 1$.

Тачан одговор је **(в)**.

8.

Нека је дата импликација $A \Rightarrow B$. Тада је A довољан услов за B, а B потребан услов за A. Иначе, дата импликација може се исказати и на један од следећих начина:

- ако A онда B;
- B, ако A;
- из A следи B;
- из претпоставке A може се извести закључак B;
- A имплицира B.

Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесу линеарно зависни ако постоје реални бројеви s и t, који нису истовремено једнаки нули, такви да је $s\,\vec{a} + t\,\vec{b} = \vec{0}$. Према томе, вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ различити од нула-вектора јесу линеарно зависни ако је $\vec{a} = t\,\vec{b}$ за $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. За два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ кажемо да су колинеарни (паралелни) ако су линеарно зависни. За два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ кажемо да су ортогонални (нормални) ако је њихов скаларни производ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$ једнак нули. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектори векторског простора $\mathbb{R}^3$, s и t реални бројеви. За скаларни производ важи $(s\,\vec{a} + t\,\vec{b})\cdot\vec{c} = s(\vec{a}\cdot\vec{c}) + t(\vec{b}\cdot\vec{c})$, особина линеарности скаларног производа. Норма (дужина, интезитет) вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ јесте ненегативан реалан број $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Важи да је $|\vec{a}| = 0$ ако и само ако $\vec{a} = \vec{0}$, особина позитивне дефинитности.

Прођимо сада кроз понуђене одговоре.

(а) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни, $\vec{a} \| \vec{b}$, по дефиницији, ако су линеарно зависни. Према томе, колинеарност је потребан и довољан услов да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ буду линеарно зависни.

(б) Одговор није тачан.

(в) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су ортогонални, $\vec{a} \perp \vec{b}$, по дефиницији, ако је њихов скаларни производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ једнак нули. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линеарно зависни вектори различити од нула-вектора векторског простора $\mathbb{R}^3$. Тада је $\vec{a} = t\,\vec{b}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Из позитивне дефинитности следи $\vec{a} \cdot \vec{b} = t\,\vec{b} \cdot \vec{b} = t\,|\vec{b}|^2 \neq 0$. Према томе, $\vec{a} \perp \vec{b}$ није потребан услов линеарне зависности вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(г) Како из линеарне зависности вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следи $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, закључујемо да је $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ потребан услов за линеарну зависност вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тачни одговори су **(а)** и **(г)**.

9. Две равни у простору могу да се секу (њихов пресек је права), да се поклапају или да буду паралелне. Равни су паралелне уколико су коефицијенти уз променљиве пропорционални и ако дата пропорција не важи за слободне чланове. Равни се поклапају ако су коефицијенти уз променљиве пропорционални и ако иста пропорција важи и за слободне чланове. У конкретном случају за коефицијенте равни α и β важи $1 : 3 = 4 : 12 = (-5) : (-15) \neq 10 : 2$. Равни α и β су паралелне, одакле закључујемо да је број пресечних тачака датих равни једнак 0.

Тачан одговор је **(а)**.

$\Diamond$ Три равни у простору могу да се секу (њихов пресек је права или тачка), да се поклапају или да буду паралелне. Према томе, једини смислени одговри су **(а)** (ако праве немају заједничких пресечних тачака), **(б)** (ако се секу у једној тачки) и **(д)** (ако се секу по правој). До броја пресечних тачака трију равни можемо доћи користећи Кронекер–Капелијеву теорему. Једначине трију равни чине систем линеарних алгебарских једначина. Ако је ранг матрице система мањи од ранга проширене матрице система, онда су бар две од три равни паралелне. Ако је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице система и мањи од 3, равни се поклапају или се секу дуж праве. На крају, уколико су рангови матрице система и проширене матрице једнаки и једнаки 3, равни се секу у једној тачки. Применом елементарних трансформација на проширену матрицу система добијамо

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 10 \\ 3 & 12 & -15 & 2 \\ -2 & -8 & 10 & 21 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

одакле закључујемо да је ранг матрице система једнак 1, док је ранг проширене матрице једнак 2. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем нема решење, односно број пресечних тачака датих трију равни једнак је 0.

Тачан одговор је **(а)**.

10.

(а) Бинарна операција $\vee$ дистрибутивна је у односу на бинарну операцију $\wedge$. Према томе, за произвољне елементе $a, b, c \in B$ важи $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

(б) У Буловој алгебри $(B, \vee, \wedge)$ елемент 0 јесте неутрални елемент за бинарну операцију $\vee$, тј. за свако $a \in B$ важи $a \vee 0 = a$. За $a \neq 0$ важи $a \vee 0 \neq 0$. Тврђење није тачно.

(в) У Буловој алгебри $(B, \vee, \wedge)$ сваки елемент јесте идемпотентан у односу на бинарну операцију $\vee$, па је $\overline{a} \vee \overline{a} = \overline{a} \neq a$. Закључујемо да тврђење није тачно.

(г) Тврђење је тачно, јер је 1 неутрални елемент за бинарну операцију $\wedge$.

(д) Елемент $\overline{a}$ је комплемент елемента a, односно важи да је $a \vee \overline{a} = 1$. Према томе, за произвољан елемент $a \in B$, $a \neq 1$, имамо $a \vee \overline{a} \neq a$. Закључујемо да тврђење није тачно.

(ђ) Како је 1 неутрални елемент Булове алгебре $(B, \vee, \wedge)$ за бинарну операцију $\wedge$, за свако $a \in B$ важи $a \wedge 1 = a$. За $a \neq 1$ важи $a \wedge 1 \neq 1$. Тврђење није тачно.

Тачни одговори су **(а)** и **(г)**.

– Тест основног знања – 18. 01. 2009.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}(3x)\,\mathrm{d}x$.

3. Навести пример:

(а) хомогене диференцијалне једначине првог реда;

(б) Бернулијеве диференцијалне једначине првог реда;

(в) хомогене диференцијалне једначине трећег реда са константним коефицијентима.

4. Дата је диференцијална једначина $y'' - y = 0$. Нека су C_1, C_2 и C_3 произвољне реалне константе. Заокружити слова испред општег решења дате диференцијалне једначине:

(а) $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$; **(б)** $y = C_1 x + C_2 x e^x$;

(в) $y = C_1 e^x + C_2 + C_3$; **(г)** $y = C_1 + C_2 e^{-x}$;

(д) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

5. Навести пример:

(а) конвергентног нумеричког реда са позитивним члановима;

(б) условно конвергентног нумеричког алтернативног реда.

6. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n$;

(б) $\operatorname{rang} A = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$;

(в) $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow \det A = 0$;

(г) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Одредити минимални полином матрице

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Дати су вектори $\vec{a} = (-1, -1, 0)$ и $\vec{b} = (2, 0, 2)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити угао који образују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

9. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \vee p$; **(б)** $p \wedge p$; **(в)** $p \Rightarrow p$;

(г) $p \uparrow p$; **(д)** $p \downarrow p$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

10. Колико чворова има неоријентисан регуларан граф без петљи степена 4 са 24 гране?

– Решења –

1. Свођењем квадратног тринома $4x-3-x^2$ на канонски облик дати интеграл постаје таблични. Имамо $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2+4x-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2)+C$.

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
>
> Уколико су испуњени следећи услови:
>
> - φ је строго монотона функција на сегменту $[a,b]$;
> - $\psi = \varphi^{-1}$ има непрекидан први извод на интервалу $(\varphi(a),\varphi(b))$;
> - f је непрекидна функција на сегменту $[\varphi(a),\varphi(b)]$;
>
> можемо увести смену $t=\varphi(x)$ у одређеном интегралу $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$. Тада важи да је $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
>
> Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

(а) Функција $f(x)=x^3e^{x^2}$ јесте непрекидна и непарна на сегменту $[-1,1]$, као производ непарне функције x^3 и парне функције e^{x^2}. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

(б) Интеграл решавамо увођењем смене $t=\varphi(x)=\cos(3x)$ на сегменту $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$. Функција φ је опадајућа на сегменту $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$. Њена инверзна функција на датом сегменту $\psi(x) = \frac{1}{3}\arccos x$ има непрекидан први извод $\psi'(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервалу $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$. Према томе, имамо $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}(3x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} t=\cos(3x), & x=0\to t=1 \\ \mathrm{d}t=-3\sin(3x)\,\mathrm{d}x, & x=\frac{\pi}{12}\to t=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} = -\frac{1}{3}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{6}$.

3.

> Хомогена диференцијална једначина првог реда једначина је облика $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, где је функција f непрекидна на задатом интервалу.
>
> Бернулијева диференцијална једначина једначина је облика $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha}$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу и $\alpha\in\mathbb{R}$.
>
> Хомогена диференцијална једначина трећег реда са константим коефицијентима јесте диференцијална једначина облика $y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$, где су a_1, a_2 и a_3 произвољни реални бројеви.

(а) Ако у општем облику хомогене диференцијалне једначине првог реда за f узмемо нпр. идентичко пресликавање, добијамо $y' = \dfrac{y}{x}$.

(б) Један пример Бернулијеве диференцијалне једначине добијамо за нпр. $P(x) = x$, $Q(x) = 3$ и $\alpha = 2$. За овако изабране функције P и Q и параметар α једначина гласи $y'+x\,y=3\,y^2$.

(в) Ако изаберемо нпр. да је $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, добијамо хомогену линеарну диференцијалну једначину трећег реда $y''' + y'' + y' + y = 0$.

¡Напоменимо да су ово само неки примери тражених диференцијалних једначина и да овај задатак нема јединствено решење. Било које конкретне вредности за функције P, Q и f и константе a_1, a_2, a_3 и α дају тачан одговор.

4. Једначина $y'' - y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^2 - 1 = 0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_{1,2} = \pm 1$, реални и различити бројеви. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y = C_1\,y_1+C_2\,y_2 = C_1\,e^x+C_2\,e^{-x}$.

Ниједна од понуђених функција није опште решење дате диференцијалне једначине. Тачан одговор је **(д)**.

5.

Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

Лајбницов критеријум. Алтернативни ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, конвергира ако је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опадајући нула-низ.

За ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ кажемо да је условно конвергентан ако ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, а ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ дивергира.

(а) Први примери редова са којима се сусрећемо у Теорији нумеричких редова јесу геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ и хиперхармонијски ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $q, \alpha \in \mathbb{R}$. Геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ конвергира ако и само ако је $|q| < 1$. Један пример конвергентног реда са позитвним члановима јесте нпр. геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Како ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$, још један пример конвергентног реда са позитивним члановима добијамо за нпр. $\alpha = 2$, и то је ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(б) Алтернативни ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ јесте конвергентан, јер је низ $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опадајући нула--низ. Хармонијски ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ јесте дивергентан, па је ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ условно конвергентан.

6.

Ранг матрице једнак је реду њене највеће регуларне подматрице. Уколико је квадратна матрица реда n регуларна, њен ранг биће једнак n. За сингуларну квадратну матрицу A реда n важи да је $\operatorname{rang} A < n$. Једина матрица чији је ранг једнак нули јесте нула-матрица. Матрица A и њена транспонована матрица A^T имају исти ранг.

(а) За сингуларну квадратну матрицу A реда n важи да је $\operatorname{rang} A < n$. Тврђење $\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A < n$ јесте тачно.

(б) Једина матрица чији је ранг једнак нули јесте нула-матрица. Детерминанта сингуларне матрице једнака је нули. Постоји сингуларна матрица која није нула-матрица. Према томе, тврђење $\operatorname{rang} A = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$ није тачно. Нпр. ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ једнак је 1, док је детерминанта матрице A једнака 0.

(в) Уколико је ранг квадратне матрице реда n једнак n, дата матрица је регуларна. Тврђење $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow \det A = 0$ није тачно. Тачна верзија овог тврђења била би $\operatorname{rang} A = n \Rightarrow \det A \neq 0$ или $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

(г) Транспоновањем квадратне матрице вредност њене детерминанте се не мења. Подматрице матрице A^T добијају се транспоновањем подматрица матрице A. Према томе, важи да је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.

Тачни одговори су **(а)** и **(г)**.

7.

Минимални полином $\mu_B(\lambda)$ реалне квадратне матрице B јесте монични полином најмањег степена који анулира матрицу, односно то је монични полином најмањег степена за који важи $\mu_B(B) = \mathbf{0}$.

Како за матрицу B важи да је $B = 3\,\mathrm{I}$, односно $B - 3\,\mathrm{I} = \mathbf{0}$, закључујемо да је минимални полином матрице B једнак $\mu_B(\lambda) = \lambda - 3$.

8.

Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори различити од нула-вектора векторског простора $\mathbb{R}^3$. За угао φ који образују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи да је $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, $0 \le \varphi \le \pi$, где је $\vec{a}\cdot\vec{b}$ скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ норма вектора $\vec{a}$. Скаларни производ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ реалан је број $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1, a_2, a_3)\cdot(b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Норма вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ јесте ненегативан реалан број $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

За угао φ који образују вектори $\vec{a} = (-1, -1, 0)$ и $\vec{b} = (2, 0, 2)$ важи да је $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{(-1,-1,0)\cdot(2,0,2)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}\,\sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2}} = \dfrac{-1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 2}{\sqrt{2}\,\sqrt{8}} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$. Како за угао φ важи $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$, $0 \le \varphi \le \pi$, имамо да је $\varphi = \dfrac{2\pi}{3} = 120°$.

9. Исказна алгебра је Булова алгебра. Према томе, све теореме Булове алгебре важе и у исказној алгебри. У Буловој алгебри за сваки елемент p важи $p \vee p = p$ и $p \wedge p = p$ (идемпотентност). Одатле закључујемо да исказне формуле $p \vee p$ и $p \wedge p$ нису таутологије (нису једнаке 1 за све вредности исказног слова p). Слично за Пирсову (нили) $\downarrow$ и Шеферову (ни) $\uparrow$ функцију важи да је $p \downarrow p = \overline{p \vee p} = \overline{p}$, односно $p \uparrow p = \overline{p \wedge p} = \overline{p}$, па ни исказне формуле $p \downarrow p$ и $p \uparrow p$ нису таутологије. Исказна формула $p \Rightarrow p$ јесте таутологија.

Тачан одговор је **(в)**.

10.

Неоријентисани граф без петљи назива се регуларним степена r ако је степен сваког чвора датог графа једнак r. Степен чвора графа број је грана које су инцидентне са тим чвором, односно број чворова који су суседни том чвору. Збир степена свих чворова графа једнак је двоструком броју грана тог графа, јер је свака грана инцидентна са два чвора. За регуларан граф степена r који има n чворова и m грана важи да је $n\,r = 2\,m$.

Дат нам је регуларан граф степена 4 са 24 гране. Број чворова тог графа једнак је $\dfrac{2\cdot 24}{4} = 12$.

– Тест основног знања – 08. 02. 2009.

1. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int x\,\sin x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left|\frac{2+x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\,\mathrm{d}x + (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$, а затим ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' - 2\,y' + y = 0$.

5. Заокружити слова испред дивергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{n^5+5}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(д) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-3n}$;

(ђ) ниједан од претходних редова није дивергентан.

6. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{9}\right)^n$.

7. Одредити сопствене вредности матрице

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. За које вредности реалних параметра α и β систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + \beta y &= 1 \\ \alpha x - \alpha y &= \beta \end{aligned}$$

нема решење?

9. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори векторског простора $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$; **(б)** $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$;

(в) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; **(г)** $\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = |\vec{a}|$.

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Написати једначину равни у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(1,2,3)$ и паралелна је са осама Ox и Oz.

– Решења –

1. Применом методе парцијалне интеграције у примеру **(а)** и увођењем смене у примеру **(б)** добијамо:

(а) $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u=x & \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=-\cos x\end{array}\right\} = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x+\sin x + C;$

(б) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\sin(2x)\,\mathrm{d}x = 2\int \cos^3 x\,\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t=\cos x \\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x\end{array}\right\} = -2\int t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}t^4+C = -\frac{1}{2}\cos^4 x + C.$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

(а) Функција $f(x)=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ јесте непрекидна и непарна на сегменту $[-1,1]$. Према томе, важи да је $\displaystyle\int_{-1}^{1}\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x=0.$

(б) Како је $x+2>0$ za $x>-2$, имамо да је функција $f(x)=\dfrac{2+x}{x^2}$ позитивна на сегменту $[1,2]$. Према томе, важи да је

$$\int_1^2\left|\frac{2+x}{x^2}\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2+x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{x}\Big|_1^2+\ln|x|\Big|_1^2=-1+2+\ln 2=1+\ln 2.$$

3. Диференцијална једначина $x\,\mathrm{d}x+(y+1)\,\mathrm{d}y=0$ јесте диференцијална једначина која раздваја променљиве. Опште решење дате једначине јесте $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x+\int(y+1)\,\mathrm{d}y=\widetilde{C}$, тј. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{(y+1)^2}{2}=\widetilde{C}$, односно фамилија кружница $x^2+(y+1)^2=C$. За $x=y=0$ добијамо да је $C=1$. Интегралана крива дате диференцијалне једначине која пролази кроз тачку $(0,0)$ јесте кружница

$$x^2+(y+1)^2=1.$$

4. Диференцијална једначина $y''-2y'+y=0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2=0$. Решење карактеристичне једначине реалан је корен $\lambda_1=\lambda_2=1$ вишеструкости два. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1=e^x$ и $y_2=x\,e^x$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно

$$y=C_1\,y_1+C_2\,y_2=C_1e^x+C_2\,x\,e^x.$$

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

5.

Ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, тј. потребан услов да ред конвергира јесте да његов општи члан тежи нули када $n \to +\infty$. Напоменимо да дати услов није и довољан. У примеру **(а)** општи члан тежи нули када $n\to+\infty$, али је одговарајући ред дивергентан (види даље). С друге стране, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или је различит од нуле, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.

Подсетимо се да почетна вредност индекса n не утиче на конвергенцију реда. Нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, јесу еквиконвергентни, оба реда су или конвергентна или дивергентна.

(а) Приметимо да је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ хармонијски ред. Дати ред дивергира.

(б) Позитивни нумерички редови $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{n^5+5}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^5}$ јесу еквиконвергентни, према другом поредбеном критеријуму. Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^5}$ конвергира, јер је $5 > 1$, па и ред $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{n^5+5}$ конвергира.

(в) Како је $\dfrac{3}{4} < 1$, ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ дивергира.

(г) Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$ конвергира, пошто је $\dfrac{4}{3} > 1$.

(д) Како је $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-3n} = e^3 \neq 0$, закључујемо да ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-3n}$ дивергира.

Тачни одговори су **(а)**, **(в)** и **(г)**.

6.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се рачунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{9}\right)^n$ једнак је $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n+1)\,9^n}\,\dfrac{(n+2)\,9^{n+1}}{n+1} = 9 \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\,(n+2)}{(n+1)^2} = 9$.

7. Карактеристични полином матрице Q једнак је $\varphi_Q(\lambda) = \det(Q-\lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda)(5-\lambda)$. Сопствене вредности матрице Q јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_Q(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$.

8. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем нема решење ако је ранг матрице система мањи од ранга проширене матрице система. Множењем елемената прве врсте проширене матрице система са $-\alpha$ и додавањем одговарајућим елементима друге врсте добијамо

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \beta & 1 \\ \alpha & -\alpha & \beta \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha(1+\beta) & \beta-\alpha \end{array}\right].$$

Ранг матрице система једнак је 1 ако је $\alpha = 0$ или $\beta = -1$, односно 2 ако је $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq -1$. Ранг проширене матрице система једнак је 1 ако је $\alpha = \beta = 0$ или $\alpha = \beta = -1$; у осталим случајевима ранг проширене матрице једнак је 2. Закључујемо да систем није сагласан, тј. нема решење ако је $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$ или $\beta = -1$ и $\alpha \neq -1$.

9.

Скаларни и векторски производ вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из $\mathbb{R}^3$ дефинишемо, редом

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

и

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где је $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Норму вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ из $\mathbb{R}^3$ дефинишемо као ненегативан реалан број $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

За скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$, док за интензитет вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ имамо $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi$, где је φ угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Прођимо сада кроз понуђене одговоре.

- **(а)** Имамо да је $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ ако и само ако за угао φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи да је $\sin\varphi = 1$, односно ако и само ако је $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. У општем случају тврђење није тачно.
- **(б)** Апсолутна вредност скаларног производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнака је производу њихових интензитета ако и само ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, тј. ако и само ако за угао φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи да је $\cos\varphi = \pm 1$, односно ако и само ако је $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. У општем случају тврђење није тачно.
- **(в)** Из дефиниције скаларног производа директно следи да је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, тј. да је скаларни производ комутативан.
- **(г)** У питању је дефиниција норме вектора.

Тачни одговори су **(в)** и **(г)**.

10. Вектор равни јесте вектор нормалан на дату раван. Вектор праве јесте вектор паралелан са датом правом. Раван и права паралелне су ако су им вектори ортогонални. Тражена раван је паралелна са осама Ox и Oz, па је вектор равни нормалан на векторе $\vec{i} = (1, 0, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$, односно вектор тражене равни јесте вектор $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Једначина равни која садржи тачку $M(1, 2, 3)$ и чији је вектор $\vec{j} = (0, 1, 0)$ гласи $0\,(x-1) + 1\,(y-2) + 0\,(z-3) = 0$, односно $y - 2 = 0$.

– Тест основног знања – 07. 06. 2009.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}.$$

2. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x)}.$$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y'' = 0$.

4. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$; **(б)** $\sum_{n=5}^{+\infty} 5$;

(в) $\sum_{n=100}^{+\infty}\left(\frac{2008}{2009}\right)^n$; **(г)** $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-n}$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

5. Дат је степени ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$. Овај ред има област конвергенције:

(а) $(-1,1)$; **(б)** $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; **(в)** $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; **(г)** $[-2,2)$;

(д) ниједан од претходних интервала.

6. Одредити број комбинација са понављањем r-те класе n-точланог скупа.

7. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \Rightarrow \overline{p}$; **(б)** $\overline{p} \vee p$; **(в)** $p \wedge \overline{p}$;

(г) $\overline{p} \Rightarrow p$; **(д)** $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

8. У зависности од вредности реалног параметра q решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + qy &= q. \end{aligned}$$

9. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ произвољни вектори векторског простора $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни су ако је њихов скаларни производ једнак нули;

(б) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални су ако је њихов векторски производ једнак нула-вектору;

(в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ копланарни су ако је њихов мешовити производ различит од нуле;

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Дата је раван $\alpha : x - 2y - 2z - 7 = 0$ у простору $\mathbb{R}^3$.

(а) Одредити једну тачку која припада равни α.

(б) Одредити један вектор који је ортогоналан на раван α.

– Решења –

1. Дати интеграл се сменом своди на таблични

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left\{ \begin{array}{c} t = x+2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Интеграл решавамо сменом и применом Њутн–Лајбницове формуле

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x)} = \left\{ \begin{array}{c} t = 3x, \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x,\; x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 \right) = \frac{1}{3}.$$

3. Једначина $y^{(4)} - y'' = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина четвртог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2 \left(\lambda^2 - 1\right) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$. Корени карактеристичне једначине реални су бројеви $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ и $\lambda_4 = -1$. Приметимо да је један корен вишеструкости два, док су друга два корена проста. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$ и $y_4 = e^{-x}$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-x}$.

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

4.

Ако нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Еквивалентно, ако $\lim_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

Заиста, парцијалне суме геометријског реда јесу $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ за $q \neq 1$ и $S_n = n+1$ за $q = 1$. Како је $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$, следи да је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$. За $q = 1$ ред је дивергентан, јер је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ако је $q > 1$, ред је дивергентан, јер је $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, па је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. За $q \leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ не постоји, па према томе ни $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји и ред је дивергентан.

Подсетимо се да почетна вредност индекса n не утиче на конвергенцију реда. Нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, јесу еквиконвергентни, оба реда су или конвергентна или дивергентна.

(а) Како $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ не постоји, (низ $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има две тачке нагомилавања 1 и -1); закључујемо да нумерички ред са алтернирајућим члановима $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ дивергира.

(б) Ред са константним члановима $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}5$ дивергира, јер $\lim\limits_{n\to+\infty}5 = 5 \neq 0$. Једини конвергентан ред са константним члановима јесте онај код кога је општи члан једнак 0.

(в) Ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2008}{2009}\right)^n$ и његов остатак $\sum\limits_{n=100}^{+\infty}\left(\frac{2008}{2009}\right)^n$ јесу еквиконвергентни. Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2008}{2009}\right)^n$ конвергира, јер за његов количник $q = \frac{2008}{2009}$ важи $|q| < 1$. Према томе, ред $\sum\limits_{n=100}^{+\infty}\left(\frac{2008}{2009}\right)^n$ конвергира.

(г) Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-n}$ јесте геометријски ред са количником $q = -\frac{1}{e}$. Како је $|q| < 1$, дати ред конвергира.

Тачни одговори су **(в)** и **(г)**.

5.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^n$ може се рачунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ једнак је $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,2^{n+1}}{n\,2^n} = 2$. За $x = 2$ ред постаје хармонијски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ који дивергира. За $x = -2$ ред постаје $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Према Лајбницовом критеријуму тај ред конвергира. Значи, област конвергенције полазног степеног реда јесте полуотворени интервал $[-2, 2)$.

Тачан одговор је **(г)**.

6.

Комбинација са понављањем n-точланог скупа $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ r-те класе јесте било који његов r-точлани мултиподскуп. Комбинацију са понављањем скупа X r-те класе можемо посматрати као реч дужине r састављену од слова $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ код које се слова могу понављати и код које је слово x_i испред слова x_j ако је $1 \le i < j \le n$. У овако формираној речи све симболе x_1, ако постоје, заменимо са $*$, а потом додамо $|$, затим симболе x_2, ако их има, заменимо са $*$, а потом додамо $|$; овај поступак примењујемо све док све симболе x_n, ако учествују у речи, не заменимо са $*$. Према томе, свакој речи која представља једну комбинацију скупа X r-те класе додељујемо једну ниску састављену од r $*$ и $n-1$ $|$. Ова додела је једнострано обозначна. Према томе, број комбинација скупа X r-те класе једнак је броју ниски дужине $n + r - 1$ састављених од r $*$ и $n-1$ $|$, тј. броју начина на који од $n + r - 1$ позиција бирамо r позиција на које ћемо уписати $*$. Дати број једнак је $\binom{n+r-1}{r}$.

Број комбинација са понављањем n-точланог скупа r-те класе јесте $\binom{n+r-1}{r}$.

7. Исказна алгебра је Булова алгебра. Према томе, све теореме Булове алгебре важе и у исказној алгебри. У Буловој алгебри за сваки елемент p важи $\overline{p} \vee p = 1$ и $p \wedge \overline{p} = 0$ (постојање комплемента). Одатле закључујемо да је исказна формула $\overline{p} \vee p$ таутологије, а $p \wedge \overline{p}$ контрадикција. Исказне формуле $p \Rightarrow \overline{p}$ и $\overline{p} \Rightarrow p$ нису таутологије јер важи $(p \Rightarrow \overline{p}) = \overline{p}$ и $(\overline{p} \Rightarrow p) = p$. На основу теореме о инволуцији у Буловој алгебри за сваки елемент p важи да је $\overline{\overline{p}} = p$. Како је исказна формула $A \Leftrightarrow B$ таутологија ако и само ако су исказне формуле A и B једнаке, закључујемо да је исказна формула $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ таутологија.

Тачни одговори су **(б)** и **(д)**.

8.

> Нека је дат систем линеарних алгебарских једначина у матричном облику $A \cdot x = b$, где је $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ реална матрица типа $m \times n$, а $b = [b_i]_{m \times 1}$ и $x = [x_j]_{n \times 1}$ матрице-колоне типова $m \times 1$ и $n \times 1$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Матрицу A називамо матрицом коефицијената или матрицом система, матрицу-колону b називамо матрицом слободних чланова, а матрицу-колону x матрицом непознатих. Нека је $B = [b_{ij}]_{m \times (n+1)}$ матрица типа $m \times (n+1)$ добијена конкатенацијом матрица A и b, односно нека је $b_{ij} = a_{ij}$ и $b_{i\,(n+1)} = b_i$, за $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Матрицу B називамо проширеном матрицом система. Према Кронекер–Капелијевој теореми систем $A \cdot x = b$ јесте сагласан, има решење, ако и само ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$. Према томе, уколико је $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$, систем нема решење, није сагласан. Ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$, онда је систем одређен, има јединствено решење. Ако је $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B < n$, онда је систем неодређен, има бесконачно решења.

Одузимањем елемената прве врсте проширене матрице система од одговарајућих елемената друге врсте добијамо

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & q \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & q-1 \end{array}\right].$$

Ранг матрице система једнак је рангу проширене матрице система и то 1 ако је $q = 1$, односно 2 ако је $q \neq 1$. Закључујемо да је систем сагласан за свако $q \in \mathbb{R}$. За $q = 1$ систем има бесконачно решења, $\{(\alpha, 1-\alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Уколико је $q \neq 1$, систем има јединствено решење, $x = 0$ и $y = 1$.

9.

(а) Ако је скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак нули, дати вектори су ортогонални (нормални), па самим тим не могу да буду колинеарни (паралелни).

(б) Ако је векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак нула-вектору, из дефиниције векторског производа директно следи да су дати вектори линеарно зависни, тј. колинеарни, па самим тим не могу да буду ортогонални.

(в) Ако је мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ различит од нуле, на основу тврђења да је мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ једнак вредности детерминанте матрице чије су врсте управо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, закључујемо да су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линеарно независни, па нису копланарни.

Тачан одговор је **(г)**.

10.

(а) Координате тачке која припада равни α задовољавају једначину равни. Тачка која припада равни α има координате $(2t + 2s + 7, t, s)$, где су t и s произвољни реални бројеви, нпр. за $t = 0$ и $s = 0$ добијамо тачку $M(7, 0, 0)$.

(б) Вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α јесте сваки вектор облика $\vec{n}_\alpha = t\,(1, -2, -2)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, нпр. за $t = 1$ добијамо вектор $\vec{n}_\alpha = (1, -2, -2)$.

– Тест основног знања – 25. 08. 2009.

1. Одредити неодређени интеграл
$$\int \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, где је $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' - 5y' + 6y = 0$.

4. Одредити суму конвергентног геометријског реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^n$. Овај ред има област конвергенције:

(а) $(-e, e)$; **(б)** $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$; **(в)** $[-1, 1]$; **(г)** $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$;

(д) ниједан од претходних интервала.

6. Одредити број пермутација скупа $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ у којима се цифра 3 налази на четвртом месту.

7. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \wedge \overline{p}$; **(б)** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;

(в) $p \vee \overline{p}$; **(г)** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$;

(д) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$;

(е) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

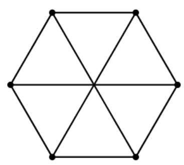
8. У зависности од вредности реалног параметра α одредити ранг матрице
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & \alpha \\ 4 & 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

9. Дати су вектори $\vec{a} = (3, 0, 1)$ и $\vec{b} = (0, 4, 1)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити:

(а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

(б) $\vec{a} \times \vec{b}$.

10. Граф на слици (са 6 чворова) јесте:



(а) оријентисан; **(б)** неоријентисан;

(в) повезан; **(г)** регуларан;

(д) стабло; **(ђ)** потпун;

(е) контура; **(ж)** ништа од претходоног.

– Решења –

1. Интеграл можемо представити као збир четири таблична интеграла

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + C.\end{aligned}$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Како функција $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1, \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ мења свој аналитички облик у тачки $x = 1$, искористићемо особину адитивност одређеног интеграла $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Даље имамо

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (2-x)\,\mathrm{d}(2-x) = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{(2-x)^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

3. Дата једначина $y''-5y'+6y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda-2)\,(\lambda-3) = 0$. Корени карактеристичне једначине реални су и различити бројеви $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^{2\,x}$ и $y_2 = e^{3\,x}$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{3\,x}$.

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

4.

> Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.
>
> Заиста, парцијалне суме геометријског реда јесу $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ за $q \ne 1$ и $S_n = n+1$ за $q = 1$. Како је $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ за $|q| < 1$, следи да је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. За $q = 1$ ред је дивергентан, јер је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ако је $q > 1$, ред је дивергентан, јер је $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, па је $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. За $q \le -1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n$ не постоји, па према томе ни $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји и ред је дивергентан.

У питању је геометријски ред са количником $q = \frac{1}{2}$ који је конвергентан и чија је сума једнака

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

5.

Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се рачунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Ако нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Еквивалентно, ако $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ не постоји или није једнак нули, онда ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ дивергира.

На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{x}{e}\right)^n$ једнак је $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$. За $x = e$ ред постаје $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1$. Дати ред дивергира, јер $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$. За $x = -e$ ред постаје $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$, који је такође дивергентан, јер $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ не постоји.

Тачан одговор је **(а)**.

6.

Пермутација n-точланог скупа јесте било која уређена n-торка различитих елемената из тог скупа. Број пермутација n-точланог скупа једнак је $n!$.

Број 3 је фиксиран на четвртом месту. Потребно је попунити остале четири позиције. На првом месту може бити уписан било који број из скупа $\{1, 2, 4, 5\}$. За прву позицију имамо четири могућности. На другој позицији може се наћи било који од преостала три броја. На трећој позицији један је од два броја из скупа $\{1, 2, 4, 5\}$ који није на прве две позиције. И на крају, последње пето место попуњавамо јединим преосталим бројем. Према принципу производа имамо да је број тражених пермутација једнак $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4! = 24$.

7. Формирајмо таблице истинитости за дате исказне формуле

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$p \vee \overline{p}$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1

Исказна формула $p \wedge \overline{p}$ јесте контрадикција, док су формуле $p \vee \overline{p}$ и $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ таутологије, закон искључења трећег и закон контрапозиције. Формуле $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$ и $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ нису таутологије. Из таблице истинитости види се да важи једнакост $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = p$. Дату једнакост можемо доказати и дискусијом по слову p. Импликација је једнака 0 уколико је претпоставка једнака 1, а последица једнака 0. У свим осталим случајевима импликација је једнака 1. За $p = 0$ последица p једнака је 0, а претпоставка $p \Rightarrow q$ једнака је 1, одакле закључујемо да је импликација $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ једнака 0. За $p = 1$ последица p једнака је 1, одакле одмах закључујемо да је импликација $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ такође једнака 1.

Тачни одговори су **(б)** и **(г)**.

8. Приметимо да су елементи прве врсте матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & \alpha \\ 4 & 16 & 12 \end{bmatrix}$ пропорционални елементима треће. Такође, елементи прве врсте пропорционални су елементима друге врсте ако и само ако је $\alpha = 6$. Према томе, закључујемо да је ранг матрице A једнак 2 за $\alpha \neq 6$ и да је ранг матрице A једнак 1 за $\alpha = 6$.

9.

Нека су дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ из $\mathbb{R}^3$. Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ реалан је број $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте вектор

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \end{aligned}$$

где је $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ и $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

За дате векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одређујемо њихов скаларни и векторски производ:

(а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 0, 1) \cdot (0, 4, 1) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 = 1$;

(б) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1, 3 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = (-4, -3, 12)$.

10.

Граф дефинишемо као уређени пар (X, ρ), где је X непразан скуп и ρ бинарна релација дефинисана на том скупу. Елементе скупа X називамо чворовима графа, а елементе скупа ρ гранама.
Граф се може представити и графички. Чворове графа представљамо тачкама. Ако су елементи x_i и x_j скупа X у релацији ρ, онда тачку која представља чвор x_i спајамо линијом која је оријентисана стрелицом са тачком која представља чвор x_j. Ако елементи x_i и x_j нису у релацији ρ, онда тачке које представљају чворове x_i и x_j нису директно повезане. Грана која спаја чвор са самим собом назива се петља.
За граф (X, ρ) кажемо да је неоријентисан ако је релација ρ симетрична. Код неоријентисаних графова све гране су двострано оријентисане, односно неоријентисане, па се стрелице на цртежу изостављају.
За два чвора неоријентисаног графа без петљи кажемо да су суседни ако су спојени граном. Број суседних чворова са чвором x назива се степеном тог чвора. Неоријентисан граф без петљи називамо регуларним степена r ако је степен сваког чвора тог графа једнак r.
Регуларан граф са n чворова степена $n-1$ назива се потпун (комплетан) граф. Потпун граф је граф код кога су свака два чвора спојена граном. Број грана у потпуном графу једнак је $\dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{2}$.
У неоријентисаном графу пут дужине k наизменични је низ чворова x_i и грана u_i облика $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1}$, при чему је за свако $1 \le i \le k$ чвор x_i почетни, а чвор x_{i+1} крајњи за грану u_i. Неоријентисан граф без петљи повезан је ако се произвољна два његова чвора могу повезати путем.
Коначан, повезан регуларан граф степена 2 називамо контуром.
Повезан граф са n, $n > 1$, чворова и $n-1$ граном називамо стаблом.

Дати граф је неоријентисан будући да његове гране на цртежу којим је представљен нису оријентисане. Јасно је и да је дати граф повезан, будући да се свака два од његових шест чворова могу повезати путем. Дати граф је регуларан, јер је степен сваког његовог чвора једнак 3. Граф није стабло, јер има шест чворова и девет грана. Стабло са шест чворова има пет грана. Граф није ни потпун, јер потпун граф са шест чворова има петнаест грана. Како је дати граф регуларан граф степена 3, а не 2, није ни контура.
Тачни одговори су **(б)**, **(в)** и **(г)**.

♣ Упоредити задатак са десетим задатком са теста 29. 06. 2013.

– Тест основног знања – 19. 09. 2009.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{2}{\sqrt{3\,x}}\,\mathrm{d}x.$$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int_{-3}^{1} |2\,x+2|\,\mathrm{d}x.$

3. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

(а) $(y')^2 + y + 1 = 0;$ **(б)** $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0;$

(в) $y' - y = e^{2\,x};$ **(г)** $y' + y + x = 0;$

(д) ниједна од претходних диференцијалних једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.

4. Одредити вредности реалног параметра s за које геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2\,s)^n$ конвергира.

5. Нека је дат степени ред $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Одредити $S(1)$.

6. Колико различитих парних природних троцифрених бројева може да се напише користећи цифре 1, 4 и 7? (Цифре могу да се понављају.)

7. Написати у облику СКНФ Булову функцију $f(p,q) = p \uparrow q$.

8. У зависности од вредности реалног параметра α одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

9. Одредити сопствене вредности матрице

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Написати једначину праве у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(1,1,1)$ и нормална је на раван $\sigma : z = 0$.

– Решења –

1. У питању је таблични интеграл. Имамо

$$\int \frac{2}{\sqrt{3\,x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

> Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a, a]$, онда је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(а) Функција $f(x) = \cos x\,\sin(2\,x)$ јесте непрекидна и непарна на сегменту $[-\pi, \pi]$, као производ парне $\cos x$ и непарне $\sin(2\,x)$ функције. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\sin(2\,x)\,\mathrm{d}x = 0.$

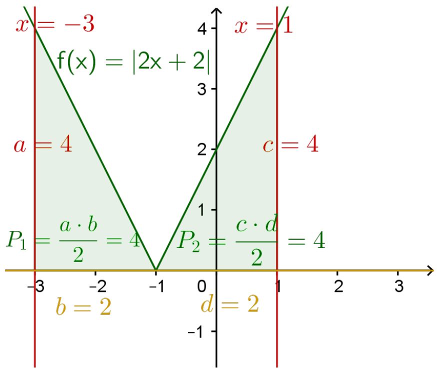
(б) Знамо да је

$$|2\,x+2| = \begin{cases} 2\,(x+1), & x \geq -1 \\ -2\,(x+1), & x < -1. \end{cases}$$

На основу адитивности одређеног интеграла добијамо

$$\int_{-3}^{1} |2\,x+2|\,\mathrm{d}x = -2\int_{-3}^{-1}(x+1)\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x = -(x+1)^2\Big|_{-3}^{-1} + (x+1)^2\Big|_{-1}^{1} = 4+4 = 8.$$

Такође, вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_{-3}^{1} |2\,x+2|\,\mathrm{d}x$ једнака је збиру величина површина два правоугла троугла чије су катете дужина 2 и 4, односно једнака је $2\cdot\dfrac{2\cdot 4}{2} = 8.$



Ево још једног решења примера **(б)**. Како је график функције $f(x) = |2\,x+2|$ симетричан у односу на праву $x = -1$, закључујемо да је $\displaystyle\int_{-3}^{1} |2\,x+2|\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} 2\,(x+1)\,\mathrm{d}x = 2\,(x+1)^2\Big|_{-1}^{1} = 8.$

3.

> Линеарна диференцијална једначина првог реда јесте диференцијална једначина облика $y' + P(x)\,y = Q(x)$, где су P и Q непрекидне функције на задатом интервалу.

(а) Диференцијална једначина $(y')^2 + y + 1 = 0$ није линеарна диференцијална једначина, пошто се први извод функције y у једначини појављује квадриран.

(б) Диференцијална једначина $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x = 0$ може се записати и у облику $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$, одакле закључујемо да је у питању хомогена линеарна диференцијална једначина првог реда, за коју је $P(x) = \dfrac{1}{x}$. Приметимо да се дата диференцијална једначина може сврстати и у диференцијалне једначине које раздвајају променљиве и хомогене диференцијалне једначине првог реда, као и да је дата једначина специјалан случај Бернулијеве и Рикатијеве диференцијалне једначине.

(в) Једначина $y' - y = e^{2\,x}$ јесте линеарна диференцијална једначина за $P(x) = -1$ и $Q(x) = e^{2\,x}$.

(г) Једначина $y' + y + x = 0$ јесте линеарна диференцијална једначина за $P(x) = 1$ и $Q(x) = -x$.

Тачни одговори су **(б)**, **(в)** и **(г)**.

4.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

У питању је геометријски ред са количником $2s$, који је конвергентан ако и само ако је $-1 < 2s < 1$, односно ако је $s \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

5.

Маклоренов ред функције $f(x) = e^x$ јесте $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. За свако $x \in \mathbb{R}$ важи да је $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Докажимо, користећи особине степених редова, да заиста за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Одредимо прво полупречник конвергенције R степеног реда $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Према Коши–Адамаровом ставу $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Дакле, ред конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. област конвергенције степеног реда јесте $\mathbb{R}$. Сума степеног реда има коначан први извод на интервалу конвергенције и он се може израчунати диференцирањем члан по члан. У конкретном случају имамо да је $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, за свако $x \in \mathbb{R}$, односно да је $S(x) = S'(x)$. Опште решење линеарне диференцијалне једачине првог реда $S'(x) = S(x)$ јесте $S(x) = C\,e^x$. Како је $S(0) = 1$, закључујемо да је $S(x) = e^x$.

За $x = 1$ добијамо да је $S(1) = e$.

6. Како су у питању парни бројеви, последња цифра мора бити 4. Пошто се цифре могу понављати, прве две цифре траженог троцифреног броја могу бити било који број од понуђена три, 1, 4 или 7. Према принципу производа, број тражених троцифрених бројева једнак је $3 \cdot 3 = 9$.

7.

Произвољна Булова функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ (изузев функције која је идентички једнака 1) може се представити у облику савршене конјунктивне нормалне форме (СКНФ)

$$f(p,q) = (f(1,1) \vee \overline{p} \vee \overline{q}) \wedge (f(1,0) \vee \overline{p} \vee q) \wedge (f(0,1) \vee p \vee \overline{q}) \wedge (f(0,0) \vee p \vee q).$$

Произвољна Булова функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ (изузев функције која је идентички једнака 0) може се представити у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ)

$$f(p,q) = (f(1,1) \wedge p \wedge q) \vee (f(1,0) \wedge p \wedge \overline{q}) \vee (f(0,1) \wedge \overline{p} \wedge q) \vee (f(0,0) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}).$$

Шеферова (ни) функција $\uparrow$ дефинисана је помоћу Кејлијеве таблице $\begin{array}{c|cc} \uparrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$.

Шеферова функција је негација конјункције, односно важи $p \uparrow q = \overline{p \wedge q}$.

Пирсова (нили) функција $\downarrow$ дефинисана је помоћу Кејлијеве таблице $\begin{array}{c|cc} \downarrow & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$.

Пирсова функција је негација дисјункције, односно важи $p \downarrow q = \overline{p \vee q}$.

За функцију $f(p,q) = p \uparrow q$, на основу Де Морганових закона, важи

$$f(p,q) = p \uparrow q = \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q},$$

што је и савршена конјунктивна нормална форма Шеферове функције.

8. За матрицу A важи $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ранг матрице једнак је 1 за свако $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\diamondsuit$ Илуструјмо на овом примеру како се рачуна ранг матрице по дефиницији. Ранг матрице дефинишемо као ред њене највеће регуларне подматрице. У случају матрице A имамо да је $\det A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$. Матрица A је сингуларна, али постоји регуларна подматрица реда 1 (добијена уклањањем друге врсте и колоне), па закључујемо да је ранг матрице једнак 1 за свако $\alpha \in \mathbb{R}$.

9. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности јесу $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$.

10.

Параметарски облик једначине праве p у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(x_0, y_0, z_0)$ и паралелна је са вектором $\vec{u}_p = (a,b,c)$ гласи

$$p: \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + a\,t \\ y & = & y_0 + b\,t \\ z & = & z_0 + c\,t. \end{array}$$

Вектор равни је вектор нормалан на дату раван. Вектор праве је вектор паралелан са датом правом. Вектор равни σ је $\vec{n}_\sigma = (0,0,1)$. Раван и права ортогоналне су ако су им вектори паралелни. Једначина праве која садржи тачку $M(1,1,1)$ и чији је вектор $\vec{u}_p = (0,0,1)$ гласи

$$p: \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & 1 + t,\ t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

– Тест основног знања – 03. 10. 2009.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\,e^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x.$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y'' = 0$.

4. Одредити вредности реалног параметра s за које геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{s}{4}\right)^n$ конвергира.

5. Нека је дат степени ред $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Одредити $S(2)$.

6. Колико различитих парних природних троцифрених бројева код којих цифре не могу да се понављају може да се напише користећи цифре 1, 4, 6 и 7?

7. Написати у облику СКНФ Булову функцију $f(p,q) = p \downarrow q$.

8. У зависности од вредности реалног параметра α одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & \alpha \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

9. За које вредности реалног параметра u хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} ux + 2y &= 0 \\ 2x + (u+3)y &= 0 \end{aligned}$$

има нетривијално решење.

10. Дати су вектори $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (1,3,5)$ и $\vec{c} = (2,5,8)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити:

(а) $\vec{b} \times \vec{a}$;

(б) $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}]$.

