

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Милица Саватовић, Милош Вујчић

МАТЕМАТИКА 1

- збирка решених испитних задатака -

Београд, 2026.

МАТЕМАТИКА 1

- збирка решених испитних задатака -

Аутори

др Милица САВАТОВИЋ, доцент

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Милош ВУЛЧИЋ, асистент

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Рецензенти

др Наташа ТИРОВИЋ, ванредни професор

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

др Тамара КОЛЕДИН, ванредни професор

Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

Наставно-научно веће Електротехничког факултета Универзитета у Београду је на 935. седници, одржаној 13. октобра 2026. године, одлуком број 1835/22 одобрило објављивање ове књиге као уџбеника у електронском облику.

Издаје и штампа

Електротехнички факултет, Универзитет у Београду

Булевар Краља Александра 73, 11000 Београд, Србија

Тираж: 50 примерака

ISBN: 978-86-7225-105-0

Предговор

Ова збирка решених испитних задатака намењена је студентима прве године Електротехничког факултета Универзитета у Београду као помоћни материјал за предмет *Математика 1*. Циљ збирке је да студентима олакша систематичну припрему за предиспитне обавезе, колоквијуме и испите и да, кроз пажљиво одабране и детаљно решене задатке, прикаже типичне методе и поступке који се користе у областима обухваћеним програмом предмета.

Задаци су распоређени по тематским целинама, а унутар тематских целина према академским годинама и испитним роковима. На тај начин студентима је омогућено да истовремено прате појединачне области градива и стекну увид у врсту и ниво задатака који су се појављивали на претходним проверама знања. Збирка обухвата задатке из алгебре и математичке анализе, укључујући алгебарске структуре, матрице и детерминанте, полиноме, реалне низове, граничне вредности, непрекидност и диференцијабилност функција, испитивање функција, као и Тејлоров и Маклоренов развој функција.

Сваком задатку придружено је детаљно решење у коме су посебно истакнути кључни кораци поступка. У решењима се, поред самог рачуна, указује и на услове под којима се примењују одговарајуће дефиниције, теореме и методе. Посебна пажња посвећена је местима на којима су могуће честе грешке, као што су провера услова домена, испитивање посебних случајева, правилна употреба критеријума и доследно записивање закључака.

Збирка је конципирана тако да се може користити на више начина. Студентима се препоручује да најпре самостално покушају да реше задатке, а затим да своја решења упореде са датим поступцима. На тај начин овај материјал може послужити и за проверу знања и за продубљивање разумевања градива. Решења нису намењена само добијању коначног резултата, већ и усвајању начина математичког размишљања који води до исправног и потпуног решења.

Посебна нам је намера била да збирка не буде корисна само непосредно пред испит, већ и током целог семестра, као материјал коме се студенти могу враћати приликом обнављања појединих области. Систематично решавање задатака различитог нивоа сложености омогућава постепено повезивање појмова и техника, што је

од посебног значаја у математици, где се ново градиво често ослања на претходно усвојене резултате и методе. Због тога верујемо да збирка може допринети не само успешнијој припреми за проверу знања, већ и сигурнијем и самосталнијем приступу решавању математичких проблема.

Надамо се да ће ова збирка студентима бити користан ослонац у савладавању градива и припреми испита из предмета *Математика 1*, а наставницима и сарадницима у настави послужити као допунски материјал у раду са студентима.

Све примедбе и сугестије које могу допринети унапређењу будућих издања збирке биће нам драгоцене.

Аутори

Садржај

Предговор	iii
1 Алгебарске структуре	1
2 Матрице и детерминанте	41
3 Полиноми	87
4 Реални низови	118
5 Гранична вредност, непрекидност и диференцијабилност функција	139
6 Испитивање функција	169
7 Тејлоров и Маклоренов развој функција	216

Глава 1

Алгебарске структуре

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Дат је скуп $G = \{x + y\sqrt{7} \mid x^2 - 7y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Испитати да ли је структура $(G, \cdot)$ моноид, где је $\cdot$ операција множења реалних бројева.

Решење: Да бисмо доказали да је структура $(G, \cdot)$ моноид, треба показати следеће особине: 1) *затвореност* скупа G за операцију $\cdot$, тј. да је операција $\cdot$ *бинарна* у скупу G , 2) *асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу G и 3) постојање *неутралног елемента* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G . Покажимо наведене три особине:

1) *Затвореност*: Покажимо да важи $(\forall a, b \in G) a \cdot b \in G$. Узмимо $a, b \in G$, тј. $a = x + y\sqrt{7}$, при чему је $x^2 - 7y^2 = 1$ и $x, y \in \mathbb{Q}$, и $b = u + v\sqrt{7}$, при чему је $u^2 - 7v^2 = 1$ и $u, v \in \mathbb{Q}$. Тада је $a \cdot b = (x + y\sqrt{7}) \cdot (u + v\sqrt{7}) = \underbrace{(xu + 7yv)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(xv + yu)}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{7}$.

Даље,

$$\begin{aligned}(xu + 7yv)^2 - 7(xv + yu)^2 &= x^2u^2 + 14xuyv + 49y^2v^2 - 7x^2v^2 - 14xvyu - 7y^2u^2 \\&= x^2(u^2 - 7v^2) - 7y^2(u^2 - 7v^2) \\&= (x^2 - 7y^2) \cdot (u^2 - 7v^2) = 1 \cdot 1 = 1,\end{aligned}$$

одакле следи да $a \cdot b \in G$, па особина затворености важи.

2) *Асоцијативност*: Како је $G \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, асоцијативност се наслеђује из структуре $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ која је *мултипликативна група*.

3) *Неутрал*: Неутрални елемент групе $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ је 1, који припада и скупу G (јер је $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{7}$, при чему $1, 0 \in \mathbb{Q}$ и $1^2 - 7 \cdot 0^2 = 1$). Одавде видимо да је 1 неутрал у односу на операцију $\cdot$ у скупу G , тј. неутрални елемент се наслеђује из структуре $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Дакле, структура $(G, \cdot)$ је моноид. ■

2. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Нека је на скупу природних бројева дефинисана операција $\circ$ релацијом $(\forall x, y \in \mathbb{N}) x \circ y = x^y$. Испитати законе операције $\circ$.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $\circ$:

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{N}$ за операцију $\circ$, тј. операција $\circ$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{N}$:

Како важи $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \ x \circ y = x^y \in \mathbb{N}$, следи да је скуп $\mathbb{N}$ затворен за операцију $\circ$.

2) *Асоцијативност* операције $\circ$ у скупу $\mathbb{N}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall x, y, z \in \mathbb{N}) \ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$. Како лева страна ове једнакости $(x \circ y) \circ z = (x^y)^z$ није увек једнака њеној десној страни $x \circ (y \circ z) = x^{(y^z)}$ (нпр. $(2^2)^3 \neq 2^{2^3}$), следи да операција $\circ$ није асоцијативна у скупу $\mathbb{N}$.

3) *Комутативност* операције $\circ$ у скупу $\mathbb{N}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall x, y \in \mathbb{N}) \ x \circ y = y \circ x$. Како лева страна ове једнакости $x \circ y = x^y$ није увек једнака њеној десној страни $y \circ x = y^x$, следи да операција $\circ$ није комутативна у скупу $\mathbb{N}$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\circ$ у скупу $\mathbb{N}$:

Како операција $\circ$ није комутативна, неопходно је потражити и леви и десни неутрални елемент. Леви неутрал дефинисан је релацијом $(\exists e_1 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) \ e_1 \circ x = x$, тј. $e_1^x = x$, што је немогуће, па леви неутрални елемент у односу на операцију $\circ$ не постоји. Десни неутрал дефинисан је релацијом $(\exists e_2 \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N}) \ x \circ e_2 = x$, тј. $x^{e_2} = x$, одакле добијамо да је $e_2 = 1$ десни неутрални елемент. Дакле, постоји само десни неутрални елемент. Према томе, неутрал не постоји, а тада не разматрамо постојање *инверза*, тј. ниједан елемент датог скупа нема инверзни елемент. ■

3. [Септембарски рок, 2010/11. година] Дат је скуп $G = \{a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1\}$. У скупу G дефинисана је операција $*$ на следећи начин: $a * b = a^{\log_5 b}$. Испитати да ли операција $*$ поседује неутрал у скупу G , и ако је одговор на то питање потврдан, да ли произвољан елемент a из G поседује инверзни елемент у скупу G ?

Решење: Пре него што испитамо да ли у односу на операцију $*$ постоји *неутрални елемент* у скупу G , проверимо да ли је скуп G *затворен* за операцију $*$. Узмимо $a, b \in G$, тј. $a, b \in \mathbb{R}; a, b > 0, a \neq 1$ и $b \neq 1$. Тада очигледно важи и да $a * b = a^{\log_5 b} \in \mathbb{R}$, $a^{\log_5 b} > 0$ и $a^{\log_5 b} \neq 1$, па $a * b = a^{\log_5 b} \in G$, тј. скуп G је затворен за операцију $*$. 1) Леви неутрал дефинисан је релацијом $(\exists e_L \in G)(\forall a \in G) \ e_L * a = a$, тј. $e_L^{\log_5 a} = a$. Логаритмовањем за основу 5 леве и десне стране последње једнакости, добијамо $\log_5 a \cdot \log_5 e_L = \log_5 a$, ($a \neq 1$), па је $\log_5 e_L = 1$, одакле добијамо да је $e_L = 5$ леви неутрални елемент. 2) Слично, десни неутрал дефинисан је релацијом $(\exists e_D \in G)(\forall a \in G) \ a * e_D = a$, тј. $a^{\log_5 e_D} = a$, одакле добијамо да је $\log_5 e_D = 1$, па следи да је $e_D = 5$ десни неутрални елемент. Из 1) и 2) следи да је $e_L = e_D = e = 5 \in G$ неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу G .

Како неутрал постоји, можемо за произвољан елемент $a \in G$ испитати постојање *инверзног елемента* $a^{-1} \in G$. а) Десни инверз дефинисан је релацијом $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) \ a * a^{-1} = e = 5$, тј. $a^{\log_5 a^{-1}} = 5$. Логаритмовањем за основу a леве и десне стране последње једнакости, добијамо $\log_5 a^{-1} \cdot \log_a a = \log_a 5$, па је $a^{-1} = 5^{\log_a 5}$. б) Леви

инверз дефинисан је релацијом $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G) \ a^{-1} * a = e = 5$, тј. $(a^{-1})^{\log_5 a} = 5$. Заменом израза за десни инверз из дела под а), $a^{-1} = 5^{\log_a 5}$, у последњу једнакост, добијамо да та једнакост важи, што значи да је то уједно и леви инверз, а самим тим и инверз произвољног елемента $a \in G$. Дакле, инверз за $a \in G$ је $a^{-1} = 5^{\log_a 5} \in G$. Напоменимо да је операција $*$ *комутиативна* у скупу G , јер је

$$a * b = a^{\log_5 b} = 5^{\log_5 a \cdot \log_5 b} = 5^{\log_5 b \cdot \log_5 a} = b^{\log_5 a} = b * a,$$

па је довољно било неутрал и инверз потражити само са једне стране. ■

4. [Октобарски рок, 2010/11. година] Дат је скуп

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = c, \ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

Испитати за које вредности параметра c је структура $(G, \cdot)$ група, где операција $\cdot$ представља множење матрица.

Решење: Проверимо за које вредности параметра $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операција множења матрица $\cdot$ задовољава особине *групе*.

1) *Затвореност* скупа G за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу G :

Нека су $A, B \in G$. Тада је $\det A = \det B = c$, па важи

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = c^2.$$

Да би производ $A \cdot B$ припадао скупу G , неопходно је и довољно да важи $\det(A \cdot B) = c$. Према томе,

$$c^2 = c \iff c \cdot (c - 1) = 0.$$

Како је $c \neq 0$, следи да је $c = 1$. Дакле, скуп G је затворен за операцију $\cdot$ само за $c = 1$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу G : Асоцијативност важи, јер је множење матрица асоцијативна операција (видети 12. задатак).

3) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G : Неутрални елемент за множење матрица је *јединична матрица*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како је $\det I_2 = 1$, следи да $I_2 \in G$ ако и само ако је $c = 1$.

4) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G : За $c = 1$ и произвољну матрицу $A \in G$ важи $\det A = 1 \neq 0$, па постоји инверзна матрица A^{-1} . Притом, како за сваку матрицу $A \in G$ важи $A \cdot A^{-1} = I_2 = A^{-1} \cdot A$, имамо да је $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I_2 = 1$, па је

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1,$$

одакле следи да $A^{-1} \in G$.

Према томе, све особине групе испуњене су за $c = 1$, док за $c \neq 1$ није испуњена већ особина затворености. Дакле, $\boxed{\text{структура } (G, \cdot) \text{ је група ако и само ако је } c = 1}$. ■

5. [Колоквијум, 2011/12. година] Нека је у скупу $\mathbb{Z}$ дефинисана операција $a * b = k^2 a \cdot b + k(a + b)$, где је $k \in \mathbb{Z}$.

а) Одредити вредност параметра k тако да операција $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ буде асоцијативна.

б) За тако нађене параметре испитати да ли операција $*$ има неутрални елемент.

Решење: а) Најпре приметимо да је скуп $\mathbb{Z}$ *затворен* за операцију $*$. Затим, пронађимо $k \in \mathbb{Z}$ тако да је операција $*$ *асоцијативна*, тј. тако да важи следећа релација:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad (a * b) * c = a * (b * c).$$

Лева страна ове једнакости једнака је:

$$\begin{aligned} L &= (a * b) * c = (k^2 a \cdot b + k(a + b)) * c \\ &= k^2 (k^2 ab + k(a + b)) c + k(k^2 ab + k(a + b) + c) \\ &= k^4 abc + k^3 ac + k^3 bc + k^3 ab + k^2 a + k^2 b + kc. \end{aligned}$$

Десна страна ове једнакости једнака је:

$$\begin{aligned} D &= a * (b * c) = k^2 a \cdot (b * c) + k(a + (b * c)) \\ &= k^2 a \cdot (k^2 bc + k(b + c)) + k(a + k^2 bc + k(b + c)) \\ &= k^4 abc + k^3 ab + k^3 ac + k^3 bc + ka + k^2 b + k^2 c. \end{aligned}$$

Изједначавањем леве и десне стране, добијамо $L = D \iff k^2 = k$, тј. $k = 0$ или $k = 1$.

Дакле, за $\boxed{k = 0 \text{ или } k = 1}$ операција $*$ је асоцијативна у скупу $\mathbb{Z}$.

б) $\boxed{\text{За } k=0 \text{ важи } (\forall a, b \in \mathbb{Z}) \quad a * b = 0, \text{ па не постоји неутрал операције } * \text{ у скупу } \mathbb{Z}.}$

За $k = 1$ важи $a * b = ab + a + b$. Неутрал у односу на операцију $*$ дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{Z}) \quad e * a = a = a * e$. Како је операција $*$ очигледно *комутиативна*, довољно је проверити постојање само левог, односно само десног неутрала. На пример, из једнакости $a * e = a$ добијамо да је $ae + a + e = a \Rightarrow e(a + 1) = 0$, па следи да је $e = 0$. Дакле, $\boxed{\text{за } k = 1 \text{ неутрал у односу на операцију } * \text{ у скупу } \mathbb{Z} \text{ је } e = 0 \in \mathbb{Z}}$. ■

6. [Колоквијум, 2011/12. година] Испитати да ли важи закон дистрибутивности операције $\otimes$ у односу на операцију $\oplus$ у структури $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$, где су операције $\oplus$ и $\otimes$ дефинисане са $a \oplus b = a + b + 1$ и $a \otimes b = a \cdot b + a + b$.

Решење: Испитајмо да ли важи *дистрибутивност* операције $\otimes$ у односу на операцију $\oplus$, тј. да ли важе следеће релације:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \quad - \text{ лева дистрибутивност}$$

и

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) \quad (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \quad - \text{ десна дистрибутивност.}$$

С обзиром на то да важи $a \otimes b = a \cdot b + a + b = b \cdot a + b + a = b \otimes a$, имамо да је операција $\otimes$ *комутиативна*, па је довољно проверити да дистрибутивност важи само са леве или само са десне стране. Проверимо, на пример, леву дистрибутивност. Са једне стране, лева страна леве дистрибутивности једнака је:

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= a \cdot (b \oplus c) + a + (b \oplus c) = a(b + c + 1) + a + (b + c + 1) \\ &= ab + ac + 2a + b + c + 1, \end{aligned}$$

док је, са друге стране, десна страна леве дистрибутивности једнака:

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) &= (a \cdot b + a + b) \oplus (a \cdot c + a + c) = (a \cdot b + a + b) + (a \cdot c + a + c) + 1 \\ &= ab + ac + 2a + b + c + 1. \end{aligned}$$

Дакле, важи лева дистрибутивност $\otimes$ у односу на $\oplus$, па, због комутативности операције $\otimes$, важи и десна дистрибутивност, а тиме важи и закон дистрибутивности. ■

7. [Фебруарски рок, 2011/12. година] **а)** Испитати природу алгебарске структуре $(S, \cdot)$, где је операција $\cdot$ множење матрица, а скуп S дат са

$$S = \left\{ M(\alpha) \mid M(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Испитати за које матрице $M(\alpha)$ из претходног скупа S важи релација $M(\alpha)^{-1} = M(\alpha)^T$.

Решење: а) Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа S за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу S :

Како важи $(\forall M(\alpha), M(\beta) \in S)$

$$\begin{aligned} M(\alpha) \cdot M(\beta) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = M(\alpha + \beta) \in S, \end{aligned}$$

јер за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ и матрица $M(\alpha + \beta)$ је истог облика као матрице $M(\alpha)$ и $M(\beta)$, следи да је скуп S затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу S : Важи тврђење: Алгебарска структура $(M_n, +, \cdot)$, где је M_n скуп свих квадратних матрица реда n над пољем F , а $+$ и $\cdot$ операције сабирања и множења матрица, је *вршен са јединицом* I_n (I_n је *јединична матрица* реда n). Из овог тврђења следи да је множење матрица асоцијативно.