– Решења –

1. Интеграл можемо представити као збир четири таблична интеграла

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)\left(x^2+1\right)}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \\ &= x + \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + C.\end{aligned}$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

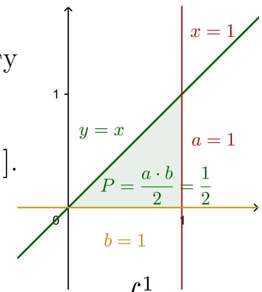
2.

Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Ако је f непрекидна и парна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

(а) Функција $f(x) = x\,e^{-x^2}$ јесте непрекидна и непарна на сегменту $[-\pi,\pi]$. Према томе, важи $\int_{-\pi}^{\pi} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

(б) Функција $f(x) = |x|$ јесте непрекидна и парна на сегменту $[-1,1]$. Према томе, важи $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1$.



Пример **(б)** можемо решити и графички. Вредност одређеног интеграла $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине дела равни који ограничавају праве $x=1$, $y=0$ и $y=x$. У питању је једнакокраки правоугли троугао чије су катете дужина 1, па је величина његове површине једнака $\frac{1}{2}$.

3. Дата једначина $y^{(4)} - y'' = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина четвртог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^4 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^2-1\right) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$. Корени карактеристичне једначине реални су бројеви $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ и $\lambda_4 = -1$. Приметимо да је један корен вишеструкости два, док су друга два корена проста. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^x$ и $y_4 = e^{-x}$. Опште решење диференцијалне једначине њихова је линеарна комбинација, односно

$$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2 + C_3\,y_3 + C_4\,y_4 = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^x + C_4\,e^{-x}.$$

За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

4.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

У питању је геометријски ред са количником $\frac{s}{4}$, који је конвергентан ако и само ако је $-1 < \frac{s}{4} < 1$, односно ако је $s \in (-4,4)$.

5.

> Маклоренов ред функције $f(x)=e^x$ јесте $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. За свако $x\in\mathbb{R}$ важи да је $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

За свако $x\in\mathbb{R}$ важи да је $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Према томе, имамо да је $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1=e^x-1$. За $x=2$ добијамо да је $S(2)=e^2-1$.

6. Како су у питању парни бројеви, последња цифра је 4 или 6. Уколико је последња цифра 4, пошто цифре не могу да се понављају, прва цифра је један од преостала три броја, 1, 6 или 7. Када смо изабрали прву цифру, друга ће бити један од преостала два броја. Према томе, троцифрених бројева састављених од цифара 1, 4, 6 и 7, код којих се цифре разликују и код којих је трећа цифра 4, има према принципу производа $3\cdot 2=6$. Истим резоновањем закључујемо да троцифрених бројева састављених од цифара 1, 4, 6 и 7, код којих се цифре разликују и који се завршавају цифром 6, има 6. Како се тражени број завршава или цифром 4 или цифром 6, према принципу збира закључујемо да парних троцифрених бројева код којих се цифре разликују и који су састављени од цифара 1, 4, 6 и 7 има $6+6=12$.

7.

> Произвољна Булова функција $f:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$ (изузев функције која је идентички једнака 1) може се представити у облику савршене конјунктивне нормалне форме (СКНФ)
>
> $$f(p,q)=(f(1,1)\vee\overline{p}\vee\overline{q})\wedge(f(1,0)\vee\overline{p}\vee q)\wedge(f(0,1)\vee p\vee\overline{q})\wedge(f(0,0)\vee p\vee q).$$
>
> Произвољна Булова функција $f:\{0,1\}^2\to\{0,1\}$ (изузев функције која је идентички једнака 0) може се представити у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ)
>
> $$f(p,q)=(f(1,1)\wedge p\wedge q)\vee(f(1,0)\wedge p\wedge\overline{q})\vee(f(0,1)\wedge\overline{p}\wedge q)\vee(f(0,0)\wedge\overline{p}\wedge\overline{q}).$$
>
> Шеферова (ни) функција $\uparrow$ дефинисана је помоћу Кејлијеве таблице $\begin{array}{c|cc}\uparrow & 0 & 1\\\hline 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}$.
>
> Шеферова функција је негација конјункције, односно важи $p\uparrow q=\overline{p\wedge q}$.
>
> Пирсова (нили) функција $\downarrow$ дефинисана је помоћу Кејлијеве таблице $\begin{array}{c|cc}\downarrow & 0 & 1\\\hline 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}$.
>
> Пирсова функција је негација дисјункције, односно важи $p\downarrow q=\overline{p\vee q}$.

Савршена конјунктивна нормална форма функцију $f(p,q)=p\downarrow q$ јесте

$$f(p,q)=(\overline{p}\vee\overline{q})\wedge(\overline{p}\vee q)\wedge(p\vee\overline{q}).$$

8. Приметимо да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће. Такође, елементи прве врсте пропорционални су елементима друге врсте ако и само ако је $\alpha=16$. Према томе, закључујемо да је ранг матрице A једнак 2 за $\alpha\neq 16$ и да је ранг матрице A једнак 1 за $\alpha=16$.

До истог закључка долазимо и посматрајући колоне. Елементи прве колоне пропорционални су елементима друге колоне. Елементи прве и треће колоне пропорционални су ако и само ако је $\alpha = 16$. Важи да је $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 1, & \alpha = 16, \\ 2, & \alpha \neq 16. \end{cases}$

9. Хомогени систем има нетривијално решење ако и само ако је детерминанта матрице система једнака нули. Детерминанта матрице система једнака је

$$\begin{vmatrix} u & 2 \\ 2 & u+3 \end{vmatrix} = u(u+3) - 4 = u^2 + 3, u - 4 = (u+4)(u-1).$$

Систем има нетривијално решење ако и само ако је $u = -4$ или $u = 1$.

10.

Нека су дати вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ из $\mathbb{R}^3$. Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ јесте вектор

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \end{aligned}$$

где је $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ и $\vec{k} = (0,0,1)$. Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ реалан је број $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. За мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

За векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ одређујемо одговарајући векторски и мешовити производ

(а) $\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3 \cdot 3 - 5 \cdot 2, 5 \cdot 1 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = (-1, 2, -1).$

(б) $[\vec{a}, \vec{c}, \vec{c}] = 0.$

– Тест основног знања – 07. 02. 2010.

1. Колико различитих непарних природних троцифрених бројева може да се напише користећи цифре 1, 4, 6 и 7 (цифре се не могу понављати)?

2. Нека је a произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $a \vee a$; **(б)** $a \wedge a$; **(в)** $a \Rightarrow a$;

(г) $a \uparrow a$; **(д)** $a \downarrow a$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

3. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\,x - 3 - x^2}}.$$

4. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x$.

5. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y'y - x = 0$.

6. Дата је диференцијална једначина $y'' - y = 0$. Заокружити слово испред њеног општег решења:

(а) $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$;

(б) $y = C_1 x + C_2 x e^x$;

(в) $y = C_1 e^x + C_2 + C_3$;

(г) $y = C_1 + C_2 e^{-x}$;

(где су C_1, C_2, и C_3 произвољне реалне константе)

(д) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

7. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3}{n}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^3}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{3}{n}$;

(д) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

8. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{bmatrix}$ у зависности од вредности реалног параметра a.

9. Одредити минимални полином матрице $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

10. Написати једначину праве у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $C(0,1,0)$ и нормална је на раван $\theta : z = 0$.

– Резултати –

1. Тражених троцифрених бројева има 12.

♣ Видети шести задатак на тесту 03. 10. 2009.

2. Тачан је одговор **(в)**.

♣ Видети девети задатак на тесту 18. 01. 2009.

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2+4x-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2)+C.$

♣ Видети први задатак на тесту 18. 01. 2009.

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x = 0.$

♣ Видети други задатак под **(а)** на тесту 18. 01. 2009.

5. Опште решење дате диференцијалне једначине гласи $y^2 = x^2 + C$ или $y = \pm\sqrt{x^2+C}$.

♣ Видети трећи задатак на тесту 23. 06. 2007.

6. Тачан је одговор **(д)**.

♣ Видети четврти задатак на тесту 18. 01. 2009.

7. Тачан је одговор **(б)**.

♣ Видети пети задатак на тесту 20. 09. 2008.

8. Ранг матрице A једнак је 1 за свако $a \in \mathbb{R}$.

♣ Видети осми задатак на тесту 19. 09. 2009.

9. Минимални полином матрице B једнак је $\mu_B(\lambda) = \lambda - 3$.

♣ Видети седми задатак на тесту 18. 01. 2009.

10. Једначина праве која садржи тачку $C(0,1,0)$ и чији је вектор $\vec{u}_p = (0,0,1)$ гласи

$$p: \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 1 \\ z &=& t,\ t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

♣ Видети десети задатак на тесту 19. 09. 2009.

– Тест основног знања – 20. 06. 2010.

1. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су контрадикције:

(а) $p \Rightarrow \overline{p}$; **(б)** $\overline{p} \vee p$; **(в)** $p \wedge \overline{p}$;

(г) $\overline{p} \Rightarrow p$; **(д)** $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није контрадикција.

2. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$$

3. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x.$$

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$, а затим и ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.

5. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' - 5y' + 6y = 0$.

6. Навести пример:

(а) конвергентног геометријског реда;

(б) дивергентног геометријског реда.

7. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$. Овај ред има област конвергенције:

(а) $(-1,1)$; **(б)** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; **(в)** $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; **(г)** $[-2,2)$;

(д) ниједан од претходних интервала.

8. За које вредности реалног параметра a хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$ax + 2y = 0$$
$$2x + (a+3)y = 0$$

има нетривијално решење?

9. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори из $\mathbb{R}^3$, и нека је са $\cdot$ означен скаларни производ вектора у $\mathbb{R}^3$, а са $\times$ векторски производ вектора у $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$; **(б)** $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$;

(в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; **(г)** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

10. Колико грана има потпун граф са 10 чворова?

– Резултати –

1.

(а) Исказна формула $p \Rightarrow \overline{p}$ једнака је исказној формули $\overline{p}$, па према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(б) Исказна формула $\overline{p} \vee p$ јесте таутологија, закон искључења трећег.

(в) Исказна формула $p \wedge \overline{p}$ јесте контрадикција, негација закона искључења трећег.

(г) Исказна формула $\overline{p} \Rightarrow p$ једнака је исказној формули p, према томе није ни таутологија ни контрадикција.

(д) Како је исказна формула $\overline{p} \vee p$ таутологија, а $p \wedge \overline{p}$ контрадикција, закључујемо да је импликација $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$ контрадикција.

Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

♣ Упоредити задатак са петим задатком са теста 20. 02. 2008.

2. Свођењем квадратног тринома $4x-3-x^2$ на канонски облик дати интеграл постаје таблични. Имамо $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2+4x-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2)+C.$
Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

♣ Упоредити задатак са првим задатком са теста 18. 01. 2009.

3. Применом Њутн–Лајбницове формуле имамо:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}(\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}) = 2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2-\sqrt{2}.$$

4. Диференцијална једначина $x\,\mathrm{d}x+(y+1)\,\mathrm{d}y=0$ јесте диференцијална једначина која раздваја променљиве. Опште решење дате једначине гласи $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x + \int (y+1)\,\mathrm{d}y = \widetilde{C}$, односно $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{2} = \widetilde{C}$, тј. то је фамилија кружница $x^2+(y+1)^2=C$. За $x=y=0$ добијамо да је $C=1$. Интегрална крива дате диференцијалне једначине која пролази кроз тачку $(0,0)$ јесте кружница $x^2+(y+1)^2=1$.

♣ Упоредити задатак са трећим задатком са теста одржаног 08. 02. 2009.

5. Опште решење дате диференцијалне једначине гласи $y=C_1\,e^{2x}+C_2\,e^{3x}$.

♣ Упоредити задатак са трећим задатком са теста одржаног 25. 08. 2009.

6. Геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q\in\mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $|q|<1$. Дакле, под **(а)** су тачни сви одговори $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, за $|q|<1$ (нпр. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$), а под **(б)** су тачни сви одговори $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, за $|q|\geq 1$ (нпр. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$).

♣ Упоредити са петим задатком са теста одржаног 28. 06. 2008. године.

7. На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ једнак је $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\,2^{n+1}}{n\,2^n} = 2$. За $x = 2$ ред постаје хармонијски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ који дивергира. За $x = -2$ ред постаје $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Према Лајбницовом критеријуму тај ред конвергира. Значи, област конвергенције полазног степеног реда јесте полуотворени интервал $[-2, 2)$.

Тачан је одговор **(г)**.

♣ Упоредити са петим задатком са теста одржаног 07. 06. 2009. године.

8. Хомогени систем има нетривијално решење ако и само ако је детерминанта матрице система једнака нули. Детерминанта матрице система једнака је

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{vmatrix} = a(a+3) - 4 = a^2 + 3a - 4 = (a+4)(a-1).$$

Систем има нетривијално решење ако и само ако је $a = -4$ или $a = 1$.

♣ Упоредити са седмим задатком са теста одржаног 28. 06. 2008. године.

9.

(а) Имамо да је $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ ако и само ако за угао φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи да је $\sin\varphi = 1$, односно ако и само ако је $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У општем случају тврђење није тачно.

(б) Апсолутна вредност скаларног производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнака је производу њихових интензитета ако и само ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, тј. ако и само ако за угао φ између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи да је $\cos\varphi = \pm 1$, односно ако и само ако је $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. У општем случају тврђење није тачно.

✓**(в)** Из дефиниције скаларног производа директно следи да је $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, тј. да је скаларни производ комутативан.

(г) Важи $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, што је последица дефиниције векторског производа и особине да детерминанта мења знак уколико две њене врсте замене места.

Тачан је само одговор **(в)**.

♣ Упоредити са деветим задатком са теста одржаног 08. 02. 2009. године.

10. Број грана потпуног графа са 10 чворова једнак је $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

♣ Упоредити са десетим задатком са теста одржаног 23. 08. 2008. године.

– Тест основног знања – 02. 10. 2010.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x+3)}.$$

2. Израчунати вредности одређених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$;

(б) $\displaystyle\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = 3y$.

4. Израчунати: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

5. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$

6. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\det A = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rang}A < n$;

(б) $\mathrm{rang}A = n \Longleftrightarrow \det A > 0$;

(в) $\mathrm{rang}A = n \Longrightarrow \exists A^{-1}$;

(г) $\mathrm{rang}A = n \Longleftrightarrow \det A \neq 0$;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

7. Одредити један сопствени вектор матрице

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. За које су вредности реалног параметра α вектори $\vec{u} = (2,8,6)$ и $\vec{v} = (1,\alpha,3)$ векторског простора $\mathbb{R}^3$:

(а) колинеарни;

(б) ортогонални.

9. Нека је a произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $a \vee a$; **(б)** $a \wedge a$; **(в)** $a \Rightarrow a$;

(г) $a \uparrow a$; **(д)** $a \Leftrightarrow a$; **(ђ)** $\overline{a}$;

(е) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

10. Колико чворова има стабло са 100 грана?

– Резултати –

1. Увођењем смене добијамо таблични интеграл:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x+3)} = \left\{ \begin{array}{c} t = 2x+3 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(2x+3) + C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2.

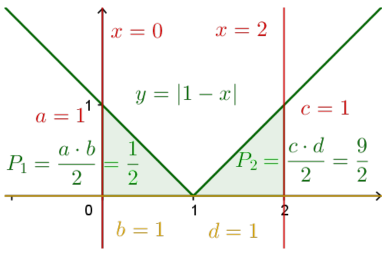
> Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(а) Имамо да је $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{2} - 0 + 0\right) + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = 1.$

(б) Функција $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ непрекидна је и непарна на сегменту $[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}]$. Према томе, важи $\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{x}{e^{x^2}}\,\mathrm{d}x = 0.$

Пример **(а)** можемо решити и графички.

Вредност интеграла $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине дела равни који ограничавају праве $x=0$, $x=1$, $y=0$ и крива $y = |1-x|$. У питању су два подударна једнакокрака правоугла троугла чије су обе катете дужина 1, па је величина површине сваког од њих једнака $\frac{1}{2}$. Вредност полазног одређеног интеграла једнака је $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.



3. Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом: $y' = 3y \Rightarrow \frac{dy}{\mathrm{d}x} = 3y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3\mathrm{d}x$. Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је: $\ln|y| = 3x + C$, односно $y = C_1 e^{3x}$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине гласи $y = C_1 e^{3x}$, што се једноставно може проверити.

4.

> Важи: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, где је q реална константа која задовољава $q \in (-1,1)$.
>
> Такође, за $q \in (-1,1)$, важи и: $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$.

Дакле:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

5.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се израчунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Дакле, полупречник (радијус) конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ јесте:

$$R \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$
$$=\; e^{-1}.$$

6.

Ранг матрице једнак је реду њене највеће регуларне подматрице. Уколико је квадратна матрица реда n регуларна, њен ранг ће бити једнак n, и обрнуто, уколико је ранг квадратне матрице реда n једнак n, тада је она регуларна. За сингуларну квадратну матрицу A реда n важи да је $\mathrm{rang}A < n$.

Дакле, тврђење **(г)** јесте тачно (матрица је регуларна ако и само ако је њена детерминанта различита од нуле).
Такође, уколико је матрица регуларна, тада постоји њена инверзна матрица A^{-1}, па је и тврђење **(в)** тачно.
Тврђење **(б)** није тачно, јер из чињенице да је ранг квадратне матрице реда n једнак n следи да је њена детерминанта различита од нуле, али то не значи да њена детерминанта мора бити позитивна (њена детерминанта може бити и негативан број).
Тврђење **(а)** јесте тачно (матрица је сингуларна ако и само ако је њена детерминанта једнака нули).
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(в)** и **(г)**.

7. Карактеристични полином матрице A јесте $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)$.
Сопствене вредности матрице A јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_A(\lambda)$.
Према томе, важи да су сопствене вредности $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$.
Сопствени вектори су нетривијална решења матричних једначина $(A - \lambda_1 \mathrm{I})\, X_1 = \mathbf{0}$ и $(A - \lambda_2 \mathrm{I})\, X_2 = \mathbf{0}$.
Нека је $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ и $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$.
Тада из $\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 3-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ добијамо $y_1 = 0$.
Сопствени вектор X_1 једнак је вектору $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Из $\begin{bmatrix} 2-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ добијамо $x_2 = 0$.
Сопствени вектор X_2 једнак је вектору $\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

♣ Упоредити са осмим задатком са теста одржаног 13. 02. 2011. године.

8.

(а) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ биће колинеарни ако и само ако постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да важи $\vec{a} = t\,\vec{b}$, односно ако постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да важи $(2,8,6) = t\,(1,\alpha,3)$. Изједначавањем одговарајућих координата добијамо да је $t = 2$ и $\alpha = 4$. Према томе, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни су за $\alpha = 4$.

(б) Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ биће ортогонални ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули, тј. ако важи да је

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,8,6)\cdot(1,\alpha,3) = 2\cdot 1 + 8\cdot\alpha + 6\cdot 3 = 20 + 8\,\alpha = 0.$$

Према томе, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ ортогонални су за $\alpha = -\dfrac{5}{2}$.

♣ Упоредити са осмим задатком са теста одржаног 27. 08. 2011. године.

9. Исказна алгебра је Булова алгебра. Према томе, све теореме Булове алгебре важе и у исказној алгебри. У Буловој алгебри за сваки елемент a важи $a \vee a = a$ и $a \wedge a = a$ (идемпотентност), па закључујемо да исказне формуле $a \vee a$ и $a \wedge a$ нису таутологије (нису једнаке 1 за све вредности исказног слова a – уколико исказно слово a има истинитосну вредност 0, исказне формуле $a \vee a$ и $a \wedge a$ имају истинитосну вредност 0). Такође, јасно је да исказна формула $\overline{a}$ није таутологија (уколико a има истинитосну вредност 1, $\overline{a}$ има истинитосну вредност 0). Слично, за Шеферову (ни) $\uparrow$ функцију важи да је $a \uparrow a = \overline{a \wedge a} = \overline{a}$, па ни исказна формула $a \uparrow a$ није таутологија. Лако се проверава да исказне формуле $a \Rightarrow a$ и $a \Leftrightarrow a$ јесу таутологије (тачне су, односно имају истинитосну вредност 1 и у случају да исказно слово a има истинитосну вредност 1 и у случају да исказно слово a има истинитосну вредност 0).

Тачни су одговори **(в)** и **(д)**.

10.

> Подсетимо се дефиниције стабла: то је повезан граф са n ($n > 1$) чворова и $m = n - 1$ грана.

Дакле, стабло са 100 грана има 101 чвор.

– Тест основног знања – 09. 10. 2010.

1. Колико има природних бројева са највише n цифара (0 није природан број)?

2. Нека је p произвољно исказно слово. Заокружити слова испред исказних формула које су контрадикције:

(а) $p \Rightarrow \overline{p}$; **(б)** $\overline{p} \vee p$; **(в)** $p \wedge \overline{p}$;

(г) $\overline{p} \Rightarrow p$; **(д)** $(\overline{p} \vee p) \Rightarrow (p \wedge \overline{p})$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није контрадикција.

3. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$$

4. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

5. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = 3y$.

6. Израчунати: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

7. Одредити један сопствени вектор матрице

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Нека је A реална квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) карактеристични полином матрице A јесте степена n;

(б) матрица A увек има n различитих сопствених вредности;

(в) степен минималног полинома матрице A строго је мањи од степена њеног карактеристичног полинома;

(г) ниједан од претходних одговора није тачан.

9. За које су вредности реалног параметра α вектори $\vec{a} = (2, 8, 6)$ и $\vec{b} = (1, \alpha, 3)$ векторског простора $\mathbb{R}^3$:

(а) колинеарни;

(б) ортогонални.

10. Колико (неоријентисаних) грана има потпун граф са 10 чворова?

– Резултати –

1. У питању су сви једноцифрени, двоцифрени, ..., n-тоцифрени бројеви, дакле, сви бројеви мањи од 10^n (10^n је најмањи природан број са $n+1$ цифром). Таквих бројева, јасно, има $10^n - 1$.

2. Тачни одговори су **(в)** и **(д)**.

♣ Видети пети задатак на тесту 20. 02. 2008.

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2+4x-4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2) + C.$

♣ Видети први задатак на тесту 18. 01. 2009.

4.

У одређеном интегралу $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ можемо увести смену $t = \varphi(x)$ уколико су испуњени следећи услови:

- φ је строго монотона функција на сегменту $[a, b]$;
- $\psi = \varphi^{-1}$ има непрекидан први извод на интервалу $(\varphi(a), \varphi(b))$;
- f је непрекидна функција на сегменту $[\varphi(a), \varphi(b)]$;

и тада важи да је $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Нека је функција f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и нека је F произвољна примитивна функција функције f на том сегменту. Тада важи Њутн–Лајбницова формула

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Такође, за сваку интеграбилну функцију f на сегменту $[a, b]$ важи:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Задатак решавамо увођењем смене и применом Њутн–Лајбницове формуле:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} t = \cos x, & x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1 \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x, & x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} = -\int_1^0 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

5. Опште решење дате диференцијалне једначине гласи $y = C_1 e^{3x}$.

♣ Видети трећи задатак на тесту 02. 10. 2010.

6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{3}$.

♣ Видети четврти задатак на тесту 02. 10. 2010.

7. Сопствени вектор X_1 једнак је вектору $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Сопствени вектор X_2 једнак је вектору $\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

♣ Видети седми задатак на тесту 02. 10. 2010.

8. Тачан је само одговор **(а)**.

♣ Видети девети задатак на тесту 28. 02. 2007.

9.

(а) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни су за $\alpha=4$.

(б) Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални су за $\alpha=-\frac{5}{2}$.

♣ Видети осми задатак на тесту 02. 10. 2010.

10. Број грана потпуног графа са 10 чворова једнак је $\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$.

♣ Видети десети задатак на тесту 20. 06. 2010.

– Тест основног знања – 23. 01. 2011.

1. Одредити неодређени интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x+1|\mathrm{d}x$.

3. Написати диференцијалну једначину првог реда чије је опште решење $y = Ce^{3x}$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''' - y = 0$.

5. За које вредности реалног параметра α нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^{\alpha}}}$ конвергира?

6. Нека је дат степени ред $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

Одредити $S\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

7. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Навести квадратну матрицу реда 2 чији су минимални и карактеристични полином једнаки.

9. Написати једначину праве у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи тачку $M(0, 2, 0)$ и паралелна је са x-осом.

10. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које нису таутологије:

(а) $p \vee \overline{p}$; **(б)** $p \wedge p$; **(в)** $p \Rightarrow p$;

(г) $p \Rightarrow q$; **(д)** $\overline{p}$;

(ђ) све претходне исказне формуле јесу таутологије.

– Резултати –

1. Како је $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, имамо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$.

2. Важи да је $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 2$.

3. Хомогена линеарна диференцијална једначина првог реда $y' = 3\,y$ има решење $y = Ce^{3\,x}$.

♣ Упоредити задатак са трећим задатком са теста 02. 10. 2010.

4. Задатак је исти као трећи задатак са теста 26. 01. 2008.

5. Редови $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^{\alpha}}}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ јесу еквиконвергентни. Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ конвергира за $\dfrac{\alpha}{2} > 1$, односно за $\alpha > 2$. Према томе, и ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^{\alpha}}}$ конвергира за $\alpha > 2$.

6. Маклоренов ред функције $S(x) = \ln(1+x)$ јесте $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. За свако $x \in (-1,1]$ важи да је $S(x) = \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Према томе, имамо да је $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

7. Приметимо да су прва и друга врста матрице A линеарно независне, као и да су елементи треће врсте једнаки збиру одговарајућих елемената прве и друге врсте. Према томе, ранг матрице A једнак је 2.

8. Минимални полином матрице дели њен карактеристични полином. Нуле карактеристичног полинома такође су нуле минималног полинома истог или мањег реда. Према томе, уколико карактеристични полином матрице реда 2 има две различите нуле, њени минимални и карактеристични полиноми јесу једнаки. Нпр. минимални и карактеристични полиноми матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ једнаки су. Ако карактеристични полином матрице има једну нулу вишеструкости 2, имамо две могућности. Прва могућност је да је минимални полином једнак карактеристичном као код матрице $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. У другом случају минимали полином има једну просту нулу, као код матрице $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

9. Права паралелна са x-осом паралелна је и са вектором $\vec{i} = (1,0,0)$. Једначина праве која садржи тачку $M(0,2,0)$ и паралелна је са вектором $\vec{i} = (1,0,0)$ гласи

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

10.

(а) Исказна формула $p \vee \overline{p}$ јесте таутологија.

✓**(б)** Исказна формула $p \wedge p$ једнака је p. Према томе, није таутологија.

(в) Исказна формула $p \Rightarrow p$ јесте таутологија.

✓**(г)** Исказна формула $p \Rightarrow q$ није таутологија, јер за $p = 1$ и $q = 0$ дата импликација има вредност 0.

✓**(д)** Исказна формула $\overline{p}$ није таутологија.

Тачни одговори су **(б)**, **(г)** и **(д)**.

– Тест основног знања – 13. 02. 2011.

1. На колико начина можемо формирати регистарску таблицу која има два произвољна слова српске азбуке на свом почетку, а затим четири произвољне цифре.

2. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

3. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају крива $y=\ln x$ и праве $x=\dfrac{1}{e}$, $x=e$ и $y=0$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'''=x$.

5. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2+2}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(-1)^{5n}}{5n+5}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

6. Дат је степени ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$. Овај ред има област конвергенције:

(а) $(-1,1)$; **(б)** $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; **(в)** $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$; **(г)** $[-2,2)$;

(д) ниједан од претходних интервала.

7. Представити вектор $\vec{x}=(1,2,3)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}=(1,1,0)$ и $\vec{c}=(1,0,1)$.

8. Одредити сопствене векторе матрице

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

9. Одредити вектор нормале равни α у простору $\mathbb{R}^3$ дате једначином $2x-2y+z=1$.

10. Колико чворова има потпун граф са 45 грана?

– Решења –

1. Српска азбука има 30 слова. На првој и другој позицији у регистарској таблици може бити записано било које од 30 слова азбуке. На остале четири позиције регистарске таблице може бити записана било која цифра из десеточланог скупа цифара $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Број начина за формирање регистарске таблице, према правилу производа, јесте

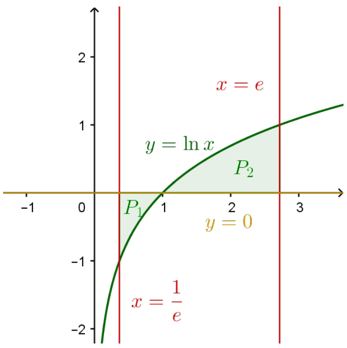
$$n = 30 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000000.$$

2. Рационалисањем имениоца подинтегралне функције дати неодређени интеграл своди се на збир два таблична интеграла

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} &= \int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \\
&= \frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

3. Део равни ограничен кривом $y = \ln x$ и правама $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ и $y = 0$ налази се испод, а део изнад x-осе. Величину површине траженог дела равни можемо представити као збир величина површина делова равни на слици означених са P_1 и P_2. Неодређени интеграл функције $y = \ln x$ одређујемо методом парцијалне интеграције, док одговарајуће одређене интеграле рачунамо коришћењем Њутн–Лајбницове формуле.



$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$P = P_1 + P_2 = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$$

$$= -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

4. У питању је непотпуна диференцијална једначина трећег реда. Узастопном применом поступка интеграције добијамо

$$\begin{aligned}
y''' &= x \\
y'' &= \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \widetilde{C_1} \\
y' &= \int \left(\frac{x^2}{2} + \widetilde{C_1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} + \widetilde{C_1}\,x + C_2 \\
y &= \int \left(\frac{x^3}{6} + \widetilde{C_1}x + C_2\right)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{24} + \widetilde{C_1}\,\frac{x^2}{2} + C_2\,x + C_3 \\
y &= \frac{x^4}{24} + C_1\,x^2 + C_2\,x + C_3.
\end{aligned}$$

Једначина $y''' = x$ јесте нехомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда са константним коефицијентима. Опште решење хомогене једначине $y''' = 0$ јесте $y_h = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, јер одговарајућа карактеристична једначина $\lambda^3 = 0$ има један корен $\lambda = 0$ вишеструкости три. Методом неодређених коефицијената одређујемо једно партикуларно решење дате нехомогене једначине. Како $\lambda = 0$ јесте корен вишеструкости три карактеристичне једначине, тражено партикуларно решење облика је $y_p = x^3 (A\,x + B) = A\,x^4 + B\,x^3$. Имамо да је $y_p' = 4\,A\,x^3 + 3\,B\,x^2$, $y_p'' = 12\,A\,x^2 + 6\,B\,x$ и $y_p''' = 24\,A\,x + 6\,B$. Заменом $y_p''' = 24\,A\,x + 6\,B$ у полазну једначину $y''' = x$, добијамо да је $24\,A\,x + 6\,B = x$. Изједначавањем коефицијената уз исти степен променљиве x са леве и десне стране, добијамо да је $A = \dfrac{1}{24}$ и $B = 0$. Према томе, једно партикуларно решење нехомогене једначине јесте $y_p = \dfrac{x^4}{24}$, а њено опште решење јесте $y = y_h + y_p = C_1\,x^2 + C_2\,x + C_3 + \dfrac{x^4}{24}$.

5.

> Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, конвергира ако и само ако је $\alpha > 1$.
> Подсетимо се да почетна вредност индекса n не утиче на конвергенцију реда. Нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$, $k \in \mathbb{N}$, еквиконвергентни су, оба реда су или конвергентна или дивергентна.

(а) Нумерички редови $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ јесу еквиконвергентни. На основу наведеног тврђења имамо да је ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан. Из другог поредбеног критеријума следи да је ред $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2+2}$ конвергентан.

(б) Применом Лајбницовог критеријума закључујемо да је ред $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^{5n}}{5n+5} = -\frac{1}{5}\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конвергентан.

(в) Како је $\dfrac{4}{3} > 1$, ред $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ је дивергентан.

(г) Ред $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$ је конвергентан, јер је $\dfrac{3}{4} < 1$.

Тачни одговори су **(а)**, **(б)** и **(г)**.

6.

> Према Коши–Адамаровом ставу, полупречник конвергенције R степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$ може се рачунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$ једнак је $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)\,2^{n+2}}{(n+1)\,2^{n+1}} = 2$. За $x = 2$ ред постаје хармонијски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ који дивергира. За $x = -2$ ред постаје $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Према Лајбницовом критеријуму тај ред конвергира. Значи, област конвергенције полазног степеног реда јесте полуотворени интервал $[-2, 2)$.

Тачан одговор је **(г)**.

7. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јесу линеарно независни, што следи на основу чињенице да је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Према томе, ови вектори чине једну базу векторског простора $\mathbb{R}^3$. Сваки вектор векторског простора $\mathbb{R}^3$ може се на јединствени начин представити као линеарна комбинација вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

За вектор $\vec{x}$ важи

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} \\ (1,2,3) &= \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(1,1,0) + \gamma\,(1,1,1) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma). \end{aligned}$$

Остало је још да решимо систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 1 \\ \beta+\gamma &= 2 \\ \gamma &= 3. \end{aligned}$$

Решење система је $\gamma = 3$, $\beta = -1$ и $\alpha = -1$. Дакле, вектор $\vec{x}$ представљамо у бази $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ као линеарну комбинацију $\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b} + 3\,\vec{c}$.

8. Карактеристични полином матрице A јесте

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(3-\lambda).$$

Сопствене вредности матрице A јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_A(\lambda)$. Према томе, важи да су сопствене вредности $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Сопствени вектори су нетривијална решења матричних једначина $(A - \lambda_1 \mathrm{I})\cdot X_1 = \mathbf{0}$ и $(A - \lambda_2 \mathrm{I})\cdot X_2 = \mathbf{0}$. Нека је $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ и $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Тада из $\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 3-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ добијамо $y_1 = 0$. Сопствени вектор X_1 једнак је колона-матрици $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Из $\begin{bmatrix} 2-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ добијамо $x_2 = 0$. Сопствени вектор X_2 једнак је колона-матрици $\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

9. Вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α сваки је вектор облика $\vec{n}_\alpha = t\,(2,-2,1)$, где је $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

10.

> Потпун граф је граф код кога су свака два чвора спојена граном. Ако је $n \in \mathbb{N}$ број чворова потпуног графа, онда је његов број грана једнак $\binom{n}{2}$.

Из услова задатка важи да је $\binom{n}{2} = 45$. Имамо да је $\dfrac{n\,(n-1)}{2} = 45$, односно $n^2 - n - 90 = 0$. Решења дате квадратне једначине јесу $n = -9$ и $n = 10$. Број чворова потпуног графа са 45 грана једнак је 10.

Упоредити задатак са осмим задатком са теста 03. 02. 2007.

– Тест основног знања – 11. 06. 2011.

1. Одредити неодређени интеграл $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

2. Дата је диференцијална једначина $y'' - y = 0$. Нека су C_1, C_2 и C_3 произвољне реалне константе. Заокружити слова испред општег решења дате диференцијалне једначине:

(а) $y = C_1 e^x + 2C_2 e^x$; **(б)** $y = C_1 e^x + C_2 + C_3$;

(в) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; **(г)** $y = C_1 x + C_2 x e^x$;

(д) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

3. Заокружити слова испред конвергентних редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} 3$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n+1}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(д) ниједан од претходних редова није конвергентан.

4. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$.

5. У зависности од вредности реалног параметра α одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & \alpha \\ 4 & 16 & 12 \end{bmatrix}.$$

6. У зависности од вредности реалног параметра a решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + a\,y &= a. \end{aligned}$$

7. Одредити сопствене вредности матрице

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. Дати су вектори $\vec{u} = (1, 0, 1)$ и $\vec{v} = (2, 3, 2)$ у векторском простору $\mathbb{R}^3$. Одредити:

(а) $\vec{u} \cdot \vec{v}$;

(б) $\vec{u} \times \vec{v}$.

9. Одредити вектор нормале равани α у простору $\mathbb{R}^3$ дате једначином $2x + 5z = 1$.

10. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \wedge \overline{p}$; **(б)** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;

(в) $p \vee \overline{p}$; **(г)** $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$;

(д) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

– Резултати –

1. Важи да је $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$.

2. За детаљно решење погледати четврти задатак са теста 18. 01. 2009. Тачан одговор је **(в)**.

3. Тачан одговор је **(г)**. Ред са константним члановима и хармонијски ред јесу дивергентни редови. Примери **(в)** и **(г)** разматрани су у петом задатку са теста 08. 02. 2009.

4. Полупречник конвергенције је $R = 2$. Погледати шести задатак са теста 13. 02. 2011. за детаљно решење.

5. Задатак је исти као осми задатак са теста 25. 08. 2009. За ранг матрице A важи $\operatorname{rang} A = \begin{cases} 1, & \alpha = 6; \\ 2, & \alpha \neq 6. \end{cases}$

6. Задатак је исти као осми задатак са теста 07. 06. 2009. За $a = 1$ систем има бесконачно решења $\{(r, 1-r)\,|\, r \in \mathbb{R}\}$. Уколико је $a \neq 1$, систем има јединствено решење, $x = 0$ и $y = 1$.

7. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = (-1-\lambda)(5-\lambda)$. Сопствене вредности матрице B јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_B(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности јесу $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$.

8. Сличан овом задатку јесте девети задатак са теста 25. 08. 2009. За дате векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$ важи:

(а) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,0,1) \cdot (2,3,2) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 4$;

(б) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (0 \cdot 2 - 1 \cdot 3, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2) = (-3, 0, 3)$.

9. Вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ равни α сваки је вектор облика $\vec{n}_\alpha = t \cdot (2,0,5)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10. Задатак је исти као седми задатак са теста 25. 08. 2009.

– Тест основног знања – 27. 08. 2011.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2-3\,x+2}.$$

2. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_1^3 \left|\frac{3+x}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\,y' = y + x$ на интервалу $(0,+\infty)$.

4. Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) збир два конвергентна реда јесте конвергентан ред;

(б) збир два дивергентна реда увек је дивергентан ред;

(в) редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{(2\,n-1)(5\,\sqrt[3]{n}-1)}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10\,\sqrt[3]{n^2}}$ јесу еквиконвергентни;

(г) ако је ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ конвергентан, онда је и ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ конвергентан;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

5. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{4}\right)^n$.

6. За које вредности реалног параметра a хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} a\,x+2\,y&=0\\ 2\,x+(a+3)\,y&=0 \end{aligned}$$

има нетривијално решење?

7. Одредити минимални полином матрице

$$B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

8. За које су вредности реалног параметра α вектори $\vec{u}=(3,9,6)$ и $\vec{v}=(1,\alpha,2)$ векторског простора $\mathbb{R}^3$:

(а) колинеарни;

(б) ортогонални.

9. Одредити координате пресечне тачке праве

$$p:\ \begin{aligned} x&=1+2t\\ y&=t\\ z&=2-t\end{aligned}$$ и равни $\sigma: 2x+y-3z+12=0$

у простору $\mathbb{R}^3$.

10. Колико различитих природних седмоцифрених бројева може да се напише од цифара $1,1,1,2,2,3,3$?

– Резултати –

1. У питању је интеграл неправе рационалне функције. Представимо дату рационалну функцију као збир полинома и праве рационалне функције. Важи да је $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x^2-3x+2+3x-2}{x^2-3x+2} = 1 + \dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$. Разложимо рационалну функцију $\dfrac{3x-2}{x^2-3x+2}$ на збир парцијалних разломака. Имамо да је $\dfrac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$. Нађимо коефицијенте A и B из претходне једнакости. Множењем дате једнакости са $(x-1)(x-2)$ добијамо да је $3x-2 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B$. Упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене имамо систем једначина

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ 2A+B &= 2 \end{aligned}$$

чије је решење $A=-1$ и $B=4$.

Према томе, важи да је

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = x + \ln\frac{(x-2)^4}{|x-1|} + C.$$

♢ Други начин за одређивање коефицијената A и B јесте замена, редом, вредности $x=2$ и $x=1$ у једнакост $3x-2 = A(x-2)+B(x-1)$. Одмах добијамо за $x=2$ да је $B=4$, а за $x=1$ да је $A=-1$. Овај метод је згодно примењивати када су нуле полинома у имениоцу рационалне подинтегралне функције реалне и различите.

2. Важи да је $\displaystyle\int_1^3 \left|\frac{3+x}{x^2}\right| \mathrm{d}x = 2 + \ln 3$.

♣ Погледати други задатак са теста 08. 02. 2009.

3. Дата једначина је на интервалу $(0,+\infty)$ еквивалентна хомогеној диференцијалној једначини $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$. Увођењем смене $z = \dfrac{y}{x}$ добијамо једначину $z'x + z = 1 + z$, односно диференцијалну једначину која раздваја променљиве $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ чије је опште решење $z = \ln|x| + C$. Опште решење полазне једначине на интервалу $(0,+\infty)$ гласи $y = x\ln x + Cx$.

♣ За детаље погледати трећи задатак са теста 08. 02. 2015.

4. Тачни одговори су **(а)**, **(в)** и **(г)**. Прокоментаришимо пример **(в)**. Редови са позитивним члановима $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ јесу еквиконвергентни, према другом поредбеном критеријуму, ако је $a_n \sim b_n$, $n \to +\infty$. Како је $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}\, 10\sqrt[3]{n^2} = 1$, закључујемо да је $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)} \sim \dfrac{1}{10\sqrt[3]{n^2}}$, $n \to +\infty$, односно да су редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10\sqrt[3]{n^2}}$ еквиконвергентни.

♣ Погледати четврти задатак са теста 28. 06. 2008.

5. Полупречник конвергенције јесте $R = 4$.

♣ Погледати шести задатак са теста 08. 02. 2009.

6. Задатак је исти као седми задатак са теста 28. 06. 2008.

7. Минимални полином матрице дели њен карактеристични полином. Нуле карактеристичног полинома такође су нуле минималног полинома истог или мањег реда. Према томе, уколико карактеристични полином матрице реда 2 има две различите нуле, њени минимални и карактеристични полиноми јесу једнаки. Карактеристични полином матрице B једнак је

$$\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\,(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5).$$

Како карактеристични полином матрице B има две различите нуле, закључујемо да је њен минимални полином једнак $\mu_B(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-5)$.

8.

(а) Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ биће колинеарни ако и само ако постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да важи $\vec{u} = t\,\vec{v}$, односно ако постоји $t \in \mathbb{R}$ такво да важи $(3, 9, 6) = t\,(1, \alpha, 2)$. Изједначавањем одговарајућих координата добијамо да је $t = 3$ и $\alpha = 3$. Према томе, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ јесу колинеарни за $\alpha = 3$.

(б) Вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ биће ортогонални ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули, тј. ако важи да је

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 9, 6) \cdot (1, \alpha, 2) = 3 \cdot 1 + 9 \cdot \alpha + 6 \cdot 2 = 15 + 9\,\alpha = 0.$$

Према томе, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ јесу ортогонални за $\alpha = -\dfrac{5}{3}$.

9. Координате пресечне тачке праве p и равни α задовољавају параметарски задату једначину праве и једначину равни, према томе представљају решење система четири линеарне алгебарске једначине са четири непознате

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= 2 - t \\ 2x + y &- 3z + 12 = 0. \end{aligned}$$

Дати систем своди се на једну једначину

$$2\,(1 + 2\,t) + t - 3\,(2 - t) + 12 = 0,$$

чије је једино решење $t = -1$. Координате пресечне тачке (тачке продора) јесу $(-1, -1, 3)$.

10. У питању су пермутације са понављањем скупа од 7 елемената, код којих се један елемент понавља три пута, а друга два по два пута. Број различитих седмоцифрених бројева састављених од цифара $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ јесте

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 210.$$

♢ Задатак можемо решити користећи комбинације без понављања. Од седам позиција у запису одговарајућег броја на три уписујемо цифру 1. Број начина на који то можемо урадити једнак је броју комбинација треће класе скупа од седам елемената, тј. једнак је $\binom{7}{3}$. Затим, од преостале четири позиције бирамо две, на које ћемо уписати цифру 2, на $\binom{4}{2}$ начина. Цифру 3 уписујемо на преостале две позиције. Према принципу производа, број различитих седмоцифрених бројева састављених од цифара $1, 1, 1, 2, 2, 3, 3$ јесте

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 210.$$

– Тест основног знања – 20. 01. 2013.

1. Заокружити слова испред примитивних функција функције $f(x) = 6x^2$, на интервалу $(-\infty, +\infty)$:

(а) $2x^3$; **(б)** $x^3 + 1$;

(в) $4x^3 + 2$; **(г)** $2x^3 + 5$;

(д) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције $f(x) = 6x^2$.

2. Заокружити слова испред функција које су интеграбилне на сегменту $[0, 1]$:

(а) $f(x) = x$; **(б)** $f(x) = \ln x$;

(в) $f(x) = \sin x$; **(г)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

(д) ниједна од претходних функција није интеграбилна на сегменту $[0, 1]$.

3. Заокружити слова испред линеарних диференцијалних једначина првог реда:

(а) $y' = x^2$; **(б)** $y'y = \sin x + x$;

(в) $y' = \frac{y}{x}$; **(г)** $y'' - 4y = 0$;

(д) ниједна од претходних једначина није линеарна диференцијална једначина првог реда.

4. Дата је диференцијална једначина $y'' - 4y = 0$. Заокружити слово испред њеног општег решења:

(а) $y = 2C_1e^x + 2C_2e^x$;

(б) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$;

(в) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^x$;

(г) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-x}$;

(где су C_1, C_2, и C_3 произвољне реалне константе)

(д) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

5. Колико грана има потпун граф (неоријентисан и без петљи) са 10 чворова?

6. Дата је функција $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$. Тада је $S\left(\frac{1}{3}\right)$ једнако (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) 1; **(б)** $\frac{1}{2}$; **(в)** $\frac{3}{2}$; **(г)** $\frac{2}{3}$;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\det A \neq 0 \iff \operatorname{rang} A = n$;

(б) $\det A = 0 \iff \operatorname{rang} A = 0$;

(в) $\operatorname{rang} A < n \implies \det A = 0$;

(г) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

8. Написати минимални полином јединичне матрице I произвољног реда.

9. Написати једначину равни која је паралелна са правом $x = y = 1$ и садржи тачку $A(1, 1, 1)$.

10. Дата је исказна формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee p)$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) дата исказна формула је таутологија;

(б) дата исказна формула је контрадикција;

(в) дата исказна формула није ни таутологија ни контрадикција;

(г) ниједно од претходних тврђења није тачно.