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу S : Операција множења матрица није увек комутативна, за разлику од операције сабирања матрица. С тим у вези, проверимо да ли важи једнакост $(\forall M(\alpha), M(\beta) \in S) M(\alpha) \cdot M(\beta) = M(\beta) \cdot M(\alpha)$. Како је

$$\begin{aligned} M(\alpha) \cdot M(\beta) &= M(\alpha + \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta + \alpha) & -\sin(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) & \cos(\beta + \alpha) \end{bmatrix} \\ &= M(\beta + \alpha) = M(\beta) \cdot M(\alpha), \end{aligned}$$

комутативност операције множења матрица у овом случају важи.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу S : Из горенаведеног тврђења имамо да постоји неутрални елемент за операцију множења матрица. Лако уочавамо да је $I_2 = M(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$, јер $0 \in \mathbb{R}$, па је то тражени неутрал.

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу S : Како је $\det M(\alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \neq 0$, следи да постоји инверзна матрица матрице $M(\alpha)$. Одредимо сада њену инверзну матрицу према формули:

$$M(\alpha)^{-1} = \frac{1}{\det M(\alpha)} \cdot \text{adj} M(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = M(-\alpha).$$

Јасно је да $M(\alpha)^{-1} = M(-\alpha) \in S$, јер је $-\alpha \in \mathbb{R}$ за $\alpha \in \mathbb{R}$, па можемо закључити да свака матрица $M(\alpha) \in S$ има инверзну матрицу $M(\alpha)^{-1} \in S$ у односу на операцију множења матрица. Дакле, алгебарска структура $(S, \cdot)$ је Абелова група.

6) Како је

$$M(\alpha)^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ видимо да је } \boxed{(\forall \alpha \in \mathbb{R}) M(\alpha)^{-1} = M(\alpha)^T}. \quad \blacksquare$$

8. [Јунски рок, 2011/12. година] Испитати природу структуре $(A, *)$, при чему је $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$, а операција $*$ дефинисана као: $(\forall a, b \in A) a * b = \frac{a+b}{1+a \cdot b}$.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $*$:

1) *Затвореност* скупа A за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу A :

Како важи $a, b \in (-1, 1) \implies a \cdot b \in (-1, 1) \implies 1 + a \cdot b > 0$, имамо да је

$$-1 < \frac{a+b}{1+a \cdot b} < 1 \iff -1 - a \cdot b < a+b < 1 + a \cdot b.$$

Проверимо сада да ли важи ова двострука неједнакост:

а) Лева неједнакост $a+b+1+a \cdot b > 0 \iff (a+1) \cdot (b+1) > 0$ је тачна, јер је $a > -1$ и $b > -1$,

б) Десна неједнакост $1+a \cdot b - a - b > 0 \iff (a-1) \cdot (-1+b) > 0$ је тачна, јер је $a < 1$ и $b < 1$.

Према томе, $a * b \in A$, па следи да је скуп A затворен за операцију $*$.

2) Ассоцијативност операције $*$ у скупу A :

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall a, b, c \in A) (a * b) * c = a * (b * c)$. Како је

$$(a * b) * c = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ac + bc} = a * (b * c),$$

слиди да је операција $*$ асоцијативна у скупу A .

3) Комутативност операције $*$ у скупу A : Како је

$$(\forall a, b \in A) a * b = \frac{a + b}{1 + a \cdot b} = \frac{b + a}{1 + b \cdot a} = b * a,$$

слиди да је операција $*$ комутативна у скупу A .

4) Неутрал у односу на операцију $*$ у скупу A : С обзиром на то да је операција $*$ комутативна у скупу A , довољно је проверити постојање неутралног елемента у односу на операцију $*$ само са леве или само са десне стране. Неутрални елемент дефинисан је релацијом $(\exists e \in (-1, 1)) (\forall a \in (-1, 1)) e * a = a = a * e$. Како је нпр. $a * e = \frac{a + e}{1 + ae} = a$, множењем ове једнакости са $(1 + ae)$, добијамо да је $a + e = a + a^2e$, тј. $e(a^2 - 1) = 0 \implies e = 0 \in (-1, 1)$, па је то неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу A .

5) Инверз у односу на операцију $*$ у скупу A : Како је операција $*$ комутативна у скупу A , довољно је проверити постојање инверзног елемента у односу на операцију $*$ само са леве или само са десне стране. Инверзни елемент дефинисан је релацијом $(\forall a \in (-1, 1)) (\exists a' \in (-1, 1)) a * a' = e = a' * a$. Нпр. из једнакости $a * a' = 0$ слиди да је $\frac{a + a'}{1 + aa'} = 0 \implies a' = -a$, па је инверз елемента $a \in (-1, 1)$ елемент $-a \in (-1, 1)$.

Дакле, алгебарска структура $(A, *)$ је Абелова група.

9. [Јулски рок, 2011/12. година] **а)** Формирати Кејлијеву таблицу елемената скупа $A = \{I, M_2, M_3, M_4\}$, где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, у односу на множење матрица и испитати природу алгебарске структуре $(A, \cdot)$.

б) Који подскупови скупа A су подгрупе групе $(A, \cdot)$.

в) Формирати Кејлијеву таблицу елемената скупа $B = \{1, -1, i, -i\}$ у односу на множење комплексних бројева и испитати природу алгебарске структуре $(B, \cdot)$.

г) Испитати да ли постоји изоморфизам алгебарских структура $(A, \cdot)$ и $(B, \cdot)$.

Решење: **а)** Кејлијева таблица скупа $A = \{I, M_2, M_3, M_4\}$ у односу на множење матрица је

$\cdot$	I	M_2	M_3	M_4
I	I	M_2	M_3	M_4
M_2	M_2	I	M_4	M_3
M_3	M_3	M_4	M_2	I
M_4	M_4	M_3	I	M_2

Из таблице видимо да важи *затвореност*. Пошто је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, закључујемо да важи *комутиативност* операције. Како је скуп свих квадратних матрица фиксiranог реда над неким пољем прсћен са јединицом у односу на сабирање и множење матрица, множење матрица је *асоцијативна* операција. *Неутрални елемент* је I . *Инверзни елементи*: $I \cdot I = I$, $M_2 \cdot M_2 = I$, $M_3 \cdot M_4 = I$, $M_4 \cdot M_3 = I$. Дакле, алгебарска структура $(A, \cdot)$ је *Абелова група*.

б) Тражимо сада све подскупове скупа A који су *подгрупе* групе $(A, \cdot)$. Знамо да је за непразан скуп $H \subseteq G$ $(H, \cdot)$ подгрупа групе $(G, \cdot)$ ако за свака два елемента $a, b \in H$ важи $ab^{-1} \in H$. Како, према *Лагранжовој теореме*, ред сваке подгрупе мора да дели ред групе, број елемената подгрупе може бити само један, два или четири. Такође, свака подгрупа мора да садржи *неутрални елемент*, па једноелементни подскуп $\{I\}$ јесте подгрупа. Даље, $M_2 \cdot M_2 = I$, па је подскуп $\{I, M_2\}$ *затворен* у односу на операцију и представља подгрупу. Међутим, $M_3 \cdot M_3 = M_2 \notin \{I, M_3\}$, па $\{I, M_3\}$ није подгрупа. Слично, $M_4 \cdot M_4 = M_2 \notin \{I, M_4\}$, па $\{I, M_4\}$ није подгрупа. Цео скуп A је, наравно, подгрупа самог себе.

Према томе, *подгрупе групе $(A, \cdot)$ су: $(\{I\}, \cdot)$, $(\{I, M_2\}, \cdot)$ и $(A, \cdot)$.*

в) Кејлијева таблица скупа $B = \{1, -1, i, -i\}$ у односу на множење комплексних бројева је

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Из таблице видимо да важи *затвореност*. Пошто је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, закључујемо да важи *комутиативност* операције. Како је $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ *мултипликативна група*, множење комплексних бројева је *асоцијативна* операција. *Неутрални елемент* је 1. *Инверзни елементи*: $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$, $i \cdot (-i) = 1$, $(-i) \cdot i = 1$. Дакле, алгебарска структура $(B, \cdot)$ је *Абелова група*.

г) Из Кејлијевих таблица видимо да је пресликавање $f : A \rightarrow B$ дефинисано са $f(I) = 1$, $f(M_2) = -1$, $f(M_3) = i$, $f(M_4) = -i$ *изоморфизам* група $(A, \cdot)$ и $(B, \cdot)$, јер је *бијекција* и важи $f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$ за свако $X, Y \in A$, па *постоји изоморфизам*. ■

10. [Септембарски рок, 2011/12. година] Дата је операција $*$ дефинисана на следећи начин:

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

а) Испитати да ли је $*$ унутрашња операција у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

б) У зависности од параметра a испитати природу структуре $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$.

Решење: а) Проверимо, најпре, да ли важи *затвореност* скупа $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ за операцију $*$, тј. да је операција $*$ *бинарна* у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ или још можемо рећи да је $*$ *унутрашња* операција у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$: Операција $*$: $\mathbb{R} \setminus \{a\} \times \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a\}$ је унутрашња ако и само ако $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \ x * y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Претпоставимо супротно, тј.

$$\begin{aligned} x * y = a &\iff xy - ax - ay + a^2 + a = a \iff x(y - a) - a(y - a) = 0 \\ &\iff (x - a)(y - a) = 0 \iff x = a \vee y = a. \end{aligned}$$

Пошто је $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, то је немогуће, па је $x * y \neq a$.

Према томе, $\boxed{* \text{ је унутрашња операција у скупу } \mathbb{R} \setminus \{a\}}$.

б) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$: Проверимо да ли важи једнакост $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \ (x * y) * z = x * (y * z)$. Како је

$$\begin{aligned} L &= (x * y) * z = (xy - ax - ay + a^2 + a) * z = \\ &= xyz - axz - ayz + a^2z + az - axy + a^2x + a^2y - a^3 - a^2 - az + a^2 + a \\ &= xyz - axy - axz - ayz + a^2x + a^2y + a^2z - a^3 + a \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D &= x * (y * z) = x * (yz - ay - az + a^2 + a) = \\ &= xyz - axy - axz + a^2x + ax - ax - ayz + a^2y + a^2z - a^3 - a^2 + a^2 + a \\ &= xyz - axy - axz - ayz + a^2x + a^2y + a^2z - a^3 + a. \end{aligned}$$

важи да је $L = D$, па је операција $*$ асоцијативна.

Комутативност операције $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$: Проверимо да ли важи једнакост $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \ x * y = y * x$. Како је

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a = yx - ay - ax + a^2 + a = y * x,$$

операција $*$ је комутативна.

Неутрал у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$: С обзиром на то да је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, довољно је проверити постојање неутралног елемента у односу на операцију $*$ само са леве или само са десне стране. Неутрални елемент дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \ x * e = x = e * x$. Из нпр.

$$\begin{aligned} x * e = x &\iff xe - ax - ae + a^2 + a = x \iff x(e - a - 1) - a(e - a - 1) = 0 \\ &\iff (x - a)(e - (a + 1)) = 0 \iff x = a \vee e = a + 1, \end{aligned}$$

па како је $x \neq a$, следи да је $e = a + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, па је $e = a + 1$ неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Инверз у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$: Како је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, довољно је проверити постојање инверзног елемента у односу на

операцију $*$ само са леве или само са десне стране. Инверзни елемент дефинисан је релацијом $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) (\exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{a\}) \quad x * x' = e = x' * x$. Из нпр.

$$\begin{aligned} x * x' = a + 1 &\iff xx' - ax - ax' + a^2 + a = a + 1 \iff x'(x - a) = 1 + a(x - a) \\ &\iff x' = \frac{1}{x - a} + a, \end{aligned}$$

па како је $x \neq a$, следи да је $x' = \frac{1}{x - a} + a \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, па је $x' = \frac{1}{x - a} + a$ инверзни елемент од x у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Према томе, структура $(\mathbb{R} \setminus \{a\}, *)$ је Абелова група за свако $a \in \mathbb{R}$. ■

11. [Колоквијум 2012/13. година] Нека је у скупу $\mathbb{Q}$ дефинисана операција $\circ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ са $a \circ b = ma + nb$, за $m, n \in \mathbb{Z}$.

а) Одредити вредности параметара m и n тако да је операција $\circ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ асоцијативна.

б) Одредити вредности параметара m и n тако да је операција $\circ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ комутативна.

Решење: а) Најпре приметимо да је skup $\mathbb{Q}$ *затворен* за операцију $\circ$. Затим пронађимо $m, n \in \mathbb{Z}$ тако да је операција $\circ$ *асоцијативна*, тј. тако да важи следећа релација:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Лева страна ове једнакости једнака је:

$$L = (a \circ b) \circ c = (ma + nb) \circ c = m(ma + nb) + nc = m^2a + mnb + nc.$$

Десна страна ове једнакости једнака је:

$$D = a \circ (b \circ c) = ma + n(b \circ c) = ma + n(mb + nc) = ma + nmb + n^2c.$$

Изједначавањем леве и десне стране, добијамо

$$\begin{aligned} L = D &\iff m^2a + mnb + nc = ma + nmb + n^2c \iff m^2 = m \quad \wedge \quad n = n^2 \\ &\iff (m = 0 \vee m = 1) \wedge (n = 0 \vee n = 1). \end{aligned}$$

Дакле, за $(m = 0 \vee m = 1) \wedge (n = 0 \vee n = 1)$ операција $\circ$ је асоцијативна у скупу $\mathbb{Q}$ и важи:

$$m = 0, n = 0 \Rightarrow a \circ b = 0,$$

$$m = 0, n = 1 \Rightarrow a \circ b = b,$$

$$m = 1, n = 0 \Rightarrow a \circ b = a,$$

$$m = 1, n = 1 \Rightarrow a \circ b = a + b.$$

б) Пронађимо сада $m, n \in \mathbb{Z}$ тако да је операција $\circ$ комутативна, тј. тако да важи следећа релација:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q}) a \circ b = b \circ a.$$

Изједначавањем леве и десне стране, добијамо

$$(\forall a, b \in \mathbb{Q}) a \circ b = b \circ a \iff (\forall a, b \in \mathbb{Q}) ma + nb = mb + na \iff m = n.$$

Дакле, за $\boxed{m = n}$ операција $\circ$ је комутативна у скупу $\mathbb{Q}$ и важи:

$$m = n \Rightarrow a \circ b = m(a + b). \quad \blacksquare$$

12. [Колоквијум 2012/13. година] Нека је

$$M = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}.$$

Испитати да ли је $(M, \cdot)$, где је операција $\cdot$ множење матрица, Абелова група.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа M за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу M :

Узмимо произвољне матрице $A, B \in M$, тј. $A = \begin{bmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} u + iv & 0 \\ 0 & u - iv \end{bmatrix}$, при чему важи да је $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \neq 0$ и $u^2 + v^2 \neq 0$. Како је

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} x + iy & 0 \\ 0 & x - iy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u + iv & 0 \\ 0 & u - iv \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (xu - yv) + i(xv + yu) & 0 \\ 0 & (xu - yv) - i(xv + yu) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

при чему је $xu - yv, xv + yu \in \mathbb{R}$ и

$$\begin{aligned} (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 &= x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2 \\ &= x^2(u^2 + v^2) + y^2(u^2 + v^2) = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \neq 0, \end{aligned}$$

слиди да је $A \cdot B \in M$, тј. да је скуп M затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу M : На основу тврђења: Алгебарска структура $(M_n, +, \cdot)$, где је M_n скуп свих квадратних матрица реда n над пољем F , а $+$ и $\cdot$ операције сабирања и множења матрица је *прстен са јединицом* I_n ; можемо закључити да се наведена особина наслеђује из *моноида* $(M_2, \cdot)$, где је M_2 скуп свих квадратних матрица реда 2, а $\cdot$ множење матрица.

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу M : Операција множења матрица није увек комутативна, за разлику од операције сабирања матрица. С тим у вези, проверимо

да ли важи једнакост $(\forall A, B \in M) \ A \cdot B = B \cdot A$. Како је

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{bmatrix} (xu - yv) + i(xv + yu) & 0 \\ 0 & (xu - yv) - i(xv + yu) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ux - vy) + i(vx + uy) & 0 \\ 0 & (ux - vy) - i(vx + uy) \end{bmatrix} = B \cdot A, \end{aligned}$$

јер је множење у скупу реалних бројева комутативна операција, следи да комутативност операције множења матрица у овом случају важи.

4) Неутрал у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Из горенаведеног тврђења имамо да постоји неутрални елемент за операцију множења матрица. Јако уочавамо да је $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$, јер је $1, 0 \in \mathbb{R}$ и $1^2 + 0^2 \neq 0$, па је то тражени неутрал.

5) Инверз у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Како је $\det A = x^2 + y^2 \neq 0$, следи да постоји инверзна матрица матрице A . Одредимо сада њену инверзну матрицу према формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x - iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{bmatrix}.$$

Даље, како $\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\pm y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ и $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{\pm y}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \neq 0$, можемо закључити да свака матрица $A \in M$ има инверзну матрицу $A^{-1} \in M$ у односу на операцију множења матрица.

Дакле, алгебарска структура $(M, \cdot)$ је Абелова група. ■

13. [Јануарски рок, 2012/13. година] Дат је скуп $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$.

Испитати природу структуре $(G, \cdot)$, где је $\cdot$ операција множења матрица.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) Затвореност скупа G за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу G :

Посматрајмо произвољне матрице $A, B \in G$, тј. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$, где важи да је $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $a, c \neq 0$. Како је

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{bmatrix},$$

при чему важи да је $ac, ad + bc \in \mathbb{R}$ и $ac \neq 0$, следи да је $A \cdot B \in G$, тј. да је скуп G затворен за операцију $\cdot$.

2) Асоцијативност операције $\cdot$ у скупу G : Асоцијативност важи за множење матрица (објашњење је исто као у претходном задатку).

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу G : Операција множења матрица није увек комутативна, за разлику од операције сабирања матрица. С тим у вези, проверимо да ли важи једнакост $(\forall A, B \in G) A \cdot B = B \cdot A$. Како је

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac & ad + bc \\ 0 & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & cb + da \\ 0 & ca \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = B \cdot A,$$

јер су сабирање и множење у скупу реалних бројева комутативне операције, следи да комутативност операције множења матрица у овом случају важи.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G : Слично као у претходном задатку, постоји неутрални елемент за операцију множења матрица. Лако уочавамо да је $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$, јер $1, 0 \in \mathbb{R}$ и $1 \neq 0$, па је то тражени неутрал.