– Решења –

1.

> Подсетимо се да је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ (дефинисане на интервалу (a,b), који може бити коначан или бесконачан) на интервалу (a,b) ако за $a < x < b$ важи $F'(x) = f(x)$.

Нађимо, редом, први извод сваке од понуђених функција $F(x)$:

(а) $(2x^3)' = 6x^2$;

(б) $(x^3+1)' = 3x^2$;

(в) $(4x^3+2)' = 12x^2$;

(г) $(2x^3+5)' = 6x^2$.

Дакле, тачни су одговори **(а)** и **(г)**.

♢ Решити задатак директним одређивањем интеграла $\displaystyle\int 6x^2 \mathrm{d}x$. Резултат је $2x^3 + C$, где је C произвољна реална константа.

2.

> Подсетимо се следећих важних чињеница:
>
> - свака монотона функција на $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, интеграбилна је на том интервалу;
> - свака интеграбилна функција на $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, ограничена је на $[a,b]$.

Функције $f(x) = x$ и $f(x) = \operatorname{arctg} x$ дефинисане су и монотоно растуће за свако $x \in \mathbb{R} \supseteq [0,1]$, па су самим тим и интеграбилне на сегменту $[0,1]$.
Функција $f(x) = \sin x$ дефинисана је за свако $x \in \mathbb{R}$, и монотоно је растућа на интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$ који садржи интервал $[0,1]$, па је интеграбилна на сегменту $[0,1]$.
Будући да функција $\ln x$ није ограничена на сегменту $[0,1]$ (сетимо се да је домен функције $\ln x$ интервал $(0,+\infty)$), она на том сегменту није ни интеграбилна.
Дакле, тачни су одговори **(а)**, **(в)** и **(г)**.

3.

> Једначина $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ непрекидне функције на (a,b), назива се линеарна диференцијална једначина првог реда.

Одмах можемо уочити да је једначина $y'' - 4y = 0$ једначина реда два, те није линеарна диференцијална једначина првог реда. Такође, једначину $y'y = \sin x + x$ можемо записати као $y' = (\sin x + x)y^{-1}$, па ни она није линеарна диференцијална једначина првог реда, јер је не можемо записати у одговарајућем облику (приметимо да је та једначина, у ствари, Бернулијева диференцијална једначина).
Једначина $y' = x^2$ јесте линеарна диференцијална једначина првог реда, за $P(x) = 0$ и $Q(x) = x^2$, а такође је то и једначина $y' = \dfrac{y}{x}$, за $P(x) = -\dfrac{1}{x}$ и $Q(x) = 0$.
Дакле, тачни су одговори **(а)** и **(в)**.

4. У питању је хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 4 = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Решења карактеристичне једначине дате хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима реална су и различита. То значи да су два партикуларна линеарно независна решења дате диференцијалне једначине $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-2x}$, па је њено опште решење њихова произвољна линеарна комбинација: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Дакле, тачан је одговор **(б)**.

♢ Задатак смо могли урадити и методом елиминације нетачних одговора. Наиме, опште решење хомогене диференцијалне једначине реда n, $n \in \mathbb{N}$, јесте произвољна линеарна комбинација њених n линеарно независних партикуларних решења, а за решења понуђена под **(а)** и под **(г)** важи $y = (2C_1 + 2C_2)e^x = C_3 e^x$, односно $y = (C_1 + C_2)e^{-x} = C_4 e^{-x}$, па су то општа решења хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда, а будући да су $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-2x}$ и $y_3 = e^x$ линеарно независне функције, решење понуђено под **(в)** јесте опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине реда три. Дакле, само решење понуђено под **(б)** представља опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда. Ово још увек не значи да је то решење опште решење дате диференцијалне једначине. Потребно је још, директном заменом у дату диференцијалну једначину, проверити да ли опште решење понуђено под **(б)** заиста задовољава дату диференцијалну једначину. Будући да за $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ важи $y'' = 4C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-2x}$, видимо да понуђено опште решење задовољава дату диференцијалну једначину, па је одговор под **(б)** тачан.

5.

> Подсетимо се да је потпун граф онај граф код кога су свака два чвора спојена граном. Ако је n број чворова потпуног графа, онда је његов број грана једнак $\binom{n}{2}$.

Користећи наведене чињенице, једноставно можемо израчунати број грана потпуног графа са 10 чворова: $\displaystyle\binom{10}{2} = 45$.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 13. 02. 2011. године.

6.

> Подсетимо се формуле за израчунавање суме геометријског реда:
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$
>
> где је q реална константа која задовољава $q \in (-1, 1)$.
> Такође, за $q \in (-1, 1)$ важи и
>
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}.$$

Дакле:

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Тачан је одговор **(б)**.

7.

> Подсетимо се да је ранг матрице ред њене највеће квадратне регуларне подматрице. Такође, за произвољну квадратну матрицу A важи релација $\text{rang}A^T = \text{rang}A$.

На основу наведене чињенице, јасно је да је тврђење **(г)** тачно. Размотримо сада преостала три тврђења.
Уколико је детерминанта матрице A различита од нуле, тада је она сама своја највећа регуларна подматрица, па је њен ранг максималан, односно једнак је n, и обрнуто, ако је ранг матрице A једнак њеном реду, тада је сама матрица регуларна, па је њена детерминанта различита од нуле. Дакле, тврђење **(а)** је тачно.
Тврђење **(б)** није тачно, јер из чињенице да је детерминанта матрице A једнака нули следи да њен ранг није максималан, односно мора бити мањи од n, али не мора бити једнак нули (једина квадратна матрица реда n чији је ранг једнак нули јесте нула-матрица).
Тврђење **(в)** је тачно, јер уколико је ранг квадратне матрице A мањи од њеног реда, односно није максималан, то значи да она сама није своја највећа регуларна подматрица, дакле сама матрица A није регуларна, па јој је детерминанта једнака нули.
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(в)** и **(г)**.

8.

> Подсетимо се да је минимални полином матрице A (јединствени) полином $P(\lambda)$ најмањег степена за који важи $P(A) = \mathbf{0}$ и чији је водећи коефицијент (коефицијент уз највећи степен) једнак један.

Будући да очигледно важи $\mathrm{I} - \mathrm{I} = \mathbf{0}$, то је полином најмањег степена са водећим коефицијентом један за који важи $P(\mathrm{I}) = \mathbf{0}$ $P(\lambda) = \lambda - 1$, па је то тражени минимални полином.

9.

> Подсетимо се да је прамен равни скуп равни које садрже једну фиксирану праву. Уколико је та права задата као пресек равни са једначинама $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, онда је једначина прамена равни $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Уочимо да координате тачке $A(1, 1, 1)$ задовољавају једначину праве $x = y = 1$, па закључујемо да тачка A припада датој правој. Дакле, раван која садржи тачку A и паралелна је датој правој мора садржати ту праву (иначе јој није паралелна, већ је сече у тачки A). Решење је свака раван која садржи дату праву, односно било која раван која припада прамену равни одређеном датом правом. Како је дата права пресек равни $x - 1 = 0$ и $y - 1 = 0$, једначина прамена равни одређеног датом правом гласи $x - 1 + \lambda(y - 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, па је решење задатка свака раван чија једначина има облик $x + \lambda y = 1 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10.

> Подсетимо се да је таутологија исказна формула која за све истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују има истинитосну вредност 1. Такође, контрадикција је исказна формула која за све истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују има истинитосну вредност 0.
> Подсетимо се и да импликација има истинитосну вредност 0 ако и само ако лева страна импликацје има истинитосну вредност 1, а десна 0 (у свим осталим случајевима импликација има истинитосну вредност 1), као и да у исказној алгебри важи теорема $p \vee p = p$.

На основу наведене теореме дата исказна формула еквивалентна је исказној формули $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$. Будући да је централна операција у посматраној формули импликација, једноставно је размотрити да ли је формула таутологија. Довољно је испитати да ли је могуће да дата исказна формула има истинитосну вредност 0, а то се може догодити само ако $p \Rightarrow q$ има истинитосну вредност 1, а p истинитосну вредност 0. Будући да је истинитосна вредност израза $p \Rightarrow q$ једнака 1 уколико p има истинитосну вредност 0 (без обзира на истинитосну вредност исказног слова q), то значи да ако исказно слово p има истинитосну вредност 0 и сама исказна формула има истинитосну вредност 0, па самим тим није таутологија.
На сличан начин можемо видети да дата исказна формула није ни контрадикција: уколико је истинитосна вредност исказног слова p једнака 1, тада је и истинитосна вредност целе формуле једнака 1, јер је истинитосна вредност импликације 1 ако је истинитосна вредност десне стране те импликације једнака 1.
Дакле, дата исказна формула није ни таутологија ни контрадикција, па је тачан одговор **(в)**.

◊ Решити задатак формирањем истинитосне таблице за дату исказну формулу.

– Тест основног знања – 10. 02. 2013.

1. Заокружити слова испред функција за које је $F(x)=2e^{3x}+5$ примитивна функција на интервалу $(-\infty,+\infty)$:

(а) $2e^{3x}+5$; **(б)** $6e^{3x}$;

(в) $6e^{3x}+2$; **(г)** $\frac{2}{3}e^{3x}+5x$;

(д) ни за једну од претходних функција функција $F(x)$ није примитивна функција на интервалу $(-\infty,+\infty)$.

2. Израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

3. Дата је диференцијална једначина $y'=y+1$. Заокружити слово испред њеног општег решења:

(а) $y=C_1e^x+1$; **(б)** $y=C_1e^x-1$;

(в) $y=C_1x+1$; **(г)** $y=C_1x+C_2e^x$;

(д) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$;

(где су C_1 и C_2 произвољне реалне константе)

(ђ) ниједна од претходних функција није опште решење дате диференцијалне једначине.

4. Заокружити слова испред хомогених линеарних диференцијалних једначина другог реда:

(а) $y'+2y=0$; **(б)** $y''=x^2y$;

(в) $y=y''-y'+3$; **(г)** $y=y''-x$;

(д) $y-y''=y'+2y$;

(ђ) ниједна од претходних функција није хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда.

5. Исказну формулу $(p\vee q)\Rightarrow p$ написати у облику СДНФ.

6. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+2}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln n$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$;

(д) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

7. Полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}x^n$ једнак је (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) e; **(б)** e^{-1}; **(в)** e^2; **(г)** e^{-2};

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. За које вредности реалног параметра a је сагласан систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} x+\ y+az &= 0\\ x-2y+\ z &= 0\\ ax-\ y-\ z &= 0 \end{aligned}\ .$$

9. Збир сопствених вредности матрице $J=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) 2; **(б)** 1; **(в)** 0; **(г)** -1; **(д)** -2;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Дати су вектори $\vec{a}=(1,1,2)$ и $\vec{b}=(2,2,4)$. Израчунати $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{b}\times\vec{a}$.

– Решења –

1.

Подсетимо се да је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ (дефинисане на интервалу (a, b), који може бити коначан или бесконачан) на интервалу (a, b) ако за $a < x < b$ важи $F'(x) = f(x)$.

Будући да важи $F'(x) = (2e^{3x} + 5)' = 6e^{3x}$, видимо да је тачан одговор **(б)**.

2.

Подсетимо се да, уколико је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a, a]$ и парна, тада важи $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Подинтегрална функција $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ непрекидна је за свако $x \in \mathbb{R}$ и парна, па можемо применити наведену једнакост: $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_{0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Интеграл $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ је таблични, и једнак је $\operatorname{arctg} x + C$, па за израчунавање тражене вредности користимо Њутн–Лајбницову формулу: $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_{0}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\left(\operatorname{arctg} x \Big|_0^1\right) = 2\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) = 2\left(\dfrac{\pi}{4} - 0\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Дакле, $\int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

3.

Једначина $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ непрекидне функције на (a, b), назива се линеарна диференцијална једначина првог реда. Њено опште решење дато је формулом:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

Можемо уочити да је дата једначина линеарна диференцијална једначина првог реда, за $P(x) = -1$ и $Q(x) = 1$, па за одређивање њеног општег решења користимо наведену формулу:

$$y = e^{\int \mathrm{d}x}\left(C + \int e^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = e^{x}\left(C + \int e^{-x}\mathrm{d}x\right) = e^{x}\left(C - e^{-x}\right) = Ce^{x} - 1.$$

Дакле, тачан је одговор **(б)**.

♢ Дата једначина је такође и једначина која раздваја променљиве, јер је можемо записати на следећи начин: $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1} = \mathrm{d}x$. До њеног општег решења долазимо интеграцијом функција са леве и десне стране последње једнакости: $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int \mathrm{d}x$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине јесте $\ln|y+1| = x + C$, односно, $y + 1 = C_1e^{x}$.

4.

Диференцијална једначина $y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_{n-1}(x)y' + f_n(x)y = F(x)$, где су $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ и $F(x)$ функције дефинисане и непрекидне на неком интервалу (a, b), који може бити и бесконачан, назива се линеарна диференцијална једначина реда n. Ако је $F(x) \equiv 0$ на интервалу (a, b), тада кажемо да је једначина хомогена, у противном је нехомогена.

Размотрићемо, редом, све понуђене диференцијалне једначине.
Једначина $y' + 2y = 0$ очигледно је једначина првог реда, па није хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда.
Једначина $y'' = x^2y$ може се записати као $y'' - x^2y = 0$, па јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда, за $f_1(x) = -x^2$ и $f_2(x) = 0$.
Једначина $y = y'' - y' + 3$ може се записати као $y'' - y' - y = -3$. Видимо да је $F(x) = -3$, и стога једначина јесте линеарна диференцијална једначина другог реда, али није хомогена.
Слично, једначину $y = y'' - x$ можемо записати као $y'' - y = x$, и она јесте линеарна диференцијална једначина другог реда, али није хомогена, јер је $F(x) = x$.
Ако једначину $y - y'' = y' + 2y$ запишемо као $y'' + y' + y = 0$, видимо да она јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда, за $f_1(x) = 1$ и $f_2(x) = 1$ (приметимо да је ова једначина хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима).
Дакле, тачни су одговори **(б)** и **(д)**.

5.

Свака Булова функција $f(p, q)$ две променљиве (односно, исказна формула која садржи два исказна слова), осим функције која је идентички једнака нули, може се на следећи начин представити у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (СДНФ):

$f(p, q) = (f(1, 1) \wedge p \wedge q) \vee (f(1, 0) \wedge p \wedge \overline{q}) \vee (f(0, 1) \wedge \overline{p} \wedge q) \vee (f(0, 0) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q})$.

Будући да свака исказна формула која садржи два исказна слова дефинише одговарајућу Булову функцију две променљиве, користећи наведену чињеницу, једноставно долазимо до тражене савршене дисјунктивне нормалне форме.
Најпре израчунајмо вредности функције $f(p, q) = (p \vee q) \Longrightarrow p$:

$$f(1, 1) = (1 \vee 1) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$f(1, 0) = (1 \vee 0) \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$f(0, 1) = (0 \vee 1) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0$$

$$f(0, 0) = (0 \vee 0) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 0 = 1.$$

Сада је:

$$f(p, q) = (f(1, 1) \wedge p \wedge q) \vee (f(1, 0) \wedge p \wedge \overline{q}) \vee (f(0, 1) \wedge \overline{p} \wedge q) \vee (f(0, 0) \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}) =$$

$$(1 \wedge p \wedge q) \vee (1 \wedge p \wedge \overline{q}) \vee (0 \wedge \overline{p} \wedge q) \vee (1 \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}) = (p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}).$$

Дакле, СДНФ за дату исказну формулу јесте $(p \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$.

6.

Подсетимо се следеће теореме:
Општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули.

Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Ову теорему је зато погодно користити када желимо да покажемо да ред дивергира. Врло је важно запамтити да обрат овог тврђења не важи, односно постоје редови који не конвергирају, а општи члан им тежи нули.

Геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $|q| < 1$, а за $|q| \geq 1$ дивергира.

Нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Такође важи и следећи први поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:

Ако за скоро сваки природан број n важи $a_n \leq b_n$, тада, ако ред $\sum b_n$ конвергира, конвергира и ред $\sum a_n$, а уколико ред $\sum a_n$ дивергира, дивергира и ред $\sum b_n$.

Лако је уочити да општи члан реда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln n$ не тежи нули, па је ред дивергентан.

За ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+2}$ важи $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)^n = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$. Будући да је ред $\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ геометријски ред за $q = \frac{\pi}{3} > 1$, он је дивергентан, па је и полазни ред дивергентан.

Такође је и ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^n$ геометријски за $q = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, па је конвергентан.

За општи члан реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ важи $\frac{\cos^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, а ред са општим чланом $\frac{1}{n^2}$ конвергира (то је ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где је $\alpha = 2 > 1$), па можемо применити први поредбени критеријум, на основу кога је посматрани ред конвергентан.

Дакле, тачни су одговори **(б)** и **(г)**.

7.

На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се израчунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Дакле, полупречник (радијус) конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2} x^n$ јесте:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2} = e^{-2}. \end{aligned}$$

Дакле, тачан је одговор **(г)**.

8.

Подсетимо се да је систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан уколико постоји бар једна уређена n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ која задовољава сваку од m једначина система. Другим речима, систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан је уколико има бар једно решење.
Такође важи и чињеница да хомоген систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих увек има бар једно решење, и то решење је уређена n-торка $(0, 0, \ldots, 0)$.

На основу изложених чињеница следи да је дати систем, будући да је хомоген, увек сагласан, односно сагласан је за свако $a \in \mathbb{R}$.

9.

Подсетимо се да је збир свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеном трагу (збиру свих елемената који се налазе на њеној главној дијагонали).

Дакле, потребно је само одредити траг матрице A, односно сабрати два елемента са њене главне дијагонале. Будући да је очигледно $\mathrm{tr}A = 1 + (-1) = 0$, тачан је одговор **(в)**.

♢ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице A, односно одређивањем нула њеног карактеристичног полинома. Резултат је $\lambda_1 = \sqrt{5}$, $\lambda_2 = -\sqrt{5}$.

10.

Подсетимо се да, уколико су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори, важи $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ колинеарни су (паралелни) ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$.

Уочимо да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни јер важи $\vec{b} = (2, 2, 4) = 2 \cdot (1, 1, 2) = 2\vec{a}$. Дакле, њихов векторски производ је $\vec{0}$, односно, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Обратити пажњу да је векторски производ два вектора увек вектор, а не скалар, па је погрешно написати $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = 0$, што је честа грешка у сличним задацима.

♢ Решити задатак директним израчунавањем тражених векторских производа $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$.

– Тест основног знања – 08. 06. 2013.

1. Одредити интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 2}$.

2. Израчунати величину површине дела равни ограниченог кривом $y = -x^2 + 3x + 10$ и x-осом.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' = 0$.

4. Колико има различитих Булових функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ таквих да је формула $f(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)$ таутологија?

5. Испитати конвергенцију нумеричког реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n + 1}{2^n}$.

6. Полупречник конвергенције степеног реда: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$ једнак је (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) 1; **(б)** $+\infty$; **(в)** 0; **(г)** 3;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Дат је систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 5 \\ x + ay &= 7 \end{aligned}.$$

За коју вредност реалног параметра a дати систем нема решења?

8. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

9. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ су вектори $\vec{a} = (1, \alpha, -2)$ и $\vec{b} = (-2, 6, 1 - \alpha)$

(а) ортогонални?

(б) колинеарни?

10. Написати једначину равни која садржи тачку $M(-2, 7, 3)$ и паралелна је равни $\alpha : x - 4y + 5z - 1 = 0$.

– Решења –

1. Уочимо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}$.

Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t = \dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}$:

$$\frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \dfrac{2x-1}{\sqrt{7}} \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \frac{\sqrt{7}}{2}\frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

Дакле, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C.$

Приликом одређивања овог интеграла користили смо чињеницу да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ таблични интеграл, и да је једнак $\operatorname{arctg} x + C$.

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

Подсетимо се да, уколико је $y = f(x)$ ненегативна крива, где је $f(x)$ функција интеграбилна на одсечку $[a, b]$, тада вредност $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.

Функција $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ квадратна је функција са максимумом чије су нуле $x_1 = -2$ и $x_2 = 5$ (то су тачке у којима крива $y = f(x)$ сече x-осу), па је ненегативна на интервалу $[-2, 5]$. Величина површине дела равни ограниченог кривом $y = -x^2 + 3x + 10$ и x-осом једака је, дакле, $P = \displaystyle\int_{-2}^{5}(-x^2+3x+10)\,\mathrm{d}x$. На основу линеарности интеграла следи $P = -\displaystyle\int_{-2}^{5} x^2\,\mathrm{d}x + 3\int_{-2}^{5} x\,\mathrm{d}x + 10\int_{-2}^{5}\mathrm{d}x$. Интеграли $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int \mathrm{d}x$ таблични су интеграли и једнаки су, редом, $\dfrac{x^3}{3}+C$, $\dfrac{x^2}{2}+C$ и $x+C$. За израчунавање последња три одређена интеграла искористићемо Њутн–Лајбницову формулу:

$$\int_{-2}^{5} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{5^3+2^3}{3} = \frac{133}{3},$$

$$\int_{-2}^{5} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{5} = \frac{5^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{5^2-(-2)^2}{2} = \frac{21}{2}, \quad \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x = x\bigg|_{-2}^{5} = 5-(-2) = 5+2 = 7.$$

На крају је $P = -\dfrac{133}{3} + 3\dfrac{21}{2} + 10\cdot 7 = -\dfrac{266}{6} + \dfrac{189}{6} + \dfrac{420}{6} = \dfrac{343}{6}$.

3.

> Подсетимо се дефиниције диференцијалне једначине реда n:
> Нека је F реална функција $n+2$ променљиве. Једначина
> $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, $x \in (a, b)$,
> где је y непозната n пута диференцијабилна функција, назива се диференцијалном једначином реда n ако се у њој ефективно појављује извод $y^{(n)}$. Интервал (a, b) на коме независна променљива x узима вредности (и на којем тражимо решење дате једначине) може бити коначан или бесконачан.
> Уколико неки од аргумената функције F у диференцијалној једначини реда n недостају, једначина се често може одмах интегралити, или јој се погодном сменом може снизити ред. У том случају за једначину кажемо да је непотпуна.

У питању је непотпуна једначина другог реда, коју директно можемо интегралити:

$$y'' = 0 \Rightarrow (y')' = 0 \Rightarrow y' = C \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C \Rightarrow \mathrm{d}y = C\mathrm{d}x \Rightarrow \int \mathrm{d}y = \int C\,\mathrm{d}x \Rightarrow y = Cx + D,$$

па је тражено опште решење дате диференцијалне једначине $y = Cx + D$.

♢ Будући да је дата једначина другог реда хомогена једначина са константним коефицијентима, до њеног општег решења могуће је доћи и применом методе за решавање хомогених диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Карактеристична једначина дате једначине гласи $\lambda^2 = 0$, па су њена решења $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тј. карактеристична једначина има једно двоструко реално решење. Дакле, опште решење је $y = C_1 e^{0\cdot x} + C_2 x e^{0\cdot x}$, односно $y = C_1 + C_2 x$.

4.

> Подсетимо се да је таутологија исказна формула која за све истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују има истинитосну вредност 1.

Свака Булова функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ одређена је низом (дужине четири) својих слика $(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$, где $f(x_1, x_2)$ представља слику елемента $(x_1, x_2) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Будући да је кодомен функције f двоелементни скуп $\{0,1\}$, значи да елементи низа $(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$ могу узимати вредности из скупа $N = \{0,1\}$, па је укупан број различитих Булових функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ једнак $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.
Размотримо сада за колико ће од тих 16 различитих Булових функција дата формула бити таутологија. Сетимо се да импликација има истинитосну вредност 0 само у случају да њена лева страна има истинитосну вредност 1, а десна истинитосну вредност 0. Дакле, дата формула може имати истинитосну вредност 0 само ако је $f(x_1, x_2) = 1$ и истовремено $x_1 \vee x_2 = 0$ (у свим осталим случајевима дата формула има истинитосну вредност 1). Будући да је $x_1 \vee x_2 = 0$ само уколико важи $x_1 \vee x_2 = 0$, закључујемо да за $x_1 \vee x_2 = 0$ функција f мора имати вредност 0. Дакле, да би дата формула била таутологија мора важити $f(0,0) = 0$, односно први елемент низа $(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$ мора бити једнак 0. Преостала три елемента тог низа могу узимати вредности из скупа $N = \{0,1\}$, па је укупан број различитих Булових функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ за које је дата формула таутологија једнак $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

♢ Задатак смо могли да урадимо и формирањем истинитосне таблице за дату формулу.

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$f(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)$
0	0	0	$\overline{f(0,0)}$
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Да би дата формула била таутологија, у последњој колони таблице морају се појавити само јединице (тај услов је еквивалентан услову да је формула тачна за све вредности исказних слова које се у њој појављују). Будући да из таблице видимо да истинитосна вредност формуле зависи од вредности функције f само ако је $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, а не зависи од вредности функције f уколико $(x_1, x_2) \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, то значи да за $x_1 = x_2 = 0$ функција f мора имати вредност 0 (односно да важи $f(0,0) = 0$), а да за $(x_1, x_2) \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ функција f може узимати вредности из скупа $\{0, 1\}$. Дакле, низ којим је одређена свака функција f за коју је дата формула таутологија следећег је облика: $(0, f(0,1), f(1,0), f(1,1))$, где елементи $f(0,1)$, $f(1,0)$ и $f(1,1)$ узимају вредности из скупа $\{0,1\}$, па тражених функција f има $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

5.

Подсетимо се првог поредбеног критеријума за позитивне нумеричке редове: Ако за скоро сваки природан број n важи $a_n \leq b_n$, тада, уколико ред $\sum b_n$ конвергира, конвергира и ред $\sum a_n$, а уколико ред $\sum a_n$ дивергира, дивергира и ред $\sum b_n$.

Такође важи да геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $q \in (-1, 1)$, а у осталим случајевима дивергира.

За општи члан датог реда важи $\dfrac{3^n \cdot n + 1}{2^n} \geq \dfrac{3^n}{2^n} n \geq \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, а ред са општим чланом $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ дивергира (то је геометријски ред са количником $q = \dfrac{3}{2} > 1$), па је на основу првог поредбеног критеријума дати ред дивергентан.

6.

На основу Коши–Адамаровог става, полупречник конвергенције R степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се израчунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.
Подсетимо се и чињенице да, уколико је R полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, тада тај ред апсолутно конвергира за свако x које припада интервалу $(-R, R)$, а дивергира за $|x| > R$.

Уведимо у дати степени ред смену $x - 3 = t$. На тај начин долазимо до степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} t^{n-1}$. Очигледно је $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n+1}} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} t^n$.

Одредимо сада полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} t^n$: $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} =$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}}{\frac{(n+2)!}{2^{n+3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}}{\frac{(n+2)(n+1)!}{2^{n+3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+2} = 0.$$

Дакле, полупречник конвергенције реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} t^n$ једнак је нула, односно он је апсолутно конвергентан само за $t = 0$. То значи да је полазни ред апсолутно конвергентан само за $x - 3 = 0$, тј. $x = 3$, односно полупречник конвергенције датог реда такође је нула (јер конвергира само у једној тачки).
Дакле, тачан је одговор **(в)**.

7.

Подсетимо се да је систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

сагласан уколико постоји бар једна уређена n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ која задовољава сваку од m једначина система. Другим речима, систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан је уколико има бар једно решење.

Матрице $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ називају се, редом, матрица система и проширена матрица система.

Важи и следећа, Кронекер–Капелијева теорема:
Систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан је ако и само ако је $\text{rang}A = \text{rang}B$.
Подсетимо се да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице, као и да елементарне трансформације не мењају ранг матрице.

На основу претходног дати систем неће имати решења уколико је ранг матрице система различит од ранга проширене матрице система. Проширена матрица система је $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & a & 7 \end{array}\right]$. Извршимо на њој следећу елементарну трансформацију: помножимо њену прву врсту бројем -1 и додајмо је другој врсти. На тај начин долазимо до матрице $B' = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & a-1 & 2 \end{array}\right]$. Највећа регуларна квадратна подматрица матрице B' јесте подматрица која је образована од елемената матрице B' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и треће колоне, то јест матрица $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, па је њен ранг једнак два. Будући да важи $\text{rang}B = \text{rang}B'$, и ранг проширене матрице система је такође 2, и то за свако $a \in \mathbb{R}$. Уочимо да је матрица система $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ подматрица проширене матрице система, па истим елементарним трансформацијама које смо извршили на проширеној матрици система, од матрице A добијамо матрицу $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$, чији је ранг једнак два уколико је $a \neq 1$ (тада је $\det A' \neq 0$, па је сама матрица A' своја највећа регуларна подматрица), а једнак је један уколико је $a = 1$ (у том случају матрица A' очигледно није регуларна јер су јој сви елементи у другој врсти једнаки нули). Важи и да је $\text{rang}A = \text{rang}A'$, па је ранг матрице система различит од два ако је $a = 1$. Дакле, услов да је ранг матрице система различит од ранга проширене матрице система (тада систем није сагласан, односно нема решење), испуњен је уколико је $a = 1$.

$\diamondsuit$ Задатак смо могли урадити и директним решавањем датог система. Наиме, уколико прву једначину помножимо бројем -1 и додамо је другој једначини (како бисмо у другој једначини елиминисали непознату x), долазимо до еквивалентног система $\begin{array}{rcl} x + \quad\quad y & = & 5 \\ x + (a-1)y & = & 2 \end{array}$. Одмах можемо уочити, да уколико је $a - 1 \neq 0$, односно $a \neq 1$, другу једначину у добијеном систему можемо поделити са $a - 1$. На тај начин добијамо да је $y = \frac{2}{a-1}$, а затим када ову вредност за y уврстимо у прву једначину, добијамо да је $x = \frac{5a-7}{a-1}$. То значи да ако је испуњен услов $a \neq 1$,

овај систем, за свако $a \in \mathbb{R}$ које тај услов испуњава, има јединствено решење, и то је уређен пар $(\frac{5a-7}{a-1}, \frac{2}{a-1})$.
С друге стране, ако је $a-1=0$, односно $a=1$, друга једначина се своди на нетачну једнакост $0=2$, па у том случају систем нема решење.
Дакле, дати систем нема решење уколико је $a=1$.

8.

> Подсетимо се да за дату квадратну матрицу A можемо дефинисати њен карактеристични полином $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$, где је I јединична матрица истог реда као и матрица A.

Карактеристични полином матрице A гласи:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-2)(\lambda-7).$$

9.

> Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, од којих ниједан није нула-вектор, у простору $\mathbb{R}^3$ су ортогонални, ако и само ако је њихов скаларни производ једнак нули.
> Скаларни производ два вектора $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ из векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесте број $\vec{m} \cdot \vec{n} = m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$.
> Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ линеарно су зависни, тј. колинеарни, односно паралелни, ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$.

(а) Вектори $\vec{a} = (1, \alpha, -2)$ и $\vec{b} = (-2, 6, 1-\alpha)$ биће ортогонални ако и само ако важи $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, односно уколико је $1 \cdot (-2) + 6\alpha - 2(1-\alpha) = 0$. Дакле, $8\alpha - 4 = 0$, па је $\alpha = \frac{1}{2}$. То значи да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогонални уколико је $\alpha = \frac{1}{2}$.

(б) Вектори $\vec{a} = (1, \alpha, -2)$ и $\vec{b} = (-2, 6, 1-\alpha)$ биће колинеарни ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$, односно уколико је за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(1, \alpha, -2) = (-2s, 6s, (1-\alpha)s)$. Дакле, $1 = -2s$, $\alpha = 6s$ и $-2 = (1-\alpha)s$. Из прве једнакости следи да је $s = -\frac{1}{2}$, из друге да је $\alpha = -3$, а трећа једнакост је задовољена за $s = -\frac{1}{2}$ и $\alpha = -3$. То значи да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни уколико је $\alpha = -3$.

10.

> Подсетимо се да једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$, чији је вектор нормале $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$, гласи: $n_1(x - T_1) + n_2(y - T_2) + n_3(z - T_3) = 0$.
>
> Такође важи и следећа чињеница: равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне су ако и само ако су њихови вектори нормала $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ паралелни.

Вектор нормале равни α јесте вектор $\vec{n} = (1, -4, 5)$. За вектор тражене равни можемо узети вектор $\vec{n} = (1, -4, 5)$. Будући да су дате и координате тачке $M(-2, 7, 3)$ коју тражена раван садржи, њена једначина је $1 \cdot (x - (-2)) - 4 \cdot (y - 7) + 5 \cdot (z - 3) = 0$, односно $x - 4y + 5z + 15 = 0$.

– Тест основног знања – 29. 06. 2013.

1. Одредити интеграл $\int \frac{6x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x| \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0$, а затим и ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.

4. Формирати линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда ако се зна да су два њена линеарно независна партикуларна решења $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = 2xe^{2x}$.

5. Ако је A број различитих начина да се из скупа од 13 различитих куглица издвоји подскуп од 8 куглица, онда је (заокружити слово испред тачног тврђења):

(а) $A < 2013$; **(б)** $A = 13^8$;

(в) $A = 8^{13}$; **(г)** $A > 8^{13}$;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

6. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{4n}}{n^4+4}$; **(б)** $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{3n+3}$;

(в) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$; **(г)** $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{n^4}}$;

(д) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

7. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ у зависности од вредности реалног параметра a.

8. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори из $\mathbb{R}^3$ и нека је са $\cdot$ означен скаларни производ вектора у $\mathbb{R}^3$, а са $\times$ векторски производ вектора у $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; **(б)** $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$;

(в) $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$; **(г)** $\vec{b}\times\vec{b} = \vec{0}$;

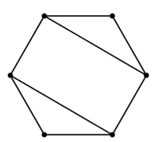
(д) $[\vec{a},\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{b}]$;

(ђ) ниједно од претходних тврђења није тачно.

9. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Граф на слици је (заокружити слова испред тачних одговора):



(а) неоријентисан; **(б)** повезан;

(в) регуларан; **(г)** потпун;

(д) нема ниједну од претходно наведених особина.

– Решења –

1.

Подсетимо се да уколико је $F(x)$ произвољна примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a,b), тада важи $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, $x\in(a,b)$, где је C произвољна реална константа.
Такође, уколико је подинтегрална функција задата као разломак, и ако је извод имениоца тог разломка једнак његовом бројиоцу, тада интеграл има следећи облик $\int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, па га решавамо увођењем смене $t=f(x)$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& f(x) \\ \mathrm{d}t &=& f'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C = \ln|f(x)|+C.$$

Потребно је одредити $\int \frac{6x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x$. Уочимо да важи $(x^6+5)' = 6x^5$, па је:

$$\int \frac{6x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x^6+5 \\ \mathrm{d}t &=& 6x^5\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C = \ln|x^6+5|+C.$$

Будући да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $x^6+5>0$, следи $|x^6+5| = x^6+5$, па је $\int \frac{6x^5}{x^6+5}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x^6+5\right)+C$, где је C призвољна реална константа.

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

Подсетимо се да уколико је интервал интеграције облика $[-a,a]$, тј. симетричан у односу на нулу, најпре испитујемо парност подинтегралне функције, јер важе следеће чињенице:

- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и непарна, тада је $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ једнак нули;
- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и парна, тада је $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Подинтегрална функција $|x|\operatorname{arctg}x$ непрекидна је на интервалу $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ (домен функције $|x|\operatorname{arctg}x$ је $\mathbb{R}$), а такође је и непарна (за свако x из $\mathbb{R}$ важи $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}x$, као и $|-x|=|x|$, те је $|-x|\operatorname{arctg}(-x) = -|x|\operatorname{arctg}x$), па је тражена вредност датог интеграла једнака 0.

♢ Задатак се може урадити и директним израчунавањем датог одређеног интеграла (најпре искористити особину адитивности одређеног интеграла, односно приметити да је $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |x|\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x$, а затим у оба интеграла применити метод парцијалне интеграције). Тај начин је, иако коректан, знатно захтевнији.

3.

Подсетимо се да је интегрална крива диференцијалне једначине свако њено партикуларно или сингуларно решење посматрано као крива $y = y(x)$ или у имплицитном облику $G(x, y) = 0$.
Такође, партикуларно решење диференцијалне једначине првог реда јесте свако решење које се може добити из њеног општег решења за неку вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише, док је сингуларно решење диференцијалне једначине првог реда оно решење које се не може добити из њеног општег решења ни за једну вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише.

Дата једначина јесте једначина која раздваја промењиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом: $x\mathrm{d}x + (y+1)\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}x + \int (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$. Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, па је $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{2} = C$, односно, након множења последње једнакости са 2, $x^2 + (y+1)^2 = C_1$, и ово је опште решење полазне диференцијалне једначине. Интегралну криву која пролази кроз тачку $(0, 0)$ налазимо заменом у једначину: $0^2 + (0+1)^2 = C_1$, тј. $C_1 = 1$. Дакле, тражена интегрална крива је $x^2 + (y+1)^2 = 1$.

4. Дата су два линеарно независна партикуларна решења хомогене диференцијалне једначине другог реда. То су $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = 2xe^{2x}$. Приметимо да је функција $y_2 = 2xe^{2x}$ линеарно зависна са функцијом $y_3 = xe^{2x}$ (важи $y_2 = 2y_3$), па је и функција $y_3 = xe^{2x}$ једно партикуларно решење дате хомогене диференцијалне једначине другог реда које је линеарно независно са њеним партикуларним решењем $y_1 = e^{2x}$. Дакле, имамо два линеарно независна партикуларна решења дате хомогене диференцијалне једначине другог реда облика $y_1 = e^{2x}$ и $y_3 = xe^{2x}$, па су решења карактеристичне једначине тражене хомогене диференцијалне једначине другог реда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Карактеристична једначина јесте другог степена (јер је тражена диференцијална једначина другог реда), и позната су нам њена оба решења, па карактеристична једначина гласи $(\lambda - 2)^2 = 0$, односно $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Сада је јасно да је тражена диференцијална једначина $y'' - 4y' + 4y = 0$.

5.

Нека је дат скуп $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ који има n елемената. Комбинација k-те класе, $k \le n$, скупа X јесте било који његов подскуп са тачно k елемената. Подсетимо се да је број комбинација k-те класе, $k \le n$, скупа X који има n елемената (односно број k-точланих подскупова, $k \le n$, скупа који има n елемената) једнак $C_{n,k} = \dbinom{n}{k}$.

Будући да су куглице различите, оне чине скуп X који има 13 елемената. Сваки избор 8 куглица из датог скупа X са 13 куглица представља избор једног подскупа који има осам елемената, односно представља једну комбинацију класе 8 скупа X. Потребно је пребројати све такве подскупове, тј. све комбинације класе 8 скупа који има 13 елемената, па је у питању број комбинација класе 8 скупа који има 13 елемената, а тај број једнак је:

$$C_{13,8} = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8! \cdot (13-8)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287.$$

Размотримо сада понуђене одговоре. За број 1287 важи $1287 < 2013$, па је одговор **(а)** тачан. За број 13^8 важи $13^8 > 13^2 \cdot 10 = 1690$, па одговор **(б)** није тачан. За број 8^{13} важи $8^{13} > 64^2 > 60^2 = 3600$, па одговори **(в)** и **(г)** нису тачни.
Дакле, тачан је само одговор **(а)**.

6.

Подсетимо се чињенице да нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Такође важи и други поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:
Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.

Подсетимо се и да за алтернативни ред $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\ a_n$ кажемо да је ред Лајбницовог типа ако је низ $\{a_n\}$ монотоно опадајући нула-низ, као и да је ред Лајбницовог типа конвергентан.

Коначно, почетна вредност "бројача" не утиче на конвергенцију реда будући да су ред $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и његов остатак $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$, где је k произвољан природан број, еквиконвергентни (али зато утиче на вредност суме реда, па је потребно обратити посебну пажњу на почетну вредност "бројача" у задацима у којима одређујемо суму датог реда).

Важи $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^{4n}}{n^4+4} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^4+4}$, па је, на основу другог поредбеног критеријума, дати ред конвергентан. Наиме, очигледно важи $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^4+4}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{n^4+4} = 1$, па је дати ред еквиконвергентан са редом $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, који је конвергентан јер је $\alpha = 4 > 1$.

Слично је, на основу другог поредбеног критеријума, ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ еквиконвергентан са редом $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ зато што је $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = 3$. Ред са општим чланом $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ није конвергентан јер је $\alpha = \frac{3}{4} < 1$, па ни ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ није конвергентан.

Такође је, на основу другог поредбеног критеријума, ред $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}$ еквиконвергентан са редом $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ зато што је $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}} = 4$. Ред са општим чланом $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ јесте конвергентан јер је $\alpha = \frac{4}{3} > 1$, па је и ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[4]{n^3}}$ конвергентан.

Важи $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{3n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\left((-1)^3\right)^n}{3n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+3}$, па је у питању ред Лајбницовог типа зато што је низ $a_n = \frac{1}{3n+3}$ монотоно опадајући низ будући да је $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3(n+1)+3} - \frac{1}{3n+3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{3\cdot(n+2)(n+1)} < 0$ (односно $a_{n+1} < a_n$ за $n \in \mathbb{N}$), чија је гранична вредност када n тежи бесконачности очигледно једнака нули. Зато је ред $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{3n+3}$ конвергентан.

Дакле, тачни су одговори **(а)**, **(б)** и **(г)**.

7.

Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је, по дефиницији, ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице.

Извршимо на датој матрици A, редом, следеће две елементарне трансформације: додајмо елементима друге врсте елементе прве врсте помножене бројем -2, а затим додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -1. На тај начин добијамо матрицу $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a-6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Видимо да је матрица A' горње троугаона матрица, па је њена детерминанта једнака производу елемената са главне дијагонале, односно $1 \cdot (-1) \cdot (-3) = 3$. Дакле, матрица A' регуларна је (за свако $a \in \mathbb{R}$), па је она сама своја највећа регуларна подматрица, и њен ранг је стога једнак три. Будући да је $\text{rang}A = \text{rang}A'$, важи да је ранг дате матрице A једнак три за свако $a \in \mathbb{R}$.

8.

Подсетимо се неких особина скаларног и векторског производа два вектора из $\mathbb{R}^3$.
Скаларни производ вектора јесте бинарна операција која пару вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ додељује реалан број, тј. $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. За свака два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ важи $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, односно скаларни производ вектора јесте комутативна операција. Скаларни производ два вектора из $\mathbb{R}^3$ једнак је нули ако и само ако су та два вектора ортогонална, тј. ако је угао између њих једнак $\frac{\pi}{2}$, или уколико је бар један од та два вектора нула-вектор.
Векторски производ вектора јесте бинарна операција која пару вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ додељује вектор из $\mathbb{R}^3$, тј. $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. За свака два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ важи $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Векторски производ два вектора из $\mathbb{R}^3$ једнак је нула-вектору ако и само ако су та два вектора паралелна (колинеарна, тј. линеарно зависна), односно ако је угао између њих једнак 0 или π, или уколико је бар један од та два вектора нула-вектор.
Ако су $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вектори из $\mathbb{R}^3$, тада се њихов мешовити производ означава са $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ и једнак је $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Ако су у мешовитом производу $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ бар два вектора једнака, мешовити производ једнак је нули.

На основу наведених чињеница, одмах закључујемо да су тврђења наведена под **(а)** и **(д)** тачна, а тврђење наведено под **(б)** нетачно. Будући да је сваки вектор колинеаран сам са собом, тачно је тврђење наведено под **(г)**, а тврђење наведено под **(в)** нетачно.
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(г)** и **(д)**.

9.

Подсетимо се да је минимални полином матрице A (јединствени) полином $P(\lambda)$ најмањег степена за који важи $P(A) = \mathbf{O}$ и чији је водећи коефицијент (коефицијент уз највећи степен) једнак један. Такође, важи да је минимални полином матрице A делилац њеног карактеристичног полинома.

Карактеристични полином матрице A једнак је:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 4 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 4 = (-\lambda-2)(-\lambda+2) = (\lambda+2)(\lambda-2),$$

па су једини делиоци полинома $P_A(\lambda)$, чији је водећи коефицијент једнак један, полиноми $P_1(\lambda) = \lambda + 2$ и $P_2(\lambda) = \lambda - 2$, и сам карактеристични полином $P_A(\lambda)$.

То су једини "кандидати" за минимални полином матрице A.
Будући да је $P_1(A) = A + 2\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, полином $P_1(\lambda)$ није минимални полином матрице A.
Такође, $P_2(A) = A - 2\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, па ни полином $P_2(\lambda)$ није минимални полином матрице A.
Дакле, минимални полином матрице A једнак је њеном карактеристичном полиному, односно њен минимални полином је $P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4$.

10.

Подсетимо се да је граф уређен пар (X, ρ), где је X непразан скуп и ρ бинарна релација дефинисана на том скупу. Елементи скупа X јесу чворови графа, а елементи скупа ρ његове гране. Граф се очигледно може представити цртежом у равни (или простору) на следећи начин. Чворове графа представљамо произвољним међусобно различитим тачкама у равни (или простору). Ако су, за $x_i, x_j \in X$, елементи x_i и x_j у релацији ρ, односно ако важи $x_i \rho x_j$, тачку која представља чвор x_i спајамо непрекидном глатком линијом са тачком која представља чвор x_j. Ова линија се оријентише на цртежу стрелицом од x_i ка x_j и она не пролази кроз неки трећи чвор графа. Ако за $x_i, x_j \in X$, елементи x_i и x_j нису у релацији ρ, односно ако не важи $x_i \rho x_j$, чворови x_i и x_j нису на цртежу директно повезани. Грана која спаја чвор са самим собом назива се петља (ако код чвора x_i постоји петља, онда је елемент x_i скупа X у релацији ρ са самим собом, тј. важи $x_i \rho x_i$). Граф (X, ρ) неоријентисан је или симетричан ако и само ако је ρ симетрична релација. Код неоријентисаних графова све гране су двострано оријентисане, односно неоријентисане, па се стрелице на цртежу изостављају.
За два чвора неоријентисаног графа без петљи кажемо да су суседни ако су спојени граном. Број суседних чворова за чвор x назива се степен тог чвора. Неоријентисан граф без петљи назива се регуларан степена r ако је степен сваког чвора тог графа једнак r. Регуларан граф са n чворова степена $n - 1$ назива се потпун (комплетан) граф (код потпуног графа су свака два чвора спојена граном).
У неоријентисаном графу пут дужине k јесте наизменични низ чворова x_i и грана u_i облика $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1}$, при чему је за свако $1 \leq i \leq k$ чвор x_i почетни, а чвор x_{i+1} крајњи за грану u_i.
Неоријентисан граф је повезан ако се свака два његова чвора могу повезати путем. Ако у неоријентисаном графу постоје два чвора који се не могу повезати путем, кажемо да је тај граф неповезан.