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G : Како је $\det A = a^2 \neq 0$, јер је $a \neq 0$, следи да постоји инверзна матрица матрице A . Одредимо сада њену инверзну матрицу према формули:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

Даље, како је $\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2} \in \mathbb{R}$ и $\frac{1}{a} \neq 0$ ($a \neq 0$), можемо закључити да свака матрица $A \in G$ има инверзну матрицу $A^{-1} \in G$ у односу на операцију множења матрица.

Дакле, алгебарска структура $(G, \cdot)$ је Абелова група. ■

14. [Јунски рок, 2012/13. година] **а)** Дат је skup $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$.

Испитати природу структуре $(G, \cdot)$, где је $\cdot$ операција множења матрица.

б) Дата је матрица $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$. Одредити B^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа G за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу G :

Посматрајмо произвољне матрице $M(a), M(b) \in G$, тј. $M(a) = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ и $M(b) =$

$\begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix}$, где важи да је $a, b \in \mathbb{R}$ и $a, b \neq 0$. Како је

$$M(a) \cdot M(b) = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{bmatrix} = M(2ab),$$

при чему важи да је $2ab \in \mathbb{R}$ и $2ab \neq 0$, следи да је $M(a) \cdot M(b) \in G$, тј. да је skup G затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу G : Асоцијативност важи за множење матрица (објашњење је исто као у 12. задатку).

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу G : Операција множења матрица није увек комутативна, за разлику од операције сабирања матрица. С тим у вези, проверимо да ли важи једнакост $(\forall M(a), M(b) \in G) \quad M(a) \cdot M(b) = M(b) \cdot M(a)$. Како је

$$M(a) \cdot M(b) = M(2ab) = M(2ba) = M(b) \cdot M(a),$$

јер је множење у скупу реалних бројева комутативна операција, следи да комутативност операције множења матрица у овом случају важи.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G :

Приметимо да матрица $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin G$, па не може бити неутрални елемент скупа G .

Зато посматрајмо дефиницију неутрала. Неутрал у односу на операцију $\cdot$ дефинисан је релацијом $(\exists M(e) \in G)(\forall M(a) \in G) \quad M(a) \cdot M(e) = M(a) = M(e) \cdot M(a)$. Како је операција $\cdot$ комутативна, довољно је проверити постојање само левог, односно само десног неутрала. На пример, из једнакости $M(a) \cdot M(e) = M(2ae) = M(a)$ добијамо да је $2ae = a$, па следи да је $e = \frac{1}{2}$. Дакле, неутрал у односу на операцију $\cdot$ у скупу G је

$$M(e) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M\left(\frac{1}{2}\right) \in G,$$

јер $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ и $\frac{1}{2} \neq 0$.

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу G : Инверз у односу на операцију $\cdot$ дефинисан је релацијом $(\forall M(a) \in G)(\exists M(b) \in G) \quad M(a) \cdot M(b) = M\left(\frac{1}{2}\right) = M(b) \cdot M(a)$. Како је операција $\cdot$ комутативна, довољно је проверити постојање само левог, односно само десног инверза. На пример, из једнакости $M(a) \cdot M(b) = M(2ab) = M\left(\frac{1}{2}\right)$, добијамо да је $2ab = \frac{1}{2}$, па следи да је $b = \frac{1}{4a}$. Дакле, инверз у односу на операцију $\cdot$ у скупу G је

$$M(b) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \\ \frac{1}{4a} & \frac{1}{4a} \end{bmatrix} = M\left(\frac{1}{4a}\right) \in G,$$

јер $\frac{1}{4a} \in \mathbb{R}$ и $\frac{1}{4a} \neq 0$ ($a \neq 0$).

Према томе, алгебарска структура $(G, \cdot)$ је Абелова група.

б) Матрицу B можемо записати у облику

$$B = I + M\left(\frac{1}{2}\right),$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Како матрице I и $M\left(\frac{1}{2}\right)$ комутирају при множењу, тј. важи $I \cdot M\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right) \cdot I$, услов за примену биномне формуле на збир $I + M\left(\frac{1}{2}\right)$ је задовољен. Такође, важи и да је $M\left(\frac{1}{2}\right)^2 = M\left(\frac{1}{2}\right)$, па се *математичком индукцијом* једноставно може показати да је $M\left(\frac{1}{2}\right)^n = M\left(\frac{1}{2}\right)$, за све $n \in \mathbb{N}$. На основу тога, у наредној суми, применом биномне формуле (знајући да за сваку матрицу A важи $A^0 = I$), добијамо

$$\begin{aligned} B^n &= \left(I + M\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot I^{n-k} \cdot M\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot M\left(\frac{1}{2}\right) = I + (2^n - 1) \cdot M\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$B^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомена: Ако матрице $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ комутирају, тј. ако важи $A \cdot B = B \cdot A$, тада за сваки број $m \in \mathbb{N}$ важи биномна формула

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot A^{m-k} \cdot B^k.$$

Уколико матрице A и B не комутирају при множењу, наведена формула у општем случају не важи. ■

15. [Јулски рок, 2012/13. година] У скупу рационалних бројева дефинисана је операција $\circ$ са $a \circ b = ta + nb$, где су t и n дати цели бројеви. Испитати карактер алгебарске структуре $(\mathbb{Q}, \circ)$.

Решење: Особине *затворености*, *асоцијативности* и *комутиативности* за дату алгебарску структуру објашњене су у 11. задатку.

Неутрал у односу на операцију $\circ$ у скупу $\mathbb{Q}$: Неутрални елемент у односу на операцију $\circ$ дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{Q})(\forall a \in \mathbb{Q}) \ a \circ e = a = e \circ a$, тј. $ta + ne = a = te + na$, за свако a . Ово је испуњено за $t = n = 1$, и тада је $e = 0 \in \mathbb{Q}$ неутрални елемент, а операција $\circ$ своди се на обично сабирање.

Инверз у односу на операцију $\circ$ у скупу $\mathbb{Q}$: Инверзни елемент у односу на операцију $\circ$ дефинисан је релацијом $(\forall a \in \mathbb{Q})(\exists a' \in \mathbb{Q}) \ a \circ a' = e = a' \circ a$. Под претпоставком

постојања неутралног елемента сваки елемент $a \in \mathbb{Q}$ има свој инверзни елемент $a' = -a \in \mathbb{Q}$.

Према томе, за $m = n = 1$ структура $(\mathbb{Q}, \circ)$ је Абелова група. ■

16. [Септембарски рок, 2012/13. година] Испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{Q}^+, *)$, где је $\mathbb{Q}^+$ скуп позитивних рационалних бројева, а операција $*$ дефинисана као: $(\forall a, b \in \mathbb{Q}^+) a * b = \frac{ab}{a+b}$.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $*$:

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{Q}^+$ за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{Q}^+$:

Узмимо произвољне елементе $a, b \in \mathbb{Q}^+$. Тада је $ab \in \mathbb{Q}^+$ и $a + b \in \mathbb{Q}^+$, па важи $a * b = \frac{ab}{a+b} \in \mathbb{Q}^+$. Према томе, скуп $\mathbb{Q}^+$ је затворен за операцију $*$.

2) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{Q}^+$: Проверимо да ли важи једнакост $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^+) (a * b) * c = a * (b * c)$. Са једне стране, имамо

$$(a * b) * c = \left(\frac{ab}{a+b} \right) * c = \frac{\frac{ab}{a+b} \cdot c}{\frac{ab}{a+b} + c} = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Са друге стране, важи

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{bc}{b+c} \right) = \frac{a \cdot \frac{bc}{b+c}}{a + \frac{bc}{b+c}} = \frac{abc}{ab + ac + bc}.$$

Дакле, операција $*$ је асоцијативна у скупу $\mathbb{Q}^+$.

3) *Комутативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{Q}^+$: Како је

$$a * b = \frac{ab}{a+b} = \frac{ba}{b+a} = b * a,$$

слиди да је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{Q}^+$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{Q}^+$: С обзиром на то да је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{Q}^+$, довољно је проверити постојање неутралног елемента само са леве или само са десне стране. Неутрални елемент дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{Q}^+) (\forall a \in \mathbb{Q}^+) e * a = a = a * e$. Како је нпр. $a * e = \frac{ae}{a+e} = a$, множењем ове једнакости са $(a+e)$, добијамо да је $ae = a^2 + ae \implies a^2 = 0$, што је немогуће, јер је $a \in \mathbb{Q}^+$. Дакле, не постоји неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{Q}^+$, па се постојање инверзних елемената не разматра.

Дакле, алгебарска структура $(\mathbb{Q}^+, *)$ је комутативна семигрупа. ■

17. [Колоквијум, 2013/14. година] **а)** Испитати да ли је операција $*$ дефинисана са $x * y = xy - k(x + y - 1) + k^2$ унутрашња операција на скупу $\mathbb{R} \setminus \{k\}$.

б) Одредити вредности реалног параметра k тако да операција

$*$: $(\mathbb{R} \setminus \{k\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{k\}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{k\}$ буде асоцијативна.

Решење: а) Проверимо, најпре, да ли је операција $*$ унутрашња у скупу $\mathbb{R} \setminus \{k\}$, тј. да ли важи $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{k\}) \ x * y \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$. За $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$ очигледно важи $x * y \in \mathbb{R}$, јер је $x * y = xy - k(x + y - 1) + k^2$ реалан број (збир и производ реалних бројева је реалан број). Остаје још да проверимо да ли је $x * y \neq k$. Претпоставимо супротно, тј. нека је $x * y = k$. Тада је

$$\begin{aligned} x * y = k &\iff xy - k(x + y - 1) + k^2 = k \\ &\iff xy - kx - ky + k^2 = 0 \\ &\iff x(y - k) - k(y - k) = 0 \\ &\iff (x - k)(y - k) = 0 \\ &\iff x = k \vee y = k. \end{aligned}$$

Како је $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$, добијена могућност је немогућа, па је $x * y \neq k$. Према томе, важи $x * y \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$. Дакле, $*$ је унутрашња операција у скупу $\mathbb{R} \setminus \{k\}$.

б) Одредимо сада вредности параметра $k \in \mathbb{R}$ за које је операција $*$ асоцијативна, тј. за које важи $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{k\}) \ (x * y) * z = x * (y * z)$. Лева страна ове једнакости једнака је:

$$\begin{aligned} L &= (x * y) * z = (xy - k(x + y - 1) + k^2) * z \\ &= (xy - kx - ky + k + k^2)z - k(xy - kx - ky + k + k^2 + z - 1) + k^2 \\ &= xyz - kxz - kyz + kz + k^2z - kxy + k^2x + k^2y - k^2 - k^3 - kz + k + k^2 \\ &= xyz - kxy - kxz - kyz + k^2x + k^2y + k^2z - k^3 + k. \end{aligned}$$

Десна страна ове једнакости једнака је:

$$\begin{aligned} D &= x * (y * z) = x * (yz - k(y + z - 1) + k^2) \\ &= x(yz - ky - kz + k + k^2) - k(x + yz - ky - kz + k + k^2 - 1) + k^2 \\ &= xyz - kxy - kxz + kx + k^2x - kx - kyz + k^2y + k^2z - k^2 - k^3 + k + k^2 \\ &= xyz - kxy - kxz - kyz + k^2x + k^2y + k^2z - k^3 + k. \end{aligned}$$

Пошто је $L = D$ за свако $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$ и за свако $k \in \mathbb{R}$, операција $*$ је асоцијативна за свако $k \in \mathbb{R}$. Дакле, $*$ је асоцијативна за свако $k \in \mathbb{R}$. ■

18. [Колоквијум, 2013/14. година] Испитати да ли важи закон дистрибутивности операције $\circ$ у односу на операцију $\oplus$ у структури $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$, где су $\oplus$ и $\circ$ дефинисане са $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ и $(a, b) \circ (c, d) = (ad - bc, bd)$.

Решење: Испитајмо да ли важи *дистрибутивност* операције $\circ$ у односу на операцију $\oplus$, тј. да ли важе следеће релације:

$$(\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2) \quad (a, b) \circ ((c, d) \oplus (e, f)) = ((a, b) \circ (c, d)) \oplus ((a, b) \circ (e, f))$$

и

$$(\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2) \quad ((a, b) \oplus (c, d)) \circ (e, f) = ((a, b) \circ (e, f)) \oplus ((c, d) \circ (e, f)).$$

Проверимо најпре леву дистрибутивност. Са једне стране је

$$\begin{aligned} L_1 &= (a, b) \circ ((c, d) \oplus (e, f)) \\ &= (a, b) \circ (c + e, d + f) \\ &= (a(d + f) - b(c + e), b(d + f)) \\ &= (ad + af - bc - be, bd + bf), \end{aligned}$$

док је, са друге стране,

$$\begin{aligned} D_1 &= ((a, b) \circ (c, d)) \oplus ((a, b) \circ (e, f)) \\ &= (ad - bc, bd) \oplus (af - be, bf) \\ &= (ad - bc + af - be, bd + bf). \end{aligned}$$

Дакле, важи $L_1 = D_1$, па је испуњена лева дистрибутивност.

Проверимо сада десну дистрибутивност. Са једне стране је

$$\begin{aligned} L_2 &= ((a, b) \oplus (c, d)) \circ (e, f) \\ &= (a + c, b + d) \circ (e, f) \\ &= ((a + c)f - (b + d)e, (b + d)f) \\ &= (af + cf - be - de, bf + df), \end{aligned}$$

док је, са друге стране,

$$\begin{aligned} D_2 &= ((a, b) \circ (e, f)) \oplus ((c, d) \circ (e, f)) \\ &= (af - be, bf) \oplus (cf - de, df) \\ &= (af - be + cf - de, bf + df). \end{aligned}$$

Дакле, важи $L_2 = D_2$, па је испуњена и десна дистрибутивност.

Према томе, важи и лева и десна дистрибутивност операције $\circ$ у односу на операцију $\oplus$, па је операција $\circ$ дистрибутивна у односу на операцију $\oplus$. ■

19. [Јануарски рок, 2013/14. година] Дат је skup $G = \mathbb{Q}$ и операције $\oplus$ и $\otimes$ дефинисане са:

$$(\forall a, b \in G) \quad a \oplus b = a + b + 1,$$

$$(\forall a, b \in G) \quad a \otimes b = a + b + ab.$$

Испитати природу алгебарске структуре $(G, \oplus, \otimes)$.

Решење: Подсетимо се најпре следеће дефиниције: Ако су $(A, +, \cdot)$ и $(B, \oplus, \otimes)$ прстени са јединицом, онда се *бијективно* пресликавање $h : A \rightarrow B$ за које важи:

$$1) (\forall a, b \in A) \quad h(a + b) = h(a) \oplus h(b) \text{ и}$$

$$2) (\forall a, b \in A) \quad h(a \cdot b) = h(a) \otimes h(b)$$

назива *изоморфизам* прстена са јединицом.

Уочимо пресликавање $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (са операцијама $\oplus$ и $\otimes$), где је $\mathbb{Q}$ skup рационалних бројева, које је експлицитно задато формулом $f(x) = x - 1$. Пресликавање f има следеће особине:

1) f је *инјективно* („1-1”): Покажимо да важи формула

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q}) \quad f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Ако је $f(x) = f(y)$, онда је $x - 1 = y - 1$, одакле следи да је $x = y$.

2) f је *сурјективно* („НА”): Покажимо да важи формула

$$(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists x \in \mathbb{Q}) \quad f(x) = y.$$

За произвољно $y \in \mathbb{Q}$ постоји $x = y + 1 \in \mathbb{Q}$. Дакле, пресликавање f је бијекција.

3) f је *хомоморфизам*: За произвољне $x, y \in \mathbb{Q}$ важи

$$f(x + y) = x + y - 1 = (x - 1) + (y - 1) + 1 = f(x) \oplus f(y)$$

као и

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= x \cdot y - 1 = xy - x - y + 1 + x + y - 2 \\ &= (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1) = f(x) \otimes f(y). \end{aligned}$$

Према томе, структура $(G, \oplus, \otimes)$ је изоморфна са структуром $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, која је *поље*. Дакле, $(G, \oplus, \otimes)$ је *поље*.

Напомена: Ради потпуности, наведимо одговарајуће елементе у датим операцијама: *Неутрал* у односу на операцију $\oplus$ је -1 , јер је $a \oplus (-1) = a - 1 + 1 = a$. *Инверз* елемента $a \in \mathbb{Q}$ у односу на операцију $\oplus$ је $-a - 2$, јер је $a \oplus (-a - 2) = -1$. *Неутрал* у односу на операцију $\otimes$ је 0 , јер је $a \otimes 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$. Ако је $a \neq -1$, *инверз* елемента a у односу на операцију $\otimes$ добија се из једначине $a \otimes a' = 0 \iff a + a' + aa' = 0 \iff a'(a + 1) = -a$, па је $a' = -\frac{a}{a + 1}$. Према томе, сви елементи из $\mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ имају инверз у односу на операцију $\otimes$. Дакле, $(G, \oplus, \otimes)$ је *поље*. ■

20. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Нека је M скуп свих регуларних матрица дате димензије n , а $\oplus$ и $\otimes$ сабирање и множење матрица. Шта представљају следеће алгебарске структуре:

а) $(M, \oplus, \otimes)$,

б) $(P, \cdot)$ где је P скуп свих нула полинома $p(x) = x^3 - 1$?

Решење: **а)** Операција $\oplus$ не испуњава својство *затворености* у скупу M . Наиме, разматрајмо матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

такве да је $a_{ii} \neq 0$ и $b_{ii} \neq 0$ за све $i \in \{2, \dots, n\}$. Важи да је $\det A = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0$ и $\det B = -b_{22} \cdot b_{33} \cdot \dots \cdot b_{nn} \neq 0$, тј. матрице A и B су заиста *регуларне*, па $A, B \in M$. Међутим,

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} + b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

представља *сингуларну матрицу*, па скуп M није затворен за операцију $\oplus$. Према томе, $(M, \oplus)$ није чак ни *група*, па остале особине операција $\oplus$ и $\otimes$ у скупу M нема смисла испитивати. Дакле, $(M, \oplus, \otimes)$ није алгебарска структура попут *прстена* или *поља*.

Напомена: Чињеницу да скуп M није затворен за операцију $\oplus$, тј. за сабирање матрица, можемо показати и на следећи начин. Наиме, ако је $A = I_n$ и $B = -I_n$ (I_n је *јединична матрица* реда n), онда су A и B регуларне матрице, тј. $A, B \in M$. Међутим,

$$A \oplus B = I_n + (-I_n) = \mathbb{O}_n,$$

а нула матрица $\mathbb{O}_n$ није регуларна. Дакле, $A \oplus B \notin M$, па операција $\oplus$ није *унутрашња* операција у скупу M , тј. скуп M није затворен за операцију $\oplus$.

б) Како је $p(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, нуле овог полинома су

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Дакле, $P = \left\{1, -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Означимо са

$$\omega = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \omega^2 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тада је $P = \{1, \omega, \omega^2\}$ и важи $\omega^3 = 1$. Кејлијева таблица операције $\cdot$ у скупу P је

$\cdot$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

Из таблице видимо да важи *затвореност* скупа P у односу на операцију $\cdot$. Операција $\cdot$ је *асоцијативна*, јер се асоцијативност наслеђује из структуре $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Кејлијева таблица је симетрична у односу на главну дијагоналу, па је операција $\cdot$ *комутиативна*. *Неутрални елемент* је 1. *Инверзни елементи*: $1 \cdot 1 = 1$, $\omega \cdot \omega^2 = 1$, $\omega^2 \cdot \omega = 1$. Дакле, $(P, \cdot)$ је Абелова група. ■

21. [Јунски рок, 2013/14. година] Испитати својства алгебарске структуре $(S, \circ)$ где је $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ и $\circ$ је операција композиције пресликавања. Функције f_1, f_2, f_3, f_4 пресликавају скуп $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ у скуп $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и при томе је: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$.

Решење: Како је скуп S коначан, формирајмо Кејлијеву таблицу операције $\circ$ на скупу S :

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Из Кејлијеве таблице видимо да сви елементи добијени композицијом припадају скупу S , па важи *затвореност*. Операција $\circ$ је *асоцијативна*, јер је композиција пресликавања асоцијативна операција. Како је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, операција $\circ$ је *комутиативна*. Из таблице видимо да је *неутрални елемент* f_1 , јер за свако $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ важи $f_1 \circ f_i = f_i \circ f_1 = f_i$. Такође, сваки елемент има *инверзни елемент*: $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_2 \circ f_2 = f_1$, $f_3 \circ f_3 = f_1$ и $f_4 \circ f_4 = f_1$. Дакле, $(S, \circ)$ је Абелова група. ■

22. [Јулски рок, 2013/14. година] Дат је скуп функција $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, где је $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_5(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$, за $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Конструисати Кејлијеву таблицу за дати скуп G у односу на операцију композиције функција $\circ$. Испитати природу алгебарске структуре $(G, \circ)$.

Решење: Кејлијева таблица операције композиције $\circ$ на скупу G је:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

Из Кејлијевог таблице видимо да сви елементи добијени композицијом припадају скупу G , па важи *затвореност*. Операција $\circ$ је *асоцијативна*, јер је композиција пресликавања асоцијативна операција. Из таблице видимо да је f_1 *неутрални елемент*, јер је $f_1 \circ f_i = f_i \circ f_1 = f_i$, за свако $i = 1, 2, \dots, 6$. Такође, сваки елемент има *инверзни елемент*: $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_2 \circ f_2 = f_1$, $f_3 \circ f_3 = f_1$, $f_4 \circ f_5 = f_1$, $f_5 \circ f_4 = f_1$ и $f_6 \circ f_6 = f_1$. Међутим, операција $\circ$ није *комутативна*. На пример, $f_2 \circ f_3 = f_5$, а $f_3 \circ f_2 = f_4$, па је $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$. Дакле, $(G, \circ)$ је *група* која није *Абелова*. ■

23. [Септембарски рок, 2013/14. година] Испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{N}, *)$, где је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева, а операција $*$ дефинисана као $a * b = \max\{a, b\}$, за све $a, b \in \mathbb{N}$.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $*$:

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{N}$ за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{N}$:

Како за свака два природна броја $a, b \in \mathbb{N}$ важи $a * b = \max\{a, b\} \in \mathbb{N}$, следи да је скуп $\mathbb{N}$ затворен за операцију $*$.

2) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{N}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a * b) * c = a * (b * c)$. За произвољне $a, b, c \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= \max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, b, c\}, \\ a * (b * c) &= \max\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{a, b, c\}.\end{aligned}$$

Дакле, $(a * b) * c = a * (b * c)$, па је операција $*$ асоцијативна у скупу $\mathbb{N}$.

3) *Комутативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{N}$:

Како је $(\forall a, b \in \mathbb{N}) a * b = \max\{a, b\} = \max\{b, a\} = b * a$, следи да је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{N}$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{N}$:

Неутрални елемент дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{N}) a * e = a = e * a$. Како је операција $*$ комутативна, довољно је проверити постојање само левог, односно само десног неутрала. Из једнакости $a * e = a$ добијамо да је $\max\{a, e\} = a$, што треба да важи за свако $a \in \mathbb{N}$. Дакле, e мора бити најмањи природан број. Како је $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, добијамо да је $e = 1$, јер за свако $a \in \mathbb{N}$ важи

$$a * 1 = \max\{a, 1\} = a = \max\{1, a\} = 1 * a.$$

Према томе, $e = 1$ је неутрални елемент у односу на операцију $*$.

5) *Инверз* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{N}$:

Инверзни елемент елемента $a \in \mathbb{N}$ дефинисан је релацијом $(\forall a \in \mathbb{N})(\exists a' \in \mathbb{N}) a * a' = 1 = a' * a$. То значи да треба да важи $\max\{a, a'\} = 1$. Последња једнакост важи ако и само ако је $a = 1$ и $a' = 1$. Дакле, само неутрални елемент има инверзни елемент, док сви остали елементи скупа $\mathbb{N}$ немају инверз.

Према томе, структура $(\mathbb{N}, *)$ је асоцијативна, комутативна, има неутрални елемент, али није *група*, јер не поседује сваки елемент инверз.

Дакле, $(\mathbb{N}, *)$ је *комутативни моноид*. ■

24. [Октобарски рок, 2013/14. година] Дат је скуп матрица

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Испитати природу алгебарске структуре $(M, \cdot)$, где је $\cdot$ операција множења матрица.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа M за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу M :

Узмимо произвољне матрице $A, B \in M$, тј. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, при чему важи $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ и $ps - qr = 1$. Како је $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$ (према *Коши-Бинеовој теорему*), следи да је $A \cdot B \in M$, па је скуп M затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу M : Асоцијативност важи за множење матрица (видети 12. задатак), па се ова особина наслеђује из надструктуре $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$, где је $M_2(\mathbb{R})$ скуп свих квадратних матрица реда 2 над *пољем* реалних бројева.

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу M : Операција множења матрица није увек комутативна. Покажимо да комутативност не важи ни у овом скупу. Посматрајмо матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Како је $\det A = 1$ и $\det B = 1$, важи $A, B \in M$.

Међутим, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, па је $A \cdot B \neq B \cdot A$. Дакле, операција $\cdot$ није комутативна у скупу M .

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Неутрални елемент за множење матрица је *јединична матрица* $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Како је $\det I_2 = 1$, следи да је $I_2 \in M$, па је I_2 неутрални елемент у односу на операцију $\cdot$ у скупу M .

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M$. Тада је $\det A = ad - bc = 1 \neq 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, па матрица A има инверзну матрицу. Како је

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

важи $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$. Према томе, $A^{-1} \in M$, па свака матрица из скупа M има инверзну матрицу у скупу M у односу на операцију множења матрица.

Дакле, структура $(M, \cdot)$ је *група*, али није комутативна, па није *Абелова*.

Напомена: Ова група је позната као специјална линеарна група реда 2 над пољем реалних бројева и означава се са $SL(2, \mathbb{R})$. ■

25. [Колоквијум, 2014/15. година] На скупу реалних бројева дефинисана је операција $*$ са: $a * b = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $n \in \mathbb{N}$. У зависности од параметра n испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{R}, *)$.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $*$ у зависности од параметра $n \in \mathbb{N}$.

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{R}$ за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{R}$:

Нека су $a, b \in \mathbb{R}$. Ако је n непаран природан број, тада је $a^n + b^n \in \mathbb{R}$, па је $\sqrt[n]{a^n + b^n} \in \mathbb{R}$. Ако је n паран природан број, тада је $a^n \geq 0$ и $b^n \geq 0$, па је $a^n + b^n \geq 0$, одакле следи да је и $\sqrt[n]{a^n + b^n} \in \mathbb{R}$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $a * b \in \mathbb{R}$, па је скуп $\mathbb{R}$ затворен за операцију $*$.

2) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{R}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}) (a * b) * c = a * (b * c)$. За произвољне $a, b, c \in \mathbb{R}$ имамо

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= \sqrt[n]{(a * b)^n + c^n} = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \\ a * (b * c) &= \sqrt[n]{a^n + (b * c)^n} = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је $(a * b) * c = a * (b * c)$, па је операција $*$ асоцијативна у скупу $\mathbb{R}$.

3) *Комутативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{R}$:

За произвољне $a, b \in \mathbb{R}$ важи $a * b = \sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{b^n + a^n} = b * a$, па је операција $*$ комутативна у скупу $\mathbb{R}$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R}$: С обзиром на то да је операција $*$ комутативна, довољно је испитати постојање неутралног елемента само са једне стране. Неутрални елемент дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R}) \ a * e = a = e * a$. Из једнакости $a * e = a$ добијамо $\sqrt[n]{a^n + e^n} = a$. Ако је n непаран природан број, тада је претходна једнакост еквивалентна са $a^n + e^n = a^n$, па је $e^n = 0$, тј. $e = 0$. Дакле, за непаран број n постоји неутрални елемент и он је $e = 0 \in \mathbb{R}$. Ако је n паран природан број, тада је $\sqrt[n]{a^n + e^n} \geq 0$ за свако $a, e \in \mathbb{R}$, па једнакост $\sqrt[n]{a^n + e^n} = a$ не може да важи за свако $a \in \mathbb{R}$, јер је за $a < 0$ десна страна ове једнакости негативна. Дакле, за паран број n не постоји неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R}$.

5) *Инверз* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathbb{R}$: Инверзне елементе разматрамо само у случају када постоји неутрални елемент, тј. када је n непаран природан број. Тада је $e = 0$. Инверзни елемент дефинисан је релацијом $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists a' \in \mathbb{R}) \ a * a' = e = a' * a$. Због комутативности операције $*$ довољно је испитати постојање инверзног елемента само са једне стране. За произвољни елемент $a \in \mathbb{R}$ тражимо $a' \in \mathbb{R}$ тако да важи $a * a' = 0$. Имамо $a * a' = 0 \iff \sqrt[n]{a^n + (a')^n} = 0 \iff a^n + (a')^n = 0 \iff (a')^n = (-a)^n$. Како је n непаран природан број, добијамо $a' = -a$. Према томе, сваки елемент $a \in \mathbb{R}$ има инверзни елемент $a' = -a \in \mathbb{R}$.

Дакле, ако је n паран природан број, структура $(\mathbb{R}, *)$ је *комутативна семигрупа*. Ако је n непаран природан број, структура $(\mathbb{R}, *)$ је *Абелова група*. Коначно,

$$(\mathbb{R}, *) \text{ је } \begin{cases} \text{комутативна семигрупа, за } n \text{ парно} \\ \text{Абелова група, за } n \text{ непарно} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

26. [Колоквијум, 2014/15. година] а) Дат је скуп $\mathbb{M} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Испитати природу структуре $(\mathbb{M}, \cdot)$, где је $\cdot$ множење матрица.

б) Дата је матрица $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$. Наћи X^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{M}$ за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{M}$:

Узмимо произвољне матрице $A, B \in \mathbb{M}$, тј. $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & u \end{bmatrix}$, при чему су $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Тада је

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xu & xv + yu \\ 0 & xu \end{bmatrix}.$$

Како је $xu, xv + yu \in \mathbb{R}$, следи да је $A \cdot B \in \mathbb{M}$, па је скуп $\mathbb{M}$ затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу $\mathbb{M}$: Асоцијативност важи за множење матрица (видети 12. задатак), па се ова особина наслеђује из надструктуре $(M_2(\mathbb{R}), \cdot)$, где је $M_2(\mathbb{R})$ скуп свих квадратних матрица реда 2 над *пољем* реалних бројева.

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу $\mathbb{M}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall A, B \in \mathbb{M}) \quad A \cdot B = B \cdot A$. За претходно изабране матрице A и B важи

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} xu & xv + yu \\ 0 & xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ux & uy + vx \\ 0 & ux \end{bmatrix} = B \cdot A,$$

јер у скупу $\mathbb{R}$ важе комутативност сабирања и множења, тј. имамо да је $xu = ux$ и $xv + yu = uy + vx$. Дакле, операција $\cdot$ је комутативна у скупу $\mathbb{M}$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу $\mathbb{M}$: Неутрални елемент је *јединична* матрица $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$, јер је $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ облика $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ за $x = 1$ и $y = 0$.

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу $\mathbb{M}$: Посматрајмо произвољну матрицу $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathbb{M}$. Ако је $x = 0$, онда је $A = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ за коју је $\det A = 0$, па матрица A није инвертибилна. Дакле, не поседује сваки елемент скупа $\mathbb{M}$ инверзни елемент у односу на операцију множења матрица. Према томе, структура $(\mathbb{M}, \cdot)$ није *група*.

Из претходно испитаних особина следи да је структура $(\mathbb{M}, \cdot)$ *комутативни моноид*.

б) Дату матрицу запишимо у облику

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} = xI + yA,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Пошто матрице xI и yA комутирају при множењу, тј. важи $I \cdot A = A \cdot I$, услов за примену *биномне формуле* на збир $xI + yA$ је задовољен (видети напомену у 14. задатку). Такође, важи и да је $A^2 = \mathbb{O}$, па се *математичком индукцијом* једноставно може показати да је $A^n = \mathbb{O}$, за све $n \geq 2$. На основу тога, у наредној суми, у којој примењујемо биномну формулу (знајући да за сваку матрицу A важи $A^0 = I$), имамо само два ненулта сабирка, тј. добијамо

$$\begin{aligned} X^n &= (xI + yA)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (xI)^{n-k} \cdot (yA)^k \\ &= x^n I + nx^{n-1}yA = \begin{bmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$X^n = \begin{bmatrix} x^n & nx^{n-1}y \\ 0 & x^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

27. [Јануарски рок, 2014/15. година] За дато $\alpha \in \mathbb{Z}$, у скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ дефинисана је бинарна операција $*$ на следећи начин: $x * y = x^\alpha y^\alpha$. У зависности од вредности целобројног параметра α испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$.

Решење: Проверимо које од следећих особина задовољава операција $*$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1) *Затвореност* скупа $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: За произвољне $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и за свако $\alpha \in \mathbb{Z}$ важи $x^\alpha \neq 0$ и $y^\alpha \neq 0$, па је $x * y = x^\alpha y^\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дакле, скуп $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ је затворен за операцију $*$, па је $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ *група* за свако $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2) *Комутативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: Како за произвољне $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и за свако $\alpha \in \mathbb{Z}$ важи $x * y = x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = y * x$, следи да је операција $*$ комутативна за свако $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: Проверимо да ли важи једнакост $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (x * y) * z = x * (y * z)$. Са једне стране је

$$(x * y) * z = (x^\alpha \cdot y^\alpha)^\alpha \cdot z^\alpha = x^{\alpha^2} \cdot y^{\alpha^2} \cdot z^\alpha,$$

док је, са друге стране,

$$x * (y * z) = x^\alpha \cdot (y^\alpha \cdot z^\alpha)^\alpha = x^\alpha \cdot y^{\alpha^2} \cdot z^{\alpha^2}.$$

Зато је операција $*$ асоцијативна ако и само ако за свако $x, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ важи

$$x^{\alpha^2} \cdot z^\alpha = x^\alpha \cdot z^{\alpha^2}, \text{ тј. } x^{\alpha^2 - \alpha} = z^{\alpha^2 - \alpha}.$$

Последња једнакост важи за све $x, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ако и само ако је $\alpha^2 - \alpha = 0$, тј. $\alpha(\alpha - 1) = 0$. Дакле, операција $*$ је асоцијативна ако и само ако је $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$.

Сада разликујемо следеће случајеве:

а) Ако је $\alpha = 1$, тада је

$$x * y = xy,$$

па је операција $*$ обично множење реалних бројева различитих од нуле. У том случају структура $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ има *неутрални елемент* $e = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и сваки елемент $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ има *инверзни елемент* $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а операција је асоцијативна и комутативна.

Дакле, $\boxed{\alpha = 1 \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *) \text{ је Абелова група.}}$

б) Ако је $\alpha = 0$, тада је

$$x * y = x^0 y^0 = 1,$$

за све $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Операција је асоцијативна и комутативна, али не постоји неутрални елемент, јер би из услова $x * e = x$ за свако $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ следило $x = 1$ за свако $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, што је немогуће.