На основу изложених чињеница дати граф јесте неоријентисан будући да његове гране на цртежу којим је представљен нису оријентисане. Јасно је и да је дати граф повезан, јер се свака два од његових шест чворова могу повезати путем. Дати граф није регуларан, јер у њему постоје четири чвора степена три и два чвора степена два, односно нису сви чворови истог степена. Такође, граф није ни потпун, јер има шест чворова, и они нису сви степена пет (очигледно је и да у датом графу нису свака два чвора спојена граном, тј. постоје чворови који нису спојени граном).
Дакле, тачни су одговори **(а)** и **(б)**.

– Тест основног знања – 24. 08. 2013.

1. Одредити ону примитивну функцију $F(x)$ функције $\ln x$, за коју је $F(e) = 0$.

2. Израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_0^2 |x-1| \mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' + 2xy^2 = 0$.

4. Формирати хомогену линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима ако се зна да је њено опште решење $y(x) = C_1e^x + 2C_2e^x + C_3e^{-x}$.

5. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \wedge \overline{p}$; **(б)** $p \vee \overline{p}$; **(в)** $p \Rightarrow \overline{p}$;

(г) $p \Rightarrow p$; **(д)** $p \uparrow \overline{p}$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

6. За које $a \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^n$?

7. Израчунати $S\left(\frac{1}{2}\right)$ ако је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

8. Одредити сопствене вредности матрице

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Дати су вектори $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (1,2,1)$ и $\vec{c} = (2,t,2)$, $t \in \mathbb{R}$. За коју вредност параметра t ови вектори не чине базу векторског постора $\mathbb{R}^3$?

10. Написати једначину равни у простору $\mathbb{R}^3$ која сече x-осу у тачки $A(1,0,0)$, y-осу у тачки $B(0,2,0)$ и z-осу у тачки $C(0,0,3)$.

– Решења –

1.

Подсетимо се да уколико је $F(x)$ произвољна примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a, b), тада важи $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, $x \in (a, b)$, где је C произвољна реална константа.

Потребно је одредити $F(x) = \int \ln x \mathrm{d}x$, а за одређивање тог интеграла користимо методу парцијалне интеграције:

$$F(x) = \int \ln x \,\mathrm{d}x \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v = x \end{array} \right\} \quad = \quad x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

Користећи дати услов $F(e) = 0$, израчунавамо вредност константе C:

$$0 = F(e) = e \ln e - e + C = e - e + C = C,$$

па је тражена примитивна функција функције $\ln x$ $F(x) = x \ln x - x$.

2.

Подсетимо се особине адитивности одређеног интеграла: уколико су a, b и c произвољни реални бројеви и уколико је функција $f(x)$ интеграбилна на највећем од интервала $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, тада је $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

За подинтегралну функцију важи $|x-1| = \left\{ \begin{array}{ll} -x+1, & x \in [0,1] \\ x-1, & x \in [1,2] \end{array} \right\}$. Искористимо сада особину адитивности одређеног интеграла:

$$\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |x-1|\,\mathrm{d}x + \int_1^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x+1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x.$$

Због линеарности одређеног интеграла је $\int_0^1 (-x+1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x$, као и $\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \mathrm{d}x$. Интеграли $\int x\,\mathrm{d}x$ и $\int \mathrm{d}x$ таблични су и једнаки су, редом, $\frac{x^2}{2} + C$ и $x + C$, па за израчунавање последња четири интеграла можемо искористити Њутн–Лајбницову формулу: $-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{2}$, $\int_0^1 \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$, $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right) = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $\int_1^2 \mathrm{d}x = x\Big|_1^2 = 2 - 1 = 1$. На крају је $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} - 1 = 1$.

♢ Задатак можемо решити и графички. Вредност одређеног интеграла $\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$ једнака је величини површине коју заклапају праве $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ и график функције $f(x) = |x-1|$. У питању су два подударна правоугла троугла са катетама дужине 1, па је величина површине једног од њих једнака $\frac{1}{2}$, а тражена вредност је 1.

3. Напишимо једначину на следећи начин: $y' = -2xy^2$. Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = -2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int -2x\,\mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости јесу таблични интеграли, те је: $-\frac{1}{y} = -x^2 + C_1$, односно $\frac{1}{y} = x^2 + C$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине јесте $y = \frac{1}{x^2 + C}$, што се једноставно може проверити.

4. Уочимо најпре да се дато опште решење може записати као $y = (C_1 + C_2)e^x + C_3e^{-x} = Ce^x + C_3e^{-x}$, па на основу облика општег решења закључујемо да је реч о хомогеној линеарној диференцијалној једначини другог реда са константним коефицијентима чија су два линеарно независна партикуларна решења $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$. На основу облика два линеарно независна партикуларна решења можемо закључити да су решења карактеристичне једначине тражене диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Карактеристична једначина је другог степена (јер је тражена диференцијална једначина другог реда), и позната су нам оба њена решења, па је карактеристична једначина $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$, односно $\lambda^2 - 1 = 0$. Дакле, тражена диференцијална једначина гласи $y'' - y = 0$.

5.

> Подсетимо се да је таутологија исказна формула која за све истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују има истинитосну вредност 1.

(а) важи $p \wedge \overline{p} = 0$ (наведена једнакост је аксиома Булове алгебре), па дата формула није таутологија;

(б) важи $p \vee \overline{p} = 1$ (наведена једнакост је аксиома Булове алгебре), па дата формула јесте таутологија;

(в) важи $p \Rightarrow \overline{p} = \overline{p} \vee \overline{p} = \overline{p}$ (прва једнакост следи из чињенице да је $p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q$, а друга из чињенице да важи $p \vee p = p$), па дата формула није ни таутологија ни контрадикција;

(г) важи $p \Rightarrow p = \overline{p} \vee p$, па дата формула јесте таутологија;

(д) важи $p \uparrow \overline{p} = \overline{p \wedge \overline{p}} = \overline{p} \vee p$ (последња једнакост следи из Де Моргановых закона и закона инволуције), па дата формула јесте таутологија.

Дакле, тачни су одговори **(б)**, **(г)** и **(д)**.

6.

> Подсетимо се да геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $|q| < 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Дати ред је геометријски ред за $q = \frac{3}{a}$. Дакле, конвергентан је уколико важи $\left|\frac{3}{a}\right| < 1$, односно $\left|\frac{a}{3}\right| > 1$, тј. $|a| > 3$.

7.

Подсетимо се да за $|q| < 1$ важи $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Уочимо да је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - 1 = \frac{1}{1-(-x)} - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$, па је тражена вредност $S\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$.

8.

Подсетимо се да за дату квадратну матрицу A можемо дефинисати њен карактеристични полином $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$, где је I јединична матрица истог реда као и матрица A. Нуле карактеристичног полинома матрице A јесу њене карактеристичне (сопствене) вредности.

Карактеристични полином матрице B је:

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Његове нуле су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 2$, и то су сопствене вредности дате матрице B.

9.

Подсетимо се да базу векторског простора $\mathbb{R}^3$ чине било која три линеарно независна вектора из $\mathbb{R}^3$.
Такође, три вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ линеарно су зависни ако и само ако је њихов мешовити производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ једнак нули.

На основу наведених чињеница, дати вектори су линеарно зависни ако и само ако важи

$$0 = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & 2 \end{vmatrix} = 4 - t,$$

односно за $t = 4$.
Дакле, дата три вектора линеарно су зависни, односно не чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$, уколико важи $t = 4$.

10.

Подсетимо се сегментног облика једначине равни α у простору $\mathbb{R}^3$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Раван α одсеца на координатним осама Ox, Oy, Oz, редом, одсечке a, b, c, односно садржи тачке са координатама $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

Једначина тражене равни је, дакле, $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$, односно $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

– Тест основног знања – 07. 09. 2013.

1. Одредити интеграл $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - 4x^2 + 4}$.

2. Израчунати величину површине дела равни ограниченог кривом $y = x^3$ и правом $y = 2x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y' = \frac{1}{2}y$.

4. Колико има различитих Булових функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ таквих да важи:

$$\left(\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2\right) \quad f(x_1, x_2) = f(\overline{x_1}, \overline{x_2})?$$

5. На колико различитих начина можемо послагати на полицу 10 књига, од којих су 4 зелене, 3 црвене, 2 жуте и једна плава?

6. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\sum_{n=3}^{+\infty} n^{\alpha+3}$?

7. Одредити полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} (3x)^n$.

8. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Дат је систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} 2x + \ \ y &= 1 \\ ax + 5y &= 2 \end{aligned}.$$

За коју вредност реалног параметра a дати систем није сагласан?

10. Написати једначину равни која садржи тачку $M(-2, 1, 3)$ и нормална је на вектор $\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

– Решења –

1. Уочимо да је $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-4x^2+4} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2)^2}$. Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t=x^2$:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2-2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(x^2\right) = 2x\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-2} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2}+C.$$

Дакле, $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-4x^2+4} = -\frac{1}{2\left(x^2-2\right)}+C.$

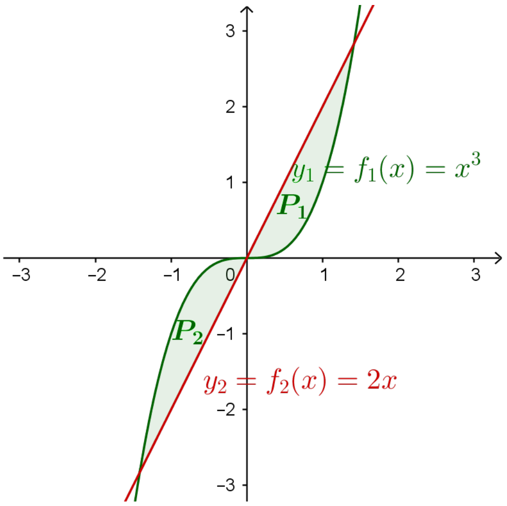
Приликом одређивања овог интеграла користили смо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2}+C.$

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

> Подсетимо се да уколико су $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ две криве истог знака на одсечку $[a,b]$ (односно ако за свако $x\in[a,b]$ важи $f_1(x)\geq 0$ и $f_2(x)\geq 0$ или $f_1(x)\leq 0$ и $f_2(x)\leq 0$), при чему је $f_1(x)\geq f_2(x)$ за $x\in[a,b]$ а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ функције интеграбилне на одсечку $[a,b]$, тада вредност $\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривама $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ и правама $x=a$ и $x=b$.
> Уколико, додатно, важи и $f_1(a) = f_2(a)$ и $f_1(b) = f_2(b)$ (односно уколико се криве $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ секу у тачкама $A(a, f_1(a))$ и $B(b, f_1(b))$), тада оне за $x\in[a,b]$ чине границу једне фигуре у равни и површина те фигуре јесте $\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,\mathrm{d}x$.

Одредимо, најпре, пресечне тачке кривих $y_1 = f_1(x) = x^3$ и $y_2 = f_2(x) = 2x$, односно решимо једначину $f_1(x) = f_2(x)$, тј. $x^3 = 2x$. Имамо да је $x^3-2x=0$, односно $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$, па видимо да постоје три пресечне тачке датих кривих: $A(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ и $O(0,0)$. Скицирајмо сада графике функција $y_1 = f_1(x) = x^3$ и $y_2 = f_2(x) = 2x$. Видимо да дате криве ограничавају једну фигуру у првом и једну у трећем квадранту, као и да су те две фигуре подударне, што следи из чињенице да су функције f_1 и f_2 непарне (за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $f_1(-x) = -f_1(x)$ и $f_2(-x) = -f_2(x)$), па су њихови графици симетрични у односу на координатни почетак. Зато, ако са P_1 означимо величину површине дела фигуре који се налази у првом квадранту, а са P_2 величину површине дела фигуре који се налази у трећем квадранту, тада је тражена површина $P = P_1 + P_2 = 2P_1$. Видимо и да се за $x\in[0,\sqrt{2}]$, односно у првом квадранту, график криве $y_2 = f_2(x) = 2x$ налази изнад графика криве $y_1 = f_1(x) = x^3$, односно за $x\in[0,\sqrt{2}]$ важи $f_2(x) = 2x \geq x^3 = f_1(x)$. Зато је $P_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x - x^3\right)\,\mathrm{d}x$. Због линеарности интеграла важи $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x-x^3\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{2}} x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} x^3\,\mathrm{d}x$. Интеграли $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{d}x$ јесу таблични интеграли и једнаки су, редом, $\dfrac{x^2}{2}+C$ и $\dfrac{x^4}{4}+C$, па за израчунавање површине P_1 користимо Њутн–Лајбницову формулу:



$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2x - x^3\right)\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} x^3\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{2}} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{2}} = \\
&= \left((\sqrt{2})^2 - 0\right) - \left(\frac{(\sqrt{2})^4}{4} - 0\right) = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

Дакле, тражена површина је $P = P_1 + P_2 = 2P_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

◇ Величину површине P_2 могли смо, такође, рачунати применом одређеног интеграла и то на исти начин као што смо израчунали величину површине P_1. Дакле, $P_2 = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \left(x^3 - 2x\right)\,\mathrm{d}x$, а вредност овог одређеног интеграла јесте 1.

У задацима у којима је потребно израчунати величину површине ограничене датим функцијама (односно кривама) применом одређеног интеграла, врло је важно правилно скицирати графике тих функција (кривих). То нам често (као у овом задатку) олакшава израду задатка, а помаже нам и приликом одређивања међусобног положаја датих кривих у равни. Посебну пажњу требало би обратити на чињеницу да је интеграл негативне функције $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ негативан број, па уколико желимо да израчунамо величину површине P ограничене графиком функције $f(x)$ и x-осом, тада је $P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Ово је једначина која раздваја промењиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = \frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, па је: $\ln|y| = \frac{1}{2}x + C$, односно $y = C_1 e^{\frac{x}{2}}$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине гласи $y = C_1 e^{\frac{x}{2}}$, што се једноставно може проверити.

4. Свака Булова функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ одређена је низом (дужине четири) својих слика $(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$, где $f(x_1,x_2)$ представља слику елемента $(x_1,x_2) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Будући да је кодомен функције f двоелементни скуп $\{0,1\}$, значи да елементи низа $(f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1))$ могу узимати вредности из скупа $N = \{0,1\}$ (односно, за свако $(x_1,x_2) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ важи $f(x_1,x_2) = 0$ или $f(x_1,x_2) = 1$), па је укупан број различитих Булових функција $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ једнак $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.
Размотримо сада колико од тих 16 различитих Булових функција задовољава тражену особину. Будући да важи: $\left(\forall (x_1,x_2) \in \{0,1\}^2\right) \quad f(x_1,x_2) = f(\overline{x_1}, \overline{x_2})$, то значи да је $f(0,0) = f(1,1)$, као и $f(0,1) = f(1,0)$, па је низ слика којим је одређена свака Булова функција са траженом особином следећег облика: $(f(0,0), f(0,1), f(0,1), f(0,0))$. То значи да је тај низ одређен са своја прва два елемента (трећи елемент је једнак другом, а четврти првом), а прва два елемента могу узимати

вредности из скупа $N = \{0,1\}$, па је укупан број различитих Булових функција са траженом особином једнак $2 \cdot 2 = 4$.

$\diamondsuit$ Свака Булова функција може се задати и таблицом својих вредности (тада је Булова функција одређена вредностима у последњој колони таблице, а те вредности могу бити 0 или 1), па смо задатак могли да урадимо и формирањем таблице вредности тражених функција. Таблица вредности сваке Булове функције која задовољава тражену особину има следећи облик:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(0,1)$
1	1	$f(0,0)$

Дакле, питање је колико различитих таблица датог облика можемо формирати. Будући да попуњавамо само прва два места у последњој колони, а треће и четврто место преписујемо (треће место у последњој колони једнако је другом, а четврто првом), и да на тим местима можемо бирати да ли ћемо их попунити нулом или јединицом, тражених Булових функција има $2 \cdot 2 = 4$.

5.

Нека је дат скуп $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Пребројмо колико има пермутација елемената скупа X у којима се сваки од елемената појављује прописан број пута, односно у којима се елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ појављују, редом, тачно $m_1, m_2, \ldots, m_n$ пута. Јасно је да је свака таква пермутација, у ствари, један низ дужине $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = r$. Уколико бисмо тих r елемената пермутовали не водећи при томе рачуна да међу њима има и једнаких, укупан број таквих низова (пермутација) био би једнак $r!$. Међутим, произвољан низ (пермутација), уколико се једнаки елементи пермутују (премештају) у оквиру позиција које заузимају, даје исти такав низ (пермутацију). Дакле, ако у једном таквом низу (пермутацији) елементе једнаке x_1 пермутујемо у оквиру m_1 позиција на којима се налазе, добијамо $m_1!$ истих низова (пермутација). Исто важи и за све остале елементе скупа X: ако у једном датом низу (пермутацији) елементе једнаке x_i пермутујемо у оквиру m_i позиција на којима се налазе, добијамо $m_i!$ истих таквих низова (пермутација), и ово важи за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Према принципу производа видимо да пермутовањем добијамо $m_1!m_2! \cdots m_n!$ истих пермутација за сваку пермутацију код које поједини међусобно једнаки елементи заузимају исте позиције. Ако са $\overline{P}_{m_1,m_2,\ldots,m_n}$ означимо број пермутација елемената скупа X у којима се елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ појављују, редом, тачно $m_1, m_2, \ldots, m_n$ пута, видимо, на основу претходне дискусије, да је:

$$\overline{P}_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \frac{r!}{m_1!m_2! \cdots m_n!}$$

У питању је број пермутација са понављањем скупа од четири елемента (имамо зелене, црвене, жуте и плаве књиге), у којима се први елемент појављује тачно четири пута (јер имамо четири међусобно једнаке зелене књиге), други елемент тачно три пута (јер имамо три међусобно једнаке црвене књиге), трећи елемент тачно два пута (јер имамо две међусобно једнаке жуте књиге) и четврти елемент тачно једнанпут (јер имамо једну плаву књигу).
Дакле, $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$, и важи $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 10$, па је, на основу претходног, тражени број једнак $\overline{P}_{4,3,2,1} = \frac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$.

6.

Подсетимо се чињенице да нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Општи члан датог реда можемо написати као $\frac{1}{n^{-\alpha-3}}$. Због наведене чињенице, дати ред конвергира за $-\alpha - 3 > 1$, односно за $\alpha < -4$.

7.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се израчунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Важи $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2}(3x)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n+2} 3^n x^n$, па је полупречник конвергенције датог реда $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}3^n}{\frac{n+2}{n+3}3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{3(n+2)^2} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} = \frac{1}{3}$, будући да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} = 1$ (јер су полиноми у бројиоцу и имениоцу разломка у последњој граничној вредности истог степена и имају исти коефицијент уз највећи степен променљиве n).

Упоредити са шестим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године.

8.

Подсетимо се да је минимални полином матрице A (јединствени) полином $P(\lambda)$ најмањег степена за који важи $P(A) = \mathbf{O}$ и чији је водећи коефицијент (коефицијент уз највећи степен) једнак један.
Такође, важи да је минимални полином матрице A делилац њеног карактеристичног полинома.

Карактеристични полином матрице A јесте:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = (\lambda+1)(\lambda-3),$$

па су једини делиоци полинома $P_A(\lambda)$ чији је водећи коефицијент једнак један полиноми $P_1(\lambda) = \lambda + 1$, $P_2(\lambda) = \lambda - 3$ и сам карактеристични полином $P_A(\lambda)$. То су једини "кандидати" за минимални полином матрице A.
Будући да је $P_1(A) = A + \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, полином $P_1(\lambda)$ није минимални полином матрице A.
Такође, $P_2(A) = A - 3\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, па ни полином $P_2(\lambda)$ није минимални полином матрице A.
Дакле, минимални полином матрице A једнак је њеном карактеристичном полиному, односно њен минимални полином је $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године.

9.

Подсетимо се да је систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

сагласан уколико постоји бар једна уређена n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ која задовољава сваку од m једначина система. Другим речима, систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан је уколико има бар једно решење.

Матрице $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ називају се, редом, матрица система и проширена матрица система.

Важи и следећа, Кронекер–Капелијева теорема:
Систем m линеарних алгебарских једначина са n непознатих сагласан је ако и само ако је $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} B$.
Подсетимо се да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице, као и да елементарне трансформације не мењају ранг матрице.

На основу претходног дати систем неће бити сагласан, односно неће имати решења, уколико је ранг матрице система различит од ранга проширене матрице система. Проширена матрица система јесте $B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ a & 5 & 2 \end{array}\right]$. Извршимо на њој следећу елементарну трансформацију: помножимо њену прву врсту бројем -5 и додајмо је другој врсти. На тај начин долазимо до матрице $B' = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ a-10 & 0 & -3 \end{array}\right]$. Највећа регуларна квадратна подматрица матрице B' јесте подматрица која је образована од елемената матрице B' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и друге и треће колоне, то јест матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, па је њен ранг једнак два. Будући да важи $\mathrm{rang} B = \mathrm{rang} B'$, и ранг проширене матрице система такође је 2, и то за свако $a \in \mathbb{R}$. Уочимо да је матрица система $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & 5 \end{bmatrix}$ подматрица проширене матрице система, па истим елементарним трансформацијама које смо извршили на проширеној матрици система, од матрице A добијамо матрицу $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a-10 & 0 \end{bmatrix}$, чији је ранг једнак два уколико је $a \neq 10$ (тада је $\det A' = 10 - a \neq 0$, па је сама матрица A' своја највећа регуларна подматрица), а једнак је један уколико је $a = 10$ (у том случају матрица A' очигледно није регуларна јер су јој сви елементи у другој врсти једнаки нули). Важи и да је $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A'$, па је ранг матрице система различит од два ако је $a = 10$. Дакле, услов да је ранг матрице система различит од ранга проширене матрице система (тада систем није сагласан, односно нема решење), испуњен је уколико је $a = 10$.

♢ Задатак смо могли урадити и директним решавањем датог система. Наиме, уколико прву једначину помножимо бројем -5 и додамо је другој једначини (како бисмо у другој једначини елиминисали непознату y), долазимо до еквивалентног система $\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 1 \\ (a-10)\,x + & = & -3 \end{array}$.
Одмах можемо уочити да, уколико је $a - 10 \neq 0$, односно $a \neq 10$, другу једначину у добијеном

систему можемо поделити са $a-10$. На тај начин добијамо да је $x=-\frac{3}{a-10}$, а када ову вредност за x уврстимо у прву једначину, добијамо да је $y=\frac{a-4}{a-10}$. То значи да ако је испуњен услов $a\neq 10$, овај систем, за свако $a\in\mathbb{R}$ које тај услов испуњава, има јединствено решење, и то је уређен пар $(\frac{a-4}{a-10},-\frac{3}{a-10})$.
С друге стране, ако је $a-10=0$, односно $a=10$, друга једначина своди се на нетачну једнакост $0=-3$, па у том случају систем нема решење, тј. није сагласан.
Дакле, дати систем није сагласан уколико је $a=10$.

♣ Упоредити са седмим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године.

10.

Подсетимо се да једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чији је вектор нормале $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1,T_2,T_3)$ гласи: $n_1(x-T_1)+n_2(y-T_2)+n_3(z-T_3)=0$.

Вектор нормале тражене равни јесте дати вектор $\vec{n}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, односно $\vec{n}=(4,2,-1)$. Будући да су дате и координате тачке $M(-2,1,3)$ коју тражена раван садржи, њена једначина је $4\cdot(x-(-2))+2\cdot(y-1)-1\cdot(z-3)=0$, односно $4x+2y-z+9=0$.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године.

– Тест основног знања – 19. 01. 2014.

1. Одредити интеграл $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

2. Вредност параметра $b \in \mathbb{R}$, $b > -1$, таквог да важи једнакост $\dfrac{1}{b+1}\displaystyle\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x = 4$, једнака је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) 1; **(б)** 2; **(в)** 3; **(г)** 4;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $\operatorname{tg} y\mathrm{d}x = x\ln x\mathrm{d}y$.

4. Формирати хомогену линеарну диференцијалну једначину четвртог реда са константним коефицијентима ако се зна да су четири њена линеарно независна партикуларна решења $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = xe^{-x}$ и $y_4 = x^2e^{-x}$.

5. Колико има четвороцифрених бројева код којих је друга цифра већа од 6, а трећа мања од 2? Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) 600; **(б)** 540; **(в)** 486; **(г)** 360; **(д)** 270;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

6. Ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^k$ конвергира за свако k, где је (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) $k > 1$; **(б)** $k \leq 1$; **(в)** $k \leq 0$;

(г) $k < -1$; **(д)** $k \geq -1$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

7. Сума степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, на интервалу $(-1, 1)$ у затвореном облику је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) $\dfrac{1}{1-x}$; **(б)** $\dfrac{1}{1+x}$; **(в)** $\dfrac{x}{1-x}$;

(г) $\dfrac{x}{1+x}$; **(д)** $-\dfrac{x}{1+x}$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Одредити све вредности реалног параметра a за које је ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ једнак два.

9. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Колико чворова има неоријентисан потпун граф са 21 граном? Заокружити слова испред тачних одговора:

(а) 13 чворова; **(б)** 42 чвора;

(в) 7 чворова; **(г)** 6 чворова;

(д) такав граф не постоји;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1. Дати интеграл је таблични интеграл: $\int x\sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$. Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције. Дакле, врло је важно да при изради оваквих задатака додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2. Искористићемо особину линеарности одређеног интеграла како бисмо израчунали вредност са леве стране дате једнакости:

$$\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}\left(\int_{-1}^{b}3x^2\mathrm{d}x + \int_{-1}^{b}2x\mathrm{d}x\right).$$

Оба неодређена интеграла $\int 3x^2\mathrm{d}x$ и $\int 2x\mathrm{d}x$ јесу таблични интеграли, и њихове примитивне функције су, редом, $x^3 + C$ и $x^2 + C$. Да бисмо израчунали одговарајуће одређене интеграле, користимо Њутн–Лајбницову формулу:

$$\int_{-1}^{b}3x^2\mathrm{d}x = x^3\Big|_{-1}^{b} = b^3-(-1)^3 = b^3+1 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{b}2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^{b} = b^2-(-1)^2 = b^2-1.$$

Сада је: $\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}(b^3+1+b^2-1) = \frac{b^2(b+1)}{b+1} = b^2$. Да би вредност израза $\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x$ била једнака 4, мора важити $b^2 = 4$, односно $b = 2$ или $b = -2$, али будући да је у задатку постављен услов $b > -1$, закључујемо да је $b = 2$. Тачан је одговор **(б)**.

3.

> Подсетимо се следеће чињенице: уколико је подинтегрална функција задата као разломак, и уколико је извод имениоца израза којим је задата подинтегрална фукција једнак бројиоцу тог израза, тада је интеграл следећег облика $\int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, и решавамо га увођењем смене $t = f(x)$:
>
> $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} t & = & f(x) \\ \mathrm{d}t & = & f'(x)\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом: $\operatorname{tg} y\mathrm{d}x = x\ln x\mathrm{d}y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{tg} y} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{tg} y}$. Решимо сада интеграле са леве и десне стране последње једнакости.
Интеграл са леве стране једнакости решавамо увођењем смене $t = \ln x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \left\{\begin{array}{rcl} t & = & \ln x \\ \mathrm{d}t & = & \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{array}\right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Знамо да је $\frac{1}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{ctg} y$, па је потребно решити интеграл $\int \operatorname{ctg} y\mathrm{d}y = \int \frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y$.
Будући да важи $(\sin y)' = \cos y$, имамо:

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \sin y \\ \mathrm{d}t &=& \cos y \mathrm{d}y \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin y| + C.$$

Сада можемо одредити опште решење полазне диференцијалне једначине: $\ln|\ln x| + C = \ln|\sin y|$, или $\sin y = C_1 \ln x$, односно $y = \arcsin(C_1 \ln x)$, што се лако може непосредно проверити.

4. Дата су четири линеарно независна партикуларна решења једначине коју је потребно формирати, и она су $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = xe^{-x}$ и $y_4 = x^2e^{-x}$. Можемо закључити да су решења карактеристичне једначине тражене хомогене диференцијалне једначине четвртог реда са константним коефицијентима $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Будући да је тражена диференцијална једначина четвртог реда, њена карактеристична једначина четвртог је степена, и позната су нам сва њена решења, па је карактеристична једначина $(\lambda - 1)(\lambda + 1)^3 = 0$, односно $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0$. Тражена диференцијална једначина гласи $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$.

♣ Упоредити са четвртим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године.

5. Сваки четвороцифрен број може се представити као низ дужине четири (низ са четири елемента), где i-ти елемент низа представља i-ту цифру тог броја, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Низ који представља неки од тражених бројева има следеће особине: његов први елемент можемо бирати из скупа $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (зато што прва цифра не сме бити нула), други елемент из скупа $A_2 = \{7, 8, 9\}$, зато што је друга цифра већа од 6, трећи елемент из скупа $A_3 = \{0, 1\}$, зато што је трећа цифра мања од 2 и четврти елемент из скупа $A_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Скупови A_1, A_2, A_3 и A_4 имају, редом, 9, 3, 2 и 10 елемената, па је, према правилу производа, број различитих низова са наведеним особинама једнак: $9{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}10 = 540$. Дакле, четвороцифрених бројева код којих је друга цифра већа од 6, а трећа мања од 2 има 540. Тачан је одговор **(б)**.

6.

> Подсетимо се чињенице да нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Општи члан датог реда можемо написати као $\frac{1}{n^{-k}}$. Због наведене чињенице, дати ред конвергира за $-k > 1$, односно за $k < -1$. Тачан је одговор **(г)**.

♣ Упоредити са шестим задатком на тесту одржаном 07. 09. 2013. године.

7.

> Подсетимо се да за свако $t \in (-1, 1)$ и сваки број $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ важи биномни развој
>
> $$(1 + t)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} t^n.$$
>
> Такође, за сваки природан број n је $\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-1-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n$, па биномни развој за $a = -1$ гласи: $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$.

Уведимо у последњој једнакости смену $x = -t$, и уочимо да, уколико $t \in (-1, 1)$, тада и $x \in (-1, 1)$. На тај начин добијамо нови развој $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, који такође важи за свако $x \in (-1, 1)$.

Сада је јасно да је $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$. Тачан је одговор **(в)**.
У задацима у којима је потребно сумирати дати ред, требало би обратити посебну пажњу на почетну вредност "бројача" (сетимо се да почетна вредност "бројача" не утиче на конвергенцију реда, али, наравно, утиче на његову суму).

♢ Можемо уочити да је у питању сума геометријског реда чији је количник $q = x$, а први члан $b_1 = x$. Геометријски ред конвергира за $|x| < 1$, и његова сума је $\frac{b_1}{1-q} = \frac{x}{1-x}$, па је тачан одговор **(в)**.

8.

Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је, по дефиницији, ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице.

Извршимо на датој матрици A следећу елементарну трансформацију: додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -2. На тај начин добијамо матрицу $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Детерминанта матрице A' једнака је нули, с обзиром на то да су сви елементи њене треће врсте једнаки нули.
Видимо да је $\text{rang} A' = 2$ јер је њена највећа регуларна квадратна подматрица она коју образују елементи матрице A' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и друге колоне, односно матрица $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Будући да важи $\text{rang} A = \text{rang} A' = 2$, ранг матрице A не зависи од a, и једнак је два за свако $a \in \mathbb{R}$.

♢ Можемо уочити да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће врсте, али нису пропорционални елементима друге врсте. То значи да матрица има две линеарно независне врсте, па је по теореми њен ранг једнак 2, за свако $a \in \mathbb{R}$.

♣ Упоредити са осмим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године.

9.

Подсетимо се да је минимални полином матрице A (јединствени) полином $P(\lambda)$ најмањег степена за који важи $P(A) = \mathbf{O}$ и чији је водећи коефицијент (коефицијент уз највећи степен) једнак један. Такође, важи да је минимални полином матрице A делилац њеног карактеристичног полинома.

Карактеристични полином матрице A јесте:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2,$$

па су једини делиоци полинома $P_A(\lambda)$, чији је водећи коефицијент једнак један, полиноми $P_1(\lambda) = \lambda - 3$ и $P_2(\lambda) = (\lambda - 3)^2$. То су једини "кандидати" за минимални полином матрице A. Будући да је $P_1(A) = A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, полином $P_1(\lambda)$ није минимални полином матрице A, па закључујемо да је минимални полином матрице A полином $P_2(\lambda) = (\lambda - 3)^2$.

10.

Подсетимо се да је потпун граф онај код кога су свака два чвора спојена граном. Ако је n број чворова потпуног графа, онда је његов број грана једнак $\binom{n}{2}$.

Користећи наведену чињеницу, видимо да је $\displaystyle\binom{n}{2} = 21$. То значи да је $\dfrac{n(n-1)}{2} = 21$, односно $n^2 - n - 42 = 0$. Решења ове квадратне једначине јесу $n_1 = -6$ и $n_2 = 7$. Јасно је да број чворова сваког графа мора бити природан број, па је број чворова потпуног графа са 21 граном једнак 7. Тачан је одговор **(в)**.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 13. 02. 2011. године, као и са петим задатком на тесту одржаном 20. 01. 2013. године.

– Тест основног знања – 09. 02. 2014.

1. Одредити примитивну функцију функције $f(x)$ ако је $f(x) = \dfrac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x-2}$.

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin x \mathrm{d}x$.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = y$.

4. Формирати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима ако се зна да су два њена линеарно независна партикуларна решења $y_1 = \sin\sqrt{2}x$ и $y_2 = \cos\sqrt{2}x$.

5. Број елемената коначне Булове алгебре може бити (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) 6; **(б)** 8; **(в)** 10; **(г)** 16; **(д)** 24; **(ђ)** 30;

(е) ниједан од претходних одговора није тачан.

6. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha}$?

7. Ако је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, израчунати $S(1)$.

8. За које је вредности реалног параметра b ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & b \end{bmatrix}$ мањи или једнак два?

9. Производ сопствених вредности матрице $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) 3; **(б)** 2; **(в)** 0; **(г)** 1; **(д)** -1;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Написати једначину равни у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна са Oxy-равни и садржи тачку $C(0,0,3)$.

– Решења –

1.

Подсетимо се да уколико је $F(x)$ произвољна примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу (a,b), тада важи $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, $x \in (a,b)$, где је C произвољна реална константа.
Такође, уколико је подинтегрална функција задата као разломак, и ако је извод имениоца тог разломка једнак његовом бројиоцу, тада интеграл има следећи облик: $\int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, па га решавамо увођењем смене $t = f(x)$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& f(x) \\ \mathrm{d}t &=& f'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Потребно је одредити $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x-2}\mathrm{d}x$. Уочимо да важи $(x^3+x^2-2x-2)' = 3x^2+2x-2$, па је:

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x-2}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x^3+x^2-2x-2 \\ \mathrm{d}t &=& (3x^2+2x-2)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C = \ln|x^3+x^2-2x-2|+C.$$

Тражена примитивна функција дате функције $f(x)$ јесте свака функција $\ln|x^3+x^2-2x-2|+C$, где је C призвољна реална константа.

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

Подсетимо се да, уколико је интервал интеграције облика $[-a,a]$, тј. симетричан у односу на нулу, најпре испитујемо парност подинтегралне функције, јер важе следеће чињенице:

- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и непарна, тада је $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ једнак нули;
- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и парна, тада је $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Подинтегрална функција $\arcsin x$ непрекидна је на интервалу $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (домен функције $\arcsin x$ јесте интервал $[-1,1]$, који садржи интервал интеграције $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$), а такође је и непарна (за свако x из домена функције $\arcsin x$ важи $\arcsin(-x) = \arcsin x$), па је тражена вредност датог интеграла једнака 0.

◇ Задатак се може урадити и директним израчунавањем датог одређеног интеграла (применити метод парцијалне интеграције). Тај начин је, иако коректан, знатно захтевнији.

3. Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = y \Rightarrow \frac{dy}{\mathrm{d}x} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је: $\ln|y| = x + C$, односно $y = C_1 e^x$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине гласи $y = C_1 e^x$, што се једноставно може проверити.

4. Будући да су дата два линеарно независна партикуларна решења, која су облика $y_1 = \sin\sqrt{2}x$ и $y_2 = \cos\sqrt{2}x$, закључујемо да су решења карактеристичне једначине тражене хомогене диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима $\lambda_1 = \sqrt{2}i$ и $\lambda_2 = -\sqrt{2}i$.
Карактеристична једначина је другог степена (јер је тражена диференцијална једначина другог реда), и позната су нам оба њена решења, па је карактеристична једначина $(\lambda - \sqrt{2}i)(\lambda + \sqrt{2}i) = 0$, односно $\lambda^2 + 2 = 0$. Сада је јасно да је тражена диференцијална једначина $y'' + 2y = 0$.

5.

> Подсетимо се да број елемената произвољне Булова алгебре мора бити број облика 2^n, $n \in \mathbb{N}$ (односно број који је степен броја 2). Ова чињеница је директна последица познате Стоунове теореме, која тврди да је свака коначна Булова алгебра $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge)$ изоморфна некој алгебри скупова $(P(I), \cup, \cap)$.

Међу понуђеним одговорима, бројеви 8 и 16 су степени броја 2 ($8 = 2^3$, док је $16 = 2^4$), а остали бројеви то нису. Према томе, тачни су одговори **(б)** и **(г)**.

6.

> Подсетимо се да нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Напишимо општи члан датог реда као $\frac{1}{n^{-2\alpha}}$, и искористимо наведену чињеницу. Имамо да дати нумерички ред конвергира за $-2\alpha > 1$, односно за $\alpha < -\frac{1}{2}$.

7.

> Подсетимо се Маклореновог развоја функције $\sin x$:
>
> $$\text{за свако } x \in \mathbb{R} \text{ важи } \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Сада је $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x = \sin x - x$, па је тражена вредност $S(1) = \sin 1 - 1$.

8.

> Подсетимо се да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице, као и да елементарне трансформације не мењају ранг матрице.

Извршимо на датој матрици A следећу елементарну трансформацију: додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте. На тај начин добијамо матрицу $A' = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & b-2 \end{bmatrix}$. Сада у матрици A' извршимо нову елементарну трансформацију: додајмо елементима треће врсте елементе друге врсте како бисмо добили матрицу $A'' = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$. Детерминанта матрице A'' је $(b-2)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (b-2)$ (што се једноставно види развијањем детерминанте матрице A'' по трећој врсти), и различита је од нуле за $b \neq 2$, а једнака нули за $b = 2$. Дакле, $\operatorname{rang} A'' = 3$ ако је $b \neq 2$ (у том случају сама матрица A'' је регуларна, па је она сама своја највећа регуларна квадратна подматрица), односно $\operatorname{rang} A'' = 2$ ако је $b = 2$ (у том случају највећа регуларна квадратна подматрица матрице A'' јесте подматрица која је образована од елемената матрице A'' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и друге колоне, то јест матрица $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$). Будући да важи $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A''$, ранг матрице A је мањи или једнак два уколико је $b = 2$.

9.

Подсетимо се да је производ свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеној детерминанти.

Дакле, потребно је само израчунати детерминанту матрице J, а та детерминанта једнака је нули јер су елементи њене прве врсте једнаки елементима њене друге (и треће) врсте. Тачан је одговор **(в)**.

♢ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице J, односно одређивањем карактеристичног полинома матрице J и његових нула (резултат је $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

10.

Подсетимо се да једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чији је вектор нормале $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ гласи: $n_1(x - T_1) + n_2(y - T_2) + n_3(z - T_3) = 0$.

Такође важи и следећа чињеница: равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне су ако и само ако су њихови вектори нормала $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ паралелни.

Вектор нормале Oxy-равни јесте сваки вектор који је паралелан са z-осом, па самим тим и вектор $(0, 0, 1)$. Једначина тражене равни је, дакле, $0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 3) = 0$, односно $z = 3$.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године.

– Тест основног знања – 14. 06. 2014.

1. Одредити интеграл $\int x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати величину површине дела равни ограниченог кривом $y = \ln x$, правом $x = 3$ и x-осом.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = -2xy^2$.

4. Одредити опште решење хомогене диференцијалне једначине трећег реда $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$.

5. Колико има различитих петоцифрених бројева чија је друга цифра већа од 7, а четврта цифра мања од 4? Цифре се могу понављати.

6. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; **(б)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; **(г)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{5}{n}$;

(д) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} 3$;

(ђ) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

7. Полупречник конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n(n+2)}$ једнак је (заокружити тачан одговор):

(а) 0; **(б)** $\frac{1}{3}$; **(в)** $+\infty$; **(г)** 3;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Одредити ранг матрице $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & b \end{bmatrix}$ у зависности од вредности реалног параметра b.

9. Одредити карактеристични полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Одредити вредност реалног параметра m за коју су праве $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$ и $q: \frac{x}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{m}$ паралелне.

– Решења –

1. Дати интеграл решавамо уводећи смену $t = -x^3$:

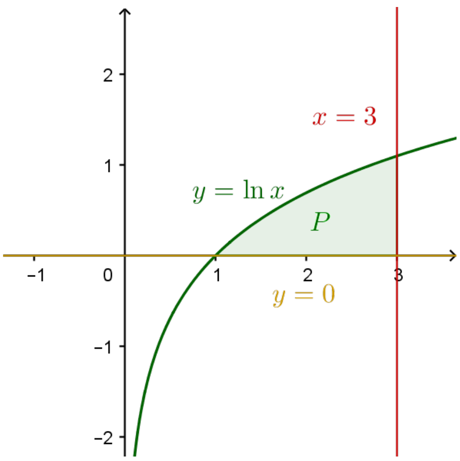
$$\int x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& -x^3 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}(-x^3) = -3x^2\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int -\frac{1}{3}e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C.$$

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

> Подсетимо се да уколико је $y = f(x)$ позитивна крива на одсечку $[a,b]$ (односно ако за свако $x \in [a,b]$ важи $f(x) \geq 0$), и ако је функција $f(x)$ интеграбилна на одсечку $[a,b]$, тада вредност $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.

Скицирајмо график функције $y = \ln x$. Функција $y = \ln x$ сече x-осу у тачки $x = 1$, па се површина ограничена кривом $y = \ln x$, правом $x = 3$ и x-осом налази изнад x-осе, и доња граница интеграције јесте тачка $x = 1$. Дакле, тражену величину P рачунамо као одређени интеграл $P = \displaystyle\int_1^3 \ln x\,\mathrm{d}x$. Неодређени интеграл функције $y = \ln x$ одређујемо методом парцијалне интеграције, док одговарајуће одређене интеграле рачунамо коришћењем Њутн–Лајбницове формуле.



$$\begin{aligned} \int \ln x\,\mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v = x \end{array} \right\} \\ &= x\ln x - \textstyle\int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C \\ P &= \int_1^3 \ln x\,\mathrm{d}x \\ &= (x\ln x - x)\Big|_1^3 \\ &= 3\ln 3 - 3 - \ln 1 - (-1) = 3\ln 3 - 2 \end{aligned}$$

Дакле, тражена површина је $P = 3\ln 3 - 2$.

У задацима у којима је потребно израчунати величину површине ограничене датим функцијама (односно кривама) применом одређеног интеграла, врло је важно правилно скицирати графике тих функција (кривих). То нам често (као у овом задатку) олакшава израду задатка, а помаже нам и приликом одређивања међусобног положаја датих кривих у равни.
Посебну пажњу требало би обратити на чињеницу да је интеграл негативне функције $f(x)$ на интервалу $[a,b]$ негативан број, па уколико желимо да израчунамо величину површине P ограничене графиком функције $f(x)$ и x-осом, тада је $P = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног оптег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = -2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = -2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int -2x\,\mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости јесу таблични интеграли, те је: $-\frac{1}{y} = -x^2 + C_1$, односно $\frac{1}{y} = x^2 + C$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине јесте $y = \frac{1}{x^2+C}$, што се једноставно може проверити.

♣ Упоредити са трећим задатком на тесту одржаном 24. 08. 2013. године.

4. У питању је хомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$. Приметимо да је $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = \lambda^3 - \lambda^2 - 2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, па су решења карактеристичне једначине $\lambda_1 = 1$ и два решења квадратне једначине $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, а то су $\lambda_2 = 1 + i$ и $\lambda_3 = 1 - i$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1e^x + C_2e^x \cos x + C_3e^x \sin x$.

5. Сваки петоцифрен број може се представити као низ дужине пет (низ са пет елемената), где i-ти елемент низа представља i-ту цифру тог броја, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Низ који представља неки од тражених бројева има следеће особине: његов први елемент можемо бирати из скупа $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (зато што прва цифра не сме бити нула), други елемент из скупа $A_2 = \{8, 9\}$, зато што је друга цифра већа од 7, четврти елемент из скупа $A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, зато што је четврта цифра мања од 4, а трећи и пети елементи тог низа јесу из скупа $A_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Скупови A_1, A_2, A_3 и A_4 имају, редом, 9, 2, 4 и 10 елемената, па је, према правилу производа, број различитих низова са наведеним особинама једнак: $9·2·10·4·10 = 7200$. Дакле, петоцифрених бројева код којих је друга цифра већа од 7, а четврта мања од 4 има 7200.

♣ Упоредити са петим задатком на тесту одржаном 19. 01. 2014. године.

6.

Подсетимо се теореме којом се тврди да општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули. Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Ову теорему је зато погодно користити када желимо да покажемо да ред дивергира. Врло је важно запамтити да обрат овог тврђења не важи, односно постоје редови који не конвергирају, а општи члан им тежи нули.

Нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Такође важи и следећи други поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:

Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.

За општи члан реда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ важи $\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (јер је $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1$), па је на основу другог поредбеног критеријума дати ред еквиконвергентан са редом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ који конвергира

($\alpha = \frac{3}{2} > 1$), односно дати ред јесте конвергентан.

Слично, за општи члан реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, па је на основу другог поредбеног критеријума дати ред еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ који дивергира ($\alpha = 1 \leq 1$), дакле дати ред јесте дивергентан.

Такође, и за општи члан реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ важи $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ (јер је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = 1$), па је на основу другог поредбеног критеријума дати ред еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ који дивергира ($\alpha = 1 \leq 1$), односно дати ред јесте дивергентан.

Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{5}{n}$ је дивергентан на основу другог поредбеног критеријума. Наиме, за општи члан тог реда важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{5}{n}}{\frac{5}{n}} = 1$ (ова једнакост следи из чињенице да је $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$), а ред са општим чланом $\frac{5}{n}$ јесте, на основу другог поредбеног критеријума, еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (јасно је да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{n}}{\frac{1}{n}} = 5$) који је дивергентан.

Коначно, општи члан реда $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} 3$ очигледно не тежи нули и ред је стога дивергентан.

Дакле, тачан је само одговор **(а)**.

7.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се израчунати као $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Важи $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n(n+2)} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}(n+1)}$, па је полупречник конвергенције датог реда

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3^{n-1}(n+1)}}{\frac{1}{3^n(n+2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+2)}{n+1} = 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 3$$

.

Дакле, тачан је одговор **(г)**.

8.

Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је ранг матрице ред њене највеће квадратне регуларне подматрице.

Извршимо на датој матрици B узастопно следеће две елементарне трансформације: најпре додајмо елементима друге врсте елементе прве врсте помножене бројем -2, а потом, у тако добијеној матрици, додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте.

На тај начин долазимо до матрице $B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix}$. Извршимо сада на матрици B' следећу елементарну трансформацију: додајмо елементима треће врсте елементе друге врсте помножене бројем $b+2$. На тај начин долазимо до матрице $B'' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, чија је детерминанта једнака нули јер су сви елементи њене треће врсте једнаки нули. Дакле, ранг матрице B'' не може бити једнак три, односно мора бити мањи од три. Будући да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице, то је $\text{rang}B'' = 2$ јер је највећа регуларна квадратна подматрица матрице B'' она подматрица која је образована од елемената матрице B'' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и треће колоне, и то је матрица $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Будући да важи $\text{rang}B = \text{rang}B''$, ранг матрице B једнак је два за све вредности реалног параметра b (односно ранг матрице B не зависи од $b \in \mathbb{R}$).

9.

> Подсетимо се да за дату квадратну матрицу A можемо дефинисати њен карактеристични полином $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathrm{I})$, где је I јединична матрица истог реда као и матрица A.

Карактеристични полином матрице A једнак је:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Приметимо да је, у овом случају, израчунавање детерминанте $\det(A - \lambda I)$ најпогодније извршити Лапласовим развојем по последњој (трећој) врсти.

10.

> Подсетимо се да права p у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна вектору $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ може бити задата на следећи начин: $\dfrac{x - T_1}{p_1} = \dfrac{x - T_2}{p_2} = \dfrac{x - T_3}{p_3}$.
> Такође, две праве p и q у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне су ако и само ако су њихови вектори (вектори којима су те две праве паралелне) паралелни, односно колинеарни (линеарно зависни).
> Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ паралелни су (колинеарни, тј. линеарно зависни) ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$.

Уочимо да су вектори којима су праве p и q паралелне, редом, једнаки: $\vec{p} = (2, 1, 3)$ и $\vec{q} = (6, 3, m)$. Дакле, да би праве p и q биле паралелне, мора за неко $s \in \mathbb{R}$ важити $(2, 1, 3) = s(6, 3, m)$, односно $2 = 6s$, $1 = 3s$ и $3 = ms$. Из прве две једнакости можемо закључити да је $s = \frac{1}{3}$, па када ту вредност уврстимо у трећу једнакост добијамо да је $m = 9$. Дакле, праве p и q су паралелне уколико је $m = 9$.

– Тест основног знања – 05. 07. 2014.

1. Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, где је $f(x) = 4x + 2e^{2x}$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $F(x) = 2x^2 + 6$;

(б) $F(x) = 2x^2 + e^{2x} + 3$;

(в) $F(x) = x^2 + 2e^{2x} + 3x$;

(г) $F(x) = 2x^2 + e^{2x} - 2x$;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x$.

3. Заокружити слова испред партикуларних решења диференцијалне једначине првог реда $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$:

(а) $y = 3x + 2$; **(б)** $y = 0$; **(в)** $y = \frac{6}{x}$;

(г) $y = 2x + 3$; **(д)** $x = \frac{6}{y}$; **(ђ)** $y = e^{2x}$;

(е) ниједна од претходних функција није партикуларно решење дате једначине.

4. Формирати линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда ако се зна да су два њена линеарно независна партикуларна решења $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$.

5. Колико се различитих Булових функција може формирати од промењљивих p, q и r?

6. Заокружити слова испред редова који су неодређено дивергентни:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$; **(в)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$;

(г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$; **(д)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 3$; **(ђ)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n$;

(е) ниједан од претходних редова није неодређено дивергентан.

7. Израчунати $S(2)$ ако је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-n}$.

8. За које је вредности реалног параметра b ранг матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & b \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ једнак три?

9. Збир сопствених вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, где је a реални параметар, једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) $3 + a$; **(б)** $2a$; **(в)** 0; **(г)** 4; **(д)** $a - 1$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Одредити вредности реалних параметара a и b за које су равни $\alpha : ax - (b-2)y + 2z = 6$ и $\beta : z = 2$ паралелне.

– Решења –

1.

Подсетимо се да је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ (дефинисане на интервалу (a, b), који може бити коначан или бесконачан) на интервалу (a, b) ако за $a < x < b$ важи $F'(x) = f(x)$.

Нађимо, редом, први извод сваке од понуђених функција $F(x)$:
(а) $F'(x) = 4x$;

(б) $F'(x) = 4x + 2e^{2x}$;

(в) $F'(x) = 2x + 4e^{2x} + 3$;

(г) $F'(x) = 4x + 2e^{2x} - 2$.

Дакле, тачан је одговор **(б)**.

♢ Решити задатак директним одређивањем интеграла $\int(4x+2e^{2x})\mathrm{d}x$. Резултат је $2x^2+e^{2x}+C$, где је C произвољна реална константа.

2.

Подсетимо се да, уколико је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a, a]$ и парна, тада важи $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Подинтегрална функција је непрекидна за свако $x \in \mathbb{R}$, и парна, па можемо применити наведену једнакост: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x$. Будући да је $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, следи:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = 2\frac{1}{2}(\int_0^{\pi}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x) = \int_0^{\pi}\mathrm{d}x + \int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Интеграл $\int \mathrm{d}x$ је таблични и једнак је $x + C$, а интеграл $\int \cos 2x\mathrm{d}x$ је једнак $\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$ (можемо уочити да је извод функције $\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$ једнак $\cos 2x$, или, уколико је неопходно, решити интеграл $\int \cos 2x\mathrm{d}x$ увођењем смене $t = 2x$).
За израчунавање добијених одређених интеграла искористићемо Њутн–Лајбницову формулу:
$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x = x\Big|_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$ и $\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = \dfrac{1}{2}\sin\pi - \dfrac{1}{2}\sin 0 = 0 - 0 = 0.$
Коначно је: $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \pi + 0 = \pi$.

3.

Подсетимо се да је партикуларно решење диференцијалне једначине првог реда свако решење које се може добити из њеног општег решења за неку вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише.

Ово је једначина која раздваја променљиве, па њено опште решење одређујемо интеграцијом:

$$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Оба интеграла у последњој једнакости таблични су интеграли, па: $\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln\frac{1}{|x|} + C$, односно $y = \frac{C_1}{x}$, што је и опште решење полазне диференцијалне једначине.
Запазимо да функције $y = 3x+2$, $y = e^{2x}$, $y = 2x+3$ не можемо добити из општег решења ни за једну вредност константе C_1.
Функција $y = 0$ добија се из општег решења за $C_1 = 0$, а функција $y = \frac{6}{x}$ за $C_1 = 6$. И функција $x = \frac{6}{y}$ је партикуларно решење дате диференцијалне једначине, само је потребно запазити да се опште решење може записати и у облику $xy = C_1$, односно $x = \frac{C1}{y}$.
Дакле, тачни су одговори **(б)**, **(в)** и **(д)**.

4. Дата су два линеарно независна партикуларна решења хомогене диференцијалне једначине другог реда. Она су једнака $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = xe^{2x}$, па су решења карактеристичне једначине тражене хомогене диференцијалне једначине другог реда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Карактеристична једначина је другог степена (јер је тражена диференцијална једначина другог реда), и позната су нам њена оба решења, па је карактеристична једначина $(\lambda-2)^2 = 0$, односно $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Сада је јасно да тражена диференцијална јеначина гласи $y'' - 4y' + 4y = 0$.

5.

Подсетимо се да је број различитих Булових функција n променљивих једнак 2^{2^n}.

У овом задатку потребно је одредити број различитих Булових функција 3 променљиве, а на основу наведеног, тај број је једнак $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

6.

Подсетимо се да је ред одређено дивергентан уколико је гранична вредност низа његових парцијалних сума једнака $+\infty$ или $-\infty$, а неодређено дивергентан ако гранична вредност низа његових парцијалних сума не постоји. Приметимо још једну значајну чињеницу: сваки позитиван ред, односно ред чији су сви чланови позитивни не може бити неодређено дивергентан, односно може бити конвергентан или одређено дивергентан. Ово следи из чињенице да је низ парцијалних сума позитивног реда монотоно растући низ, а гранична вредност монотоно растућег низа може бити или коначан број или $+\infty$. Такође, сваки негативан ред, односно ред чији су сви чланови негативни, јесте или конвергентан или одређено дивергентан, што следи из чињенице да је низ парцијалних сума таквог реда монотоно опадајући низ.

На основу претходног, редови $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}$ и $\sum_{n=3}^{+\infty} 3$ не могу бити неодређено дивергентни, јер су сва четири реда редови са позитивном члановима.
Размотримо сада ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n$. Његова n-та парцијална сума је $S_n = \sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n$, па гранична вредност $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји.

За ред $\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n$ важи $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-2)^k = (-2)\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{2}{3}((-2)^n - 1)$, па гранична вредност $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји (сетимо се да $\lim_{n\to+\infty} q^n$ не постоји уколико је $q \leq -1$).

Дакле, тачни су одговори **(в)** и **(ђ)**.

7.

> Подсетимо се да је геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергентан за свако $q \in (-1,1)$, као и да за $q \in (-1,1)$ важи $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Уочимо да је $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$, односно, дати ред јесте геометријски ред за $q = \frac{1}{x}$. Дакле, дати ред биће конвергентан за $-1 < \frac{1}{x} < 1$, односно за $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, па за $x = 2$ важи $S(2) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

8.

> Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице.

Извршимо на датој матрици A узастопно следеће две елементарне трансформације: најпре додајмо елементима друге врсте елементе прве врсте, а потом, у тако добијеној матрици, додајмо елементима друге врсте елементе треће врсте. На тај начин долазимо до матрице $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$. Детерминанта матрице A' је $(b-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5)(b-2)$ (до чега долазимо развијањем детерминанте матрице A' по другој врсти). Та детерминанта различита је од нуле за $b \neq 2$, а једнака нули за $b = 2$. Будући да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице, то је $\mathrm{rang}A' = 3$ ако је $b \neq 2$ (у том случају сама матрица A' је регуларна, па је она сама своја највећа регуларна квадратна подматрица), односно $\mathrm{rang}A' = 2$ ако је $b = 2$ (тада је највећа регуларна квадратна подматрица матрице A' она подматрица која је образована од елемената матрице A' који се налазе у пресецима њене прве и треће врсте и прве и друге колоне, и то је матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$). Важи $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A'$, па је ранг матрице A једнак три уколико је $b \neq 2$.

♣ Упоредити са осмим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године.

9.

> Подсетимо се да је збир свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеном трагу (збиру свих елемената који се налазе на њеној главној дијагонали).

Дакле, потребно је само одредити траг матрице A, односно сабрати три елемента са њене главне дијагонале. Будући да је очигледно $\mathrm{tr}A = 2 + 3 + (-1) = 4$, тачан је одговор **(г)**.

♣ Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 10. 02. 2013. године.

Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице A, односно одређивањем њеног карактеристичног полинома и његових нула. Сопствене вредности матрице су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{2+\sqrt{4+16a}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{2-\sqrt{4+16a}}{2}$. Запазимо да сопствене вредности λ_2 и λ_3, у зависности од вредности параметра a, могу бити реални или комплексни бројеви, али је њихов збир у сваком случају једнак 2.

10.

> Подсетимо се да су равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне ако и само ако су њихови вектори нормала $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ паралелни.
>
> Такође је вектор нормале произвољне равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чија је једначина $Ax + By + Cz = D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, сваки вектор облика $t \cdot (A, B, C)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
>
> Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ паралелни су ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$.

Вектор нормале равни α је $\vec{n_\alpha} = (a, -(b-2), 2)$, а вектор нормале равни β је $\vec{n_\beta} = (0, 0, 1)$.
Да би равни α и β биле паралелне, мора, за неко $s \in \mathbb{R}$, бити $(a, -(b-2), 2) = s(0, 0, 1)$, односно $a = 0 \cdot s$, $-(b-2) = 0 \cdot s$ и $2 = s$, па је $a = 0$, $-(b-2) = 0$, и коначно $a = 0$, $b = 2$.

– Тест основног знања – 23. 08. 2014.

1. Одредити интеграл $\displaystyle\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. Вредност позитивног реалног параметра a за коју важи једнакост $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$ једнака је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) 0; **(б)** 1; **(в)** 2; **(г)** не постоји;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = 3x^2y^2$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине другог реда $y'' + 4y = 0$.

5. Дат је скуп A од 3 елемента. Колико има комутативних бинарних операција $*$ за које важи услов $(\forall x \in A)\, x * x \neq x$?

6. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{5}\right)^n$?

7. Израчунати $S(0)$ ако је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

8. Одредити производ сопствених вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9. Израчунати угао који заклапају јединични вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако су вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ нормални.

10. Дате су равни $\alpha : 2x + py + z = 3$ и $\beta : 6x + 8y + 3z = 15$. Одредити вредност реалног параметра p тако да раван α буде паралелна равни β.

– Решења –

1. Дати интеграл решавамо уводећи смену $t = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} t &=& \operatorname{arctg} x \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \end{array}\right\} = \int 2^t\,\mathrm{d}t = \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{\ln 2} + C.$$

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

> Подсетимо се да, уколико је функција $f(x)$ интеграбилна на интервалу $[a, b]$, $a < b$, и ако је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$, тада је $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Приметимо да је, за сваки позитиван реалан број a, подинтегрална функција $x\sqrt{3x^2+1}$ позитивна на интервалу $[0, a]$, па вредност датог интеграла не може бити једнака $-\frac{1}{9}$, ни за један реалан број a.
Тачан је одговор **(г)**.

◇ Задатак смо могли да урадимо и решавајући интеграл $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (на пример, увођењем смене $t = 3x^2+1$). Овај начин је, иако коректан, знатно захтевнији.

3. Дата једначина је једначина која раздваја промењиве, па до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2y^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 3x^2\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int 3x^2\mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је $-\dfrac{1}{y} = 3\dfrac{x^3}{3} + C$, односно $-\dfrac{1}{y} = x^3 + C$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине гласи $y = -\dfrac{1}{x^3+C}$, што једноставно можемо проверити променом добијеног општег решења у полазну диференцијалну једначину.

4. У питању је хомогена диференцијална једначина другог реда. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине јесте $\lambda^2 + 4 = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = -2i$ и $\lambda_2 = 2i$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине гласи: $y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

5. Свака бинарна операција дефинисана на коначном непразном скупу може се представити Кејлијевом таблицом. Дакле, број тражених операција једнак је броју различитих Кејлијевих таблица формата 3×3 (зато што скуп на коме су операције дефинисане има 3 елемента) и које су попуњене на одговарајући начин (тако да операције задовољавају наведене особине).

Посматрајмо једну операцију $*$ дефинисану на трочланом скупу $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, која задовољава наведене особине: због комутативности, одговарајућа Кејлијева таблица мора бити симетрична у односу на главну дијагоналу, а због особине да за сваки елемент x из скупа A важи $x * x \neq x$, на оним местима у Кејлијевој таблици која означавају резултат $x_i * x_i$ не сме стајати елемент x_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ (приметимо да се таква места налазе на дијагонали Кејлијеве таблице). Запазимо и да 9 места у Кејлијевој таблици операције $*$ можемо поделити на три дела: три места изнад главне дијагонале, три места испод главне дијагонале и три дијагонална места, и размотримо на колико различитих начина можемо попунити таблицу (односно колико различитих Кејлијевих таблица можемо формирати). Због симетричности таблице, на сваком од три места изнад главне дијагонале можемо за упис изабрати било који елемент из скупа A (а потом на симетричним местима испод главне дијагонале морамо преписати одговарајуће елементе), док на сваком од три места која се налазе на дијагонали можемо за упис бирати само између два елемента скупа A (на месту које означава резултат $x_i * x_i$ можемо уписати елементе скупа $A \setminus \{x_i\}$, а тај скуп има два елемента).
Будући да на сваком од три места изнад главне дијагонале Кејлијеве таблице имамо за упис избор од три елемента скупа A, а на сваком од три дијагонална места избор од два елемента скупа A, према правилу производа, број различитих начина да попунимо Кејлијеву таблицу јесте: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2^3 = 216$. Дакле, и сам број различитих операција $*$ са наведеним особинама јесте 216.

6.

Подсетимо се да геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $q \in (-1, 1)$.

Уочимо да је дати ред геометријски ред са количником $q = \dfrac{\alpha}{5}$, и искористимо горе наведену чињеницу. Дакле, дати ред конвергира за $-1 < \dfrac{\alpha}{5} < 1$, односно за $-5 < \alpha < 5$.
Напоменимо да почетна вредност "бројача" $n = 1$ не утиче на конвергенцију реда, али утиче на његову суму (видети и наредни задатак).

7.

Подсетимо се Маклореновог развоја функције e^x:

$$\text{за свако } x \in \mathbb{R} \text{ важи } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Дакле, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1$, па је $S(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

8.

Подсетимо се да је производ свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеној детерминанти.

Дакле, довољно је израчунати детерминанту дате матрице, што је најједноставније учинити развијањем $\det A$ по првој врсти:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(5+4) = 27.$$

♢ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице A, односно одређивањем нула њеног карактеристичног полинома. Све три сопствене вредности матрице A међусобно су једнаке, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, па је њихов производ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 3^3 = 27$.

9.

> Подсетимо се формуле за израчунавање косинуса угла α који заклапају дати вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$, где $\cdot$ представља скаларни производ вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, а $|\vec{m}|$ и $|\vec{n}|$, редом, њихове интензитете.

Будући да су вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични, њихови интензитети су једнаки 1, па остаје да израчунамо $\vec{m}\cdot\vec{n}$. Вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ нормални су, па је њихов скаларни производ једнак нули. Дакле:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{m} + 2\vec{n})\cdot(5\vec{m} - 4\vec{n}) = 5|\vec{m}|^2 + 6\vec{m}\cdot\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 6\vec{m}\cdot\vec{n} - 3 = 0$$

(овде смо користили чињеницу да за сваки вектор $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ важи $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, као и комутативност скаларног производа). Сада је јасно да важи $\vec{m}\cdot\vec{n} = \dfrac{1}{2}$, па је $\cos\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$, што значи да је $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

10.

> Подсетимо се да су равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне ако и само ако су њихови вектори нормала $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ паралелни.
> Такође је вектор нормале произвољне равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чија је једначина $Ax + By + Cz = D$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, сваки вектор облика $t\cdot(A, B, C)$, где је $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
> Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ паралелни су ако и само ако за неко $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ важи $\vec{a} = s\vec{b}$.

Уочимо да су вектори нормала равни α и β, редом, једнаки: $\vec{n_\alpha} = (2, p, 1)$ и $\vec{n_\beta} = (6, 8, 3)$. Дакле, да би равни α и β биле паралелне, мора, за неко $s \in \mathbb{R}$, важити $(2, p, 1) = s(6, 8, 3)$, односно $2 = 6s$, $p = 8s$ $1 = 3s$, одакле је $s = \frac{1}{3}$, па закључујемо да је $p = \frac{8}{3}$.

– Тест основног знања – 13. 09. 2014.

1. Одредити интеграл $\int (x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+1})\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредност $\int_{-1}^{1} xe^x \mathrm{d}x$.

3. Одредити константе $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција $y = a\sin x + b\cos x$ буде партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + 3y = \sin x$.

4. Наћи оно партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' - y = 0$ које задовољава почетне услове $y(0) = 2$ и $y'(0) = 0$.

5. Булову функцију $f(p,q) = p\wedge(q\wedge p)$ написати у облику СДНФ.

6. Израчунати суму: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$.

7. Одредити полупречник конвергенције степеног реда: $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2} x^n$.

8. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Заокружити тачна тврђења. За дату матрицу могуће је одредити:

(а) карактеристични полином;
(б) минимални полином;
(в) сопствене векторе;
(г) ранг матрице;
(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

9. Одредити минимални полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Нека је α раван чија је једначина $y + z = 4$. Написати:
(а) један вектор $\vec{n}$ нормале равни α;

(б) координате једне тачке T која припада равни α.

– Решења –

1. Дати интеграл је збир два таблична интеграла:

$$\begin{aligned}\int(x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+1})\mathrm{d}x &= \int\left(x^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\,\mathrm{d}x=\int x^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}x+\int(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

Неодређени интеграл једнак је произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је потребно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2. За израчунавање датог одређеног интеграла функције $y=xe^x$ користимо методу парцијалне интеграције:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}xe^x\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ll} u=x & dv=e^x\mathrm{d}x\\ du=\mathrm{d}x & v=e^x\end{array}\right\}\\ &= xe^x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x=e-(-\frac{1}{e})-e^x\Big|_{-1}^{1}=e+\frac{1}{e}-(e-\frac{1}{e})=\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

3.

> Подсетимо се да за функције $f_1,f_2,\ldots,f_n$, $n\in\mathbb{N}$, које су дефинисане на истом скупу S, кажемо да су линеарно зависне ако постоје константе $C_1,C_2,\ldots,C_n\in\mathbb{R}$ такве да је $C_1^2+C_2^2+\ldots+C_n^2\neq 0$ (овај услов је еквивалентан услову да нису све константе $C_1,C_2,\ldots,C_n$ истовремено једнаке нули) и да је $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x)=0$ за свако $x\in S$. Уколико је ова једнакост могућа само ако су све константе једнаке нули, за функције кажемо да су линеарно независне.
> На основу изложених чињеница следи да су две функције f_1 и f_2, дефинисане на истом скупу S, линеарно зависне уколико постоји константа C, различита од нуле, таква да за свако $x\in S$ важи $f_1(x)=Cf_2(x)$. У супротном, функције f_1 и f_2 линеарно су независне.

Нађимо први извод функције y: $y'=a\cos x-b\sin x$. Константе a и b налазимо након што у дату диференцијалну једначину уврстимо изразе за y и y':

$$a\cos x-b\sin x+3(a\sin x+b\cos x)=\sin x$$

$$(3a-b)\sin x+(a+3b)\cos x=\sin x.$$

Функције $\sin x$ и $\cos x$, дефинисане на скупу $\mathbb{R}$, линеарно су независне зато што не постоји константа $C\in\mathbb{R}$, различита од нуле, таква да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $\sin x=C\cos x$ (сетимо се да за свако $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, важи $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x\neq\text{const.}$). Захваљујући линеарној независности функција $\sin x$ и $\cos x$ полазна релација даје $3a-b=1$ и $a+3b=0$, а решење овог система линеарних једначина јесте: $a=\frac{3}{10}$ и $b=-\frac{1}{10}$.

◇ Да су функције $\sin x$ и $\cos x$, дефинисане на скупу $\mathbb{R}$, линеарно независне можемо видети и посматрајући Вронскијан $W(\sin x, \cos x; x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$. Будући да важи $W(\sin x, \cos x; x) \neq 0$, следи да су функције $\sin x$ и $\cos x$ линеарно независне.

4. У питању је хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 1 = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$, тј. реална су и различита. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Такође важи и $y_o' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. Константе C_1 и C_2 налазимо из датих почетних услова:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 2$$

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 e^0 - C_2 e^{-0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 - C_2 = 0.$$

Дакле, $C_1 + C_2 = 2$ и $C_1 - C_2 = 0$. Решење овог система јесте $C_1 = C_2 = 1$, па је тражено партикуларно решење $y = e^x + e^{-x} = 2\mathrm{ch}x$.

5. Уочимо, најпре, да на основу комутативности операције $\wedge$ у Буловој алгебри важи $f(p,q) = p \wedge (p \wedge q)$. Даље, због асоцијативности операције $\wedge$ је $f(p,q) = (p \wedge p) \wedge q$. Такође, будући да је операција $\wedge$ идемпотентна (односно, важи $p \wedge p = p$), имамо да је $f(p,q) = p \wedge q$, а ово је управо СДНФ функције $f(p,q)$.

6.

Подсетимо се формуле за израчунавање суме геометријског реда:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q},$$

где је q реална константа која задовољава $q \in (-1,1)$.
Такође, за $q \in (-1,1)$ важи и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}.$$

Дакле:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8}.$$

7.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ може се израчунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Дакле, полупречник (радијус) конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{n^2} x^n$ јесте:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

8. Будући да су карактеристични полином, минимални полином и сопствене вредности дефинисани само за квадратне матрице (матрице које имају исти број врста и колона) произвољног реда, а дата матрица A није квадратна (има две врсте и три колоне, па је типа 2×3), одговори **(а)**, **(б)** и **(в)** нису тачни. С друге стране, ранг матрице дефинише се за произвољну матрицу (произвољног типа), дакле и за матрице које нису квадратне, па је одговор **(г)** тачан. Дакле, тачан је само одговор **(г)**.

9.

> Подсетимо се да је минимални полином матрице A (јединствени) полином $P(\lambda)$ најмањег степена за који важи $P(A)=\mathbf{O}$ и чији је водећи коефицијент (коефицијент уз највећи степен) једнак један. Такође, важи да је минимални полином матрице A делилац њеног карактеристичног полинома.

Карактеристични полином матрице V је:

$$P_V(\lambda)=\det(V-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^3.$$

Једини делитељи полинома $P_V(\lambda)$ чији су водећи коефицијенти једнаки један јесу полиноми $P_1(\lambda)=\lambda-2$, $P_2(\lambda)=(\lambda-2)^2$ и $P_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$, па су та три полинома и једини кандидати за минимални полином матрице V. Будући да очигледно важи $P_1(V)=V-2\mathrm{I}=\mathbf{O}$, $P_2(V)=(V-2\mathrm{I})^2=\mathbf{O}^2=\mathbf{O}$ и $P_3(V)=(V-2\mathrm{I})^3=\mathbf{O}^3=\mathbf{O}$, то сва три кандидата за минимални полином задовољавају услов да поништавају матрицу V. Међу њима најмањи степен има полином $P_1(\lambda)=\lambda-2$, па је $P_1(\lambda)=\lambda-2$ минимални полином матрице V.
Можемо приметити да после утврђивања чињенице да је $P_1(V)=\mathbf{O}$ није било неопходно рачунати $P_2(V)$ и $P_3(V)$. Наиме, полином $P_1(\lambda)$ задовољава све услове (поништава матрицу V, водећи коефицијент полинома $P_1(\lambda)$ једнак је један и међу полиномима који поништавају матрицу V, $P_1(\lambda)$ има најмањи степен) неопходне да би посматрани полином био минимални полином матрице V.

10.

> Подсетимо се да, уколико је раван α у простору $\mathbb{R}^3$ дата једначином $Ax+By+Cz=D$, $A,B,C,D\in\mathbb{R}$, тада је сваки вектор облика $t\cdot(A,B,C)$, где је $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, вектор нормале равни α.
> Такође, уколико тачка са координатама (X,Y,Z) у простору $\mathbb{R}^3$ припада равни чија је једначина $Ax+By+Cz=D$, $A,B,C,D\in\mathbb{R}$, тада њене координате задовољавају једначину равни, односно важи: $AX+BY+CZ=D$.

За дату раван α чија је једначина $y+z=4$, вектор нормале биће сваки вектор облика $t\cdot(0,1,1)$, где је $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, па је под **(а)** тачан сваки одговор $\vec{n}=(0,t,t)$, где је $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Координате тражене тачке T, (X,Y,Z), морају задовољавати следеће услове: $X\in\mathbb{R}$, $Y+Z=4$, па је под **(б)** тачан сваки одговор $(X,Y,4-Y)$, где су X и Y произвољно изабрани реални бројеви.

– Тест основног знања – 18. 01. 2015.

1. Одредити интеграле:

(а) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+3}.$

2. Израчунати вредност интеграла $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$

3. Заокружити слова испред оних интегралних кривих диференцијалне једначине $x\,\mathrm{d}x+(y+1)\,\mathrm{d}y=0$ које пролазе кроз тачку $(1,1)$.

(а) $x^2-y^2=2x-2;$ **(б)** $x^2+y^2=2;$

(в) $y^2=x;$ **(г)** $x^2+(y+1)^2=5;$

(д) $x^2+1=y+1;$ **(ђ)** $(x-1)^2+y^2=1;$

(е) ниједна од претходних кривих није интегрална крива дате диференцијалне једначине која пролази кроз тачку $(1,1)$.

4. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''-3y'+2y=0$.

5. Булову функцију $(p\wedge q)\wedge(q\Rightarrow r)$ написати у облику СДНФ.

6. Заокружити слова испред редова који су одређено дивергентни:

(а) $\displaystyle\sum_{n=6}^{+\infty} 7^n;$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos n^3;$

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2};$ **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+3};$

(д) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{100}};$ **(ђ)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-4)^{3n};$

(е) ниједан од претходних редова није одређено дивергентан.

7. Одредити област конвергенције степеног реда: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{4^{n^2}}x^n.$

8. За које је вредности реалног параметра b ранг матрице $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\-3&2&b\\-3&-3&-3\end{bmatrix}$ једнак два?

9. Производ сопствених вредности матрице $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&3&a\\0&0&-1\end{bmatrix}$ једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) $a^2-a;$ **(б)** $a-6;$ **(в)** $0;$ **(г)** $4;$ **(д)** $-6;$

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

10. Заокружити слова испред једначина правих у $\mathbb{R}^3$ које припадају xy-равни и садрже координатни почетак:

(а) $y=3x;$ **(б)** $x=t, y=3t, z=0,\ t\in\mathbb{R};$

(в) $x=2y;$ **(г)** $x=y,\ z=0;$

(д) $x=y=z;$ **(ђ)** $x+y=z;$

(е) ниједна од претходних једначина не представља праву која припада xy-равни и садржи координатни почетак.

– Решења –

1.

Подсетимо се да, уколико је подинтегрална функција задата као разломак, и ако је извод имениоца тог разломка једнак његовом бројиоцу, тада интеграл има следећи облик $\int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$, па га решавамо увођењем смене $t = f(x)$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & f(x) \\ \mathrm{d}t & = & f'(x)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

(а) Уочимо да важи $(x^2+3x+3)' = 2x+3$, па је:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & x^2+3x+3 \\ \mathrm{d}t & = & (2x+3)\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+3x+3| + C.$$

Будући да је $x^2+3x+3 > 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$ (дискриминанта одговарајуће квадратне једначине је $3^2 - 4\cdot 3 = -3 < 0$), важи $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x = \ln(x^2+3x+3) + C$, где је C призвољна реална константа.

(б) Уочимо да је $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}$.

Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t = \frac{2x+3}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t & = & \frac{2x+3}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t & = & \mathrm{d}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C.$$

Дакле, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C.$

Приликом одређивања интеграла под **(б)** користили смо чињеницу да је $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ таблични интеграл, и да је једнак $\operatorname{arctg} x + C$.

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

Подсетимо се да, уколико је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и парна, тада важи $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Подинтегрална функција $f(x) = x\sin x$ непрекидна је за свако $x \in \mathbb{R}$ и парна (јер је производ две непарне функције $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \sin x$), односно за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(-x) = f(x)$, па је $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$. За израчунавање интеграла $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ користимо методу парцијалне интеграције:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x\mathrm{d}x \\ du = \mathrm{d}x & v = -\cos x \end{array}\right\} \\ &= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -\pi\cos\pi + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \pi.\end{aligned}$$

Дакле, важи $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi$, па је тражена вредност 2π.

3.

> Подсетимо се да је интегрална крива диференцијалне једначине свако њено партикуларно или сингуларно решење посматрано као крива $y = y(x)$ или у имплицитном облику $G(x, y) = 0$.
> Такође, партикуларно решење диференцијалне једначине првог реда јесте свако решење које се може добити из њеног општег решења за неку вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише, док је сингуларно решење диференцијалне једначине првог реда оно решење које се не може добити из њеног општег решења ни за једну вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише.

Дата једначина је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом: $x\,\mathrm{d}x + (y + 1)\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}x + \int(y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$. Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, па је $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(y+1)^2}{2} = C$, односно, након множења последње једнакости са 2, $x^2 + (y + 1)^2 = C_1$, и ово је опште решење полазне диференцијалне једначине. Интегралну криву која пролази кроз тачку $(1, 1)$ налазимо заменом у једначину: $1^2 + (1 + 1)^2 = C_1$, тј. $C_1 = 5$. Дакле, тражена интегрална крива је $x^2 + (y + 1)^2 = 5$, па је тачан одовор **(г)**.

♢ Приметимо да пошто смо одредили опште решење дате диференцијалне једначине, до тачног одговора можемо доћи и методом елиминације нетачних. Наиме, опште решење дате диференцијалне једначине представља фамилију концентричних кружница са центром у тачки $(0, -1)$. Међу понуђеним одговорима, само одговор под **(г)** јесте једначина кружнице са центром у тачки $(0, -1)$ (крива под **(а)** представља једначину хиперболе, зато што су коефицијенти уз x^2 и y^2 различитог знака, крива под **(в)** је очигледно једначина параболе са теменом у координатном почетку, као и крива под **(д)**, док криве под **(б)** и **(ђ)** заиста представљају једначине кружница, али прва кружница има центар у координатном почетку, а друга у тачки $(1, 0)$).

4. У питању је хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, односно, $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, дакле реална су и различита. То значи да су два линеарно независна партикуларна решења дате диференцијалне једначине $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

♣ Упоредити са четвртим задатком на тесту одржаном 20. 01. 2013. године.

5.

Подсетимо се да важи: $p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q$, $p \wedge \overline{p} = 0$, као и $p \wedge 0 = 0$ и $p \vee 0 = p$. Такође, операција $\wedge$ је дистрибутивна према операцији $\vee$ (важи и обрнуто, операција $\vee$ је дистрибутивна према операцији $\wedge$).

На основу наведених чињеница важи:

$$(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow r) = (p \wedge q) \wedge (\overline{q} \vee r) = (p \wedge q \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q \wedge r) = (p \wedge 0) \vee (p \wedge q \wedge r) = 0 \vee (p \wedge q \wedge r) = p \wedge q \wedge r,$$

и ово је СДНФ дате Булове функције.

♣ Упоредити са петим задатком на тесту одржаном 10. 02. 2013. године.

♢ Урадити задатак коришћењем теореме која описује начин на који се свака Булова функција (осим функције која је идентички једнака нули) може представити у облику савршене дисјунктивне нормалне форме (на тај начин урађен је пети задатак на тесту одржаном 10. 02. 2013. године). Такав начин израде овог задатка је, иако коректан, знатно компликованији.

6.

Подсетимо се да је ред одређено дивергентан уколико је гранична вредност низа његових парцијалних сума једнака $+\infty$ или $-\infty$, а неодређено дивергентан ако гранична вредност низа његових парцијалних сума не постоји. Приметимо још једну значајну чињеницу: сваки позитиван ред, односно ред чији су сви чланови позитивни, не може бити неодређено дивергентан, односно може бити конвергентан или одређено дивергентан. Ово следи из чињенице да је низ парцијалних сума позитивног реда монотоно растући низ, а гранична вредност монотоно растућег низа може бити или коначан број или $+\infty$. Такође, сваки негативан ред, односно ред чији су сви чланови негативни, јесте или конвергентан или одређено дивергентан, што следи из чињенице да је низ парцијалних сума таквог реда монотоно опадајући низ.
Подсетимо се и теореме којом се тврди да општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули. Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Ову теорему је зато погодно користити када желимо да покажемо да ред дивергира. Врло је важно запамтити да обрат овог тврђења не важи, односно постоје редови који не конвергирају, а општи члан им тежи нули.
Такође важи и други поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:
Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.
Подсетимо се и да нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

На основу претходног, редови $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 7^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+3}$ и $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{100}}$ одређено су дивергентни, јер су у питању позитивни редови чији општи чланови не теже нули.
Размотримо сада ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos n^3$. Његова n-та парцијална сума је $S_n = \cos 1 + \cos 8 + \cdots + \cos n^3$, па гранична вредност $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји.

За ред $\sum_{n=1}^{+\infty}(-4)^{3n}$ важи $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-4)^{3k} = \sum_{k=1}^{n}\left((-4)^3\right)^k = \sum_{k=1}^{n}(-64)^k = (-64)\dfrac{1-(-64)^n}{1-(-64)} = \dfrac{64}{65}((-64)^n-1)$, па гранична вредност $\lim_{n\to+\infty} S_n$ не постоји (сетимо се да $\lim_{n\to+\infty} q^n$ не постоји уколико је $q \leq -1$).

Ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$ је конвергентан на основу другог поредбеног критеријума. Наиме, за општи члан тог реда, када $n \to +\infty$, важи $\sin\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ (ова релација следи из чињенице да је $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$, а последња једнакост следи из чињенице да је $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$), а ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ конвергира ($\alpha = 2 > 1$).

Дакле, тачни су одговори **(а)**, **(г)** и **(д)**.

♣ Упоредити задатак са шестим задатком на тесту одржаном 05. 07. 2014. године.

7.

На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се израчунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.
Подсетимо се и чињенице да, уколико је R полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, тада тај ред апсолутно конвергира за свако x које припада интервалу $(-R, R)$, а дивергира за $|x| > R$.
Такође, област конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ јесте скуп свих тачака у којима је дати ред конвергентан.

Одредимо, најпре, полупречник конвергенције датог степеног реда: $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{n!}{4^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{4^{(n+1)^2}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{n!}{4^{n^2}}}{\frac{(n+1)n!}{4^{n^2+2n+1}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{2n+1}}{n+1}$. Последња гранична вредност једнака је $+\infty$ (сетимо се да експоненцијална функција a^x, за $a > 1$, брже расте од линеарне функције $x+1$, па зато и низ 4^{2n+1} брже тежи бесконачности од низа $n+1$, када $n \to +\infty$), и стога је полупречник конвергенције датог реда $R = +\infty$. Дакле, дати ред апсолутно конвергира за свако x из интервала $(-\infty, +\infty)$, односно област његове конвергенције је $\mathbb{R}$.

8.

Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је, по дефиницији, ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице. Такође, уколико је дата матрица A типа $m \times n$ (са m врста и n колона) над пољем $\mathbb{R}$, тада њених m врста можемо посматрати као m вектора из векторског простора $\mathbb{R}^n$ (такође, њених n врста можемо посматрати као n вектора из векторског простора $\mathbb{R}^m$), и тада је ранг матрице A број њених линеарно независних врста, односно број њених линеарно независних колона.

Извршимо на датој матрици B следећу елементарну трансформацију: додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -3. На тај начин добијамо матрицу $B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Детерминанта матрице B' једнака је нули јер су сви елементи њене треће врсте једнаки нули. Видимо да је $\text{rang}B' = 2$ јер је њена највећа регуларна квадратна подматрица она подматрица коју образују елеменати матрице B' који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и друге колоне, односно матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Будући да важи $\text{rang}B = \text{rang}B' = 2$, ранг матрице B не зависи од b, и једнак је два за свако $b \in \mathbb{R}$.

♢ Можемо уочити да су елементи прве врсте пропорционални елементима треће врсте, али нису пропорционални елементима друге врсте. То значи да, уколико три врсте матрице B посматрамо као три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$, дата матрица има две линеарно независне врсте, па је по теореми њен ранг једнак 2, за свако $b \in \mathbb{R}$.

♣ Упоредити са осмим задатком на тесту одржаном 19. 01. 2014. године, као и са осмим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014.

9.

Подсетимо се да је производ свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеној детерминанти.

Дакле, довољно је израчунати детерминанту дате матрице A, а та детерминанта је једнака $2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$, будући да је у питању детерминанта горње троугаоне матрице, а детерминанта горње троугаоне матрице (као и детерминанта доње троугаоне матрице) једнака је производу елемената са њене главне дијагонале. Дакле, тачан је одговор **(д)**.

♢ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице A, односно одређивањем нула њеног карактеристичног полинома. Сопствене вредности матрице A су: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, па је њихов производ -6.

♣ Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године, као и са осмим задатком на тесту одржаном 23. 08. 2014. године.

10.

Подсетимо се да се свака једначина са три непознате x, y и z може интерпретирати као једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$.
Подсетимо се и да је права у простору $\mathbb{R}^3$ скуп тачака пресека две равни које нису паралелне, па права у простору $\mathbb{R}^3$ може бити задата двема линеарно независним једначинама са три непознате (од којих свака представља једначину равни, а услов да су једначине линеарно независне управо значи да равни које су тим једначинама представљене нису паралелне, односно да вектори њихових нормала нису колинеарни, тј. нису линеарно зависни).

Уочимо да је под **(а)** задата једна једначина са три непознате, односно једначина наведена под **(а)** представља раван у простору $\mathbb{R}^3$. Исто важи и за једначине наведене под **(в)** и **(ђ)**.
Под **(д)** су заиста наведене две једначине, $x = y$, $y = z$, и оне представљају праву у простору $\mathbb{R}^3$, међутим та права, иако садржи координатни почетак (координате тачке $(0, 0, 0)$ задовољавају обе једначине), не припада xy-равни, будући да све праве које припадају xy-равни морају имати z координату једнаку нули (јер је једначина xy-равни $z = 0$).

Под **(г)** су очигледно наведене две једначине, z координата јесте једнака нули, и координате тачке $(0,0,0)$ задовољавају обе једначине, па једначина наведена под **(г)** представља праву која припада xy-равни и која садржи координатни почетак.
Под **(б)** су такође наведене две једначине (елиминацијом параметра t из прве две једначине долазимо до једне једначине $y = 3x$), z координата јесте једнака нули, и координате тачке $(0,0,0)$ задовољавају обе једначине, па једначина наведена под **(б)** заиста представља праву која припада xy-равни и која садржи координатни почетак.
Дакле, тачни су одговори **(б)** и **(г)**.

– Тест основног знања – 08. 02. 2015.

1. Заокружити слова испред примитивних функција $F(x)$ функције $f(x)$ на интервалу $(-\infty, +\infty)$, ако је $f(x) = \sin x + \cos x$:

(а) $F(x) = 2\sin x - 1$;

(б) $F(x) = \cos^2 x - 1$;

(в) $F(x) = \sin x - \cos x$;

(г) $F(x) = 1 - \cos x + \sin x$;

(д) ниједна од претходних функција није примитивна функција функције $f(x)$ на интервалу $(-\infty, +\infty)$.

2. Обртањем око x-осе, график криве $y = g(x)$, $a \le x \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$, формира једно ротационо тело. Чему је једнака запремина овако насталог ротационог тела?

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда $y' = \dfrac{x+y}{x}$ на интервалу $(0, +\infty)$.

4. Одредити опште решење хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда $y'' - 2y' + y = 0$.

5. Застава има пет хоризонталних пруга, које могу бити црвене, плаве или беле, при чему две суседне пруге не могу бити исте боје. Оваквих различитих застава има (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) 49; **(б)** 50; **(в)** 48; **(г)** 20;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

6. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{3n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n}$;

(д) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 3$; **(ђ)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-3)^n}$;

(е) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

7. Чему је, у затвореном облику, за $x \in (-1, 1)$, једнака сума реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$?

8. Уколико постоје, одредити све вредности реалног параметра b за које је ранг матрице $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & b & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ мањи од три.

9. Одредити сопствене вредности матрице $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Једначина праве задате паром равни $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{array} \right\}$ у параметарском облику гласи (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) $x = \dfrac{5}{2} + 2t,\ y = 1 + t,\ z = -\dfrac{1}{2} + 5t$;

(б) $x = \dfrac{3}{2} + t,\ y = 2t,\ z = -\dfrac{1}{2} - 3t$;

(в) $x = 1 + 3t,\ y = -4 + 2t,\ z = 3 - 2t$;

(г) $x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}t,\ y = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}t,\ z = t$;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

– Решења –

1.

Подсетимо се да је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ (дефинисане на интервалу (a,b), који може бити коначан или бесконачан) на интервалу (a,b) ако за $a < x < b$ важи $F'(x) = f(x)$.

Нађимо, редом, први извод сваке од понуђених функција $F(x)$:

(а) $(2\sin x - 1)' = 2\cos x$;

(б) $(\cos^2 x - 1)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$;

(в) $(\sin x - \cos x)' = \cos x + \sin x$;

(г) $(1 - \cos x + \sin x)' = \sin x + \cos x$.

Дакле, тачни су одговори **(в)** и **(г)**.

♢ Решити задатак директним одређивањем интеграла $\displaystyle\int (\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$. Резултат је $-\cos x + \sin x + C$, где је C произвољна реална константа.

♣ Упоредити са првим задатком на тесту одржаном 20. 01. 2013. године, као и са првим задатком на тесту одржаном 05. 07. 2014. године.

2.

Подсетимо се следеће две формуле које илуструју значај примене одређеног интеграла. Ако крива $y = g(x)$, $a \le x \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$, ротира око x -осе, она описује једно ротационо тело. Запремина V овако добијеног ротационог тела једнака је $V = \displaystyle\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$, а површина S његовог омотача једнака је $S = 2\pi \displaystyle\int_a^b g(x)\sqrt{1 + g'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

На основу прве изложене формуле, тражена запремина ротационог тела које је добијено ротацијом графика криве $y = g(x)$, $a \le x \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$, око x-осе једнака је $V = \displaystyle\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$.

3.

Једначина $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где је $f(x)$ непрекидна функције на (a,b), назива се хомогена диференцијална једначина првог реда. Ако је $f(t) = t$, једначина $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ раздваја промењљиве, па зато претпостављамо да је $f(t) \ne t$ на (a,b). Увођењем нове непознате функције $z = z(x)$ помоћу смене $z = \dfrac{y}{x}$, ова једначина своди се на једначину која раздваја промењљиве. Наиме, важи $y = zx$, па је $y' = xz' + z$. Када ову смену уврстимо у полазну једначину, добијамо $xz' + z = f(z)$, односно $\dfrac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, а ово је (по непознатој функцији $z = z(x)$) једначина која раздваја промењљиве. Из општег решења $G(x, z, C) = 0$ ове једначине добијамо опште решење полазне једначине као $G\left(x, \dfrac{y}{x}, C\right) = 0$.