Дакле, $\boxed{\alpha = 0 \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *) \text{ је комутативна семигрупа.}}$

в) Ако је $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, тада операција $*$ није асоцијативна, али је комутативна и унутрашња у скупу $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Дакле, $\boxed{\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, *) \text{ је комутиативни групоид.}}$

Коначно,

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *) \text{ је } \begin{cases} \text{Абелова група,} & \text{ако је } \alpha = 1 \\ \text{комутативна семигрупа,} & \text{ако је } \alpha = 0 \\ \text{комутативни групоид,} & \text{ако је } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \end{cases} . \quad \blacksquare$$

28. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Нека је $M = \{M(a, \alpha) \mid a > 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$, где је

$M(a, \alpha) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Испитати алгебарску структуру $(M, \cdot)$ где $\cdot$ означава множење матрица.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа M за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу M :

Узмимо произвољне матрице $M(a, \alpha), M(b, \beta) \in M$, где је $a, b > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је

$$\begin{aligned} M(a, \alpha) \cdot M(b, \beta) &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M(a \cdot b, \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Како из $a, b > 0$ следи $a \cdot b > 0$, а из $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следи $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$, добијамо да је $M(a \cdot b, \alpha + \beta) \in M$. Према томе, скуп M је затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу M : Операција множења матрица је асоцијативна у скупу свих квадратних матрица реда 3 (видети 12. задатак), па се ова особина наслеђује и у подскупу M тог скупа. Дакле, за све $M(a, \alpha), M(b, \beta), M(c, \gamma) \in M$ важи

$$(M(a, \alpha) \cdot M(b, \beta)) \cdot M(c, \gamma) = M(a, \alpha) \cdot (M(b, \beta) \cdot M(c, \gamma)).$$

Према томе, операција $\cdot$ је асоцијативна у скупу M .

3) *Комутиативност* операције $\cdot$ у скупу M :

Проверимо да ли важи $(\forall M(a, \alpha), M(b, \beta) \in M) \quad M(a, \alpha) \cdot M(b, \beta) = M(b, \beta) \cdot M(a, \alpha)$.

Са једне стране је

$$M(a, \alpha) \cdot M(b, \beta) = M(a \cdot b, \alpha + \beta),$$

док је, са друге стране,

$$M(b, \beta) \cdot M(a, \alpha) = M(b \cdot a, \beta + \alpha).$$

Како је $a \cdot b = b \cdot a$ и $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, следи да је $M(a, \alpha) \cdot M(b, \beta) = M(b, \beta) \cdot M(a, \alpha)$, па је операција $\cdot$ комутативна у скупу M .

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Неутрални елемент за множење матрица је *јединична матрица*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како је $I_3 = M(1, 0) \in M$, јер је $1 > 0$ и $0 \in \mathbb{R}$, следи да у скупу M постоји неутрални елемент у односу на операцију $\cdot$.

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу M :

За произвољну матрицу $M(a, \alpha) \in M$ потражимо матрицу $M(a', \alpha') \in M$ такву да важи $M(a, \alpha) \cdot M(a', \alpha') = I_3$, јер је због комутативности операције множења матрица довољно инверз потражити само са једне стране. Како је

$$M(a, \alpha) \cdot M(a', \alpha') = M(a \cdot a', \alpha + \alpha'),$$

добивамо услове $a \cdot a' = 1$ и $\alpha + \alpha' = 0$. Одавде следи да је $a' = \frac{1}{a}$ и $\alpha' = -\alpha$. Према томе,

$$M(a, \alpha)^{-1} = M\left(\frac{1}{a}, -\alpha\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Како из $a > 0$ следи $\frac{1}{a} > 0$, а из $\alpha \in \mathbb{R}$ следи $-\alpha \in \mathbb{R}$, добијамо да је $M\left(\frac{1}{a}, -\alpha\right) \in M$. Дакле, свака матрица из скупа M има инверзну матрицу у скупу M .

Према томе, алгебарска структура $(M, \cdot)$ је Абелова група. ■

29. [Јулски рок, 2014/15. година] Дат је скуп $A = \{\top, \perp\}$. Испитати природу алгебарске структуре $(A, \wedge)$, где је $\wedge$ логичка операција конјункције.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција конјункције $\wedge$:

1) *Затвореност* скупа A за операцију $\wedge$, тј. операција $\wedge$ је *бинарна* у скупу A :

Кејлијева таблица скупа $A = \{\top, \perp\}$ у односу на операцију $\wedge$ је

$\wedge$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Из таблице видимо да за свако $x, y \in A$ важи $x \wedge y \in A$, па је скуп A затворен за операцију $\wedge$.

2) *Асоцијативност* операције $\wedge$ у скупу A :

x	y	z	$(x \wedge y) \wedge z$	$x \wedge (y \wedge z)$
⊤	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊥	⊥
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

Из таблице видимо да за произвољне $x, y, z \in A$ изрази $(x \wedge y) \wedge z$ и $x \wedge (y \wedge z)$ имају вредност $\top$ ако и само ако је $x = y = z = \top$. У свим осталим случајевима оба израза имају вредност $\perp$. Према томе, $(\forall x, y, z \in A) (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, па је операција $\wedge$ асоцијативна у скупу A .

3) *Комутативност* операције $\wedge$ у скупу A : Како је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, важи $(\forall x, y \in A) x \wedge y = y \wedge x$, па је операција $\wedge$ комутативна у скупу A , што се може видети и из таблице

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$
⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥

4) *Неутрал* у односу на операцију $\wedge$ у скупу A : За сваки елемент $x \in A$ важи $x \wedge \top = x = \top \wedge x$, па је $\top$ неутрални елемент у односу на операцију $\wedge$ у скупу A .

5) *Инверз* у односу на операцију $\wedge$ у скупу A : Елемент $\top$ је инверзан самом себи, јер је $\top \wedge \top = \top$. Међутим, за сваки $x' \in A$ важи $\perp \wedge x' = x' \wedge \perp = \perp \neq \top$, па елемент $\perp$ нема инверзни елемент у скупу A . Према томе, структура $(A, \wedge)$ није *группа*.

Дакле, алгебарска структура $(A, \wedge)$ је *комутативни моноид*. ■

30. [Колоквијум, 2015/16. година] Испитати природу алгебарске структуре $(S, *)$, где је $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$ и бинарна операција $*$ дефинисана изразом

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d).$$

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $*$:

1) *Затвореност* скупа S за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу S :

Узмимо произвољне елементе $(a, b), (c, d) \in S$. Тада је $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ и $a, c \neq 0$. Како је $ac \in \mathbb{Q}, bc + c + d \in \mathbb{Q}$ и $ac \neq 0$, следи да је $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + c + d) \in S$. Према томе, скуп S је затворен за операцију $*$.

2) Асоцијативност операције $*$ у скупу S : За произвољне $(a, b), (c, d), (e, f) \in S$ важи

$$\begin{aligned} ((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (ac, bc + c + d) * (e, f) \\ &= (ace, (bc + c + d)e + e + f) \\ &= (ace, bce + ce + de + e + f), \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} (a, b) * ((c, d) * (e, f)) &= (a, b) * (ce, de + e + f) \\ &= (ace, bce + ce + de + e + f). \end{aligned}$$

Дакле, $((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a, b) * ((c, d) * (e, f))$, па је операција $*$ асоцијативна у скупу S .

3) Комутативност операције $*$ у скупу S : Операција $*$ није комутативна.

На пример,

$$(1, 0) * (2, 0) = (2, 2), \quad (2, 0) * (1, 0) = (2, 1),$$

па је $(1, 0) * (2, 0) \neq (2, 0) * (1, 0)$.

4) Неутрал у односу на операцију $*$ у скупу S : Како операција $*$ није комутативна, потражимо и леви и десни неутрални елемент. Нека је $(e_1, e_2) \in S$. Из услова да је (e_1, e_2) десни неутрал добијамо

$$\begin{aligned} (a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) &\iff (ae_1, be_1 + e_1 + e_2) = (a, b) \\ &\iff e_1 = 1 \wedge e_2 = -1. \end{aligned}$$

Са друге стране,

$$(1, -1) * (a, b) = (a, -a + a + b) = (a, b),$$

па је $(1, -1)$ уједно и леви неутрални елемент. Како је $(1, -1) \in S$, јер $1, -1 \in \mathbb{Q}$ и $1 \neq 0$, следи да је $e = (1, -1)$ неутрални елемент у односу на операцију $*$ у скупу S .

5) Инверз у односу на операцију $*$ у скупу S : Нека је $(a, b) \in S$. Десни инверз $(c, d) \in S$ одређен је условом

$$\begin{aligned} (a, b) * (c, d) = (1, -1) &\iff (ac, bc + c + d) = (1, -1) \\ &\iff c = \frac{1}{a} \wedge d = -1 - \frac{b+1}{a}. \end{aligned}$$

За тако добијени елемент важи и

$$\left(\frac{1}{a}, -1 - \frac{b+1}{a}\right) * (a, b) = \left(1, \left(-1 - \frac{b+1}{a}\right) \cdot a + a + b\right) = (1, -1),$$

па је он уједно и леви инверз. Пошто је $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a \neq 0$, имамо да је $\frac{1}{a}, -1 - \frac{b+1}{a} \in \mathbb{Q}$ и $\frac{1}{a} \neq 0$, те овај елемент припада скупу S . Према томе, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -1 - \frac{b+1}{a}\right)$.

Дакле, алгебарска структура $(S, *)$ је *група*. ■

31. [Колоквијум, 2015/16. година] Дат је скуп $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, a + b\sqrt{2} > 0 \right\}$.

Испитати природу алгебарске структуре $(S, \cdot)$, где је операција $\cdot$ множење матрица.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) *Затвореност* скупа S за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу S :

Посматрајмо произвољне матрице

$$X = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \text{ и } Y = \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

из скупа S , при чему је $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1 + b_1\sqrt{2} > 0$ и $a_2 + b_2\sqrt{2} > 0$. Тада је

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 2b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2(a_1b_2 + b_1a_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{bmatrix}.$$

Како је $a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1b_2 + b_1a_2 \in \mathbb{Q}$ и

$$a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{2} = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) > 0,$$

следи да је $X \cdot Y \in S$, па је скуп S затворен за операцију $\cdot$.

2) *Асоцијативност* операције $\cdot$ у скупу S : Асоцијативност важи, јер је множење матрица асоцијативна операција (видети 12. задатак).

3) *Комутативност* операције $\cdot$ у скупу S : За произвољне матрице $X, Y \in S$ важи

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} a_1a_2 + 2b_1b_2 & 2(a_1b_2 + b_1a_2) \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 + 2b_1b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2a_1 + 2b_2b_1 & 2(a_2b_1 + b_2a_1) \\ a_2b_1 + b_2a_1 & a_2a_1 + 2b_2b_1 \end{bmatrix} = Y \cdot X,$$

па је операција $\cdot$ комутативна у скупу S .

4) *Неутрал* у односу на операцију $\cdot$ у скупу S : *Јединична матрица*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

припада скупу S , јер је $1, 0 \in \mathbb{Q}$ и $1 + 0 \cdot \sqrt{2} = 1 > 0$. Према томе, I_2 је неутрални елемент у односу на операцију $\cdot$ у скупу S .

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу S : Нека је

$$X = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \in S.$$

Најпре покажимо да је $\det X = a^2 - 2b^2 \neq 0$. Претпоставимо супротно да је $a^2 = 2b^2$. Ако је $b \neq 0$, онда би било $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, што је немогуће јер је $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, а $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ако је $b = 0$, онда би било и $a = 0$, што је немогуће јер је $a + b\sqrt{2} > 0$. Дакле, $\det X \neq 0$, па постоји инверзна матрица матрице X

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} \cdot \text{adj} X = \frac{1}{a^2 - 2b^2} \cdot \begin{bmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Како елементи ове матрице $\frac{a}{a^2 - 2b^2}$ и $-\frac{b}{a^2 - 2b^2}$ припадају скупу $\mathbb{Q}$ и

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} > 0,$$

слиди да $X^{-1} \in S$, па свака матрица из скупа S има инверзни елемент у скупу S .

Дакле, алгебарска структура $(S, \cdot)$ је Абелова група. ■

32. [Колоквијум, 2022/23. година] Испитати природу алгебарске структуре $(\mathbb{C}, \circ)$, где је $\mathbb{C}$ скуп комплексних бројева, а $\circ$ операција дефинисана са

$$(a + ib) \circ (c + id) = ac + i(b + ad).$$

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција $\circ$:

1) Затвореност скупа $\mathbb{C}$ за операцију $\circ$, тј. операција $\circ$ је бинарна у скупу $\mathbb{C}$:

За произвољне елементе $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$, при чему је $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, важи

$$(a + ib) \circ (c + id) = ac + i(b + ad) \in \mathbb{C},$$

јер је $ac \in \mathbb{R}$ и $b + ad \in \mathbb{R}$. Према томе, скуп $\mathbb{C}$ је затворен за операцију $\circ$.

2) Асоцијативност операције $\circ$ у скупу $\mathbb{C}$: Проверимо да ли важи једнакост

$$(\forall a + ib, c + id, e + if \in \mathbb{C}) ((a + ib) \circ (c + id)) \circ (e + if) = (a + ib) \circ ((c + id) \circ (e + if)).$$

Са једне стране је

$$((a + ib) \circ (c + id)) \circ (e + if) = (ac + i(b + ad)) \circ (e + if) = ace + i(b + ad + acf),$$

док је, са друге стране,

$$\begin{aligned} (a + ib) \circ ((c + id) \circ (e + if)) &= (a + ib) \circ (ce + i(d + cf)) = ace + i(b + a(d + cf)) \\ &= ace + i(b + ad + acf). \end{aligned}$$

Дакле, операција $\circ$ је асоцијативна у скупу $\mathbb{C}$.

3) Комутативност операције $\circ$ у скупу $\mathbb{C}$: За произвољне елементе $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$ важи $(a + ib) \circ (c + id) = ac + i(b + ad) \neq ca + i(d + cb) = (c + id) \circ (a + ib)$. Како у

општем случају није испуњена једнакост $b + ad = d + cb$, операција $\circ$ није комутативна у скупу $\mathbb{C}$. На пример, $(1 + i) \circ 2 = 2 + i \neq 2 + 2i = 2 \circ (1 + i)$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $\circ$ у скупу $\mathbb{C}$: Пошто операција $\circ$ није комутативна, потражимо и леви и десни неутрални елемент. Нека је $e = e_1 + ie_2 \in \mathbb{C}$. Десни неутрал дефинисан је релацијом $(\exists e \in \mathbb{C})(\forall a + ib \in \mathbb{C}) (a + ib) \circ e = a + ib$. Како је

$$(a + ib) \circ (e_1 + ie_2) = ae_1 + i(b + ae_2),$$

мора да важи

$$ae_1 = a \wedge b + ae_2 = b$$

за све $a, b \in \mathbb{R}$, одакле следи да је $e_1 = 1$ и $e_2 = 0$. Дакле, десни неутрал је $e = 1$.

Проверимо да ли је 1 уједно и леви неутрал. За свако $a + ib \in \mathbb{C}$ важи

$$1 \circ (a + ib) = (1 + i \cdot 0) \circ (a + ib) = a + i(0 + b) = a + ib.$$

Дакле, $e = 1$ је и леви неутрал. Према томе, $e = 1 \in \mathbb{C}$ је неутрални елемент у односу на операцију $\circ$.

5) *Инверз* у односу на операцију $\circ$ у скупу $\mathbb{C}$: Нека је $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Да би елемент $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ био десни инверз елемента z , потребно је да важи

$$\begin{aligned} (a + ib) \circ (a' + ib') &= 1 \iff aa' + i(b + ab') = 1 + i \cdot 0 \\ &\iff aa' = 1 \wedge b + ab' = 0. \end{aligned}$$

Ако је $a \neq 0$, добијамо да је $a' = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ и $b' = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$, па је $z' = \frac{1}{a} - i \cdot \frac{b}{a}$. За овако одређен елемент важи и

$$\left(\frac{1}{a} - i \cdot \frac{b}{a}\right) \circ (a + ib) = 1 + i \cdot \left(-\frac{b}{a} + \frac{b}{a}\right) = 1,$$

па је z' истовремено и леви инверз. Дакле, сваки елемент $a + ib$, за који је $a \neq 0$, има инверз $(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a} - i \cdot \frac{b}{a}$. Међутим, ако је $a = 0$, једнакост $aa' = 1$ не може бити испуњена, па елементи облика ib , $b \in \mathbb{R}$, немају инверз у односу на операцију $\circ$. Према томе, структура $(\mathbb{C}, \circ)$ није *група*.

Дакле, операција $\circ$ је затворена и асоцијативна у скупу $\mathbb{C}$ и има неутрални елемент, али није комутативна и нема сваки елемент инверз.

Према томе, алгебарска структура $(\mathbb{C}, \circ)$ је *моноид*. ■

33. [Поправни колоквијум, 2022/23. година] Нека је $\mathcal{M}$ скуп свих квадратних матрица реда n , где је $n \in \mathbb{N}$, на којем је дефинисана операција $*$ са $A * B = 2023 \cdot B$, где је операција $\cdot$ множење матрица реалним бројем.

а) Испитати све особине операције $*$ на скупу $\mathcal{M}$.

б) Одредити природу алгебарске структуре $(\mathcal{M}, *)$.

Решење: а) Проверимо које од следећих особина задовољава операција $*$:

1) *Затвореност* скупа $\mathcal{M}$ за операцију $*$, тј. операција $*$ је *бинарна* у скупу $\mathcal{M}$:

За произвољне матрице $A, B \in \mathcal{M}$ важи $A * B = 2023 \cdot B \in \mathcal{M}$, јер је производ квадратне матрице реда n реалним бројем поново квадратна матрица реда n . Према томе, скуп $\mathcal{M}$ је затворен за операцију $*$.

2) *Асоцијативност* операције $*$ у скупу $\mathcal{M}$:

Проверимо да ли важи једнакост $(\forall A, B, C \in \mathcal{M}) (A * B) * C = A * (B * C)$. Са једне стране је

$$(A * B) * C = (2023 \cdot B) * C = 2023 \cdot C,$$

док је, са друге стране,

$$A * (B * C) = A * (2023 \cdot C) = 2023 \cdot (2023 \cdot C) = 2023^2 \cdot C.$$

Одавде видимо да посматрана једнакост не важи за свако $C \in \mathcal{M}$, тј. у општем случају, већ само када је $C = \mathbb{O}_{n \times n}$. На пример, за $C = I_n$ је $2023 \cdot I_n \neq 2023^2 \cdot I_n$. Дакле, операција $*$ није асоцијативна у скупу $\mathcal{M}$.

3) *Комутативност* операције $*$ у скупу $\mathcal{M}$: Проверимо да ли важи једнакост $(\forall A, B \in \mathcal{M}) A * B = B * A$. За произвољне матрице $A, B \in \mathcal{M}$ имамо

$$A * B = 2023 \cdot B \text{ и } B * A = 2023 \cdot A,$$

па посматрана једнакост не важи у општем случају, већ само када је $A = B$. На пример, за $A = \mathbb{O}_{n \times n}$ и $B = I_n$ важи $A * B = 2023 \cdot I_n$, док је $B * A = \mathbb{O}_{n \times n}$.

Према томе, операција $*$ није комутативна у скупу $\mathcal{M}$.

4) *Неутрал* у односу на операцију $*$ у скупу $\mathcal{M}$: Како операција $*$ није комутативна, потребно је испитати постојање левог и десног неутралног елемента. Леви неутрални елемент био би матрица $E_L \in \mathcal{M}$ таква да важи

$$(\forall A \in \mathcal{M}) E_L * A = A.$$

Међутим, из дефиниције операције добијамо $E_L * A = 2023 \cdot A$, па би морало да важи $2023 \cdot A = A$, одакле добијамо да је $A = \mathbb{O}_{n \times n}$ за сваку матрицу $A \in \mathcal{M}$, што није тачно. Дакле, леви неутрални елемент не постоји.

Десни неутрални елемент био би матрица $E_D \in \mathcal{M}$ таква да важи

$$(\forall A \in \mathcal{M}) A * E_D = A.$$

Како је $A * E_D = 2023 \cdot E_D$, следило би да једна иста матрица $2023 \cdot E_D$ мора бити једнака свакој матрици $A \in \mathcal{M}$, па је $E_D = 2023^{-1} \cdot A$, што је немогуће, јер неутрал не сме да зависи од A . Дакле, десни неутрални елемент не постоји.

Према томе, неутрални елемент у односу на операцију $*$ не постоји. Како неутрални елемент не постоји, не разматрамо постојање инверзних елемената.

б) Пошто је операција $*$ бинарна, а није ни асоцијативна ни комутативна у скупу $\mathcal{M}$, и не постоји неутрал у односу на операцију $*$ у скупу $\mathcal{M}$, алгебарска структура $(\mathcal{M}, *)$ је *trivial*. ■

34. [Колоквијум, 2023/24. година] Дат је скуп $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_3)$. Испитати природу алгебарске структуре $(\mathcal{M}, \circ)$, где је $\circ$ операција дефинисана са:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a +_3 x & b +_3 y \\ c +_3 z & d +_3 t \end{bmatrix},$$

при чему су $a, b, c, d, x, y, z, t \in \mathbb{Z}_3$.

Решење: На почетку истакнимо да је $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ скуп свих квадратних матрица реда 2 чији су елементи из поља $\mathbb{Z}_3$, тј. поља остатака при дељењу са 3. Уведимо ознаке

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тада је $\mathcal{M} = \{\mathbb{O}, A, B\}$. Формирајмо *Кејлијеву таблицу* скупа $\mathcal{M}$ у односу на операцију $\circ$:

$\circ$	$\mathbb{O}$	A	B
$\mathbb{O}$	$\mathbb{O}$	A	B
A	A	B	$\mathbb{O}$
B	B	$\mathbb{O}$	A

Из Кејлијеве таблице видимо да важи *затвореност* скупа $\mathcal{M}$ за операцију $\circ$. Операција $\circ$ представља сабирање матрица над пољем $\mathbb{Z}_3$, па је *асоцијативна* (видети 12. задатак), односно за све $X, Y, Z \in \mathcal{M}$ важи

$$(X \circ Y) \circ Z = X \circ (Y \circ Z).$$

Пошто је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, операција $\circ$ је *комутативна*. Даље, из прве врсте и прве колоне таблице видимо да за свако $X \in \mathcal{M}$ важи

$$\mathbb{O} \circ X = X = X \circ \mathbb{O},$$

па је $\mathbb{O}$ *неутрални елемент*. Најзад,

$$\mathbb{O} \circ \mathbb{O} = \mathbb{O}, \quad A \circ B = B \circ A = \mathbb{O},$$

те је $\mathbb{O}$ *инверзни елемент* самог себе, док су A и B међусобно *инверзни елементи*. Дакле, алгебарска структура $(\mathcal{M}, \circ)$ је *Абелова група*. ■

35. [Поправни колоквијум, 2023/24. година] Нека је $\mathcal{K} = \{p \cdot i + q \cdot \sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$, при чему је i имагинарна јединица. Одредити природу алгебарске структуре $(\mathcal{K}, +)$, где је $+$ операција сабирања комплексних бројева.

Решење: Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција сабирања комплексних бројева $+$:

1) *Затвореност* скупа $\mathcal{K}$ за операцију $+$, тј. операција $+$ је *бинарна* у скупу $\mathcal{K}$:

Узмимо произвољне елементе $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$, тј. $z_1 = p_1 \cdot i + q_1 \cdot \sqrt{2}$ и $z_2 = p_2 \cdot i + q_2 \cdot \sqrt{2}$, где су $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Q}$. Тада је $z_1 + z_2 = (p_1 + p_2) \cdot i + (q_1 + q_2) \cdot \sqrt{2} \in \mathcal{K}$, јер су $p_1 + p_2 \in \mathbb{Q}$ и $q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$. Према томе, скуп $\mathcal{K}$ је затворен за операцију $+$.

2) *Асоцијативност* операције $+$ у скупу $\mathcal{K}$: Како је $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$, асоцијативност операције сабирања наслеђује се из адитивне групе $(\mathbb{C}, +)$. Дакле, за све $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{K}$ важи

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

3) *Комутативност* операције $+$ у скупу $\mathcal{K}$: Комутативност операције сабирања такође се наслеђује из адитивне групе $(\mathbb{C}, +)$. Према томе, за све $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$ важи

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

4) *Неутрал* у односу на операцију $+$ у скупу $\mathcal{K}$: Неутрални елемент адитивне групе $(\mathbb{C}, +)$ је број 0. Како је $0 = 0 \cdot i + 0 \cdot \sqrt{2} \in \mathcal{K}$, јер је $0 \in \mathbb{Q}$, следи да је 0 неутрални елемент у односу на операцију $+$ у скупу $\mathcal{K}$.

5) *Инверз* у односу на операцију $+$ у скупу $\mathcal{K}$: Нека је $z = p \cdot i + q \cdot \sqrt{2} \in \mathcal{K}$, где су $p, q \in \mathbb{Q}$. Његов супротни, тј. инверзни елемент у односу на сабирање је

$$-z = (-p) \cdot i + (-q) \cdot \sqrt{2} \in \mathcal{K},$$

јер су $-p, -q \in \mathbb{Q}$, при чему важи

$$z + (-z) = 0 = (-z) + z.$$

Дакле, алгебарска структура $(\mathcal{K}, +)$ је *Абелова група*. ■

36. [Колоквијум, 2025/26. година] Дат је скуп $A = \{1, -1, i, -i\}$. Испитати природу алгебарске структуре $(A, \circ)$, где је $\circ$ операција дефинисана са $a \circ b = a \cdot b \cdot i$ (где је $\cdot$ стандардно множење комплексних бројева, а i имагинарна јединица). Детаљно образложити закључак.

Решење: Како је операција $\circ$ дефинисана на коначном скупу A , најпре формирајмо њену *Кејлијеву таблицу*:

$\circ$	1	-1	i	$-i$
1	i	$-i$	-1	1
-1	$-i$	i	1	-1
i	-1	1	$-i$	i
$-i$	1	-1	i	$-i$

Из таблице видимо да важи *затвореност* скупа A за операцију $\circ$, јер је $a \circ b \in A$ за све $a, b \in A$.

Испитајмо сада *асоцијативност* операције $\circ$. Операција $\circ$ је асоцијативна због асоцијативности операције множења комплексних бројева, а ту асоцијативност можемо показати и на следећи начин. За произвољне $a, b, c \in A$ важи

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= (a \cdot b \cdot i) \circ c = (a \cdot b \cdot i) \cdot c \cdot i = a \cdot b \cdot c \cdot i^2 = -abc, \\ a \circ (b \circ c) &= a \circ (b \cdot c \cdot i) = a \cdot (b \cdot c \cdot i) \cdot i = a \cdot b \cdot c \cdot i^2 = -abc.\end{aligned}$$

Према томе, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, па је операција $\circ$ асоцијативна у скупу A .

Пошто је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, следи да је операција $\circ$ *комутиативна*. Исто се добија и непосредно:

$$a \circ b = a \cdot b \cdot i = b \cdot a \cdot i = b \circ a.$$

Одредимо *неутрални елемент*. Елемент $e \in A$ је неутралан ако за свако $a \in A$ важи $a \circ e = a = e \circ a$. Како је операција $\circ$ комутативна, довољно је решити једнакост

$$a \circ e = a \iff a \cdot e \cdot i = a \iff e \cdot i = 1 \iff e = -i.$$

Заиста, $-i \in A$ и за свако $a \in A$ важи $a \circ (-i) = a = (-i) \circ a$, па је $e = -i$ неутрални елемент.

Најзад, испитајмо постојање *инверзних елемената*. Како је операција $\circ$ комутативна, довољно је за произвољан елемент $a \in A$ инверзни елемент $a^{-1} \in A$ одредити помоћу једнакости

$$a \circ a^{-1} = -i \iff a \cdot a^{-1} \cdot i = -i \iff a \cdot a^{-1} = -1.$$

Из Кејлијеве таблице добијамо

$$1 \circ (-1) = -i, \quad -1 \circ 1 = -i, \quad i \circ i = -i, \quad -i \circ (-i) = -i.$$

Одавде видимо да су елементи i и $-i$ сами себи инверзни, док је инверзни елемент за 1 једнак -1 , а инверзни елемент за -1 је 1 . Дакле, сваки елемент скупа A има инверзни елемент у односу на операцију $\circ$.

Према томе, алгебарска структура $(A, \circ)$ је *Абелова група*. ■

37. [Поправни колоквијум, 2025/26. година] Дат је скуп

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Испитати природу алгебарске структуре $(M, \cdot)$, где операција $\cdot$ представља уобичајено множење матрица.

Решење: Означимо са

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Проверимо које од следећих пет особина задовољава операција множења матрица $\cdot$:

1) Затвореност скупа M за операцију $\cdot$, тј. операција $\cdot$ је *бинарна* у скупу M :

Узмимо произвољне матрице $M(a, b), M(c, d) \in M$, где је $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тада је

$$M(a, b) \cdot M(c, d) = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & 0 & c \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ac & 0 & 2ac \\ 0 & bd & 0 \\ 2ac & 0 & 2ac \end{bmatrix} = M(2ac, bd).$$

Како је $2ac \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $bd \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, следи да је $M(a, b) \cdot M(c, d) \in M$, па је скуп M затворен за операцију $\cdot$.

2) Асоцијативност операције $\cdot$ у скупу M : Асоцијативност важи, јер је множење матрица асоцијативна операција (видети 12. задатак).

3) Комутативност операције $\cdot$ у скупу M : За произвољне матрице $M(a, b), M(c, d) \in M$ важи

$$M(a, b) \cdot M(c, d) = M(2ac, bd) = M(2ca, db) = M(c, d) \cdot M(a, b),$$

па је операција $\cdot$ комутативна у скупу M .

4) Неутрал у односу на операцију $\cdot$ у скупу M : Пошто је операција $\cdot$ комутативна у скупу M , довољно је проверити постојање неутралног елемента само са једне стране. Нека је $E = M(e_1, e_2) \in M$ неутрални елемент. Тада за свако $M(a, b) \in M$ треба да важи

$$M(a, b) \cdot M(e_1, e_2) = M(a, b).$$

Како је $M(a, b) \cdot M(e_1, e_2) = M(2ae_1, be_2)$, добијамо

$$\begin{aligned} M(2ae_1, be_2) = M(a, b) &\iff 2ae_1 = a \wedge be_2 = b \\ &\iff e_1 = \frac{1}{2} \wedge e_2 = 1. \end{aligned}$$

Дакле, како $\frac{1}{2}, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, неутрални елемент је

$$E = M\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in M.$$

5) *Инверз* у односу на операцију $\cdot$ у скупу M :

Пошто је операција $\cdot$ комутативна у скупу M , довољно је инверзни елемент потражити само са једне стране. Нека је $M(a, b) \in M$ произвољна матрица. Тражимо матрицу $M(a', b') \in M$ такву да важи

$$M(a, b) \cdot M(a', b') = E = M\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Како је $M(a, b) \cdot M(a', b') = M(2aa', bb')$, добијамо

$$\begin{aligned} M(2aa', bb') = M\left(\frac{1}{2}, 1\right) &\iff 2aa' = \frac{1}{2} \wedge bb' = 1 \\ &\iff a' = \frac{1}{4a} \wedge b' = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Пошто је $a, b \neq 0$, важи $\frac{1}{4a}, \frac{1}{b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па је

$$M(a, b)^{-1} = M\left(\frac{1}{4a}, \frac{1}{b}\right) \in M.$$

Дакле, сваки елемент скупа M има инверзни елемент у односу на операцију $\cdot$.

Према томе, алгебарска структура $(M, \cdot)$ је Абелова група. ■

Глава 2

Матрице и детерминанте

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Налажењем инверзне матрице решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

Решење: Дати систем линеарних алгебарских једначина можемо записати у матрич-

ном облику $A \cdot X = B$, где је $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ матрица система, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ колона

непознатих и $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$ колона слободних чланова. Матричну једначину $A \cdot X = B$

решавамо тако што обе стране једнакости помножимо са леве стране са A^{-1} , па због асоцијативности множења квадратних матрица фиксiranог реда (видети претходну главу), имамо да је $\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{=I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$, одакле је $X = A^{-1} \cdot B$. Како је $\det A = 12 \neq 0$

потребан и довољан услов да матрица A има *инверзну матрицу*, следи да постоји матрица A^{-1} коју налазимо помоћу формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$, где је $\text{adj} A$ *агјунтована матрица* матрице A . Њу добијамо помоћу формуле $\text{adj} A = [A_{i,j}]_{3 \times 3}^T$, где је $A_{i,j}$ *алгебарски кофактор* елемента $a_{i,j}$ матрице A , који налазимо помоћу формуле $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i,j}$, где је $D_{i,j}$ детерминанта која се добија од детерминанте матрице система изостављањем i -те врсте и j -те колоне. Применом наведених формула, добијамо

$$\text{да је } A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Коначно, } X = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

одакле добијамо решење полазног система $\boxed{(x, y, z) = (2, -2, 3)}$. ■

2. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Одредити матрицу A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a \cdot I + B,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Пошто матрице aI и B комутирају при множењу, тј. важи $I \cdot B = B \cdot I$, услов за примену биномне формуле на збир $aI + B$ је задовољен. Такође, важи и да је $B^2 = \mathbb{O}$, па се математичком индукцијом једноставно може показати да је $B^n = \mathbb{O}$, за све $n \geq 2$ (видети наредни задатак). На основу тога, у наредној суми, у којој примењујемо биномну формулу (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$), имамо само два ненулта сабирка, тј. добијамо

$$\begin{aligned} A^n &= (aI + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI)^k \cdot B^{n-k} = \binom{n}{n} a^n B^0 + \binom{n}{n-1} a^{n-1} B \\ &= a^n I + na^{n-1} B = a^n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + na^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}}, \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$\boxed{A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомена: Ако матрице $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ комутирају, тј. ако важи $A \cdot B = B \cdot A$, тада за сваки број $m \in \mathbb{N}$ важи биномна формула

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot A^{m-k} \cdot B^k.$$

Уколико матрице A и B не комутирају при множењу, наведена формула у општем случају не важи. ■

3. [Септембарски рок, 2010/11. година] Наћи A^k , $k \in \mathbb{N}$, ако је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решење: Матрицу A запишимо као $A = I + B$, где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица и

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Пошто матрице I и B комутирају при множењу, тј. важи $I \cdot B = B \cdot I$, услов за примену биномне формуле на збир $I + B$ је задовољен (видети напомену у

претходном задатку). За матрицу B важи да је $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, па се *математичком индукцијом* може показати да је $B^k = \mathbb{O}$ за $k \geq 2$:

1) *База индукције*: за $k = 2$ је $B^2 = \mathbb{O}$,

2) *Индукцијска хипотеза*: ако је $B^k = \mathbb{O}$, добијамо да је и $B^{k+1} = B^k \cdot B = \mathbb{O} \cdot B = \mathbb{O}$.

На основу тога, у наредној суми, у којој примењујемо биномну формулу (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$), имамо само два ненулта сабирка, тј. добијамо

$$\begin{aligned} A^k &= (I + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \cdot I^i \cdot B^{k-i} = \binom{k}{k-1} \cdot I \cdot B + \binom{k}{k} \cdot I = k \cdot B + I \\ &= \begin{bmatrix} k & k \\ -k & -k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 & k \\ -k & 1-k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

за свако $k \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$A^k = \begin{bmatrix} k+1 & k \\ -k & 1-k \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

4. [Колоквијум, 2011/12. година] **а)** Ако је A квадратна матрица и I јединична матрица истог реда, доказати да за сваки природан број n важи импликација:

$$A^2 = A \implies (I + A)^n = I + (2^n - 1) \cdot A.$$

б) Израчунати B^n ако је $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Докажимо, најпре, да важи следећа импликација:

$$A^2 = A \implies (\forall n \in \mathbb{N}) \quad A^n = A.$$

Ово доказујемо *математичком индукцијом*:

1) *База индукције*: за $n = 1$ је $A^1 = A$,

2) *Индукцијска хипотеза*: ако је $A^k = A$, уз претпоставку да је $A^2 = A$, добијамо да је и $A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = A$.

Даље, имајући у виду да су I и A пермутабилне матрице, услов за примену *биномне формуле* на збир $I + A$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за сваку матрицу A важи $A^0 = I$), добијамо:

$$(I + A)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot I^{n-k} \cdot A^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k = \binom{n}{0} I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A.$$

Како је

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k},$$

коначно добијамо да је

$$(I + A)^n = I + (2^n - 1) \cdot A, \quad n \in \mathbb{N}.$$

б) Запишимо матрицу B као збир *јединичне матрице* и матрице A :

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = I + A.$$

Приметимо да за матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ важи

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = A,$$

па применом дела под а) добијамо

$$\begin{aligned} B^n &= (I + A)^n = I + (2^n - 1) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 2 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$B^n = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

5. [Колоквијум, 2011/12. година] Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Израчунати:}$$

а) $C = A \cdot B^T$; **б)** C^{-1} ; **в)** $D = A^T \cdot B$; **г)** $\text{adj} D$; **д)** $\det(\text{adj} D)$.