Запишимо дату једначину на следећи начин: $y' = 1 + \frac{y}{x}$. Сада видимо да је у питању хомогена диференцијална једначина првог реда, за $f(t) = 1 + t$. Уведимо у датој једначини смену $z = \frac{y}{x}$. Важи $y = zx$, па је $y' = xz' + z$. Када ову смену уврстимо у полазну једначину, добијамо $xz' + z = 1 + z$, односно $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$, а ово је (по непознатој функцији $z = z(x)$) једначина која раздваја променљиве. До њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је $z = \ln|x| + C$ опште решење диференцијалне једначине $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$.

Када у добијено опште решење диференцијалне једначине $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$ уврстимо $z = \frac{y}{x}$, долазимо до $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$, односно $y = x\ln|x| + Cx$, што јесте опште решење полазне диференцијалне једначине. Будући да за $x \in (0, +\infty)$ важи $|x| = x$, опште решење полазне диференцијалне једначине гласи $y = x\ln x + Cx$, што се једноставно може проверити.

4. У питању је хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, односно $(\lambda - 1)^2 = 0$, па су њена решења $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1e^x + C_2xe^x$.

5. Свака застава са пет хоризонталних пруга црвене, плаве или беле боје, код које две суседне пруге нису исте боје, може се представити низом дужине пет (низом са пет елемената) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, припада скупу $A = \{C, P, B\}$, односно представља i-ту боју те заставе, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, посматрано одозго надоле. Низ који представља неку од тражених застава има следеће особине: његов први елемент јесте било који елемент трочланог скупа A, а сви остали његови елементи (којих има четири) припадају неком од скупова $A_1 = \{C, P\}$, $A_2 = \{C, B\}$ или $A_3 = \{P, B\}$, зато што за $i \geq 2$ x_i не сме бити једнко x_{i-1}, јер две суседне пруге не смеју бити исте боје (на пример, ако је $x_2 = P$, тада $x_3 \in A_2 = \{C, B\}$). Будући да сваки од скупова A_1, A_2, A_3 има два елемента, према правилу производа број различитих низова са наведеним особинама једнак је: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$. Дакле, застава са пет хоризонталних пруга, црвене, плаве или беле боје, код које две сусуедне пруге нису исте боје, има 48, па је тачан одговор **(в)**.

6.

Подсетимо се теореме којом се тврди да општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули. Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Ову теорему је зато погодно користити када желимо да покажемо да ред дивергира. Врло је важно запамтити да обрат овог тврђења не важи, односно постоје редови који не конвергирају, а општи члан им тежи нули.

Нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $|q| < 1$, а за $|q| \geq 1$ дивергира.

Такође важи и следећи, други поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:
Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.

Одмах можемо уочити да редови $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n}$ и $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} 3$ нису конвергентни, зато што њихови општи чланови не теже нули (општи чланови прва два од ових редова теже бесконачности када n тежи бесконачности, а општи члан трећег реда тежи броју три када n тежи бесконачности).
Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\dfrac{1}{3n}$ дивергентан је на основу другог поредбеног критеријума. Наиме, за општи члан тог реда важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{3n}}{\frac{1}{3n}} = 1$ (ова једнакост следи из чињенице да је $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$), а ред са општим чланом $\dfrac{1}{3n}$, на основу другог поредбеног критеријума, еквиконвергентан је са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (јасно је да важи $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{3n}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$) који јесте дивергентан.
Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$ конвергентан је јер је $\alpha = 3 > 1$.
За ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(-3)^n}$ важи $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(-3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, па видимо да је у питању геометријски ред у којем је $q = -\dfrac{1}{3}$. Будући да је $\left|-\dfrac{1}{3}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$, дати ред јесте конвергентан.

Дакле, тачни су одговори **(в)** и **(ђ)**.

7.

Подсетимо се да за $|q| < 1$ важи $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Уочимо да је $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$. Будући да је $x \in (-1, 1)$, тј. $|x| < 1$, а знамо да је $|-x| = |x|$, значи да је и $|-x| < 1$, па на основу изложених чињеница важи $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}$. Дакле, за $x \in (-1, 1)$ сума реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ у затвореном облику једнака је $\dfrac{1}{1+x}$.

8.

Подсетимо се да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је ранг матрице ред њене највеће квадратне регуларне подматрице.

Извршимо на датој матрици B узастопно следеће три елементарне трансформације: заменимо места првој и трећој врсти, затим у тако добијеној матрици заменимо места другој и трећој врсти, и на крају у тако добијеној матрици заменимо места другој и трећој колони.

На тај начин долазимо до матрице B':

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & b & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & b & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & b & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & b \end{bmatrix} = B'$$

Сада на матрици B извршимо узастопно следеће три елементарне трансформације: помножимо најпре елементе прве врсте матрице B' бројем -2 и додајмо их елементима њене друге врсте, потом помножимо елементе прве врсте матрице B' бројем -3 и додајмо их елементима њене треће врсте, и на крају, у тако добијеној матрици, помножимо елементе друге врсте бројем $-\dfrac{4}{3}$ и додајмо их елементима треће врсте. На тај начин добијамо матрицу B'':

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -12 \\ 3 & 5 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -4 & b-21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & b-5 \end{bmatrix} = B''$$

Видимо да је матрица B'' горње троугаона матрица, па је њена детерминанта једнака производу елемената са главне дијагонале, односно $\det B'' = 1 \cdot (-3) \cdot \ (b-5) = -3(b-5)$. Матрица B'' регуларна је уколико је $b \neq 5$, и тада је она сама своја највећа регуларна подматрица, па је у том случају њен ранг једнак три. Ако је $b = 5$, матрица B'' није регуларна (што значи да је њен ранг строго мањи од три), али поседује регуларну квадратну подматрицу реда 2 (то је подматрица која се налази у пресеку прве и друге врсте и прве и друге колоне матрице B''): $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, па је у том случају ранг матрице B'' једнак 2. Будући да је $\text{rang}B = \text{rang}B''$, закључујемо да је $\text{rang}B = 3$ за $b \neq 5$ и $\text{rang}B = 2 < 3$ за $b = 5$. Дакле, вредност реалног параметра b за коју је ранг матрице B мањи од три једнака је 5.

Упоредити са седмим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године, са осмим задатком на тесту одржаном 19. 01. 2014. године, са осмим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године, са осмим задатком на тесту одржаном 14. 06. 2014. године, са осмим задатком на тесту одржаном 05. 07. 2014. године, као и са осмим задатком на тесту одржаном 18. 01. 2015. године.

9.

Подсетимо се да за дату квадратну матрицу A можемо дефинисати њен карактеристични полином $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$, где је I јединична матрица истог реда као и матрица A. Нуле карактеристичног полинома матрице A јесу њене карактеристичне (сопствене) вредности.

Карактеристични полином матрице J јесте: $P_J(\lambda) = \det(J - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$. Да бисмо на што једноставнији начин израчунали ову детерминанту, додајмо, редом, елементе друге и треће колоне елементима прве колоне, а затим помножимо елементе прве врсте бројем -1 и додајмо их, редом, елементима друге и треће врсте (вредност детерминанте не мења се уколико се елементима једне врсте, тј. колоне, додају елементи неке друге врсте, тј. колоне, претходно помножени задатим бројем): $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda)$. Видимо да су нуле карактеристичног полинома $P_J(\lambda)$ матрице J, $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, и то су њене сопствене вредности.

10.

Подсетимо се да се свака једначина са три непознате x, y и z, $ax+by+cz=d$, може интерпретирати као једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$.

За две једначине са истим бројем непознатих n, $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=a$ и $b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n=b$, кажемо да су еквивалентне, односно линеарно зависне, уколико постоји реалан број t, различит од нуле, такав да важи $a_1=tb_1, a_2=tb_2,\ldots,a_n=tb_n, a=tb$ (ако се једна од те две једначине може добити када другу помножимо реалним бројем t различитим од нуле), односно ако те две једначине имају исте скупове решења. У супротном кажемо да су једначине нееквивалентне, односно да су линеарно независне.

Размотримо сада међусобни положај две равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$, које су задате својим једначинама $\alpha: a_1x+a_2y+a_3z=a$ и $\beta: b_1x+b_2y+b_3z=b$. Уколико се равни α и β поклапају, тада свака тачка која припада равни α истовремено припада и равни β (и обрнуто), па је свако решење једначине $\alpha: a_1x+a_2y+a_3z=a$ истовремено и решење једначине $\beta: b_1x+b_2y+b_3z=b$, односно те две једначине имају исте скупове решења, па су једначине којима су ове две равни задате еквивалентне. Уколико су равни α и β паралелне, али се не поклапају, тада не постоји ниједна тачка у простору $\mathbb{R}^3$ која припада и једној и другој равни, па систем једначина $\begin{array}{rcl} a_1x+a_2y+a_3z & = & a \\ b_1x+b_2y+b_3z & = & b \end{array}$ нема решења, односно није сагласан. Уколико равни α и β нису паралелне, нити се поклапају, тада је њихов пресек права, и постоји бесконачно много тачака у простору $\mathbb{R}^3$ које задовољавају обе једначине (то су тачке које припадају пресечној правој равни α и β). У том случају једначине равни α и β нису еквивалентне, систем једначина $\begin{array}{rcl} a_1x+a_2y+a_3z & = & a \\ b_1x+b_2y+b_3z & = & b \end{array}$ сагласан је, и има бесконачно много решења. Приметимо да на овај начин, анализирајући једначине којима су две равни у простору $\mathbb{R}^3$ задате, можемо одредити њихов међусобни положај.

Права у простору $\mathbb{R}^3$ јесте скуп тачака пресека две равни (које нису паралелне нити се поклапају), па права у простору $\mathbb{R}^3$ може бити задата као сагласан систем две нееквивалентне једначине са три непознате $\begin{array}{rcl} a_1x+a_2y+a_3z & = & a \\ b_1x+b_2y+b_3z & = & b \end{array}$ (од којих свака једначина представља једначину равни). Дати систем је могуће решити, јер је сагласан, а будући да има две једначине, а три непознате, он има бесконачно много решења, и у његовом решењу фигурише тачно један параметар (сетимо се да је број различитих параметара у решењу сагласног система од m нееквивалентних једначина са n непознатих, у којем је $n \geq m$, једнак $n-m$, односно једнак је разлици броја непознатих и нееквивалентних једначина). Решење датог система је, дакле, следећег облика: $x=m_1t+l_1$, $y=m_2t+l_2$, $z=m_3t+l_3$, где су m_1, m_2, m_3 и l_1, l_2, l_3 фиксиране реалне константе и t реални параметар (заменом различитих вредности параметра t у једнакости за x, y и z добијамо координате различитих тачака које припадају датој правој). Сетимо се да је вектор $\vec{m}=(m_1,m_2,m_3)$ векторски производ вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ (важи $\vec{m}=\vec{a}\times\vec{b}$), и то је вектор који је са датом правом паралелан, као и да бројеви l_1, l_2 и l_3 представљају, редом, x, y и z координате једне произвољне тачке која припада датој правој, односно уређена тројка (l_1,l_2,l_3) представља једно конкретно решење система којим је права задата.

Дакле, права у простору $\mathbb{R}^3$ може бити задата и као решење једног сагласног система две једначине са три непознате, и у том случају ће x, y и z координате тачака које тој правој припадају бити изражене као линеарне функције једне непознате, тј. параметра t. Такав начин задавања праве у простору назива се параметарски облик једначине праве.

Уочимо да сваки од понуђених одговора представља неку праву у $\mathbb{R}^3$ задату у параметарском облику, односно представља решење неког сагласног система две нееквивалентне једначине са три непознате x, y и z (јер су у сваком од понуђених одговора x, y и z изражени као линеарне функције једне непознате, тј. параметра t). Потребно је само испитати која од тих решења заиста јесу решења датог система $\left\{ \begin{array}{l} x+\ \ y+z=1 \\ x-2y-z=2 \end{array} \right\}$ две једначине са три непознате. То је најједноставније урадити директном заменом сваког од понуђених решења система у дати систем. Уколико посматрано решење задовољава обе једначине датог система, онда то решење представља исту праву као и дати систем, а уколико то није случај, онда посматрано решење представља неку другу праву у $\mathbb{R}^3$.

(а) $$\begin{array}{l} \frac{5}{2}+2t+\ (1+t)-\ \ \ \frac{1}{2}+5t\ \ =3+8t\neq 1 \\ \frac{5}{2}+2t-2(1+t)-(-\frac{1}{2}+5t)=1-4t\neq 2 \end{array}$$

(б) $$\begin{array}{l} \frac{3}{2}+t+\ \ 2t\ \ -\ \ \ \ \frac{1}{2}-3t\ \ =1 \\ \frac{3}{2}+t-2(2t)-(-\frac{1}{2}-3t)=2 \end{array}$$

(в) $$\begin{array}{l} 1+3t+\ \ (-4+2t)+\ \ 3-2t\ \ =3t\neq 1 \\ 1+3t-2(-4+2t)-(3-2t)=6+t\neq 2 \end{array}$$

(г) $$\begin{array}{l} \frac{4}{3}-\frac{1}{3}t+\ \ \left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t\right)+t=1 \\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3}t-2\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}t\right)-t=2 \end{array}$$

Дакле, тачни су одговори **(б)** и **(г)**.

◇ Задатак можемо урадити и на други начин. Одредимо вектор $\vec{v_p}$ дате праве p (вектор који је са њом паралелан) као векторски производ вектора равни чијим пресеком је права задата.
Сетимо се дефиниције векторског производа два вектора у $\mathbb{R}^3$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, који су дати својим координатама $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.
Сетимо се, такође, да су два вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ колинеарни (паралелни) ако и само ако за неко $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ важи $\vec{a}=s\vec{b}$.
Будући да је вектор прве равни $\vec{a}=(1,1,1)$, а вектор друге равни $\vec{b}=(1,-2,-1)$, вектор дате праве јесте: $\vec{v_p}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=(1,2,-3)$.
Видимо да су вектори правих које су понуђене под **(а)** и **(в)** једнаки, редом, $(2,1,5)$ и $(3,2,-2)$, па очигледно нису колинеарни са вектором $\vec{v_p}$, и зато одговори под **(а)** и **(в)** нису тачни.
Вектори правих које су понуђене под **(б)** и **(г)** једнаки су, редом, $(1,2,-3)$ и $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)$, и они јесу колинеарни са вектором $\vec{v_p}$. Ово још увек не значи да су одговори под **(б)** и **(г)** тачни. Наиме, праве чији су вектори паралелни јесу паралелне, али се не морају поклапати, односно услов паралелности вектора две дате праве јесте потребан, али не и довољан услов да се те две праве поклапају. Довољни услови да се две дате праве поклапају јесу да су њихови вектори паралелни и да оне садрже бар једну заједничку тачку (у том случају праве су истовремено паралелне и секу се, па се морају поклапати). Проверимо зато да ли тачка са координатама $\left(\frac{3}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$, која припада правој понуђеној под **(б)**, припада датој правој, односно да ли задовољава обе једначине којима је дата права дефинисана. Важи $\frac{3}{2}+0+\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ и $\frac{3}{2}-2\cdot 0-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, и зато је одговор **(б)** тачан. Слично, за тачку са координатама $\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},0\right)$ која припада правој понуђеној под **(г)** важи $\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)+0=1$ и $\frac{4}{3}-2\left(-\frac{1}{3}\right)-0=2$, па је и одговор **(г)** тачан.

– Тест основног знања – 13. 06. 2015.

1. Одредити интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$.

2. Израчунати величину површине дела равни ограниченог кривом $y = 2 - x^2$ и x-осом.

3. Одредити оно партикуларно решење диференцијалне једначине $y' = \frac{1}{x}$ за које је $y(e) = 0$.

4. Заокружити тачан одговор. Природних бројева мањих од 1000 у којима се не појављује цифра 1 има:

(а) 728; **(б)** 530; **(в)** 400; **(г)** 900.

5. Нека је непразни скуп B на коме су дефинисане бинарне операције "$\vee$" (дисјункција), "$\wedge$" (конјункција) и унарна операција $^-$ (комплемент) Булова алгебра. Заокружити слова испред аксиома:

(а) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

(б) $(\forall a \in B)(\forall b \in B)\, a \vee b = b \vee a$;

(в) $(\forall a \in B)(\forall b \in B)\, \overline{a \vee b} = \overline{a} \vee \overline{b}$;

(г) ниједна од претходних формула није аксиома.

6. Нека су $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ позитивни редови. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq b_n$ и ако $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергира;

(б) ако $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергирају, онда $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ конвергира;

(в) ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq b_n$ и ако $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира;

(г) ниједно од претходних тврђења није тачно.

7. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha}$?

8. Одредити ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

9. Одредити угао између вектора $\vec{a} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ и $\vec{b} = (0, 0, 2)$ из $\mathbb{R}^3$.

10. Попунити празна поља тако да једначина нормале из тачке $A(2, 3, -1)$ на раван $2x + y - 4z + 5 = 0$ буде дата са:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y - \square}{\square} = \frac{z - \square}{\square}$$

.

– Решења –

1. Уочимо да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$.

Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Дакле, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Приликом одређивања овог интеграла користили смо чињеницу да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ таблични интеграл, и да је једнак $\operatorname{arctg} x + C$.

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

♣ Упоредити са првим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године, као и са првим задатком под **(б)** на тесту одржаном 18. 01. 2015. године.

2.

> Подсетимо се да уколико је $y = f(x)$ ненегативна крива, где је $f(x)$ функција интеграбилна на одсечку $[a,b]$, тада вредност $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.
>
> Такође, уколико је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и парна, тада важи $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Функција $f(x) = 2 - x^2$ квадратна је функција са максимумом чије су нуле $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$ (то су тачке у којима крива $y = f(x)$ сече x-осу), па је ненегативна на интервалу $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Величина површине дела равни ограниченог кривом $y = 2 - x^2$ и x-осом је, дакле, $P = \displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,\mathrm{d}x$. Подинтегрална функција $f(x) = 2 - x^2$ јесте парна (за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(-x) = f(x)$), па је $P = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)\,\mathrm{d}x$. Сада је, на основу линеарности интеграла, $P = 2\left(\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} 2\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,\mathrm{d}x\right) = 2\left(2\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,\mathrm{d}x\right)$. Интеграли $\displaystyle\int \mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ таблични су интеграли и једнаки су, редом, $x + C$ и $\dfrac{x^3}{3} + C$. За израчунавање последња два интеграла искористићемо Њутн–Лајбницову формулу:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x = x\Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}, \ \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{3} - 0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Коначно, $P = 2\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 2\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

3.

> Подсетимо се да је партикуларно решење диференцијалне једначине првог реда свако решење које се може добити из њеног општег решења за неку вредност (коначну или бесконачну) константе која у општем решењу фигурише.

Ово је једначина која раздваја променљиве, и до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, па је $y = \ln|x| + C$, и ово је опште решење полазне диференцијалне једначине.
Тражено партикуларно решење налазимо заменом у опште решење: $0 = y(e) = \ln e + C = 1 + C$, одакле следи да је $C = -1$.
Дакле, тражено партикуларно решење је $y = \ln|x| - 1$.

4. Сваки природан број мањи од 1000 (односно природан број који има максимално три цифре), укључујући и број 0, у којем се не појављује цифра 1, може се (на јединствен начин) представити низом дужине три (x_1, x_2, x_3) (то је низ његових цифара, на пример броју 2 одговара низ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, а броју 235 низ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$). Елементи низа (x_1, x_2, x_3) могу узимати вредности из скупа $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ будући да бројеви не смеју садржати цифру 1 (односно, за свако $1 \le i \le 3$ важи $x_i \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$). Број елемената скупа $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ јесте 9, па је, према принципу производа, број природних бројева мањих од 1000, укључујући и број 0, у којима се не појављује цифра 1 једнак $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$ (приметимо да је у питању број варијација са понављањем класе три скупа од девет елемената), а будући да желимо да одредимо само природне бројеве мање од 1000 у којима се не појављује цифра 1, од добијеног броја потребно је одузети један (јер не желимо да урачунамо број нула).
Дакле, природних бројева мањих од 1000 у којима се не појављује цифра 1 има $729 - 1 = 728$, па је тачан одговор **(а)**.

5. Формула $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ није аксиома (иако бисмо могли помислити да је у питању аксиома асоцијативности која гласи: $(\forall a \in B)(\forall b \in B)\,(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$), јер недостају квантификатори.

Формула $(\forall a \in B)(\forall b \in B)\, a \vee b = b \vee a$ јесте аксиома (то је аксиома комутативности операције $\vee$ у Буловој алгебри).

Формула $(\forall a \in B)(\forall b \in B)\, \overline{a \vee b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ није тачна, па самим тим није ни аксиома Булове алгебре.

Дакле, тачан је одговор **(б)**.

Обратити посебну пажњу на квантификаторе, као и на њихов распоред у формулама, аксиомама и теоремама. Такође, често долази до грешака због неразликовања следећих појмова: аксиома и дефиниција, с једне стране, и теорема (односно тврђења), с друге.

6.

Подсетимо се првог поредбеног критеријума за позитивне нумеричке редове:
Ако за скоро сваки природан број n важи $a_n \leq b_n$, тада, уколико ред $\sum b_n$ конвергира, конвергира и ред $\sum a_n$, а уколико ред $\sum a_n$ дивергира, дивергира и ред $\sum b_n$.
Нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.
Такође, за конвергентне редове важи особина линеарности, односно, уколико су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергентни, тада је конвергентан и ред $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и важи једнакост: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Тврђење наведено под **(а)** није тачно. То се лако види уколико за низове a_n и b_n изаберемо: $a_n = \frac{1}{n^2}$ и $b_n = \frac{1}{n}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq b_n$, и ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ јесте конвергентан ($\alpha = 2 > 1$), а ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ је дивергентан ($\alpha = 1$).
Тврђење наведено под **(б)** јесте тачно: то је управо особина линеарности која важи за конвергентне редове.
Тврђење наведено под **(в)** јесте први поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове, па је тачно.
Дакле, тачна су тврђења **(б)** и **(в)**.

7.

Подсетимо се другог поредбеног критеријума за позитивне нумеричке редове:
Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.
Нумерички ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Приметимо да, када $n \to +\infty$, важи $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ (ова релација следи из чињенице да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, а последња једнакост следи из чињенице да је $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$). Због тога за општи члан датог реда важи $\frac{\sin\frac{1}{n}}{n^\alpha} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Дакле, дати ред и ред са општим чланом $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ јесу еквиконвергентни. Будући да ред са општим чланом $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ конвергира за $\alpha + 1 > 1$, односно за $\alpha > 0$, то и дати ред конвергира за $\alpha > 0$.

8.

Подсетимо се да уколико је дата матрица A типа $m \times n$ (са m врста и n колона) над пољем $\mathbb{R}$, тада њених m врста можемо посматрати као m вектора из векторског простора $\mathbb{R}^n$ (такође, њених n врста можемо посматрати као n вектора из векторског простора $\mathbb{R}^m$), и тада је ранг матрице A број њених линеарно независних врста, односно број њених линеарно независних колона.
Подсетимо се и да елементарне трансформације не мењају ранг матрице, као и да је ранг матрице ред њене највеће регуларне квадратне подматрице.

Дата матрица A типа је 3×5 над пољем $\mathbb{R}$, па њене врсте представљају три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^5$: $v_1 = (1,1,1,1,-1)$, $v_2 = (2,3,-1,1,-2)$ и $v_3 = (3,4,0,2,-3)$. Лако се уочава да важи $(1,1,1,1,-1) + (2,3,-1,1,-2) = (3,4,0,2,-3)$, тј. $v_1 + v_2 = v_3$, па се вектор v_3 може представити као линеарна комбинација вектора v_1 и v_2, односно вектори v_1, v_2 и v_3 линеарно су зависни, па је ранг матрице A мањи од 3. Будући да су вектори v_1 и v_2 очигледно линеарно независни, следи да је ранг матрице A једнак 2, јер има две линеарно независне врсте.

♢ Задатак можемо урадити и на други (врло сличан) начин. Извршимо на датој матрици A узастопно следеће две елементарне трансформације: најпре додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -1, а потом, у тако добијеној матрици, додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -1. На тај начин долазимо до матрице $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ранг матрице A' мора бити мањи од 3 јер ниједна њена регуларна подматрица не сме садржати елементе треће врсте (сви елементи треће врсте једнаки су нули). Такође, ранг матрице A' једнак је 2 јер је њена највећа регуларна квадратна подматрица, на пример, подматрица која је образована од елемената који се налазе у пресецима њене прве и друге врсте и прве и друге колоне, и то је матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
Важи $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A' = 2$, па је ранг матрице A једнак два.

9.

Скаларни производ два вектора $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ из векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесте број $\vec{m}\cdot\vec{n} = m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3$.
Интензитет (норма) вектора $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ из векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесте број $|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}\cdot\vec{m}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$.
Подсетимо се формуле за израчунавање косинуса угла α који заклапају дати вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$, где $\cdot$ представља скаларни производ вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, а $|\vec{m}|$ и $|\vec{n}|$, редом, њихове интензитете.

Нека је α угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На основу наведене формуле важи

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\sqrt{2},0,\sqrt{2})\cdot(0,0,2)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{0^2+0^2+2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2+0+2}\sqrt{0+0+4}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

па је $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

10.

Подсетимо се да права p у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна вектору $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ може бити задата на следећи начин: $\dfrac{x - T_1}{p_1} = \dfrac{x - T_2}{p_2} = \dfrac{x - T_3}{p_3}$.

Такође, једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чији је вектор нормале $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ гласи: $n_1(x - T_1) + n_2(y - T_2) + n_3(z - T_3) = 0$.

Подсетимо се да уколико је раван α у простору $\mathbb{R}^3$ дата једначином $n_1x + n_2y + n_3z = N$, тада вектор нормале равни α има координате (n_1, n_2, n_3).

Такође важи и следећа чињеница: ако у простору $\mathbb{R}^3$ важи да је права p нормална на равни α, тада је вектор праве p (вектор који је паралелан правој p) колинеаран са вектором нормале равни α.

Будући да је тражена права нормална на раван $2x + y - 4z + 5 = 0$, вектор праве p (вектор који је паралелан правој p) јесте било који вектор који је колинеаран (паралелан) са вектором нормале дате равни, па за вектор праве p можемо изабрати баш вектор нормале дате равни, односно вектор $(2, 1, -4)$. Такође, тражена права садржи и дату тачку $A(2, 3, -1)$, па је њена једначина: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-\boxed{3}}{\boxed{1}} = \dfrac{z-\boxed{-1}}{\boxed{-4}}$.

– Тест основног знања – 04. 07. 2015.

1. Одредити интеграл $\int x3^{2x}\,\mathrm{d}x$.

2. Израчунати вредност одређеног интеграла $\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$.

3. Формирати хомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима ако се зна да су два њена линеарно независна партикуларна решења $y_1 = 1$ и $y_2 = x$.

4. Дати су скупови $M = \{1,2,3,4,5\}$ и $N = \{2,4\}$. Колико постоји различитих пресликавања (функција) $g : M \to N$?

5. Дата је Булова функција $f(p,q) = p \Leftrightarrow q$. Написати:

(а) дату функцију у облику СКНФ (савршене конјунктивне нормалне форме);

(б) негацију дате функције.

6. Заокружити слова испред дивергентних нумеричких редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arccos\frac{1}{n}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$;

(д) ниједан од претходних нумеричких редова није дивергентан.

7. Ако је $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, израчунати $S(3)$.

8. Одредити производ сопствених вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

9. У $\mathbb{R}^3$ су дати вектори $\vec{c} = (2,b,1)$ и $\vec{d} = (1,2,a)$, $a,b \in \mathbb{R}$. Одредити све вредности параметара a и b тако да вектори $\vec{c}$ и $\vec{d}$ буду линеарно зависни.

10. Написати једначину равни у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна са x-осом и z-осом, а y-осу сече у тачки $Y(0,3,0)$.

– Решења –

1. За одређивање датог интеграла користимо методу парцијалне интеграције:

$$\int x3^{2x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x & dv = 3^{2x}\,\mathrm{d}x \\ du = \mathrm{d}x & v = \frac{3^{2x}}{2\ln 3}\end{array}\right\} = \frac{x3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 3}\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x3^{2x}}{2\ln 3} - \frac{3^{2x}}{(2\ln 3)^2} + C.$$

Приликом одређивања овог интеграла користили смо чињеницу да је $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}$, за $a > 0$ и $a \neq 1$. Зато је:

$$\int 3^{2x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 2x \\ \mathrm{d}t & = & 2\mathrm{d}x\end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int 3^t\,\mathrm{d}t = \frac{3^t}{2\ln 3} + C = \frac{3^{2x}}{2\ln 3} + C.$$

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

> Подсетимо се да, уколико је $y = f(x)$ ненегативна крива, где је $f(x)$ функција интеграбилна на одсечку $[a, b]$, тада вредност $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.

Подинтегрална функција $|\cos x|$ ненегативна је на интервалу $[0, 2\pi]$, па тражена вредност представља величину површине P ограничене кривом $y = |\cos x|$, x-осом и правама $x = 0$ и $x = 2\pi$. Будући да је $|\cos x|$ периодична функција (са периодом π), важи $P = 2P_1$, где је $P_1 = \displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$. Такође лако можемо уочити да је površ P_1 унија две подударне површи: једна површ је ограничена кривом $y = |\cos x|$, x-осом и правом $x = 0$, а друга површ је ограничена кривом $y = |\cos x|$, x-осом и правом $x = \pi$, па је $P_1 = 2P_2$ где је $P_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|\,\mathrm{d}x$. Сада је јасно да важи $P = 4P_2$, а будући да је $|\cos x| = \cos x$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, имамо да је $P = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 4\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 4(1-0) = 4.$

◇ Задатак се може урадити и коришћењем чињенице да је $|\cos x| = \cos x$ за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и за $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $|\cos x| = -\cos x$ за $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Због тога важи $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$, па се после израчунавања ова три интеграла долази до траженог резултата.

3. Будући да су дата два линеарно независна партикуларна решења, која су облика $y_1 = 1$ и $y_2 = x$, закључујемо да карактеристична једначина тражене хомогене диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима има једно двоструко решење $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Карактеристична једначина је другог степена (јер је тражена диференцијална једначина другог реда), и позната су нам оба њена решења, па је карактеристична једначина $(\lambda-0)^2=0$, односно $\lambda^2=0$. Сада је јасно да је тражена диференцијална једначина $y''=0$.

♣ Упоредити са трећим задатком на тесту одржаном 08. 06. 2013. године.

4. Свака функција $g : M \to N$ одређена је низом (дужине пет) својих слика $(g(1), g(2), g(3), g(4), g(5))$, где $g(i)$ представља слику елемента i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Будући да је кодомен функције g двоелементни скуп $N=\{2,4\}$, значи да елементи низа $(g(1), g(2), g(3), g(4), g(5))$ могу узимати вредности из скупа $N=\{2,4\}$ (односно, за свако $1 \le i \le 5$ важи $g(i)=2$ или $g(i)=4$), па је број различитих функција $g : M \to N$ једнак $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^5 = 32$. Приметимо да је у питању број варијација са понављањем класе пет скупа од два елемента.

5.

Подсетимо се да важи: $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, као и $p \Rightarrow q = \overline{p} \vee q$.

(а) $f(p,q) = p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) = (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p) = (\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$,
и ово је СКНФ дате Булове функције.

(б) На основу Де Морганових закона и резултата под **(а)** следи:
$\overline{f(p,q)} = \overline{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{q} \vee p)} = \overline{\overline{p} \vee q} \vee \overline{\overline{q} \vee p} =$
$(\overline{\overline{p}} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{\overline{q}} \wedge \overline{p}) = (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p}) = (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$.
Овде смо користили и чињеницу да важи $\overline{\overline{p}} = p$ (закон инволуције).

6.

Подсетимо се теореме којом се тврди да општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули. Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Ову теорему је зато погодно користити када желимо да покажемо да ред дивергира. Врло је важно запамтити да обрат овог тврђења не важи, односно постоје редови који не конвергирају, а општи члан им тежи нули.

Нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Геометријски ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $|q|<1$, а за $|q| \ge 1$ дивергира.

Такође важи и следећи други поредбени критеријум за позитивне нумеричке редове:
Ако важи $a_n \sim b_n$, или ако постоји $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 < K < +\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни.

За општи члан реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \arccos\frac{1}{n}$ важи $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \arccos\frac{1}{n} = \arccos\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, па општи члан реда не тежи нули и ред је стога дивергентан.

Такође, низ n^n брже тежи бесконачности од низа $n!$ (када n тежи $+\infty$), па је гранична вредност $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}$ једнака $+\infty$. Дакле, општи члан реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}$ не тежи нули и ред је зато дивергентан.

За општи члан реда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$ важи $\frac{1}{n\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (јер је $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n\sqrt{n-1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$), па је дати ред еквиконвергентан са редом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ који је конвергентан ($\alpha=\frac{3}{2}>1$), односно, дати ред је конвергентан.
Ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n$ геометријски је ред за $q=\frac{3}{\sqrt{10}}<1$, па је зато конвергентан.
Дакле, тачни су одговори **(б)** и **(г)**.

7.

Подсетимо се Маклореновог развоја функције e^x:

$$\text{за свако } x\in\mathbb{R} \text{ важи } e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Уведимо у Маклореновом развоју функције e^x смену $t=-x$. Ако је $x\in\mathbb{R}$, тада је $t\in\mathbb{R}$, па је $e^{-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}$, односно важи и Маклоренов развој за функцију e^{-x}:

$$\text{за свако } x\in\mathbb{R} \text{ важи } e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Уочимо да је $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}-1=e^{-x}-1$, па је тражена вредност $S(3)=e^{-3}-1$.

8.

Подсетимо се да је производ свих сопствених вредности дате квадратне матрице A једнак њеној детерминанти.

Дакле, довољно је израчунати детерминанту дате матрице A, а та детерминанта је једнака нули, зато што су прве две врсте матрице A једнаке. Дакле, производ свих сопствених вредности матрице A једнак је нула.

♢ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице A, односно одређивањем нула њеног карактеристичног полинома. Сопствене вредности матрице A једнаке су: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{9+\sqrt{45}}{2}$, $\lambda_3=\frac{9-\sqrt{45}}{2}$, па је њихов производ једнак нула.

♣ Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године, са осмим задатком на тесту одржаном 23. 08. 2014. године, као и са деветим задатком на тесту одржаном 18. 01. 2015. године.

9.

Подсетимо се да су два вектора $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ у простору $\mathbb{R}^3$ линеарно зависни, односно паралелни, ако и само ако за неко $s\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ важи $\vec{a}=s\vec{b}$.

Дакле, вектори $\vec{c} = (2, b, 1)$ и $\vec{d} = (1, 2, a)$ биће линеарно зависни ако и само ако важи $\vec{c} = s\vec{d}$ за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, односно, ако и само ако је $2 = 1 \cdot s$, $b = 2 \cdot s$ и $1 = a \cdot s$, за неко $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Из прве једначине видимо да је $s = 2$, па је $b = 2 \cdot 2 = 4$ и $a = \frac{1}{s} = \frac{1}{2}$. Дакле, вектори $\vec{c}$ и $\vec{d}$ линеарно су зависни ако и само ако је $b = 4$ и $a = \frac{1}{2}$.

10.

> Подсетимо се да једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чији је вектор нормале $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ гласи: $n_1(x-T_1)+n_2(y-T_2)+n_3(z-T_3) = 0$.
>
> Такође важи и следећа чињеница: равни α и β у простору $\mathbb{R}^3$ паралелне су ако и само ако су њихови вектори нормала $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ паралелни.
>
> Подсетимо се и сегментног облика једначине равни α у простору $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1$. Раван α одсеца на координатним осама Ox, Oy, Oz, редом, одсечке a, b, c, односно садржи тачке са координатама $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.

Будући да је тражена раван паралелна са x-осом и z-осом, она је паралелна са равни која је одређена x-осом и z-осом, а то је Oxz раван. Вектор нормале Oxz-равни јесте сваки вектор који је паралелан са y-осом, па самим тим и вектор $(0, 1, 0)$. Једначина тражене равни је, дакле, $0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 3) + 0 \cdot (z - 0) = 0$, односно $y = 3$.

♢ Задатак смо могли урадити и коришћењем сегментног облика једначине равни у простору $\mathbb{R}^3$. Наиме, будући да је тражена раван паралелна са x-осом и z-осом, она не сече ни x-осу ни z-осу, односно одсечци које ова раван одсеца на x-оси и z-оси не постоје, док је одсечак на y-оси једнак 3. Дакле, тражена једначина равни је $\dfrac{y}{3} = 1$, односно $y = 3$.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 24. 08. 2013. године, као и са десетим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године.

– Тест основног знања – 29. 08. 2015.

1. Одредити интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

2. Заокружити слова испред тачних израза:

(а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+|x|}\,\mathrm{d}x = 0$;

(б) $\displaystyle\int_{\pi}^{14\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \neq 0$;

(в) ниједан од претходних израза није тачан.

3. Заокружити слова испред Рикатијевих диференцијалних једначина:

(а) $y' = y^2 - xy + 1$;

(б) $y' = 2x\sqrt{y} + \dfrac{4}{x}y$;

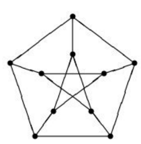
(в) $y' + y^2 + \dfrac{1}{x}y - \dfrac{4}{x^2} = 0$;

(г) $y'' = \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{x}{1-x^2}y$;

(д) ниједна од претходних једначина није Рикатијева диференцијална једначина.

4. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots n\}$, $n \geq 6$, у којима шестица стоји (не обавезно непосредно) иза петице?

5. Заокружити слова испред особина које поседује граф на слици:



(а) граф је неоријентисан;

(б) граф је повезан;

(в) степен сваког чвора у графу јесте 3;

(г) граф на слици нема ниједну од претходно наведених особина.

6. За које вредности $p \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^k}$?

7. Израчунати збир (суму) нумеричког реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.

8. Одредити сопствене вредности матрице
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Нека су $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвољни вектори из $\mathbb{R}^3$ различити од нула-вектора и нека је са $\cdot$ означен скаларни производ вектора у $\mathbb{R}^3$, а са $\times$ векторски производ вектора у $\mathbb{R}^3$. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$;

(б) $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}^3$;

(в) $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$;

(г) вектори $\vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ су међусобно ортогонални;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

10. Попунити празна поља тако да једначина равни која садржи тачку $A(-1, 0, 3)$ и нормална је на праву $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$ буде дата са:

$$\boxed{} \cdot (x+1) + \boxed{} \cdot \big(y - \boxed{}\big) - \big(z - \boxed{}\big) = 0$$

.

– Решења –

1. У питању је интеграл ирационалне функције (у подинтегралној функцији фигурише $\sqrt{x}$), па ћемо га сменом $t = \sqrt{x}$ свести на интеграл рационалне функције. Ради једноставнијег увођења смене, помножимо, најпре, и бројилац и именилац са $\sqrt{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}(\sqrt{x}) = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int \mathrm{d}t - \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}\right) = 2\,(t - \operatorname{arctg} t) + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Обратити пажњу на чињеницу да је неодређени интеграл једнак произвољној примитивној функцији подинтегралне функције, па је врло важно да додамо константу примитивној функцији коју смо одредили решавајући задатак.

2.

Подсетимо се да уколико је интервал интеграције облика $[-a, a]$, тј. симетричан у односу на нулу, најпре испитујемо парност подинтегралне функције, јер важе следеће чињенице:

- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a, a]$ и непарна, тада је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ једнак нули;
- ако је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a, a]$ и парна, тада је $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Сетимо се да, уколико је $y = f(x)$ позитивна крива на одсечку $[a, b]$ и функција $f(x)$ интеграбилна на одсечку $[a, b]$, тада вредност $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$, а такође је и интеграл негативне функције $f(x)$ на интервалу $[a, b]$ негативан број.

(а) Подинтегрална функција $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+|x|}$ јесте непрекидна на интервалу $[-\pi, \pi]$ (домен функције $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+|x|}$ је $\mathbb{R}$), а такође је и непарна (за свако x из $\mathbb{R}$ важи $\dfrac{\operatorname{arctg}(-x)}{1+|-x|} = -\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+|x|}$), па је тражена вредност датог интеграла једнака 0, и израз $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+|x|} = 0$ јесте тачан.

(б) Израчунајмо $\displaystyle\int_{\pi}^{14\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$. Важи $\displaystyle\int_{\pi}^{14\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{\pi}^{14\pi} = -\cos 14\pi - (-\cos\pi) =$ $-1 + (-1) = -2 \neq 0$, па је израз $\displaystyle\int_{\pi}^{14\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \neq 0$ тачан.

Дакле, тачни су одговори **(а)** и **(б)**.

Задатак под **(а)** могуће је урадити и директним израчунавањем датог одређеног интеграла, али такав начин израде подразумева знање које превазилази оквире курса Математика 2 на Електротехничком факултету.

Да важи $\int_{\pi}^{14\pi} \sin x \,\mathrm{d}x \neq 0$ могли смо закључити и без израчунавања одређеног интеграла $\int_{\pi}^{14\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$. Наиме, одређени интеграл функције $\sin x$ на било ком интервалу облика $[k\pi, (k+2)\pi]$ једнак је нули, зато што важи $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = -\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ (величина површине ограничене графиком функције $\sin x$ и одсечком $[k\pi, (k+1)\pi]$ x-осе једнака је величини површине ограничене графиком функције $\sin x$ и одсечком $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$ x-осе, али је функција $\sin x$ на једном од интервала $[k\pi, (k+1)\pi]$, $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$, позитивна, а на другом негативна, па су интеграли $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ и $\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ исти по апсолутној вредности, али су супротног знака. Због адитивности одређеног интеграла је $\int_{\pi}^{14\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{3\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{3\pi}^{5\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + \cdots \int_{11\pi}^{13\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{13\pi}^{14pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 6 \cdot 0 + \int_{13\pi}^{14\pi} \sin x \,\mathrm{d}x < 0$, јер је функција $\sin x$ негативна на интервалу $[13\pi, 14\pi]$.

♣ Упоредити са другим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године, као и са са другим задатком на тесту одржаном 09. 02. 2014. године.

3.

Једначина $y'(x) = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$, где су $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ непрекидне функције на интервалу (a, b), назива се Рикатијева диференцијална једначина.

Одмах можемо уочити да је једначина $y'' = \frac{2}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}y$ једначина реда два, те није Рикатијева диференцијална једначина. Такође, у једначини $y' = 2x\sqrt{y} + \frac{4}{x}y$ фигурише квадратни корен непознате функције y, па ни она није Рикатијева диференцијална једначина, јер у Рикатијевој диференцијалној једначини фигуришу само други и први степен непознате функције y (приметимо да дату једначину можемо записати као $y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y}$, па видимо да је та једначина, у ствари, Бернулијева диференцијална једначина).
Једначина $y' = y^2 - xy + 1$ јесте Рикатијева диференцијална једначина, за $P(x) = R(x) = 1$ и $Q(x) = -x$, а такође је то и једначина $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$, за $P(x) = -1$, $Q(x) = -\frac{1}{x}$ и $R(x) = \frac{4}{x^2}$. Дакле, тачни су одговори **(а)** и **(в)**.

4.

Подсетимо се да је пермутација скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ било која уређена n-торка различитих елемената из тог скупа, као и да је број пермутација скупа X_n једнак $n!$.
Такође важи и принцип збира: ако су A и B коначни и дисјунктни скупови, односно ако важи $A \cap B = \emptyset$, тада је $|A \cup B| = |A| + |B|$.
Подсетимо се и принципа производа: ако су A и B коначни скупови, тада је $A \times B$ коначан скуп, и важи $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
Сетимо се и да је формула за израчунавање збира првих n природних бројева: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Означимо са P скуп свих пермутација скупа $\{1,2,\dots n\}$. Важи $|P| = n!$ (број елемената скупа P једнак је $n!$), као и $P = M \cup N$, где је са M означен онај подскуп скупа P у којем се налазе пермутације скупа $\{1,2,\dots n\}$ у којима шестица стоји (не обавезно непосредно) иза петице, а са N је означен онај подскуп скупа P у којем се налазе пермутације скупа $\{1,2,\dots n\}$ у којима петица стоји (не обавезно непосредно) иза шестице. Такође је пресек скупова M и N празан (не постоји пермутација скупа $\{1,2,\dots n\}$ у којој се истовремено број пет налази и испред и иза броја шест), па је, према принципу збира, $|P| = |M|+|N|$. Будући да су сви елементи скупа $\{1,2,\dots n\}$ равноправни у својим појављивањима на различитим местима у пермутацијама елемената тог скупа, такви су и елементи 5 и 6, па је број оних пермутација скупа $\{1,2,\dots n\}$ у којима шестица стоји (не обавезно непосредно) иза петице исти као и број оних пермутација истог скупа у којима петица стоји (не обавезно непосредно) иза шестице, односно важи $|M| = |N|$. Дакле, $|P| = n!$ и $|P| = 2|M|$, па је $|M| = \dfrac{n!}{2}$, односно број пермутација скупа $\{1,2,\dots n\}$ у којима шестица стоји (не обавезно непосредно) иза петице јесте $\dfrac{n!}{2}$.

$\diamondsuit$ Задатак смо могли урадити и директним пребројавањем пермутација са задатом особином. Приметимо да у пермутацијама са задатом особином број 5 не може стајати на последњем (n-том) месту, и поделимо скуп пермутација са задатом особином на следеће (дисјунктне) скупове: пермутације у којима број 5 стоји на првом месту, пермутације у којима број 5 стоји на другом месту, ..., пермутације у којима број 5 стоји на претпоследњем месту. Пребројмо сада колико има пермутација са задатом особином у којима број 5 стоји на k-том месту, $1 \le k \le n-1$. Будући да је број 5 фиксиран на k-том месту, а да број 6 мора, у траженим пермутацијама, стајати (не обавезно) иза броја 5, број места на којима може стајати број 6 је $n-k$. Сваки такав распоред бројева 5 и 6 на, редом, k-том и j-том месту, $k+1 \le j \le n$, даје $(n-2)!$ различитих пермутација са задатом особином, јер су у сваком таквом распореду бројеви 5 и 6 фиксирани на одговарајућим местима, а преосталих $n-2$ елемената скупа $\{1,2,\dots n\}$ можемо слободно пермутовати у оквиру преосталих $n-2$ места. Према принципу производа, пермутација са задатом особином у којима број 5 стоји на k-том месту, $1 \le k \le n-1$, јесте $(n-k)(n-2)!$. Будући да број 5 може стајати на било ком од првих $n-1$ места, односно важи $1 \le k \le n-1$, према принципу збира, укупан број пермутација са задатом особином једнак је: $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-2)! = (n-2)!\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k) = (n-2)!\sum\limits_{n=1}^{n-1}k = (n-2)!\dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n!}{2}$. Приметимо да смо приликом израчунавање суме искористили чињеницу да је $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}k$, која је тачна јер за природне бројеве k и n важи: $1 \le k \le n-1 \Leftrightarrow 1-n \le -k \le -1 \Leftrightarrow 1 \le n-k \le n-1$ (другим речима, уколико природан број k узима све вредности између 1 и $n-1$, тада и природан број $n-k$ узима све вредности између 1 и $n-1$, и обрнуто).