Решење: **а)** $C = A \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

б) $\det C = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-2) = 1 \neq 0 \implies \exists C^{-1}, C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \text{adj} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$

в) $D = A^T \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned}
\text{г) } D_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12, D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 24, \\
D_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3, D_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4, \\
D_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -8, D_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1, \\
D_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12, D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 24, \\
D_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -3 \implies \text{adj} D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 12 \\ 24 & -8 & 24 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

д) Како су прве две колоне матрице $\text{adj}(D)$ пропорционалне, то је

$$\boxed{\det(\text{adj} D) = 0}.$$

■

6. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Дат је систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned}
2x &+ 3y + z = 3 \\
x &+ y + \lambda z = 0. \\
-2x &- 2y - z = -2
\end{aligned}$$

а) За коју вредност реалног параметра λ систем нема јединствено решење?

б) За $\lambda = 0$ налажењем инверзне матрице решити систем једначина.

Решење: а) Дати систем линеарних алгебарских једначина можемо записати у ма-

тричном облику $A \cdot X = B$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ матрица система, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

колона непознатих и $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ колона слободних чланова. Дата матрична једна-

чина има јединствено решење $X = A^{-1} \cdot B$ (видети 1. задатак) ако матрица система има *инверзну матрицу*. Потребан и довољан услов да матрица A има инверзну матрицу је $\det A \neq 0$. Према томе, ако је $\det A = 0$ дати систем линеарних алгебарских једначина нема јединствено решење, тј.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda = 0.$$

Дакле, за $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$ дати систем нема јединствено решење.

б) За $\lambda = 0$ имамо да је $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Како је $\det A = 1 \neq 0$, следи да по-

стоји матрица A^{-1} коју налазимо помоћу формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$, где је $\text{adj} A$ *адјунгована матрица* матрице A . Њу добијамо помоћу формуле $\text{adj} A = [A_{i,j}]_{3 \times 3}^T$, где је $A_{i,j}$ *алгебарски кофактор* елемента $a_{i,j}$ матрице A , који налазимо помоћу формуле $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i,j}$, где је $D_{i,j}$ детерминанта која се добија од детерминанте матрице система изостављањем i -те врсте и j -те колоне. Применом наведених формула, до-

бијамо да је $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Коначно, $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

одакле добијамо решење полазног система $\boxed{(x, y, z) = (-1, 1, 2)}$. ■

7. [Јунски рок, 2011/12. година] Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ за које је матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

регуларна, а затим за неку вредност (по избору) параметра a за коју је матрица A сингуларна одредити A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење: 1) Матрица која има *инверзну матрицу* ($\det A \neq 0$) назива се *регуларна матрица*. Како је

$$\det A = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) \cdot (a-1)^3, \quad (*)$$

следи да је матрица A регуларна за $\boxed{a \neq -3 \text{ и } a \neq 1}$.

2) Матрица која нема инверзну матрицу ($\det A = 0$) назива се *сингуларна матрица*. Дакле, из (*) следи да је матрица A сингуларна за $a = -3$ или $a = 1$. Нпр. за $a = 1$

$$\text{важи } A^2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A = 4^2 \cdot A. \quad \text{Одавде закључујемо да је}$$

$$A^n = 4^{n-1} \cdot A \text{ за } n \in \mathbb{N}.$$

Добијену рекурентну формулу доказаћемо *математичком индукцијом*:

1. База индукције: за $n = 1$ је $A^1 = 4^0 \cdot A$,
 2. Индукцијска хипотеза: претпоставимо да важи $A^k = 4^{k-1} \cdot A$, за $k \in \mathbb{N}$, тада је $A^{k+1} = A^k \cdot A = 4^{k-1} \cdot A \cdot A = 4^{k-1} \cdot 4 \cdot A = 4^k \cdot A$.

Дакле, $\boxed{A^n = 4^{n-1} \cdot A, \text{ за свако } n \in \mathbb{N}}$. ■

8. [Јулски рок, 2011/12. година] Израчунати детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где је $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$,

б) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{vmatrix}$, где је $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Решење: а) На основу Моаврове формуле важи

$$\varepsilon^3 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Применом Сарусовог правила добијамо

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon^6 + \varepsilon^4 + 1 - \varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 = \varepsilon^6 - 2\varepsilon^3 + 1 = (\varepsilon^3 - 1)^2 = 0.$$

Дакле, $\boxed{D_1 = 0}$.

б) За дати број ε важи

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i,$$

па је $\varepsilon^4 = i^2 = -1$. Применом Сарусовог правила добијамо

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\varepsilon^2 - \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - 1 = -(\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1) = -(\varepsilon^2 - 1)^2 = -(i - 1)^2 = 2i.$$

Дакле, $\boxed{D_2 = 2i}$. ■

9. [Септембарски рок, 2011/12. година] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Одредити A^n , $n \in \mathbb{Z}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = I + B,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. Како је

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O},$$

слиди да је $B^k = \mathbb{O}$ за свако $k \geq 2$ (видети 3. задатак).

Пошто матрице I и B комутирају при множењу, услов за примену *биномне формуле* на збир $I + B$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$), добијамо

$$A^n = (I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot I^{n-k} \cdot B^k = I + nB = \begin{bmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

За $n = 0$ важи $A^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, што је такође обухваћено добијеном формулом.

Даље, како је $\det A = 1 \neq 0$, матрица A је *регуларна* и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = I - B,$$

Пошто матрице I и $-B$ комутирају при множењу и важи $(-B)^k = \mathbb{O}$ за свако $k \geq 2$, за свако $m \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} A^{-m} &= (A^{-1})^m = (I + (-B))^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot I^{m-k} \cdot (-B)^k = I - mB \\ &= \begin{bmatrix} 1-2m & -2m \\ 2m & 1+2m \end{bmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ако ставимо да је $n = -m$, добијамо исти облик формуле као и за позитивне степене. Према томе,

$$\boxed{A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

■

10. [Колоквијум, 2012/13. година] **а)** Решити матричну једначину $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$,

где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

б) Одредити X^n , $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Полазну матричну једначину множимо са леве стране матрицом A , а са десне стране матрицом A^{-1} . Тада добијамо

$$A \cdot (A^{-1} \cdot X \cdot A) \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1},$$

па због асоцијативности множења квадратних матрица фиксираних реда (видети претходну главу), имамо да је

$$\underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{=I} \cdot X \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{=I} = A \cdot B \cdot A^{-1},$$

и одавде је

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1}.$$

Како је $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, следи да је

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}.$$

б) Први начин: Добијену матрицу X запишимо у облику

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I + Y.$$

Пошто је

$$Y^2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Y,$$

математичком индукцијом се једноставно показује да је $Y^k = Y$, за свако $k \in \mathbb{N}$ (видети 4. задатак). Како матрице I и Y комутирају при множењу, услов за примену биномне формуле на збир $I + Y$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку).

Стога, (знајући да за сваку матрицу Y важи $Y^0 = I$) добијамо:

$$X^n = (I + Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot I^{n-k} \cdot Y^k = I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot Y.$$

Како је

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k},$$

коначно добијамо да је

$$X^n = I + (2^n - 1) \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^n - 1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 7 \cdot (2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}},$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Други начин: Из једнакости $X = A \cdot B \cdot A^{-1}$ следи да је

$$X^n = (A \cdot B \cdot A^{-1})^n = A \cdot B^n \cdot A^{-1},$$

што се може једноставно доказати *математичком индукцијом*, јер је

$$X^2 = (A \cdot B \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B \cdot A^{-1}) = A \cdot B \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{=I} \cdot B \cdot A^{-1} = A \cdot B^2 \cdot A^{-1}, X^3 = A \cdot B^3 \cdot A^{-1} \dots$$

Према томе,

$$X^n = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \cdot (2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

11. [Колоквијум, 2012/13. година] У зависности од вредности реалног параметра λ испитати када систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= -1 \\ x + y + \lambda z &= 2 \end{aligned}$$

има јединствено решење, када нема решења и када има бесконачно много решења. За ону вредност параметра λ за коју систем има јединствено решење Крамеровим формулама решити систем.

Решење: Дати систем линеарних алгебарских једначина можемо записати у матрич-

ном облику $A \cdot X = B$, где је $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ матрица система, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ колона

непознатих и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ колона слободних чланова. Детерминанта система је

$$\begin{aligned} D = \det A &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda & 1 \\ \lambda + 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Према томе, када је $D \neq 0$, тј. за $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$ систем има јединствено решење.

Одговарајуће детерминанте у *Крамеровим формулама* су:

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + \lambda + 2 - 1 - 2\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_y &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 1 + 3 \\
&= -(\lambda + 4)(\lambda - 1), \\
D_z &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda^2 + \lambda - 3 + 1 - \lambda \\
&= 2(\lambda + 1)(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

1) За $\lambda \neq -2$ и $\lambda \neq 1$, применом Крамерових формула, добијамо

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}, \\
y &= \frac{D_y}{D} = -\frac{(\lambda + 4)(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = -\frac{\lambda + 4}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}, \\
z &= \frac{D_z}{D} = \frac{2(\lambda + 1)(\lambda - 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{2(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}.
\end{aligned}$$

Дакле, за $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\lambda}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}, -\frac{\lambda + 4}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)}, \frac{2(\lambda + 1)}{(\lambda + 2)(\lambda - 1)} \right).$$

2) За $\lambda = -2$ имамо да је $D = 0$, док је $D_x = (-2)(-3) = 6 \neq 0$. Према томе, систем за $\lambda = -2$ нема решења.

За $\lambda = 1$ имамо да је $D = D_x = D_y = D_z = 0$, па систем или нема решење или има бесконачно много решења. У овом случају систем има облик

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 1 \\
x + y + z &= -1, \\
x + y + z &= 2
\end{aligned}$$

па је очигледно противречан и нема решења.

Стога, за $\lambda \in \{-2, 1\} \implies$ систем нема решења.

3) Не постоји вредност параметра λ за коју систем има бесконачно много решења, тј. $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ за које систем има бесконачно много решења.

Коначно,

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ \nexists \lambda \in \mathbb{R} & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ \lambda \in \{-2, 1\} & \implies \text{систем је } \textit{несагласан} \end{cases}.$$

■

12. [Јануарски рок, 2012/13. година] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} a + i \cdot b & 2a \\ -b & a - i \cdot b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) За које вредности параметара a и b је матрица A регуларна?

б) Израчунати:

1° $\det A^4$;

2° $\det(4A \cdot A^T)$;

3° $\det(\operatorname{adj} A^4)$;

4° $\det((\det A) \cdot A)$.

Решење: а) Матрица A је *регуларна* ако и само ако је $\det A \neq 0$. Како је

$$\det A = \begin{vmatrix} a + i \cdot b & 2a \\ -b & a - i \cdot b \end{vmatrix} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2,$$

добивамо $\det A \neq 0 \iff (a + b)^2 \neq 0 \iff a + b \neq 0$. Дакле, матрица A је регуларна за $\boxed{a \neq -b}$.

б) Користићемо следеће особине детерминанте $\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C$ (*Коши-Бинеова формула*) и $\det B^T = \det B$. Такође, за сваку матрицу B реда два и сваки скалар λ важи $\det(\lambda B) = \lambda^2 \det B$.

1° На основу особине детерминанте степена матрице (*Коши-Бинеова формула*) добијамо

$$\det A^4 = (\det A)^4 = ((a + b)^2)^4 = (a + b)^8.$$

Дакле, $\boxed{\det A^4 = (a + b)^8}$.

2° Како је матрица $A \cdot A^T$ реда два, имамо

$$\det(4A \cdot A^T) = 4^2 \det(A \cdot A^T) = 16 \det A \cdot \det A^T = 16(\det A)^2 = 16(a + b)^4.$$

Према томе, $\boxed{\det(4A \cdot A^T) = 16(a + b)^4}$.

3° За сваку квадратну матрицу B реда n важи $\det(\operatorname{adj} B) = (\det B)^{n-1}$. Пошто је матрица A^4 реда два, следи

$$\det(\operatorname{adj} A^4) = \det A^4 = (\det A)^4 = (a + b)^8.$$

Дакле, $\boxed{\det(\operatorname{adj} A^4) = (a + b)^8}$.

4° Пошто је A матрица реда два, добијамо

$$\det((\det A) \cdot A) = (\det A)^2 \cdot \det A = (\det A)^3 = ((a + b)^2)^3 = (a + b)^6.$$

Према томе, $\boxed{\det((\det A) \cdot A) = (a + b)^6}$. ■

13. [Јунски рок, 2012/13. година] Користећи се Крамеровим формулама, испитати за које $a \in \mathbb{R}$ дати систем линеарних једначина има јединствено решење, а затим га одредити:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3. \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Решење: Детерминанта система је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - 6 - a^2 = -a^2 - a + 6 = -(a-2)(a+3).$$

Систем има јединствено решење када је $D \neq 0$, тј. када је $-(a-2)(a+3) \neq 0$. Према томе, систем има јединствено решење за $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2a - 3a + 6 - 9 - a^2 = -a^2 - a + 6 = -(a-2)(a+3),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 + a + 3 - 6 - 2a = 2 - a \text{ и}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 2a - 3 - 4 - 3a = 2 - a.$$

За $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, применом Крамерових формула, добијамо

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-(a-2)(a+3)}{-(a-2)(a+3)} = 1, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{2-a}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}, \\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{2-a}{-(a-2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}. \end{aligned}$$

Дакле, за $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right).$$

■

14. [Септембарски рок, 2012/13. година] Одредити A^n , $n \in \mathbb{Z}$, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = I + B,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Како је $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $B^3 = \mathbb{O}$, следи да се *математичком индукцијом* може показати да је $B^k = \mathbb{O}$ за $k \geq 3$:

1) База индукције: за $k = 3$ је $B^3 = \mathbb{O}$,

2) Индукцијска хипотеза: ако је $B^k = \mathbb{O}$, добијамо да је и $B^{k+1} = B^k \cdot B = \mathbb{O} \cdot B = \mathbb{O}$, па следи да је $B^k = \mathbb{O}$ за свако $k \geq 3$.

Пошто матрице I и B комутирају при множењу, услов за примену *биномне формуле* на збир $I + B$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$) имамо само три ненулта сабирка, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned} A^n &= (I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot I^{n-k} \cdot B^k = I + nB + \binom{n}{2} B^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2n & 8n^2 + 4n \\ 0 & 1 & 8n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

За $n = 0$ важи $A^0 = I$, што је такође обухваћено добијеном формулом.

Нека је сада $n < 0$ и ставимо да је $n = -m$, где је $m \in \mathbb{N}$. Како је $\det A = 1 \neq 0$, матрица A је *регуларна*, па је и $\det A^m = (\det A)^m = 1 \neq 0$. На основу формуле за позитивне степене имамо да је

$$A^m = \begin{bmatrix} 1 & 2m & 8m^2 + 4m \\ 0 & 1 & 8m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

па је

$$A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1} = \frac{1}{\det A^m} \cdot \text{adj} A^m,$$

где је $\text{adj} A^m$ *агјунтована матрица* матрице A^m . Њу добијамо помоћу формуле $\text{adj} A^m = [A_{i,j}]_{3 \times 3}^T$, где је $A_{i,j}$ *алгебарски кофактор* елемента $a_{i,j}$ матрице A^m , који налазимо

помоћу формуле $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i,j}$, где је $D_{i,j}$ детерминанта која се добија од детерминанте матрице A^m изостављањем i -те врсте и j -те колоне. Применом наведених формула, добијамо да је даље

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -2m & 8m^2 - 4m \\ 0 & 1 & -8m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 8n^2 + 4n \\ 0 & 1 & 8n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Према томе,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n & 8n^2 + 4n \\ 0 & 1 & 8n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

■

15. [Колоквијум, 2013/14. година] **а)** Ако је A квадратна матрица, математичком индукцијом или на неки други начин доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи импликација

$$A^2 = I \implies (I + A)^n = 2^{n-1}(I + A).$$

б) Одредити A^n , $n \in \mathbb{N}$, ако је $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$.

в) Одредити B^n , $n \in \mathbb{N}$, ако је $B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$.

Решење: **а)** Претпоставимо да је $A^2 = I$. Тврђење доказујемо *математичком индукцијом* по n .