5.

Подсетимо се да је граф уређен пар (X,ρ), где је X непразан скуп и ρ бинарна релација дефинисана на том скупу. Елементи скупа X јесу чворови графа, а елементи скупа ρ његове гране. Граф се очигледно може представити цртежом у равни (или простору) на следећи начин. Чворове графа представљамо произвољним међусобно различитим тачкама у равни (или простору). Ако су, за $x_i, x_j \in X$, елементи x_i и x_j у релацији ρ, односно ако важи $x_i \rho x_j$, тачку која представља чвор x_i спајамо непрекидном глатком линијом са тачком која представља чвор x_j. Ова линија се оријентише на цртежу стрелицом од x_i ка x_j и она не пролази кроз неки трећи чвор графа. Ако за $x_i, x_j \in X$, елементи x_i и x_j нису у релацији ρ, односно ако не важи $x_i \rho x_j$, чворови x_i и x_j нису на цртежу директно повезани.

Грана која спаја чвор са самим собом назива се петља (ако код чвора x_i постоји петља, онда је елемент x_i скупа X у релацији ρ са самим собом, тј. важи $x_i \rho x_i$).
Граф (X, ρ) неоријентисан је или симетричан ако и само ако је ρ симетрична релација. Код неоријентисаних графова све гране су двострано оријентисане, односно неоријентисане, па се стрелице на цртежу изостављају.
За два чвора неоријентисаног графа без петљи кажемо да су суседни ако су спојени граном. Број суседних чворова за чвор x назива се степен тог чвора. Неоријентисан граф без петљи назива се регуларан степена r ако је степен сваког чвора тог графа једнак r.
У неоријентисаном графу пут дужине k јесте наизменични низ чворова x_i и грана u_i облика $x_1, u_1, x_2, u_2, \ldots, x_k, u_k, x_{k+1}$, при чему је за свако $1 \leq i \leq k$ чвор x_i почетни, а чвор x_{i+1} крајњи за грану u_i.
Неоријентисан граф је повезан ако се произвољна два његова чвора могу повезати путем. Ако у неоријентисаном графу постоје два чвора који се не могу повезати путем, кажемо да је тај граф неповезан.

На основу изложених чињеница дати граф јесте неоријентисан будући да његове гране на цртежу којим је представљен нису оријентисане. Јасно је и да је дати граф повезан, будући да се свака два од његових десет чворова могу повезати путем. Директним пребројавањем степена сваког чвора, видимо да је степен сваког чвора у датом графу једнак 3, односно, дати граф јесте 3-регуларан.
Дакле, тачни су одговори **(а)**, **(б)** и **(в)**.
Напоменимо да је дати граф у литератури познат као Петерсенов граф.

♣ Упоредити са десетим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године.

6.

Подсетимо се да геометријски ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ конвергира за $|q| < 1$, а у осталим случајевима дивергира.

Будући да је $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^k} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2p}\right)^k$, дати ред је геометријски ред за $q = \frac{1}{2p}$. Дакле, конвергентан је уколико важи $\left|\frac{1}{2p}\right| < 1$, односно $|2p| > 1$, тј. $|p| > \frac{1}{2}$.

♣ Упоредити са шестим задатком на тесту одржаном 24. 08. 2013. године.

7.

Подсетимо се Маклореновог развоја функције $\ln(1+x)$:

$$\text{за } x \in (-1, 1] \text{ важи } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

За $x \in (-1, 1]$ важи:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Дакле, за свако $x \in (-1,1]$ важи $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \ln(1+x)$, па за $x = 1$ имамо: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} = 1 - \ln(1+1) = 1 - \ln 2$. Зато је збир (сума) нумеричког реда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ једнак $1 - \ln 2$.

8.

> Подсетимо се да за дату квадратну матрицу A можемо дефинисати њен карактеристични полином $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$, где је I јединична матрица истог реда као и матрица A. Нуле карактеристичног полинома матрице A јесу њене карактеристичне (сопствене) вредности.

Карактеристични полином матрице J јесте: $P_J(\lambda) = \det(J - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$. Да бисмо на што једноставнији начин израчунали ову детерминанту, додајмо, редом, елементе друге и треће колоне елементима прве колоне, а затим помножимо елементе прве врсте бројем -1 и додајмо их, редом, елементима друге и треће врсте (вредност детерминанте не мења се уколико се елементима једне врсте, тј. колоне, додају елементи неке друге врсте, тј. колоне, претходно помножени задатим бројем): $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2(3-\lambda)$. Видимо да су нуле карактеристичног полинома $P_J(\lambda)$ матрице J, $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, и то су њене сопствене вредности.

♣ Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 08. 02. 2015. године.

9.

> Подсетимо се неких особина скаларног и векторског производа два вектора из $\mathbb{R}^3$.
> Скаларни производ вектора јесте бинарна операција која пару вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ додељује реалан број, тј. $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. За свака два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ важи $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$, односно скаларни производ вектора јесте комутативна операција. Скаларни производ два вектора из $\mathbb{R}^3$ једнак је нули ако и само ако су та два вектора ортогонална, тј. ако је угао између њих једнак $\frac{\pi}{2}$, или уколико је бар један од та два вектора нула-вектор.
> Векторски производ вектора јесте бинарна операција која пару вектора из векторског простора $\mathbb{R}^3$ додељује вектор из $\mathbb{R}^3$, тј. $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. За свака два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ важи $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Векторски производ два вектора из $\mathbb{R}^3$ једнак је нула-вектору ако и само ако су та два вектора паралелна (колинеарна, тј. линеарно зависна), односно ако је угао између њих једнак 0 или π, или уколико је бар један од та два вектора нула-вектор. Уколико ни вектор $\vec{a}$ ни вектор $\vec{b}$ нису нула-вектори и уколико та два вектора нису линеарно зависна, тј. колинеарна, онда је вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ различит од нула-вектора и нормалан је (ортогоналан) и на вектор $\vec{a}$ и на вектор $\vec{b}$, односно ортогоналан је на раван коју одређују (неколинеарни, ненула) вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

На основу наведених чињеница, одмах закључујемо да су тврђења наведена под **(а)**, **(в)** и **(г)** тачна, а тврђење наведено под **(б)** нетачно.
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(в)** и **(г)**.

♣ Упоредити са осмим задатком на тесту одржаном 29. 06. 2013. године.

10.

Подсетимо се да права p у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна вектору $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ може бити задата на следећи начин: $\dfrac{x - T_1}{p_1} = \dfrac{x - T_2}{p_2} = \dfrac{x - T_3}{p_3}$.
Сетимо се и да једначина равни α у простору $\mathbb{R}^3$ чији је вектор нормале $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ и која садржи тачку $T(T_1, T_2, T_3)$ гласи: $n_1(x - T_1) + n_2(y - T_2) + n_3(z - T_3) = 0$.

Подсетимо се да уколико је раван α у простору $\mathbb{R}^3$ дата једначином $n_1x + n_2y + n_3z = N$, тада вектор нормале равни α има координате (n_1, n_2, n_3).

Такође важи и следећа чињеница: уколико у простору $\mathbb{R}^3$ важи да су права p и раван α међусобно нормалне, тада је вектор праве p (вектор који је паралелан правој p) колинеаран са вектором нормале равни α.

Будући да је тражена раван нормална на датој правој $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-3}{-1}$, вектор нормале тражене равни јесте било који вектор колинеаран са вектором дате праве (вектором који је са датом правом паралелан), односно за вектор нормале тражене равни можемо изабрати баш вектор дате праве, тј. вектор $(2, 4, -1)$. Такође, тражена раван садржи и дату тачку $A(-1, 0, 3)$, па је њена једначина:

$$\boxed{2} \cdot (x+1) + \boxed{4} \cdot \left(y - \boxed{0}\right) - \left(z - \boxed{3}\right) = 0$$

– Практикум из Математике –

– Први тест – 22. 03. 2015.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \cos 4x \,\mathrm{d}x.$$

2. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \,\mathrm{d}x.$$

3. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}.$$

4. Одредити неодређени интеграл

$$\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x.$$

5. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^2 |x^2-4x+3| \,\mathrm{d}x.$$

6. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |x| \sin x \,\mathrm{d}x.$$

7. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sqrt{\cos x} \mathrm{d}x.$$

8. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају крива $y = \ln x$ и праве $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ и $y = 0$.

9. Одредити вредност реалног параметра b, $b > -1$, тако да важи $\dfrac{1}{1+b} \displaystyle\int_{-1}^{b} (3x^2 + 2x)\,\mathrm{d}x = 4$.

10. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају крива $y = x^2 - 1$ и права $y = 0$.

11. Одредити опште решење диференцијалне једначине првог реда

$$y' + 2xy^2 = 0.$$

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(x + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

на интервалу $(0, +\infty)$.

13. Одредити оно партикуларно решење диференцијалне једначине првог реда $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ које задовољава услов $y(1) = 1$.

14. Одредити опште решење хомогених линеарних диференцијалних једначина:

(а) $y'' - 2y' - 3y = 0;$

(б) $y'' - 4y' + 4y = 0.$

15. Одредити опште решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$y'' - 4y = 4e^x.$$

– Решења –

1. Након увођења смене добијамо таблични интеграл:

$$\int \cos 4x \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = 4x \\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \cos t \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

Обратити пажњу да је неодређени интеграл скуп свих примитивних функција подинтегралне функције. Према томе, врло је важно да код одређивања неодређеног интеграла додамо константу израчунатој примитивној функцији.

2. Слично као и у претходном задатку, интеграл решавамо увођењем смене:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = 1 + e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int t^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}t = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1+e^x} + C.$$

Још елегантнији приступ је увођење смене $t = \sqrt{1+e^x}$. На тај начин имамо $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$, па је $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x = \int 2\mathrm{d}t = 2t + C = 2\sqrt{1+e^x} + C$.

3. Свођењем квадратног тринома у имениоцу подинтегралне функције на канонски облик имамо да је $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1}$.
Добијени интеграл решавамо уводећи смену $t = x + 2$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+1} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& x+2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\,(x+2) = \mathrm{d}x \end{array} \right\} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

Дакле, $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$.

4. Интеграл решавамо методом парцијалне интеграције:

$$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} x & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & v = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Сада је потребно решити интеграл $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$, који решавамо увођењем смене $t = 1 + x^2$:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{rcl} t &=& 1+x^2 \\ \mathrm{d}t &=& \mathrm{d}\left(1+x^2\right) = 2x\mathrm{d}x \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Дакле, $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C$.

5. Приметимо да је

$$|x^2 - 4x + 3| = \left\{ \begin{array}{rl} x^2 - 4x + 3, & x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \\ -\left(x^2 - 4x + 3\right), & x \in (1, 3)\,. \end{array} \right.$$

На основу адитивности одређеног интеграла следи

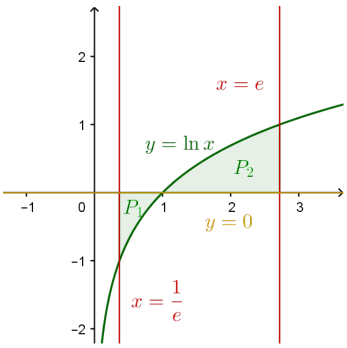
$$\int_0^2 |x^2-4x+3|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2-4x+3)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (x^2-4x+3)\,\mathrm{d}x =$$
$$\left(\tfrac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1 - \left(\tfrac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_1^2 = \left(\tfrac{1}{3}-2+3\right)-\left(\tfrac{8}{3}-8+6-\tfrac{1}{3}+2-3\right)=2.$$

6. Ако је f непрекидна и непарна функција на сегменту $[-a,a]$, онда је $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Функција $f(x)=|x|\sin x$ непрекидна је и непарна на сегменту $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$, као производ непрекидне и парне функције $|x|$ и непрекидне и непарне функције $\sin x$. Према томе, важи $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} |x|\sin x\,\mathrm{d}x=0$.

7. Задатак решавамо увођењем смене и применом Њутн–Лајбницове формуле:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=\cos x, & x=0\Rightarrow t=\cos 0=1 \\ \mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x, & x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{t}\mathrm{d}t =$$
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\right).$$

8. Део равни ограничен кривом $y=\ln x$ и правама $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ и $y=0$ налази се испод, а део изнад x-осе. Величину површине траженог дела равни можемо представити као збир величина површина делова равни на слици означених са P_1 и P_2. Неодређени интеграл функције $y=\ln x$ одређујемо методом парцијалне интеграције, док одговарајуће одређене интеграле рачунамо коришћењем Њутн–Лајбницове формуле.



$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u=\ln x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x} & v=x \end{array}\right\} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

$$P=P_1+P_2=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$$
$$=-(x\ln x-x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_1^e = 1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+e-e+1=2-\frac{2}{e}$$

Задатак је исти као и трећи задатак са теста 13. 02. 2011.

9. Искористићемо особину линеарности одређеног интеграла како бисмо израчунали вредност са леве стране дате једнакости:

$$\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}\left(\int_{-1}^{b}3x^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^{b}2x\mathrm{d}x\right).$$

Оба неодређена интеграла $\int 3x^2\mathrm{d}x$ и $\int 2x\mathrm{d}x$ таблични су интеграли, и њихове примитивне функције су, редом, x^3+C и x^2+C. Да бисмо израчунали одговарајуће одређене интеграле користимо Њутн–Лајбницову формулу:

$$\int_{-1}^{b}3x^2\mathrm{d}x = x^3\Big|_{-1}^{b} = b^3-(-1)^3=b^3+1 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{b}2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_{-1}^{b} = b^2-(-1)^2=b^2-1.$$

Сада је: $\dfrac{1}{b+1}\displaystyle\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{b+1}(b^3+1+b^2-1) = \dfrac{b^2(b+1)}{b+1} = b^2$. Да би вредност израза $\dfrac{1}{b+1}\displaystyle\int_{-1}^{b}(3x^2+2x)\mathrm{d}x$ била једнака 4, мора важити $b^2=4$, односно $b=2$ или $b=-2$, али будући да је у задатку постављен услов $b>-1$, закључујемо да је $b=2$.

♣ Задатак је исти као и други задатак са теста 19. 01. 2014.

10. Уколико је $y=f(x)$ негативна крива, где је $f(x)$ функција интеграбилна на одсечку $[a,b]$, тада вредност $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ представља величину површине ограничене кривом $y=f(x)$, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$.

Такође, уколико је подинтегрална функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[-a,a]$ и парна, тада важи $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Функција $f(x)=x^2-1$ квадратна је функција са максимумом која сече x-осу у тачкама $x_1=1$ и $x_2=1$ (то су нуле функције $f(x)=x^2-1$), па је негативна на интервалу $[-1,1]$ (скицирати график). Величина површине дела равни ограниченог кривом $y=x^2-1$ и x-осом је, дакле, $P=-\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. Подинтегрална функција $f(x)=x^2-1$ парна је (за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $f(-x)=f(x)$), па је $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1(x^2-1)\,\mathrm{d}x$, односно, $P=-2\displaystyle\int_0^1(x^2-1)\,\mathrm{d}x$.

Сада је, на основу линеарности интеграла, $P=-2\left(\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x\right)$. Интеграли $\displaystyle\int \mathrm{d}x$ и $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$ таблични су интеграли и једнаки су, редом, $x+C$ и $\dfrac{x^3}{3}+C$. За израчунавање последња два интеграла искористићемо Њутн–Лајбницову формулу: $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x = x\Big|_0^1 = 1-0=1$, $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$. На крају је $P=-2\left(\dfrac{1}{3}-1\right)=\dfrac{4}{3}$.

11. Дата једначина је једначина која раздваја промењиве, па до њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$y'+2xy^2=0 \Rightarrow y'=-2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2xy^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y^2}=-2x\mathrm{d}x \Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=-\int 2x\mathrm{d}x.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је $-\dfrac{1}{y} = -2\left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)$, односно $\dfrac{1}{y}=x^2+C_1$. Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине јесте $y=\dfrac{1}{x^2+C_1}$, што једноставно можемо проверити заменом добијеног општег решења у полазну диференцијалну једначину.

12. Једначина $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где је $f(x)$ непрекидна функције на (a,b), назива се хомогена диференцијална једначина првог реда. Ако је $f(t)=t$, једначина $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ раздваја промењиве, па зато претпостављамо да је $f(t)\neq t$ на (a,b). Увођењем нове непознате функције $z=z(x)$, помоћу смене $z=\dfrac{y}{x}$, ова једначина се своди на једначину која раздваја промењиве.

Наиме, важи $y = zx$, па је $y' = xz' + z$. Када уврстимо ову смену у полазну једначину, добијамо $xz' + z = f(z)$, односно $\frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, а ово је (по непознатој функцији $z = z(x)$) једначина која раздваја променљиве. Из општег решења $G(x, z, C) = 0$ ове једначине добијамо опште решење полазне једначине као $G\left(x, \frac{y}{x}, C\right) = 0$.

Запишимо дату диференцијалну једначину на следећи начин: $x\,y' = y + x$. Приметимо да је, на интервалу $(0, +\infty)$, дата једначина еквивалентна диференцијалној једначини $y' = 1 + \frac{y}{x}$. Сада видимо да је у питању хомогена диференцијална једначина првог реда, за $f(t) = 1 + t$. Уведимо у датој једначини смену $z = \frac{y}{x}$. Важи $y = zx$, па је $y' = xz' + z$. Када уврстимо ову смену у полазну једначину, добијамо $xz' + z = 1 + z$, односно $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$, а ово је (по непознатој функцији $z = z(x)$) једначина која раздваја променљиве. До њеног општег решења долазимо интеграцијом:

$$\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Интеграли са леве и десне стране последње једнакости таблични су интеграли, те је $z = \ln|x| + C$ опште решење диференцијалне једначине $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$. Када у добијено опште решење диференцијалне једначине $\frac{x\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 1$ уврстимо $z = \frac{y}{x}$, долазимо до $\frac{y}{x} = \ln|x| + C$, односно $y = x\ln|x| + Cx$, што је опште решење полазне диференцијалне једначине. Будући да за $x \in (0, +\infty)$ важи $|x| = x$, опште решење полазне диференцијалне једначине јесте $y = x\ln x + Cx$, што се једноставно може проверити.

♣ Видети трећи задатак на тесту 27. 08. 2011. и трећи задатак на тесту 08. 02. 2015.

13. Једначина $y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ непрекидне функције на (a, b), назива се линеарном једначином првог реда. Њено опште решење дато је са

$$y(x) = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right).$$

У питању је линеарна једначина првог реда, $P(x) = -\frac{2}{x+1}$ и $Q(x) = (x+1)^3$.
Дакле, њено опште решење је:

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left(C + \int (x+1)^3 e^{-\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = e^{2\ln|x+1|}\left(C + \int (x+1)^3 e^{-2\ln|x+1|}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= e^{\ln(x+1)^2}\left(C + \int (x+1)^3 e^{\ln\frac{1}{(x+1)^2}}\mathrm{d}x\right) = (x+1)^2\left(C + \int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= (x+1)^2\left(C + \int (x+1)\mathrm{d}x\right) = (x+1)^2\left(C + \frac{(x+1)^2}{2}\right).$$

.

Партикуларно решење за које је $y(1) = 1$ добијамо када у општем решењу заменимо $x = 1$ и $y = 1$ и тако одредимо константу C. Према томе, имамо $1 = 4(C + 2)$, односно $C = -\frac{7}{4}$, па је тражено партикуларно решење:

$$y(x) = (x+1)^2\left(-\frac{7}{4} + \frac{(x+1)^2}{2}\right) = \frac{(x+1)^4}{2} - \frac{7}{4}(x+1)^2.$$

14. **(а)** У питању је хомогена диференцијална једначина другог реда. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -1$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

(б) Ово је такође хомогена диференцијална једначина другог реда. Карактеристична једначина ове диференцијалне једначине гласи $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, и њена решења су: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Дакле, опште решење дате диференцијалне једначине јесте: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

15. Нека је y_h опште решење хомогене диференцијалне једначине $y'' - 4\,y = 0$ и нека је y_p неко партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y'' - 4\,y = 4e^x$. Тада је опште решење дате нехомогене једначине дато са $y = y_h + y_p$. Једначина $y'' - 4\,y = 0$ хомогена је линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина гласи $\lambda^2 - 4 = 0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_{1,2} = \pm 2$, реални и различити. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења хомогене диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^{2\,x}$ и $y_2 = e^{-2\,x}$, док је опште решење њихова линеарна комбинација, тј. $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x}$. Партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине можемо одредити методом неодређених коефицијената или методом варијације константи.

Метода неодређених коефицијената може се применити када је слободан члан нехомогене диференцијалне једначине облика $F(x) = e^{\alpha\,x}\,(P_1(x)\,\cos(\beta\,x) + P_2(x)\,\sin(\beta\,x))$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ полиноми по промењљивој x редом степена $\deg P_1(x)$ и $\deg P_2(x)$. У конкретном случају имамо да је $F(x) = 4e^x$, што можемо добити из општег облика за $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 4$ и $P_2(x) = 0$. Како $\alpha + i\,\beta = 1$ није корен карактеристичне једначине, имамо да је партикуларно решење облика $y_p = e^{\alpha\,x}\,(Q_1(x)\,\cos(\beta\,x) + Q_2(x)\,\sin(\beta\,x))$, где су $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ полиноми чији су степени једнаки $\max\{\deg P_1(x), \deg P_2(x)\} = 0$, тј. $y_p = Ae^x$. Будући да је $y_p' = y_p'' = Ae^x$, заменом партикуларног решења у полазну једначину добијамо да је $-3Ae^x = 4e^x$, односно да је $A = -\frac{4}{3}$. Једно партикуларно решење дате нехомогене једначине гласи $y_p = -\frac{4}{3}e^x$, па је њено опште решење $y = y_h + y_p = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x} - \frac{4}{3}e^x$.

Ако се одлучимо за методу варијације константи, имамо да је опште решење нехомогене диференцијалне једначине облика $y = \widehat{C}_1(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2\,x}$, где су $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_2$ функције чије изводе налазимо решавањем система

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1'(x)\,e^{2\,x} + \quad \widehat{C}_2'(x)\,e^{-2\,x} &= \quad 0 \\ 2\,\widehat{C}_1'(x)\,e^{2\,x} - 2\,\widehat{C}_2'(x)\,e^{-2\,x} &= 4e^x. \end{aligned}$$

Дељењем друге једначине са 2 и додавањем првој једначини добијамо $\widehat{C}_1'(x) = e^{-x}$, и последично $\widehat{C}_2'(x) = -e^{3\,x}$. Имамо да је $\widehat{C}_1(x) = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C_1$ и $\widehat{C}_2(x) = -\int e^{3\,x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{3\,x} + C_2$, и да је опште решење нехомогене диференцијалне једначине

$$y = \widehat{C}_1(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2\,x} = \left(-e^{-x} + C_1\right)\,e^{2\,x} + \left(-\frac{1}{3}e^{3\,x} + C_2\right)\,e^{-2\,x} = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{-2\,x} - \frac{4}{3}e^x.$$

С друге стране, могли смо да изаберемо конкретне примитивне функције $\widehat{C}_1(x) = -e^{-x}$ и $\widehat{C}_2(x) = -\frac{1}{3}e^{3\,x}$ и да добијемо партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y_p = \widehat{C}_1(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2\,x} = -e^{-x}\,e^{2\,x} - \frac{1}{3}e^{3\,x}e^{-2\,x} = -\frac{4}{3}e^x$, које додајемо општем решењу хомогене једначине $y_h = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x}$ и на тај начин добијемо опште решење полазне диференцијалне једначине $y = y_h + y_p = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x} - \frac{4}{3}e^x$.

– Практикум из Математике –

– Други тест – 28. 05. 2015.

1. Испитати да ли ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot 3^n + 1}{2^n}$ конвергира.

2. За које вредности реалног параметра α нумерички ред $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+3)^{\alpha+2}}$ конвергира?

3. Полупречник конвергенције степеног реда $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n$ јесте:

(а) 1; **(б)** 3; **(в)** 0; **(г)** $\frac{1}{3}$; **(д)** $+\infty$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

4. За које је вредности реалног параметра a ранг матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

једнак 2?

5. У зависности од вредности реалног параметра b одредити ранг матрице

$$B = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) заменом места двема врстама матрице њен ранг се не мења;

(б) ако су A и B произвољне квадратне матрице истог реда, онда је $\operatorname{rang}(A \cdot B) = \operatorname{rang}(B \cdot A)$;

(в) ако је ранг матрице A једнак k, онда матрица A има тачно k линеарно независних врста, $k \in \mathbb{N}$;

(г) ниједно од претходних тврђења није тачно.

7. За које вредности реалног параметра λ систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ \lambda x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

није сагласан?

8. За које је вредности реалног параметра k хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + y + kz &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ kx - y - z &= 0 \end{aligned}$$

сагласан?

9. За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ могуће је одредити:

(а) карактеристични полином; **(б)** минимални полином;
(в) сопствене векторе; **(г)** ранг;
(д) ништа од наведеног.

10. Одредити сопствене вредности матрице

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Одредити минимални полином матрице

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Од вектора $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-2, 2, 0)$ и $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$ векторског простора $\mathbb{R}^3$ формирати најбројнији скуп линеарно независних вектора.

13. Ако су $\vec{u} = \vec{m} + 2\,\vec{n}$ и $\vec{v} = 5\,\vec{m} - 4\,\vec{n}$ ортогонални вектори векторског простора $\mathbb{R}^2$, одредити угао који образују јединични вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

14. Заокружити слова испред једначина правих у простору $\mathbb{R}^3$ које припадају равни Oxy и које садрже координатни почетак:

(а) $y = 3x$; **(б)** $x = y = z$;
(в) $x = 2y$; **(г)** $x = y,\ z = 0$;
(д) $x = t,\ y = 3t,\ z = 0$; **(ђ)** $x + y = z$;
(е) ниједан од претходних одговора није тачан.

15. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $A + By + Cz = 0$ је једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$ која је паралелна са z-осом, за свако $A, B \in \mathbb{R}$ и $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(б) $Ax + By + Cz = 0$ је једначина равни у простору $\mathbb{R}^3$ која садржи координатни почетак, за свако $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$;

(в) раван $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ у простору $\mathbb{R}^3$ сече координатне осе Ox, Oy и Oz редом у тачкама $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ и $C(0, 0, c)$, за $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(г) ниједно од претходних тврђења није тачно.

– Решења –

1. Дати ред је дивергентан, јер му општи члан не тежи 0 када n тежи $+\infty$.

♣ Погледати пети задатак са теста 08. 06. 2013.

2. Важи да је $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+3)^{\alpha+2}}=\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+2}}$. Ред $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha+2}}$ конвергентан је за $\alpha+2>1$, тј. $\alpha>-1$.

3. Полупречник конвергенције реда $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ јесте $R=3$. Тачан одговор је **(б)**.

♣ За детаље погледати шести задатак са теста 08. 02. 2009.

4. Ранг матрице A једнак је 2 за свако $a\in\mathbb{R}$.

♣ Задатак је исти као осми задатак са теста 18. 01. 2015.

5. Ранг матрице једнак је реду њене највеће регуларне подматрице. Како су сви елементи друге колоне матрице B једнаки нули, ранг матрице B зависи од вредности детерминанте $\begin{vmatrix} b^2 & 1 & 0\\ 1 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$. Дата детерминанта једнака је b^4-1 и различита је од нуле за $b\neq\pm1$. Према томе, ранг матрице B једнак је 3 за $b\neq\pm1$. За $b=\pm1$ одговарајући елементи прве и друге врсте матрице B једнаки су и нису пропорционални одговарајућим елементима треће, па је у овом случају ранг матрице B једнак 2.

♢ У тексту задатка наведено је да је параметар b реалан број. Према томе, реална решења једначине $b^4-1=0$ јесу $b=\pm1$. Да је параметар b био комплексан број, дата једначина би имала још два решења $b=\pm i$. И за $b=\pm i$ ранг матрице B био би једнак 2, док би у осталим случајевима ($b\neq\pm1$ и $b\neq\pm i$) ранг матрице B био 3.

6. Тачни одговори су **(а)** и **(в)**. У питању су стандардне теореме које се односе на ранг матрица. Продискутујмо детаљније пример **(б)**. Покажимо да постоје матрице A и B такве да $\operatorname{rang}(A\cdot B)\neq\operatorname{rang}(B\cdot A)$ Нека је $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$. Важи да је $A\cdot B=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ и $B\cdot A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}$. Имамо да је $\operatorname{rang}(A\cdot B)=0$, док је $\operatorname{rang}(B\cdot A)=1$.

7. Дати систем није сагласан за $\lambda=10$.

♣ Задатак је исти као девети задатак са теста 07. 09. 2013.

8. Хомоген систем је увек сагласан. Тачан одговор је $k\in\mathbb{R}$.

♣ Погледати осми задатак са теста 10. 02. 2013.

9. Тачан одговор је **(г)**.

♣ Погледати девети задатак са теста 03. 02. 2007.

10. Карактеристични полином матрице C једнак је

$$\varphi_C(\lambda)=\det(C-\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 0 & 1-\lambda & 5\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Сопствене вредности матрице C јесу нуле карактеристичног полинома $\varphi_C(\lambda)$. Према томе, сопствене вредности су $\lambda_1=\lambda_2=1$ и $\lambda_3=2$.

11.

Карактеристични полином реалне квадратне матрице M реда n јесте полином $\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathrm{I})$. Минимални полином $\mu_M(\lambda)$ матрице M јесте монични полином најмањег степена који анулира матрицу, односно то је монични полином најмањег степена за који важи $\mu_M(M) = \mathbf{0}$. Минимални полином матрице M дели карактеристични полином. Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, различите нуле карактеристичног полинома. Тада су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \leq k \leq n$, такође нуле истог или мањег реда минималног полинома.

Карактеристични полином матрице D једнак је $\varphi_D(\lambda) = \det(D - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$. Нуле карактеристичног полинома јесу $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$, различити бројеви. Како минимални полином има исте нуле као и карактеристични, истог или мањег реда, $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$ јесу једине нуле минималног полинома. Минимални полином матрице D једнак је карактеристичном и важи да је $\mu_D(\lambda) = \lambda^2 - 4$.

12.

Два вектора $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)$ различита од нула-вектора векторског простора $\mathbb{R}^3$ јесу линеарно зависна ако постоји константа $t \in \mathbb{R}$ таква да важи $\vec{v}_2 = t\,\vec{v}_1$, тј. ако постоји $t \in \mathbb{R}$ за које је $y_1 = t\,x_1$, $y_2 = t\,x_2$ и $y_3 = t\,x_3$. За $x_i \neq 0$, $i \in \{1,2,3\}$, линеарна зависност вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ може се записати $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2} = \dfrac{y_3}{x_3}$. Имамо да је $y_i = 0$ ако и само ако је $x_i = 0$ за $i \in \{1,2,3\}$. Према томе, два вектора различита од нула-вектора јесу линеарно зависна ако и само ако су им одговарајуће координате пропорционалне, у супротном су линеарно независна.

Вектори $\vec{v}_1 = (-1,1,0)$ и $\vec{v}_2 = (-2,2,0)$ јесу линеарно зависни, пошто је $\vec{v}_2 = 2\,\vec{v}_1$. С друге стране, како одговарајуће координате вектора $\vec{v}_1 = (-1,1,0)$ и $\vec{v}_3 = (1,0,1)$ нису пропорционалне, вектори $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_3$ јесу линеарно независни. Најбројнији скупови линеарно независних вектора јесу $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ и $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

13. Вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ образују угао $\varphi = \measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Погледати девети задатак са теста 23. 08. 2014.

14. Једначине $y = 3x$, $x = 2y$ и $x + y = z$ представљају равни у простору $\mathbb{R}^3$. За вектор $\vec{u}_p = (a,b,c)$ праве p која припада равни Oxy важи да је нормалан на вектор $\vec{k} = (0,0,1)$, односно важи да је $\vec{u}_p \cdot \vec{k} = (a,b,c) \cdot (0,0,1) = c = 0$. Вектор праве $x = y = z$ јесте $(1,1,1)$, који не задовољава наведени услов. Вектор права дате једначинама $x = y$, $z = 0$ јесте $(1,1,0)$, који задовољава наведи услов. Тачка $(0,0,0)$ задовољава једначине $x = y$, $z = 0$, па је према томе $x = y$, $z = 0$ једначина праве која припада равни Oxy и садржи координатни почетак. На крају, размотримо праву дату једначинама $x = t$, $y = 3t$, $z = 0$. Вектор дате праве јесте $(1,3,0)$. Заменом $t = 0$ у претходне једначине добијамо координатни почетак. Закључујемо да и ова права задовољава задате услове.

Тачни одговори су **(г)** и **(д)**.

15.

(а) Раван $Ax + By + Cz + D = 0$ паралелна је са z-осом ако и само ако је вектор равни (A,B,C) нормалан на вектор $\vec{k} = (0,0,1)$. Дати вектори су нормални ако и само ако је $(A,B,C) \cdot (0,0,1) = C = 0$. Једначине равни које су паралелне са z-осом имају коефицијент уз променљиву z једнак 0. Раван $A + By + Cz = 0$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, није одговарајућег облика.

(б) Како координате координатног почетка $x = y = z = 0$ задовољавају једначину равни $Ax + By + Cz = 0$, за произвољно $A, B, C \in \mathbb{R}$, закључујемо да је одговор тачан.

(в) Одговор је тачан.

Тачни одговори су **(б)** и **(в)**.

– Практикум из Математике –

– Први тест – 07. 05. 2016.

1. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}.$$

2. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \, \cos x}\, \mathrm{d}x.$$

3. Одредити неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)\sqrt{b-x}},$$

$a, b \in \mathbb{R}$ и $a > b$.

4. Одредити неодређени интеграл

$$\int \sqrt{c^2 - x^2}\, \mathrm{d}x,$$

$c \in \mathbb{R}$ и $c > 0$.

5. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} |x| \, \sin x \, \mathrm{d}x.$$

6. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\, \mathrm{d}x.$$

7. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају крива $y = \ln x$ и праве $x = e$ и $y = 0$.

8. Израчунати несвојствени интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

9. Одредити опште решење диференцијалне једначине $x\,\mathrm{d}x + (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$, а затим ону интегралну криву која пролази кроз тачку $(0,0)$.

10. Одредити партикуларно решење диференцијалне једначине $y' = \dfrac{1}{3\,x}$ за које важи $y(1) = 5$.

11. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y''' - 5\,y'' + 8\,y' - 4\,y = 0$.

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4\,y = 8$.

13. Природних бројева мањих од 100 у којима се не појављује цифра 5 има:

(а) 80; **(б)** 81; **(в)** 72; **(г)** 90;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

14. Колико симетричних бинарних релација постоји на скупу X, ако је $|X| = 16$?

15. Нека су p и q произвољна исказна слова. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $\overline{p} \vee p$;

(б) $p \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$;

(в) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$;

(г) $p \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$;

(д) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;

(ђ) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

– Решења –

1. Важи да је $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) + C.$

♣ За детаље погледати други задатак са теста 13. 02. 2011.

2. I начин
Коришћењем тригонометријских идентитета за двоструки угао $\sin(2\,x) = 2\,\sin x\,\cos x$ и $\cos(2\,x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ добијамо $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\cos(2\,x)}{\sin(2\,x)}\,\mathrm{d}x$. Овај интеграл решавамо увођењем смене $t = \sin(2\,x)$. Имамо $\displaystyle 2\int \frac{\cos(2\,x)}{\sin(2\,x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin(2\,x)| + C$.

♣ Могли смо да решимо дати задатак и директно увођењем смене $t = \sin x\,\cos x$. У овом случају је $\mathrm{d}t = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x$. И одмах добијамо $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C =$ $\ln|\sin x\,\cos x| + C$.

II начин
Решимо сада овај задатак коришћењем смена $t = \sin x$ или $t = \cos x$. Трансформацијом подинтегралне функције коришћењем основног тригонометријског идентитета $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и увођењем смене $t = \sin x$ добијамо

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1 - 2\,\sin^2 x}{\sin x\,(1-\sin^2 x)}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-2\,t^2}{t\,(1-t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1-t^2}{t\,(1-t^2)}\,\mathrm{d}t - \int \frac{t^2}{t\,(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{-2\,t\,\mathrm{d}t}{(1-t^2)} \\
&= \ln|t| + \frac{1}{2}\ln|1-t^2| + C = \ln|t\,\sqrt{1-t^2}| + C \\
&= \ln|\sin x\,\cos x| + C.
\end{aligned}$$

♣ Уколико уведемо смену $t = \cos x$, рачун остаје непромењен.
Решимо задатак на још један начин користећи поменуте смене

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{cc} t = \sin x & u = \cos x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x \end{array} \right\} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|t| + \ln|u| + C = \ln|\sin x\,\cos x| + C
\end{aligned}$$

III начин
Овај задатак се може решити и користећи смену $t = \mathrm{tg}\,x$. Подсетимо се да је $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$.
Имамо

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x(1-\mathrm{tg}^2\,x)}{\mathrm{tg}\,x\,\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{c} t = \mathrm{tg}\,x \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{1-t^2}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1+t^2}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t - 2\int \frac{t^2}{t\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int \frac{2\,t}{(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| - \ln|1+t^2| + C = \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x}\right| + C = \ln|\sin x\,\cos x| + C.
\end{aligned}$$

IV начин

Смена $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ може се применити када год је у питању интеграција рационалних функција по аргументима $\sin x$ и $\cos x$. Полазни интеграл се своди на рационалну функцију по променљивој t, што је последица чињенице да се $\sin x$, $\cos x$ и $\mathrm{d}x$ могу представити као рационалне функције по аргументу t, прецизније $\sin x = \dfrac{2\,t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Заменом одговарајућих израза у полазни интеграл добијамо $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-t^2)^2 - 4\,t^2}{t\,(1-t^2)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t^4 - 6\,t^2 + 1}{t\,(t-1)\,(t+1)\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Како је степен полинома у бројиоцу подинтегралне функције мањи од степена полинома у имениоцу и како ови полиноми немају заједничких нула, у питању је интеграл праве несводљиве рационалне функције. Разложимо дату рационалну функцију на збир парцијалних разломака. Имамо да је $\dfrac{t^4-6\,t^2+1}{t\,(t-1)\,(t+1)\,(1+t^2)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t+1} + \dfrac{D\,t+E}{1+t^2}$. Нађимо коефицијенте A, B, C, D и E из претходне једнакости. Множењем са $t\,(t-1)\,(t+1)\,(1+t^2)$ добијамо да је $t^4 - 6\,t^2 + 1 = A\,(t^4-1) + B\,(t^4+t^3+t^2+t) + C\,(t^4-t^3+t^2-t) + D\,(t^4-t^2) + E\,(t^3-t) = (A+B+C+D)\,t^4 + (B-C+E)\,t^3 + (B+C-D)\,t^2 + (B-C-E)\,t - A$. Упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене добијамо систем једначина

$$\begin{array}{rcr} A+B+C+D &=& 1\\ B-C+E &=& 0\\ B+C-D &=& -6\\ B-C-E &=& 0\\ -A &=& 1, \end{array}$$

чије је решење $A=-1$, $B=C=-1$, $D=4$ и $E=0$. Према томе, важи да је

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\,\cos x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t^4-6\,t^2+1}{t\,(t-1)\,(t+1)\,(1+t^2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - 2\int \frac{2\,t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= \ln|t| + \ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\,\ln(1+t^2) + \widetilde{C} = \ln\left|\frac{2\,t}{1+t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right| - \ln 2 + \widetilde{C}\\ &= \ln|\sin x\,\cos x| + C. \end{aligned}$$

3. Задатак решавамо увођењем смене $t = \sqrt{b-x}$. Имамо да је $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{b-x}}$, $x = b - t^2$ и пошто је $a > b$, важи да је

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)\sqrt{b-x}} &= -2\int \frac{\mathrm{d}t}{(a-b)+t^2} = -\frac{2}{a-b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{a-b}}\right)^2}\\ &= -\frac{2}{\sqrt{a-b}}\,\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{a-b}} + C = -\frac{2}{\sqrt{a-b}}\,\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b-x}{a-b}} + C. \end{aligned}$$

4. I начин

Урадимо овај задатак прво применом методе парцијалне интеграције. Имамо да је

$$\begin{aligned} \int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ll} u = \sqrt{c^2-x^2} & \mathrm{d}u = \dfrac{-x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{c^2-x^2}}\\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{array}\right\} = x\sqrt{c^2-x^2} - \int\frac{-x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{c^2-x^2}}\\ &= x\sqrt{c^2-x^2} - \int\frac{-c^2+c^2-x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{c^2-x^2} + c^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{c^2-x^2}} - \int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{c^2-x^2} + c^2\int\frac{\mathrm{d}x}{c\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}} - \int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{c^2-x^2} + c^2\arcsin\frac{x}{c} - \int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Одатле закључујемо да је $\int \sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{c^2-x^2} + \frac{c^2}{2}\arcsin\frac{x}{c} + C$.

II начин
Решимо сада задатак коришћењем смене $x = c\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Имамо да је $\mathrm{d}x = c\cos t\,\mathrm{d}t$ и $\int \sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{c^2-c^2\sin^2 t}\; c\cos t\,\mathrm{d}t$. Како t припада сегменту $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, закључујемо да је $\sqrt{c^2-c^2\sin^2 t} = c\sqrt{1-\sin^2 t} = c\sqrt{\cos^2 t} = c|\cos t| = c\cos t$, одакле следи да је $\int \sqrt{c^2-c^2\sin^2 t}\; c\cos t\,\mathrm{d}t = c^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = c^2\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = c^2\frac{t}{2} + c^2\frac{\sin(2t)}{4} + C$. Функција $x = c\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, има инверзну функцију $t = \arcsin\frac{x}{c}$ и важи да је $\sin(2t) = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{c}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{c}\right)} = 2\frac{x}{c}\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2} = \frac{2}{c^2}x\sqrt{c^2-x^2}$. Враћањем смене добијамо да је $\int \sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{c^2}{2}\arcsin\frac{x}{c} + \frac{x}{2}\sqrt{c^2-x^2} + C$.

5. У питању је интеграл непрекидне и непарне функције $f(x) = |x|\sin x$ на интервалу $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, који је симетричан у односу на координатни почетак. Према томе, важи да је $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} |x|\sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

6. Пре него што се упустимо у рачун, подсетимо се услова за увођење смене у одређеном интегралу. У одређеном интегралу $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ можемо увести смену $t = \varphi(x)$ уколико су испуњени следећи услови:

- φ је строго монотона функција на сегменту $[a, b]$;
- $\psi = \varphi^{-1}$ има непрекидан први извод на интервалу $(\varphi(a), \varphi(b))$;
- f је непрекидна функција на сегменту $[\varphi(a), \varphi(b)]$;

и тада важи да је $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Интеграл $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x$ решавамо увођењем смене $t = \varphi(x) = x^2+9$. Функција φ је строго монотоно растућа функција на сегменту $[0, 4]$. Функција ψ за коју важи $\psi(t) = \varphi^{-1}(t) = \sqrt{t-9}$ има непрекидан први извод $\psi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-9}}$ на интервалу $(9, 25)$. Функција $f(t) = \sqrt{t}$ јесте непрекидна на сегменту $[9, 25]$. Како су испуњени услови за примену смене $t = \varphi(x) = x^2+9$, $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$, добијамо да је $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right|_9^{25} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{25^3}-\sqrt{9^3}\right) = \frac{125-27}{3} = \frac{98}{3}$.

7. Величина површине дела равни који ограничавају крива $y = \ln x$ и праве $x = e$ и $y = 0$ једнака је $P = \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x = 1$.

♣ За детаље погледати трећи задатак са теста 13. 02. 2011.

8. Важи да је $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}\right) + e^0 = 0+1 = 1$.

9. Задатак је исти као трећи задатак са теста 08. 02. 2009. Тражена интегрална крива је кружница $x^2+(y+1)^2 = 1$.

10. Диференцијална једначина $y' = \dfrac{1}{3\,x}$ своди се на диференцијалну једначину која раздваја променљиве $\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{3\,x}$. Опште решење дате једначине на интервалу $(0, +\infty)$ јесте $\displaystyle\int \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}x}{3\,x}$, односно $y = \dfrac{\ln x}{3} + C$. Партикуларно решење полазне једначине за које важи $y(1) = 5$ добијамо када у општем решењу заменимо $x = 1$ и $y = 5$ и тако одредимо константу C. У овом случају добијамо $C = 5$. Према томе, тражено партикуларно решење јесте $y = \dfrac{\ln x}{3} + 5$.

11. Једначина $y''' - 5\,y'' + 8\,y' - 4\,y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина трећег реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^3 - 5\,\lambda^2 + 8\,\lambda - 4 = 0$. Користећи теорему о рационалним нулама полинома, закључујемо да уколико полином $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\,\lambda^2 + 8\,\lambda - 4$ има рационалних нула, оне припадају скупу $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Једноставном провером закључујемо да је $\lambda_1 = 1$ једна нула полинома $P(\lambda)$. Применом Хорнерове шеме

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

добијамо да је количник при дељењу полинома $P(\lambda)$ биномом $\lambda - 1$ полином $Q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_{2,3} = 2$. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2\,x}$ и $y_3 = x\,e^{2\,x}$. Опште решење полазне једначине њихова је линеарна комбинација, тј. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2\,x} + C_3 x\,e^{2\,x}$.

♣ За детаљан преглед теорије хомогених линеарних диференцијалних једначина вишег реда са константним коефицијентима погледати трећи задатак са теста 13. 10. 2007.

12. Нека је y_h опште решење хомогене диференцијалне једначине $y'' - 4\,y = 0$ и нека је y_p неко партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y'' - 4\,y = 8$. Тада је опште решење дате нехомогене једначине дато са $y = y_h + y_p$. Једначина $y'' - 4\,y = 0$ јесте хомогена линеарна диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Одговарајућа карактеристична једначина јесте $\lambda^2 - 4 = 0$. Корени карактеристичне једначине јесу $\lambda_{1,2} = \pm 2$, реални и различити. Одговарајућа партикуларна линеарно независна решења хомогене диференцијалне једначине јесу $y_1 = e^{2\,x}$ и $y_2 = e^{-2\,x}$, док је опште решење њихова линеарна комбинација, тј. $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x}$. Партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине можемо одредити методом неодређених коефицијената или методом варијације констаната.

Метода неодређених коефицијената може се применити када је слободан члан нехомогене диференцијалне једначине облика $F(x) = e^{\alpha\,x}\,(P_1(x)\,\cos(\beta\,x) + P_2(x)\,\sin(\beta\,x))$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ полиноми по променљивој x редом степена $\deg P_1(x)$ и $\deg P_2(x)$. У конкретном случају имамо да је $F(x) = 8$, што можемо добити из општег облика за $\alpha = \beta = 0$, $P_1(x) = 8$ и нпр. $P_2(x) = 0$. Како $\alpha + i\,\beta = 0$ није корен карактеристичне једначине, имамо да је партикуларно решење облика $y_p = e^{\alpha\,x}\,(Q_1(x)\,\cos(\beta\,x) + Q_2(x)\,\sin(\beta\,x))$, где су $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ полиноми чији су степени једнаки $\max\{\deg P_1(x), \deg P_2(x)\}$, тј. $y_p = A$. Заменом партикуларног решења у полазну једначину добијамо да је $0 - 4\,A = 8$, односно да је $A = -2$. Једно партикуларно решење дате нехомогене једначине јесте $y_p = -2$, а њено опште решење је $y = y_h + y_p = C_1 e^{2\,x} + C_2 e^{-2\,x} - 2$.

♢ Ако се одлучимо за методу варијације констаната, имамо да је опште решење нехомогене диференцијалне једначине облика $y = \widehat{C}_1(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2\,x}$, где су $\widehat{C}_1$ и $\widehat{C}_2$ функције чије изводе налазимо решавањем система

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1'(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2'(x)\,e^{-2\,x} &= 0 \\ 2\,\widehat{C}_1'(x)\,e^{2\,x} - 2\,\widehat{C}_2'(x)\,e^{-2\,x} &= 8. \end{aligned}$$

Дељењем друге једначине са 2 и додавањем првој једначини добијамо $\widehat{C}_1'(x) = 2\,e^{-2\,x}$, и последично $\widehat{C}_2'(x) = -2\,e^{2\,x}$. Имамо да је $\widehat{C}_1(x) = \int 2\,e^{-2\,x}\,\mathrm{d}x = -e^{-2\,x} + C_1$ и $\widehat{C}_2(x) = \int -2\,e^{2\,x}\,\mathrm{d}x = -e^{2\,x} + C_2$, и да је опште решење нехомогене диференцијалне једначине

$$y = \widehat{C}_1(x)\,e^{2\,x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2\,x} = \left(-e^{-2\,x} + C_1\right)\,e^{2\,x} + \left(-e^{2\,x} + C_2\right)\,e^{-2\,x} = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{-2\,x} - 2.$$

С друге стране, могли смо да изаберемо конкретне примитивне функције $\widehat{C}_1(x) = -e^{-2x}$ и $\widehat{C}_2(x) = -e^{2x}$ и да добијемо партикуларно решење нехомогене диференцијалне једначине $y_p = \widehat{C}_1(x)\,e^{2x} + \widehat{C}_2(x)\,e^{-2x} = -e^{-2x}\,e^{2x} - e^{2x}\,e^{-2x} = -2$, које додајемо општем решењу хомогене једначине $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ и на тај начин добијемо опште решење полазне диференцијалне једначине $y = y_h + y_p = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2$.

13. У питању је број варијација са понављањем друге класе од 9 елемената од кога се одузима 1. Прецизније, имамо две позиције (једну за цифру десетица, другу за цифру јединица)

$$\_\_\,\_\_ = \_\_ \cdot 10 + \_\_$$

на које можемо уписати било који број од 0 до 9 изузев броја 5 (ако је на позицији десетица изабран број нула, у питању је једноцифрен број). Према томе, имамо $9^2 = 81$ могућности. Ако смо на обе позиције и за десетицу и за јединицу изабрали цифру 0, добили смо број 0 који није природан број. Према томе, тражених бројева има $81 - 1 = 80$.

Тачан одговор је **(а)**.

$\diamondsuit$ Једноцифрених природних бројева различитих од 5 има 8. Двоцифрених природних бројева код којих се не појављује цифра 5 има 72. Заиста, цифру десетица можемо изабрати на 8 начина, док цифру јединица можемо изабрати на 9 начина (цифра јединица може бити и 0). Према принципу производа закључујемо да двоцифрених природних бројева код којих се не појављује цифра 5 има $8 \cdot 9 = 72$. Како тражени број може бити само једноцифрен или двоцифрен, према принципу збира закључујемо да тражених бројева има $8 + 72 = 80$.

$\diamondsuit$ Бројева мањих од 100 у којима се појављује цифра 5 има 19. Заиста, уколико је прва цифра 5, друга цифра може да буде било који број од 0 до 9, и таквих бројева има 10. Уколико је друга цифра 5, прва може бити било који број од 0 до 9 и, опет, таквих бројева има 10. Број 55 смо два пута рачунали, па зато бројева мањих од 100 у којима се појављује цифра 5 има $2 \cdot 10 - 1 = 19$. Од броја свих природних бројева мањих од 100, који је једнак 99, одузимамо број природних бројева мањих од 100 у којима се појављује цифра 5, који је једнак 19, и добијамо број природних бројева мањих од 100 у којима се не појављује цифра 5, а који је једнак $99 - 19 = 80$.

14. Бинарна релација ρ у скупу X јесте подскуп скупа X^2. Бинарну релацију ρ можемо дефинисати и као пресликавање скупа X^2 у скуп $\{0, 1\}$. Наведене две дефиниције јесу еквивалентне. Елементи x и y јесу у релацији ρ, што пишемо $x\rho y$, ако и само ако је $(x, y) \in \rho \subseteq X^2$, или ако и само ако је $\rho(x, y) = 1$. Бинарна релација у скупу X јесте симетрична ако и само ако $(\forall x, y \in X)\, x\rho y \Rightarrow y\rho x$, тј. ако и само ако $(\forall x, y \in X)\,(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$ или ако и само ако $(\forall x, y \in X)\, \rho(x, y) = 1 \Rightarrow \rho(y, x) = 1$. Представимо произвољну бинарну релацију $\rho : X^2 \to \{0, 1\}$ помоћу таблице

$$\begin{array}{c|cccc}
\rho & x_1 & x_2 & \ldots & x_{16} \\ \hline
x_1 & & & & \\
x_2 & & & & \\
\vdots & & & & \\
x_{16} & & & &
\end{array}\;.$$

Таблицу можемо попунити на 2^{16^2} начина, јер на сваку позицију, којих има 16^2, можемо уписати 0 или 1, и то је број свих бинарних релација у скупу X. За симетричну релацију ρ важи да ако се на позицији (i, j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 16\}$ налази 1, онда се и на позицији (j, i) налази 1. Према томе, код симетричних бинарних релација представљених таблицом, елементи на главној дијагонали могу бити 0 или 1, док избор елемената изнад главне дијагонале условљава избор елемената испод главне дијагонале. Изнад главне дијагонале имамо $\frac{1}{2}\left(16^2 - 16\right) = 120$ позиција на које можемо уписати 0 или 1. Број симетричних бинарних релација на скупу X који има 16 елемената јесте $2^{16}\,2^{120} = 2^{136}$.

15. У овом задатку за испитивање које су од понуђених исказних формула таутологије користићемо методу дискусије по слову. Подсетимо се, импликација има вредност 1 ако претпоставка има вредност 0 или ако последица има вредност 1. Импликација има вредност 0 ако претпоставка има вредност 1, а последица има вредност 0.

(а) Исказна формула $\overline{p} \vee p$ јесте таутологија.

(б) За $p = 0$ исказна формула $p \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$ има вредност 1. За $p = 1$ исказна формула $p \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow q)$ има вредност 1, јер импликација $\overline{p} \Rightarrow q$ има вредност 1, пошто претпоставка дате импликације $\overline{p}$ има вредност 0.

(в) За $p = 0$ и $q = 1$ импликација $p \Rightarrow q$ има вредност 1, док импликација $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ има вредност 0, па исказна формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\overline{p} \Rightarrow \overline{q})$ није таутологија.

(г) За $p = 1$ и $q = 0$ импликација $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ има вредност 0, па исказна формула $p \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ није таутологија.

(д) За $p = 0$ исказна формула $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ има вредност 1. За $p = 1$ исказна формула $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ има вредност 1, јер последица импликације $q \Rightarrow p$ има вредност 1, па и сама импликација има вредност 1.

Тачни одговори су **(а)**, **(б)** и **(д)**.

– Практикум из Математике –

– Други тест – 31. 05. 2016.

1. Колико има варијација без понављања класе 3 скупа од 7 елемената?

2. Колико има елемената скуп чији је број двочланих подскупова једнак 28?

3. Заокружити слова испред исказних формула које су таутологије:

(а) $p \vee q$; **(б)** $p \vee \overline{p}$; **(в)** $p \wedge \overline{p}$; **(г)** $p \wedge q$;

(д) ниједна од претходних исказних формула није таутологија.

4. Булову функцију $f(p,q) = q \wedge (q \wedge p)$ написати у облику СДНФ.

5. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}}$?

6. Израчунати: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$.

7. Одредити област конвергенције степеног реда: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{5^{n^2}} x^n$.

8. Одредити ранг матрице $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ у зависности од вредности реалног параметра a.

9. За које је вредности реалног параметра a хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x + y + az &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ ax - y - z &= 0 \end{aligned}$$

сагласан?

10. За матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ могуће је одредити:

(а) карактеристични полином; **(б)** минимални полином; **(в)** сопствене векторе; **(г)** ранг; **(д)** ништа од наведеног.

11. Одредити минимални полином матрице

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Производ сопствених вредности матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) $a^2 - a$; **(б)** $a - 6$; **(в)** 0; **(г)** 4; **(д)** -6;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

13. Дати су вектори $\vec{a} = (1, 1, 2)$ и $\vec{b} = (2, 2, 4)$. Израчунати $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \cdot a$.

14. Нека је α раван чија је једначина $x + y = 3$. Написати:

(а) један вектор нормале равни α;

(б) координате једне тачке која припада равни α.

15. Заокружити слова испред једначина правих у $\mathbb{R}^3$ које припадају xy-равни и садрже координатни почетак:

(а) $y = 3x$;

(б) $x = y = z$;

(в) $x = t, y = 3t, z = 0,\ t \in \mathbb{R}\ x = 2y$;

(г) $x = 5y$;

(д) $x = y,\ z = 0$;

(ђ) $x + y = z$;

(е) ниједна од претходних једначина не представља праву која припада xy-равни и садржи координатни почетак.

– Резултати –

1. Број варијација без понављања класе k скупа од n елемената, $k \leq n$, једнак је $V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$. Дакле, варијација без понављања класе 3 скупа од 7 елемената има $V_3^7 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$.

2. Број комбинација k-те класе, $k \leq n$, скупа X који има n елемената (односно број k-точланих подскупова, $k \leq n$, скупа који има n елемената) једнак је $C_{n,k} = \binom{n}{k}$. Дакле, ако је број двочланих подскупова скупа са n елемената једнак 28, важи $28 = C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, па је, будући да је n природан број, $n = 8$.

3. Тачан је само одговор **(б)**.

♣ За детаље погледати пети задатак са теста 24. 08. 2013.

4. $p \wedge q$.

♣ Задатак је врло сличан петом задатку са теста 13. 09. 2014.

5. Ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}}$ конвергентан је за $\alpha + 4 > 1$, тј. $\alpha > -3$.

6. За $q \in (-1,1)$ важи $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Дакле, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$.

♣ Упоредити са четвртим задатком са теста 02. 10. 2010. и са седмим задатком са теста 05. 07. 2014.

7. Дати ред апсолутно конвергира за свако x из интервала $(-\infty, +\infty)$, односно област његове конвергенције јесте $\mathbb{R}$.

♣ Задатак је веома сличан седмом задатаку са теста 18. 01. 2015.

8. Ранг матрице A једнак је 1 уколико је $a = 1$ или $a = -1$, а ако је $a \neq \pm 1$, ранг матрице A једнак је 2.

9. Хомоген систем је увек сагласан. Тачан одговор је $a \in \mathbb{R}$.

♣ Погледати осми задатак са теста 10. 02. 2013.

10. Тачан је одговор **(г)**.

♣ Задатак је потпуно исти као и девети задатак на другом тесту из Практикума из Математике 2, који је одржан 28. 05. 2015. године.

11. Минимални полином матрице D једнак је $\mu_D(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

♣ Упоредити са деветим задатком са теста 29. 06. 2013. и са деветим задатком са теста 13. 09. 2014.

12. Тачан је одговор **(д)**.

♣ Задатак је потпуно исти као и девети задатак са теста 18. 01. 2015. године.

13. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, јер су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 12$.

♣ Погледати десети задатак са теста 10. 02. 2013. године.

14. За дату раван α чија је једначина $x + y = 3$, вектор нормале биће сваки вектор облика $t \cdot (1, 1, 0)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па је под **(а)** тачан сваки одговор $\vec{n} = (t, t, 0)$, где је $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Координате тражене тачке T, (X, Y, Z), морају задовољавати следеће услове: $X \in \mathbb{R}$, $X + Y = 3$, па је под **(б)** тачан сваки одговор $(X, 3 - X, Z)$, где су X и Z произвољно изабрани реални бројеви.

♣ Задатак је врло сличан десетом задатаку са теста 13. 09. 2014.

15. Тачни су одговори **(в)** и **(д)**.

♣ Задатак је потпуно исти као и десети задатак са теста 18. 01. 2015. године.

– Практикум из Математике –

– Први тест – 08. 04. 2017.

1. Заокружити слова испред интеграбилних функција на сегменту $[0,2]$:

(а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$

(б) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & 0\le x<1,\\ -\dfrac{1}{x}, & 1\le x\le 2;\end{cases}$

(в) ниједна од претходних функција није интеграбилна на сегменту $[0,2]$.

2. Одредити вредности реалног параметра m за које је интеграл $\displaystyle\int \frac{m\,x+1}{x^2\,(x+1)}\,\mathrm{d}x$ рационална функција.

3. Одредити неодређене интеграле:

(а) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}.$

4. Израчунати вредност одређеног интеграла

$$\int_{11\,\pi}^{13\,\pi}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

5. Израчунати величину површине дела равни који ограничавају крива $y=|x+1|$ и праве $x=-2$, $x=0$ и $y=-1$.

6. Израчунати величину запремине тела које настаје ротацијом праве $y=-x$ на сегменту $[0,1]$ око x-осе.

7. Заокружити слова испред конвергентних несвојствених интеграла:

(а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$;

(б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;

(в) ниједан од претходних несвојствених интеграла није конвергентан.

8. Интегрална крива диференцијалне једначине

$$(x-2)\,\mathrm{d}x + (y+2)\,\mathrm{d}y = 0$$

која пролази кроз тачку $(2,0)$ јесте:

(а) кружница са центром у тачки $(0,0)$ полупречника 4;
(б) кружница са центром у тачки $(2,-2)$ полупречника 2;
(в) кружница са центром у тачки $(-2,2)$ полупречника 4;
(г) кружница са центром у тачки $(2,0)$ полупречника 2;
(д) ниједна од претходно понуђених крива није интегрална крива дате диференцијалне једначине која пролази кроз тачку $(2,0)$.

9.

(а) Рикатијева диференцијална једначина јесте диференцијална једначина ________ реда.
(б) Навести пример Рикатијеве диференцијалне једначине.

10. Дата је диференцијална једначина

$$(x^2+1)y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0.$$

Ако је једно њено партикуларно решење $y_1(x) = 2\,x$, навести Лиувилову формулу за одређивање другог линеарно независног партикуларног решења y_2.

11. Одредити опште решење диференцијалне једначине из претходног задатка

$$(x^2+1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0.$$

12. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y'' = \alpha\,x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

13. Колико има:

(а) троцифрених природних бројева;

(б) троцифрених природних бројева код којих се цифре не понављају.

14. На колико начина можемо попунити таблицу

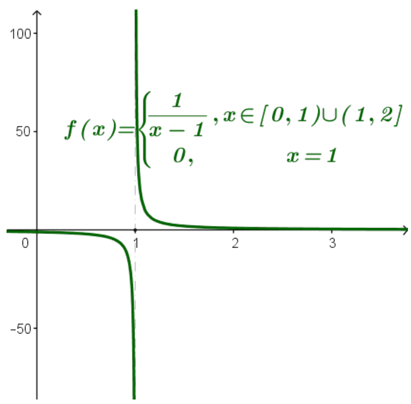
ρ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1				1
x_2		1		
x_3		0	1	
x_4				1

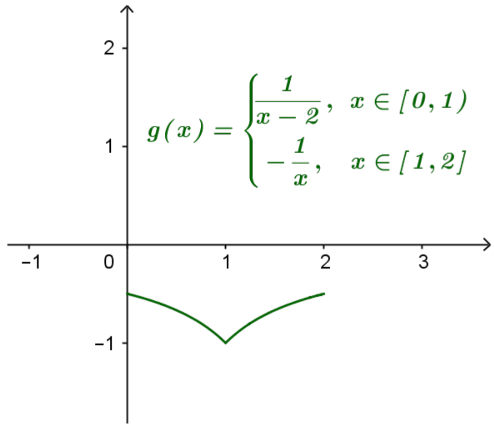
тако да бинарна релација ρ буде рефлексивна и симетрична у скупу $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

15. Колико има различитих пресликавања из скупа A у скуп B, ако скупови A и B имају редом m и n елемената?

– Решења –

1. Свака интеграбилна функција на сегменту $[a, b]$ ограничена је на датом сегменту. Према томе, функције које нису ограничене на интервалу интеграције, нису ни интеграбилне. Функција $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1; \end{cases}$ није ограничена у околини тачке $x = 1$, па самим тим није интеграбилна ни на једном сегменту који садржи ту тачку.





Свака непрекидна функција на сегменту $[a, b]$ интеграбилна је на датом сегменту. Елементарне функције $\dfrac{1}{x-2}$ и $-\dfrac{1}{x}$ непрекидне су тамо где су дефинисане, па су последично непрекидне на сегментима $[0, 1]$ и $[1, 2]$, редом. Проверимо шта се дешава у тачки $x = 1$; имамо да је $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-2} = -1$, $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to1^+} -\dfrac{1}{x} = -1$ и $g(1) = -1$. Како је леви лимес у тачки $x = 1$ једнак десном лимесу и једнак вредности функције у датој тачки, закључујемо да је функција g непрекидна у тачки $x = 1$. Функција $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & 0 \leq x < 1, \\ -\dfrac{1}{x}, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$ непрекидна је на сегменту $[0, 2]$, па је и интеграбилна на том сегменту.

Тачан одговор је **(б)**.

2. Разложимо подинтегралну рационалну функцију на збир парцијалних разломака. Имамо да је $\dfrac{m\,x+1}{x^2\,(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1}$. Множењем дате једнакости са $x^2\,(x+1)$ добијамо да је $m\,x + 1 = A\,x(x+1) + B\,(x+1) + C\,x^2$. Упоређивањем коефицијената уз одговарајуће степене имамо систем једначина

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B &= m \\ B &= 1. \end{aligned}$$

Како се у задатку тражи да интеграл $\displaystyle\int \frac{m\,x+1}{x^2\,(x+1)}\,\mathrm{d}x$ буде рационална функција и како интеграли $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C_1$ и $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln|x+1| + C_2$ нису рационалне функције, за коефицијенте A и C мора да важи $A = C = 0$. Приметимо да је интеграл $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_3$ рационална функција. Заменом вредности $A = C = 0$ у систем одмах добијамо да је $m = 1$.

3. Интеграл у примеру **(а)** решавамо методом парцијалне интеграције

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & \mathrm{d}u = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{array}\right\}$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C.$$

У току решавања интеграла у примеру **(а)** приметили смо да је извод функције $u(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ једнак $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Како су поступци диференцирања и интеграције инверзни један другом, директно решавамо интеграл у примеру **(б)**,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

4. Јасно је да се интеграл $\displaystyle\int_{11\pi}^{13\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$ може израчунати директно применом Њутн–Лајбницове формуле

$$\int_{11\pi}^{13\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \cos x\Big|_{11\pi}^{13\pi} = \cos(13\pi) - \cos(11\pi) = -1-(-1) = 0.$$

Ми ћемо решити дати задатак коришћењем теореме о интеграцији непрекидне, непарне и периодичне функције на сегменту који је дужине основног периода дате функције.

Нека је f непрекидна, непарна и периодична функција са основним периодом T дефинисана на скупу $\mathbb{R}$. Тада за свако $a\in\mathbb{R}$ важи $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Из адитивности интеграла, користећи смену $x = t+T$ и чињеницу да је функција f периодична са основним периодом T, тј. да је $(\forall t\in\mathbb{R})\, f(t+T) = f(t)$, добијамо

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+T \quad x=T\to t=0 \\ \mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t \quad x=a+T\to t=a \end{array}\right\} =$$

$$\int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^T f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

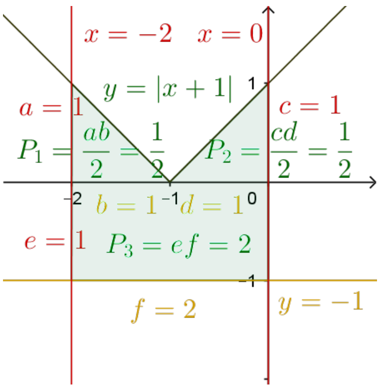
Како претходно извођење важи за свако $a\in\mathbb{R}$, специјално за $a = -\frac{T}{2}$, добијамо да је $\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$. Према томе, имамо да је $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Даље, из адитивности интеграла, користећи смену $x=-t$ и чињеницу да је функција непарна, тј. да је $(\forall t\in\mathbb{R})\, f(-t) = -f(t)$, добијамо

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t \quad x=-\frac{T}{2}\to t=\frac{T}{2} \\ \mathrm{d}x &=& -\mathrm{d}t \quad x=0\to t=0 \end{array}\right\} \\ &= -\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{T}{2}} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Применом доказане теореме одмах закључујемо да је интеграл $\displaystyle\int_{11\pi}^{13\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$ једнак 0, јер је функција $f(x) = \sin x$ непрекидна, непарна и периодична функција са основним периодом $T = 2\pi$ на скупу $\mathbb{R}$ и јер је $13\pi = 11\pi + 2\pi = 11\pi + T$.

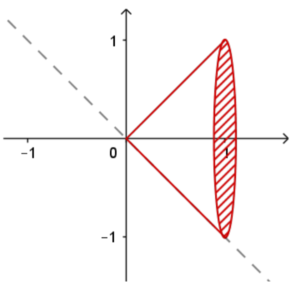
5. Величина површине дела равни који ограничавају крива $y = |x+1|$ и праве $x = -2$, $x = 0$ и $y = -1$ једнака је

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{0} (|x+1| - (-1))\, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (|x+1|+1)\, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x\, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (x+2)\, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{(x+2)^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} + 2 + 2 - \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$



♢ Имамо да је $P = P_1 + P_2 + P_3$, где је P_1 величина површине дела равни који ограничавају праве $y = -x-1$, $x = -2$ и $y = 0$, P_2 величина површине дела равни који ограничавају праве $y = x+1$, $x = 0$ и $y = 0$, а P_3 величина површине дела равни који ограничавају праве $y = 0$, $y = -1$, $x = -2$ и $x = 0$. У питању су два једнакокрака правоугла троугла чије су катете дужина 1, па је величина њихових површина једнака $P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$, и један правоугаоник чије су странице дужина 1 и 2, чија је величина површине једнака $P_3 = 2$. Према томе, $P = 2\cdot\frac{1}{2} + 2 = 3$.

6. Величина запремине ротационог тела добијеног ротацијом графика криве $y = f(x)$, $a \le x \le b$, око x-осе јесте $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x$.



У овом конкретном примеру дата је крива $y = -x$, $0 \le x \le 1$, а тражена запремина је $V = \pi \int_0^1 (-x)^2\, \mathrm{d}x = \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

♢ С друге стране, ротационо тело чију величину запремине тражимо јесте купа, чија је основица круг полупречника $r = 1$ и чија је висина једнака $H = 1$. Величина запремине дате купе јесте $V = \frac{B\,H}{3} = \frac{r^2\pi\,H}{3} = \frac{\pi}{3}$.

7. У примеру **(а)** у питању је несвојствени интеграл друге врсте, пошто подинтегрална функција $f(x) = \frac{1}{x-1}$ није ограничена у околини тачке $x = 1$. По дефиницији важи да је $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$. Како је $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} = \ln|\varepsilon|$, важи да је $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|\varepsilon| = -\infty$. Према томе, дати несвојствени интеграл није конвергентан.

У примеру **(б)** имамо несвојствени интеграл прве врсте, јер интервал конвергенције није ограничен. Како је $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, важи да је $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Дати интеграл конвергира.

Тачан одговор је **(б)**.

8. Једначина $(x-2)\,\mathrm{d}x + (y+2)\,\mathrm{d}y = 0$ је диференцијална једначина која раздваја променљиве. Њено опште решење је $\int (x-2)\,\mathrm{d}x + \int (y+2)\,\mathrm{d}y = C$, тј. $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{2} = C$. Партикуларно решење за које је $y(2) = 0$, тј. интегралну криву која пролази кроз тачку $(2, 0)$, добијамо када у општем решењу заменимо x и y редом са 2 и 0 и тако одредимо константу C. Према томе, одговарајућа интегрална крива је $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{2} = 2$, односно $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$, што је једначина кружнице са центром у тачки $(2, -2)$ полупречника 2.

Тачан одговор је **(б)**.

9. **(а)** Рикатијева диференцијална једначина јесте диференцијална једначина **првог** реда.

(б) Рикатијева диференцијална једначина јесте облика $y' = P(x)\,y^2 + Q(x)\,y + R(x)$, где су P, Q и R непрекидне функције на датом интервалу. Ако узмемо да је $P(x) = 1$, $Q(x) = -x$ и $R(x) = 1$, добијамо Рикатијеву диференцијалну једначину $y' = y^2 - x\,y + 1$. У општем случају Рикатијева једначина нема решење помоћу квадратура. Она се увек може решити ако је познато једно њено партикуларно решење y_1 и тада се опште решење тражи у облику $y = z_1 + \dfrac{1}{z}$, где је z непозната функција по промењљивој x.

10. Лиувилова формула: Ако је y_1 једно нетривијално партикуларно решење линеарне хомогене диференцијалне једначине другог реда $y'' + f_1(x)\,y' + f_2(x)\,y = 0$ (обратити пажњу да је коефицијент уз y'' константна функција $f_0(x) = 1$), онда је са $y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int f_1(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}$ дато још једно партикуларно решење дате једначине линеарно независно од y_1.

Поделимо диференцијалну једначину $(x^2+1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0$ са x^2+1 тако да добијемо једначину код које је коефицијент уз y'' једнак 1. Друго партикуларно решење y_2 линеарно независно од првог $y_1(x) = 2\,x$ добијамо применом Лиувилове формуле на диференцијалну једначину $y'' - \dfrac{2\,x}{x^2+1}\,y' + \dfrac{2}{x^2+1}\,y = 0$. Заиста имамо да је друго партикуларно решење

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int f_1(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} = 2\,x \int \frac{e^{\int \frac{2\,x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}}\mathrm{d}x}{4\,x^2} = \frac{x}{2}\int \frac{e^{\ln\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x}{x^2} \\ &= \frac{x}{2}\int \frac{x^2+1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x^2-1}{2}. \end{aligned}$$

11. Ако су y_1 и y_2 линеарно независна решења хомогене линеарне диференцијалне једначине другог реда, онда је њено опше решење дато са $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$.

Како су $y_1(x) = 2\,x$ и $y_2(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$ два линеарно независна решења диференцијалне једначине $(x^2+1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0$, закључујемо да је њено опште решење

$$y = \widetilde{C}_1\,y_1 + \widetilde{C}_2\,y_2 = 2\,\widetilde{C}_1\,x + \frac{\widetilde{C}_2}{2}\,\left(x^2-1\right) = C_1\,x + C_2\,\left(x^2-1\right).$$

12. Диференцијална једначина $y'' = \alpha\,x$ јесте непотпуна диференцијална једначина која се једноставно решава директном интеграцијом. Заиста имамо да је $y' = \alpha \displaystyle\int x\,\mathrm{d}x$, одакле добијамо нову непотпуну диференцијалну једначину $y' = \dfrac{\alpha}{2}\,x^2 + C_1$. Поновном интеграцијом добијамо опште решење полазне диференцијалне једначине $y = \displaystyle\int \left(\frac{\alpha}{2}\,x^2 + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{6}\,x^3 + C_1\,x + C_2$.

13. **(а)** Троцифрених природних бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

(б) Троцифрених природних бројева код којих се цифре не понављају има $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

14. Бинарна релација $\rho \subseteq X^2$ у скупу $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ је рефлексивна ако за свако x_i, $1 \le i \le 4$, важи $x_i \rho x_i$, тј. ако су сви елементи на главној дијагонали дате таблице једнаки 1. Бинарна релација ρ симетрична је ако за свако x_i и x_j, $1 \le i, j \le 4$, важи $x_i \rho x_j \Rightarrow x_j \rho x_i$, тј. ако је дата таблица симетрична у односу на главну дијагоналу. Да би дата бинарна релација била рефлексивна на позицији $(1,1)$ на главној дијагонали треба уписати 1, а да би била симетрична на позиције $(2,3)$ и $(4,1)$ на споредној дијагонали редом 0 и 1.

Остало је још осам позиција у таблици. Избор елемената изнад главне дијагонале условљава избор елемената испод ње. У квадратиће изнад главне дијагонале може бити уписана или 0 или 1. Како имамо четири квадратића, закључујемо да таблицу можемо попунити на $2^4 = 16$ начина.

ρ	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\boxed{1}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	1
x_2		1	$\boxed{0}$	$\boxed{}$
x_3		0	1	$\boxed{}$
x_4	$\boxed{1}$			1

15. Варијација са понављањем m-те класе скупа који има n елемената јесте било које пресликавање из скупа $\{1, 2, \ldots, m\}$ у дати скуп. Њихов број је једнак n^m. Према томе, и број пресликавања из скупа A који има m у скуп B који има n елемената једнак је n^m.

– Практикум из Математике –

– Други тест – 21. 05. 2017.

1. За које вредности реалног параметра α конвергира нумерички ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$?

2. Израчунати: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$.

3. Заокружити слова испред конвергентних нумеричких редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4 n}{n^3}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n}{4}}$;

(в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin 2}{2}\right)^n$; **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{100^{1000}}$;

(д) ниједан од претходних нумеричких редова није конвергентан.

4. Израчунати $h(1)$ ако је $h(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

5. Полупречник конвергенције степеног реда $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ једнак је (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) 1; **(б)** 2; **(в)** $\frac{1}{2}$; **(г)** e;

(д) ниједан од претходних одговора није тачан.

6. Одредити вредности реалног параметра q за које је ранг матрице $Q=\begin{bmatrix}2&2&2\\3&q&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ мањи од три.

7. Број линеарно независних колона матрице $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ јесте (заокружити слово испред тачног одговора):

(а) 0; **(б)** 1; **(в)** 2; **(г)** 3; **(д)** 4;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

8. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) $\det A \neq 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rang} A = n$;

(б) $\mathrm{rang} A > 0 \Longleftrightarrow \det A \neq 0$;

(в) $\mathrm{rang} A < n \Longrightarrow \det A = 0$;

(г) $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} A^T$;

(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

9. Одредити све вредности реалног параметра b за које хомогени систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{array}{rcl} (b-2)x - \quad 5y & = & 0 \\ x + (b+4)y & = & 0 \end{array}.$$

има нетривијално решење.

10. Представити вектор $\vec{t} = (4,4,4)$ из $\mathbb{R}^3$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{x} = (1,0,1)$, $\vec{y} = (1,1,0)$ и $\vec{z} = (0,1,1)$.

11. Дата је матрица $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. За матрицу PP^T могуће је одредити (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) карактеристични полином;
(б) минимални полином;
(в) сопствене вредности;
(г) ранг матрице;
(д) ниједно од претходних тврђења није тачно.

12. Одредити карактеристични полином матрице $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Нека је A произвољна реална квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$ и нека је $P(\lambda)$ њен карактеристични полином, а $M(\lambda)$ њен минимални полином. Нека је I јединична матрица реда n, а $\mathbf{0}$ нула-матрица реда n. Заокружити слова испред тачних тврђења:

(а) полином $P(\lambda)$ је степена n;
(б) полином $P(\lambda)$ има n различитих реалних нула;
(в) полином $M(\lambda)$ је јединствен;
(г) полином $M(\lambda)$ има n различитих реалних нула;
(д) $P(A) = \mathbf{0}$;
(ђ) $M(A) = \mathrm{I}$;
(е) ниједно од претходних тврђења није тачно.

14. Збир сопствених вредности матрице $J = \begin{bmatrix} 4-k & 1 & k-1 \\ 1 & k-2 & k \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, где је k реални параметар, једнак је (заокружити слова испред тачних одговора):

(а) k^2; **(б)** $2k-5$; **(в)** 0; **(г)** 5; **(д)** $k-3$;

(ђ) ниједан од претходних одговора није тачан.

15. Одредити минимални полином матрице $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

– Решења –

1. Уколико рационалишемо израз којим је дат општи члан реда, имамо да је $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Ако постоји $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=K$, $0<K<+\infty$, тада су редови $\sum a_n$ и $\sum b_n$ еквиконвергентни. Будући да је $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^\alpha(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}=\frac{1}{2}$, полазни ред је еквиконвергентан са редом чији је општи члан једнак $\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$, а овај ред конвергира за $\alpha>\frac{1}{2}$, због познате и важне чињенице да нумерички ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\beta}$ конвергира за $\beta>1$, а у осталим случајевима дивергира.

2. Важи: $\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$, где је q реална константа која задовољава $q\in(-1,1)$. Дакле:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

♣ Погледати четврти задатак са теста 02. 10. 2010.

3. Општи члан сваког конвергентног нумеричког реда тежи нули. Ово значи да уколико општи члан неког нумеричког реда не тежи нули, тада тај ред дивергира. Код редова $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n}{4}}$ и $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{100^{1000}}$ општи члан не тежи нули, па ти редови нису конвергентни.

Нека је $0<a_n\leq b_n$ за скоро свако $n\in\mathbb{N}$. Тада из дивергенције реда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ следи дивергенција реда $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$, а из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ конвергенција реда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$. Будући да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи $0<\frac{\sin^4 n}{n^3}\leq\frac{1}{n^3}$, а ред са општим чланом $\frac{1}{n^3}$ конвергира, конвергира и ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^4 n}{n^3}$.

Геометријски ред $\sum_{n=0}^{+\infty}q^n$ конвергира за $|q|<1$, а за $|q|\geq 1$ дивергира. Ред $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin 2}{2}\right)^n$ је геометријски ред код којег је $q=\frac{\sin 2}{2}$, $0<\frac{\sin 2}{2}<1$, па је зато конвергентан.
Тачни су одговори **(а)** и **(в)**.

4. За свако $x\in\mathbb{R}$ важи $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Дакле, $h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1=e^x-1$, па је $h(1)=e^1-1=e-1$.

♣ Погледати и седми задатак са теста 23. 08. 2014.

5. На основу Коши–Адамаровог става полупречник конвергенције R степеног реда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ може се израчунати као $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, или $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$, уколико наведени лимеси постоје.

Дакле, полупречник (радијус) конвергенције степеног реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n^2+1} x^n$ једнак је:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2+1}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+2}{2n^2+2} = \frac{1}{2}.$$

Тачан је одговор **(в)**.

6. Елементарне трансформације не мењају ранг матрице; такође, ранг матрице јесте ред њене највеће квадратне регуларне подматрице.
Извршимо на датој матрици Q узастопно следеће три елементарне трансформације: заменимо места првој и трећој врсти, затим у тако добијеној матрици заменимо места другој и трећој врсти, и на крају у тако добијеној матрици заменимо места другој и трећој колони. На тај начин долазимо до матрице Q':

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & q & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & q & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & q & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & q \end{bmatrix} = Q'.$$

Сада на матрици Q' извршимо узастопно следеће три елементарне трансформације: помножимо најпре елементе прве врсте матрице Q' бројем -2 и додајмо их елементима њене друге врсте, потом помножимо елементе прве врсте матрице Q' бројем -3 и додајмо их елементима њене треће врсте, и на крају, у тако добијеној матрици, помножимо елементе друге врсте бројем $-\dfrac{3}{2}$ и додајмо их елементима треће врсте. На тај начин добијамо матрицу Q'':

$$Q' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & q-6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & q-3 \end{bmatrix} = Q''.$$

Видимо да је матрица Q'' горње троугаона матрица, па је њена детерминанта једнака производу елемената са главне дијагонале, односно $\det B'' = 1 \cdot (-4) \cdot\ (q-3) = -4(q-3)$. Матрица Q'' је регуларна уколико је $q \neq 3$, и тада је она сама своја највећа регуларна подматрица, и у том случају њен ранг једнак је три. Ако је $q = 3$, матрица Q'' није регуларна (што значи да је њен ранг строго мањи од три), али поседује регуларну квадратну подматрицу реда 2 (то је подматрица која се налази у пресеку прве и друге врсте и прве и друге колоне матрице Q''): $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, па је у том случају ранг матрице B'' једнак 2. Будући да је $\text{rang}B = \text{rang}B''$, закључујемо да је $\text{rang}B = 3$ за $q \neq 3$, и $\text{rang}B = 2 < 3$ за $q = 3$. Дакле, вредност реалног параметра q за коју је ранг матрице Q мањи од три јесте 3.

7. Уколико је дата матрица A типа $m \times n$ (са m врста и n колона) над пољем $\mathbb{R}$, тада њених m врста можемо посматрати као m вектора из векторског простора $\mathbb{R}^n$ (такође, њених n врста можемо посматрати као n вектора из векторског простора $\mathbb{R}^m$), и тада је ранг матрице A број њених линеарно независних врста, односно број њених линеарно независних колона.
Такође, елементарне трансформације не мењају ранг матрице, и ранг матрице јесте ред њене највеће регуларне квадратне подматрице.

Дата матрица M је типа 3×4 над пољем $\mathbb{R}$, па њене врсте представљају три вектора из векторског простора $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (2,2,2,2)$ и $v_3 = (1,2,3,4)$. Лако се уочава да важи $2 \cdot (1,1,1,1) = (2,2,2,2)$, тј. $2 \cdot v_1 = v_2$, стога се вектор v_2 може представити као линеарна комбинација вектора v_1 и v_3 ($v_2 = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_3$), односно вектори v_1, v_2 и v_3 линеарно су зависни. Будући да су вектори v_1 и v_3 очигледно линеарно независни, следи да матрица има две линеарно независне врсте. То такође значи да дата матрица има и две линеарно независне колоне, па је тачан одговор **(в)**.

♢ Задатак можемо урадити и на други (врло сличан) начин. Извршимо на датој матрици M узастопно следеће две елементарне трансформације: најпре додајмо елементима друге врсте елементе прве врсте помножене бројем -2, а потом, у тако добијеној матрици, додајмо елементима треће врсте елементе прве врсте помножене бројем -1. На тај начин долазимо до матрице $M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ранг матрице M' мора бити мањи од 3 јер ниједна њена регуларна подматрица не сме садржати елементе друге врсте (сви елементи друге врсте једнаки су нули). Такође, ранг матрице M' једнак је 2 јер је њена највећа регуларна квадратна подматрица, на пример, подматрица која је образована од елемената који се налазе у пресецима њене прве и треће врсте и прве и друге колоне, и то је матрица $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Важи $\text{rang}M = \text{rang}M' = 2$, па је ранг матрице M једнак два, односно она има две линеарно независне колоне.

♣ Погледати осми задатак са теста 13. 06. 2015.

8. Подсетимо се да је ранг матрице ред њене највеће квадратне регуларне подматрице. Такође, за произвољну квадратну матрицу A важи релација $\text{rang}A^T = \text{rang}A$.

На основу наведене чињенице, јасно је да је тврђење **(г)** тачно. Размотримо сада преостала три тврђења.
Уколико је детерминанта матрице A различита од нуле, тада је она сама своја највећа регуларна подматрица, па је њен ранг максималан, односно једнак је n, и обрнуто, уколико је ранг матрице A једнак њеном реду, тада је сама матрица регуларна, и стога је њена детерминанта различита од нуле. Дакле, тврђење **(а)** је тачно.
Тврђење **(б)** није тачно, јер из чињенице да је ранг матрице већи од нуле не следи да је он максималан, односно не значи да је њен ранг једнак њеном реду, па детерминанта матрице A не мора бити различита од нуле. На пример, матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ има позитиван ранг, тј. важи $\text{rang}A = 1$, али јој је детерминанта једнака нули.
Тврђење **(в)** је тачно, јер уколико је ранг квадратне матрице A мањи од њеног реда, односно није максималан, то значи да она сама није своја највећа регуларна подматрица, односно да сама матрица A није регуларна, па јој је детерминанта једнака нули.
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(в)** **(г)**.

♣ Погледати седми задатак са теста 20. 01. 2013.

9. Хомогени систем линеарних алгебарских једначина има и нетривијално решење (сетимо се да хомогени систем линеарних алгебарских једначина увек има тривијално решење) ако и само ако је детерминанта матрице система једнака нули. Детерминанта матрице система једнака је

$$\begin{vmatrix} b-2 & -5 \\ 1 & b+4 \end{vmatrix} = (b-2)(b+4)+5 = b^2+2b-3 = (b+3)(b-1).$$

Систем има нетривијално решење ако и само ако је $b = -3$ или $b = 1$.

♣ Погледати седми задатак са теста 28. 06. 2008.

10. Приметимо да важи: $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = (1,0,1)+(1,1,0)+(0,1,1) = (2,2,2) = \frac{1}{2}\vec{t}$, па је $\vec{t} = 2\vec{x}+2\vec{y}+2\vec{z}$.

$\diamondsuit$ Урадити задатак решавајући систем једначина $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{t}$, односно систем

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 4 \\ \beta+\gamma &= 4 \\ \alpha+\gamma &= 4 \end{aligned}.$$

11. Будући да је P матрица типа 2×1, то значи да је PP^T матрица типа 2×2, односно квадратна матрица. Карактеристични полином, минимални полином и сопствене вредности дефинисани су за квадратне матрице (матрице које имају исти број врста и колона) произвољног реда, а матрица PP^T је квадратна, и зато су одговори **(а)**, **(б)** и **(в)** тачни. Такође, ранг матрице дефинише се за произвољну матрицу (произвољног типа), па је и одговор **(г)** тачан.
Дакле, тачни су одговори **(а)**, **(б)**, **(в)** и **(г)**.

12. Карактеристични полином матрице C једнак је:

$$\varphi_C(\lambda) = \det(C-\lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = -(\lambda-2)^3.$$

13. Карактеристични полином реалне квадратне матрице A реда n јесте полином $\varphi_A(\lambda) = \det(A-\lambda\mathrm{I})$. Дати полином има n, не обавезно, различитих нула. Важи $\varphi_A(A) = \mathbf{0}$.

Минимални полином $\mu_A(\lambda)$ матрице A монични је полином најмањег степена који анулира матрицу, односно то је монични полином најмањег степена за који важи $\mu_A(A) = \mathbf{0}$. Минимални полином матрице A јесте јединствен. Минимални полином матрице A дели карактеристични полином. Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, различите нуле карактеристичног полинома. Тада су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, $1 \le k \le n$, такође нуле истог или мањег реда минималног полинома.
Дакле, тачна су тврђења **(а)**, **(в)** и **(д)**, а тврђења **(б)**, **(г)** и **(ђ)** нису тачна

$\clubsuit$ Погледати девети задатак са теста 26. 01. 2008.

14. Збир свих сопствених вредности квадратне матрице A једнак је њеном трагу (збиру свих елемената који се налазе на њеној главној дијагонали).
Дакле, потребно је само одредити траг матрице K, односно сабрати три елемента са њене главне дијагонале. Будући да је очигледно $\mathrm{tr}K = 4-k+k-2+3 = 5$, тачан је одговор **(г)**.

$\diamondsuit$ Урадити задатак директним израчунавањем сопствених вредности матрице K, односно одређивањем њеног карактеристичног полинома и његових нула. Овај начин је, иако коректан, значајно рачунски захтевнији од претходног.

$\clubsuit$ Упоредити са деветим задатком на тесту одржаном 05. 07. 2014. године.

15. Карактеристични полином матрице L јесте:

$$P_L(\lambda) = \det(L-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda).$$

Све три нуле карактеристичног полинома различите су и реда један, па оне морају бити и нуле минималног полинома (видети 13. задатак). Сада је још само потребно обратити пажњу на водећи коефицијент минималног полинома, који мора бити једнак један, односно минимални полином матрице L биће $M_L(\lambda) = -P_L(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$.

Литература

[1] П. Васић, Б. Ираичанин, М. Јовановић, Б. Малешевић, Т. Маџаревић, Б. Михаиловић, З. Радосављевић, С. Симић, Д. Цветковић, **Збирка задатака из алгебре, I део, Булове алгебре, квантификаторски рачун, комбинаторика и графови, општа алгебра, полиноми**, VI издање, Академска мисао, Београд 2006.

[2] П. Васић, Б. Ираичанин, М. Јовановић, Т. Маџаревић, Б. Михаиловић, З. Радосављевић, С. Симић, Д. Цветковић, **Збирка задатака из алгебре, II део, линеарна алгебра, разни задаци**, V издање, Академска мисао, Београд 2006.

[3] М. Меркле, **Математичка анализа, теорија и хиљаду задатака, за студенте технике**, треће измењено и допуњено издање, Академска мисао, Београд 2015.

[4] Д. Цветковић, И. Лацковић, М. Меркле, З. Радосављевић, С. Симић, П. Васић, **Математика 1, Алгебра**, X издање, Академска мисао, Београд 2014.