1) *База индукције:* за $n = 1$ важи

$$(I + A)^1 = I + A = 2^0(I + A) = 2^{1-1}(I + A).$$

2) *Индукцијска хипотеза:* претпоставимо да за неко $k \in \mathbb{N}$ важи

$$(I + A)^k = 2^{k-1}(I + A).$$

Тада, за $n = k + 1$, користећи индукцијску хипотезу и услов $A^2 = I$, добијамо

$$\begin{aligned} (I + A)^{k+1} &= (I + A)^k(I + A) = 2^{k-1}(I + A)(I + A) = 2^{k-1}(I + 2A + A^2) \\ &= 2^{k-1}(2I + 2A) = 2^k(I + A). \end{aligned}$$

Према томе, на основу принципа математичке индукције,

$$A^2 = I \implies (I + A)^n = 2^{n-1}(I + A), \quad n \in \mathbb{N}.$$

б) За дату матрицу A важи

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 - 48 & -28 + 28 \\ 84 - 84 & -48 + 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Стога, за $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, важи

$$A^{2k} = (A^2)^k = I$$

и

$$A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = I \cdot A = A.$$

Дакле,

$$A^n = \begin{cases} I, & n \text{ је паран} \\ A, & n \text{ је непаран} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

в) Приметимо да је

$$B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix} = I + A.$$

Како је у делу под б) показано да је $A^2 = I$, применом резултата из дела под а) добијамо

$$B^n = (I + A)^n = 2^{n-1}(I + A) = 2^{n-1}B = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{bmatrix},$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле,

$$B^n = 2^{n-1} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

16. [Колоквијум, 2013/14. година] Решити матричну једначину $X \cdot A = B$, где је

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење: Полазну матричну једначину помножимо са десне стране матрицом A^{-1} . Тада добијамо $(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, па због асоцијативности множења квадратних матрица фиксираног реда (видети претходну главу), имамо да је

$$X \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{=I} = B \cdot A^{-1},$$

одакле је

$$X = B \cdot A^{-1}.$$

Проверимо да ли матрица A има инверзну матрицу. Применом Сарусовог правила добијамо

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 30 + 2 - 15 - (-20) - 3 = 19 \neq 0.$$

Према томе, матрица A је *регуларна*, па постоји њена инверзна матрица, коју налазимо помоћу формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A$, где је $\text{adj} A$ *агђунгована матрица* матрице A . Њу добијамо помоћу формуле $\text{adj} A = [A_{i,j}]_{3 \times 3}^T$, где је $A_{i,j}$ *алгебарски кофактор* елемента $a_{i,j}$ матрице A , који налазимо помоћу формуле $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i,j}$, где је $D_{i,j}$ детерминанта која се добија од детерминанте матрице A изостављањем i -те врсте и j -

те колоне. Применом наведених формула, добијамо да је $\text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{bmatrix}$,

одакле следи да је

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{bmatrix}.$$

Коначно,

$$\begin{aligned} X &= B \cdot A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 19 & 38 & 57 \\ 76 & 95 & 114 \\ 133 & 152 & 171 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

■

17. [Јануарски рок, 2013/14. година] Одредити квадратне матрице другог реда X и Y које задовољавају матричне једначине:

$$\begin{aligned} AX + Y &= I \\ XB + A^{-1}Y &= \mathbb{O} \end{aligned}$$

$$\text{ако је } A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1-p & 1 \\ 1 & 0 & -(p+1) \end{vmatrix} = -p(p+1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1-p & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -(p+1) \end{vmatrix} = 2p,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1-p & -2 & -1 \\ -1 & 1-p & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p(p-3).$$

1) Када је $D \neq 0$, тј. за $p \notin \{-1, 0, 2\}$, систем је *одређен*, тј. има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-p(p+1)}{-p(p-2)(p+1)} = \frac{1}{p-2}, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{2p}{-p(p-2)(p+1)} = -\frac{2}{(p-2)(p+1)}, \\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{p(p-3)}{-p(p-2)(p+1)} = -\frac{p-3}{(p-2)(p+1)}. \end{aligned}$$

Дакле, за $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$ систем је одређен и има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{p-2}, -\frac{2}{(p-2)(p+1)}, -\frac{p-3}{(p-2)(p+1)} \right).$$

2) За $p = -1$ важи $D = 0$, док је $D_y = -2 \neq 0$. Према томе, систем је *несагласан*, тј.

$$p = -1 \implies \text{систем нема решења}.$$

За $p = 2$ важи $D = 0$, док је $D_x = -6 \neq 0$. Према томе, систем је *несагласан*, тј.

$$p = 2 \implies \text{систем нема решења}.$$

3) За $p = 0$ важи $D = D_x = D_y = D_z = 0$, па систем може бити *неодређен* или *несагласан*. У овом случају систем има облик

$$\begin{array}{rrcrcl} x & - & 2y & - & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array}$$

Из треће једначине је $x = 1 + z$, а њеним уврштавањем у другу једначину добијамо $y = 1$. Прва једначина је тада идентички задовољена. Ако ставимо $z = t$, где је $t \in \mathbb{R}$, добијамо $x = 1 + t$ и $y = 1$. Према томе, систем је неодређен и његов скуп решења је

$$p = 0 \implies \{(1 + t, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Коначно,

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\} & \implies \text{систем је одређен} \\ p = 0 & \implies \text{систем је неодређен} \\ p \in \{-1, 2\} & \implies \text{систем је несагласан} \end{array} \right. . \quad \blacksquare$$

19. [Јунски рок, 2013/14. година] Решити систем линеарних алгебарских једначина помоћу Крамерових формула:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 3y & - & z & = & a \\ x & - & y & + & bz & = & -3 \end{array}$$

Решење: Дати систем линеарних алгебарских једначина можемо записати у матрич-

ном облику $A \cdot X = B$, где је $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{bmatrix}$ матрица система, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ колона

непознатих и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -3 \end{bmatrix}$ колона слободних чланова. Детерминанта система је

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = 3b - 21 = 3(b - 7).$$

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a & 3 & -1 \\ -3 & -1 & b \end{vmatrix} = 3(b - a) - ab + 29,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & a & -1 \\ 1 & -3 & b \end{vmatrix} = -3(b + a) + 2ab - 34,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & a \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3(a - 5).$$

У зависности од вредности параметара a и b разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $b \neq 7$, тада је $D \neq 0$, па је систем *одређен*, тј. има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$\begin{aligned}x &= \frac{D_x}{D} = \frac{3(b-a) - ab + 29}{3(b-7)}, \\y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-3(b+a) + 2ab - 34}{3(b-7)}, \\z &= \frac{D_z}{D} = \frac{a-5}{b-7}.\end{aligned}$$

Дакле, за $b \neq 7$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{3(b-a) - ab + 29}{3(b-7)}, \frac{-3(b+a) + 2ab - 34}{3(b-7)}, \frac{a-5}{b-7} \right).$$

2) Ако је $b = 7$, тада је $D = 0$, док је $D_x = 10(5-a)$, $D_y = 11(a-5)$ и $D_z = 3(a-5)$. За $a \neq 5$ важи, на пример, $D_z \neq 0$, па је систем *несагласан*. Према томе,

$$b = 7, a \neq 5 \implies \text{систем нема решења}.$$

3) Ако је $a = 5$ и $b = 7$, тада је $D = D_x = D_y = D_z = 0$. У овом случају систем има облик

$$\begin{aligned}2x + y + 3z &= 1 \\3x + 3y - z &= 5 \\x - y + 7z &= -3\end{aligned}$$

Стаavimo да је $z = \alpha$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$. Из прве и треће једначине добијамо

$$\begin{aligned}2x + y &= 1 - 3\alpha, \\x - y &= -3 - 7\alpha.\end{aligned}$$

Сабирањем ових једначина следи $3x = -2 - 10\alpha$, па је $x = -\frac{2}{3}(1 + 5\alpha)$. Затим из треће једначине добијамо $y = \frac{7 + 11\alpha}{3}$. Друга једначина је тада идентички задовољена. Према томе, систем је *неодређен*, тј. има бесконачно много решења:

$$a = 5, b = 7 \implies \left\{ \left(-\frac{2}{3}(1 + 5\alpha), \frac{7 + 11\alpha}{3}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Коначно,

$$\begin{cases} b \neq 7 & \implies \text{систем је одређен} \\ a = 5, b = 7 & \implies \text{систем је неодређен} \\ a \neq 5, b = 7 & \implies \text{систем је несагласан} \end{cases}.$$

■

20. [Јулски рок, 2013/14. година] Применом Крамерове теореме, у зависности од реалних параметара a и b , дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned}x + aby + 2z &= 1 \\ax - 2by + z &= a. \\a^2x - 2by + z &= 1\end{aligned}$$

Решење: Детерминанта датог система линеарних алгебарских једначина једнака је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & ab & 2 \\ a & -2b & 1 \\ a^2 & -2b & 1 \end{vmatrix} = ab(a-1)(a+4),$$

док су детерминанте које одговарају непознатим x , y и z , редом, једнаке

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & ab & 2 \\ a & -2b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \end{vmatrix} = -b(a-1)(a+4),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)(a+1)(2a-1),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & ab & 1 \\ a & -2b & a \\ a^2 & -2b & 1 \end{vmatrix} = b(a-1)(a+1)(a^2+2).$$

У наставку разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $D \neq 0$, тј. ако је $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1\}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, систем има јединствено решење.

Применом *Крамерових формула* добијамо

$$\begin{aligned}x &= \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{a}, \\y &= \frac{D_y}{D} = -\frac{(a+1)(2a-1)}{ab(a+4)}, \\z &= \frac{D_z}{D} = \frac{(a+1)(a^2+2)}{a(a+4)}.\end{aligned}$$

Дакле, за $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1\}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a}, -\frac{(a+1)(2a-1)}{ab(a+4)}, \frac{(a+1)(a^2+2)}{a(a+4)} \right).$$

2) Ако је $a = 0$, тада је $D = 0$, а $D_y = -1 \neq 0$, независно од вредности параметра b .

Према томе,

$$a = 0 \implies \text{систем нема решења}.$$

3) Ако је $a = -4$, тада је $D = 0$, а $D_y = 135 \neq 0$, независно од вредности параметра b . Стога,

$$a = -4 \implies \text{систем нема решења}.$$

4) Ако је $a = 1$, важи $D = D_x = D_y = D_z = 0$, а систем добија облик

$$\begin{aligned} x + by + 2z &= 1 \\ x - 2by + z &= 1. \\ x - 2by + z &= 1 \end{aligned}$$

Одузимањем друге једначине од прве добијамо $3by + z = 0$. Ако ставимо $y = \alpha$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$, следи да је $z = -3b\alpha$, а затим из друге једначине добијамо $x = 1 + 5b\alpha$. Дакле, за свако $b \in \mathbb{R}$ систем има бесконачно много решења и важи

$$a = 1, b \in \mathbb{R} \implies \{(1 + 5b\alpha, \alpha, -3b\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

5) Нека је $b = 0$ и $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1\}$. Тада је $D = D_x = D_z = 0$, док је

$$D_y = -(a - 1)(a + 1)(2a - 1).$$

Према томе, ако је $a \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, важи $D_y \neq 0$, па систем нема решења, тј.

$$b = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \implies \text{систем нема решења}.$$

За $b = 0$ и $a = -1$ систем постаје

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ -x + z &= -1, \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

одакле је $x = 1$ и $z = 0$, док је y произвољно. Зато је скуп свих решења

$$a = -1, b = 0 \implies \{(1, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

За $b = 0$ и $a = \frac{1}{2}$ систем постаје

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ \frac{1}{2} \cdot x + z &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4} \cdot x + z &= 1 \end{aligned}$$

одакле је $x = -2$ и $z = \frac{3}{2}$, док је y произвољно. Према томе, скуп свих решења је

$$a = \frac{1}{2}, b = 0 \implies \left\{ \left(-2, \alpha, \frac{3}{2} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Коначно,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 1\}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ a = 1, b \in \mathbb{R}; a = -1, b = 0; a = \frac{1}{2}, b = 0 & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ a \in \{-4, 0\}; a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-4, -1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}, b = 0 & \implies \text{систем је } \textit{несајласан} \end{array} \right. . \quad \blacksquare$$

21. [Септембарски рок, 2013/14. година] За произвољно $n \in \mathbb{N}$ израчунати детерминанту реда n дату са

$$D_n = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Решење: Применом *Лајласовог развоја* по првој врсти детерминанте D_n добијамо

$$D_n = 10 \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{n-1} + (-5) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Сада, применом Лапласовог развоја по првој колони последње детерминанте следи

$$D_n = 10 \cdot D_{n-1} - 25 \cdot D_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Одговарајућа *карактеристична једначина* претходне *диферендне једначине* једнака је $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$, тј. $(\lambda - 5)^2 = 0$. Дакле, карактеристична једначина има двоструку нулу $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, па је опште решење диферендне једначине облика

$$D_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot n \cdot 5^n = (C_1 + nC_2) \cdot 5^n,$$

где су $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ константе које одређујемо из почетних услова. Наиме, за $n = 1$ и $n = 2$ важи $D_1 = 10$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 100 - 25 = 75$. Стога, добијамо систем

$$\begin{aligned} 5 \cdot (C_1 + C_2) &= 10 \\ 25 \cdot (C_1 + 2C_2) &= 75, \end{aligned}$$

чије је решење $C_1 = C_2 = 1$. Према томе,

$$D_n = (n+1) \cdot 5^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

22. [Октобарски рок, 2013/14. година] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Наћи A^n ,
 $n \in \mathbb{N}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = 3I + J,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Како је

$$J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3J,$$

математичком индукцијом се једноставно може показати да је $J^k = 3^{k-1}J$, за свако $k \geq 1$.

1) База индукције: за $k = 1$ је $J^1 = 3^0J = J$,

2) Индукцијска хипотеза: ако је $J^k = 3^{k-1}J$, добијамо да је и $J^{k+1} = J^k \cdot J = 3^{k-1}J \cdot J = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \cdot 3J = 3^k J$.

Пошто матрице $3I$ и J комутирају при множењу, тј. важи $I \cdot J = J \cdot I$, услов за примену биномне формуле на збир $3I + J$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, знајући да за сваку матрицу J важи $J^0 = I$, добијамо

$$\begin{aligned} A^n &= (3I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (3I)^{n-k} \cdot J^k = 3^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot 3^{n-k} \cdot 3^{k-1} J \\ &= 3^n I + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) J = 3^n I + 3^{n-1} (2^n - 1) J, \end{aligned}$$

јер је

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}.$$

Према томе,

$$A^n = 3^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 2^n + 2 & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 2 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^n + 2 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

23. [Колоквијум, 2014/15. година] **а)** За које вредности параметра $t \in \mathbb{R}$ је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{bmatrix} \text{ регуларна?}$$

б) За $t = 4$ израчунати $\det(\operatorname{adj}(3A^T))$.

в) За $t = 3$ израчунати $\det(A \cdot (A^2 - 5 \cdot \operatorname{adj} A + 6I))$, где је I јединична матрица реда 3.

Решење: **а)** Матрица A је *регуларна* ако и само ако је $\det A \neq 0$. Применом елементарних трансформација над врстама, које не мењају вредност детерминанте, добијамо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & t \\ 4 & 9 & t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \\ 0 & 5 & t^2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t-2 \\ 0 & 0 & t^2-5t+6 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3).$$

Према томе, $\det A \neq 0 \iff t \neq 2$ и $t \neq 3$, па је матрица A регуларна за $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

б) За $t = 4$, на основу резултата из дела под а), важи $\det A = (4-2)(4-3) = 2$.

За сваку квадратну матрицу A реда n је $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}$. Према томе, за квадратну матрицу A реда 3 важи $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^2$. Стога, знајући још и да је $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det A$, где је 3 ред матрице, и да је $\det A^T = \det A$, важи

$$\det(\operatorname{adj}(3A^T)) = (\det(3A^T))^2 = (3^3 \det(A^T))^2 = 3^6 (\det A)^2 = 3^6 \cdot 2^2 = 2916.$$

Дакле, $\det(\operatorname{adj}(3A^T)) = 2916$.

в) За $t = 3$, на основу резултата из дела под а), имамо да је $\det A = 0$. Применом својства детерминанте производа, тј. *Коши-Бинеове формуле*, добијамо

$$\det(A \cdot (A^2 - 5 \cdot \operatorname{adj} A + 6I)) = \det A \cdot \det(A^2 - 5 \cdot \operatorname{adj} A + 6I) = 0.$$

Према томе, $\det(A \cdot (A^2 - 5 \cdot \operatorname{adj} A + 6I)) = 0$. ■

24. [Јануарски рок, 2014/15. година] Одредити све матрице које су комутативне (пермутабилне) са матрицом $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Решење: Потражимо све матрице облика $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, које задовољавају једнакост $AX = XA$. Тада је

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix},$$

$$XA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{bmatrix}.$$

Из једнакости одговарајућих елемената матрица AX и XA добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} a + 2c &= a + 3b \\ b + 2d &= 2a + 4b \\ 3a + 4c &= c + 3d \\ 3b + 4d &= 2c + 4d \end{aligned}$$

Једноставним трансформацијама и елиминацијом еквивалентних једначина, претходни систем своди се на

$$\begin{aligned} 2c - 3b &= 0 \\ -2a - 3b + 2d &= 0 \\ a + c - d &= 0 \end{aligned}$$

Уколико од друге једначине одузмемо прву и добијену једначину поделимо са -2 добијамо управо трећу једначину, па је претходни систем еквивалентан систему

$$\begin{aligned} 2c - 3b &= 0 \\ a + c - d &= 0 \end{aligned}$$

Одатле је $c = \frac{3}{2}b$ и $d = a + \frac{3}{2}b$. Према томе, све матрице које су комутативне са матрицом A припадају скупу

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}b & a + \frac{3}{2}b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

■

25. [Фебруарски рок, 2014/15. година] **а)** Израчунати детерминанту

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix},$$

б) за $x = i$ израчунати вредност детерминанте D_{2015} , где је $i = \sqrt{-1}$.

Решење: а) Применом Лајласовог развоја по првој врсти детерминанте D_n добијамо

$$D_n = \frac{2}{x} \cdot D_{n-1} - \frac{1}{x^2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{x} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}.$$

Сада, применом Лапласовог развоја по првој колони последње детерминанте следи

$$D_n = \frac{2}{x} \cdot D_{n-1} - \frac{1}{x^2} \cdot D_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Одговарајућа карактеристична једначина претходне диферендне једначине има облик $\lambda^2 - \frac{2}{x}\lambda + \frac{1}{x^2} = 0$, тј. $\left(\lambda - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$. Дакле, карактеристична једначина има двоструки корен $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{x}$, па је опште решење диферендне једначине облика

$$D_n = (C_1 + nC_2) \cdot \frac{1}{x^n},$$

где су $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ константе које одређујемо из почетних услова. Наиме, за $n = 1$ и

$$n = 2 \text{ важи } D_1 = \frac{2}{x} \text{ и } D_2 = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2}. \text{ Стога, добијамо систем}$$

$$\begin{aligned} \frac{C_1 + C_2}{x} &= \frac{2}{x} \\ \frac{C_1 + 2C_2}{x^2} &= \frac{3}{x^2}, \end{aligned}$$

тј.

$$C_1 + C_2 = 2$$

$$C_1 + 2C_2 = 3,$$

чије је решење $C_1 = C_2 = 1$. Према томе,

$$D_n = \frac{n+1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \neq 0.$$

б) За $x = i$ је $i^{2015} = i^{4 \cdot 503 + 3} = i^3 = -i$, па је

$$D_{2015}(i) = \frac{2016}{i^{2015}} = \frac{2016}{-i} = 2016i.$$

Дакле,

$$D_{2015}(i) = 2016i.$$

■

26. [Јулски рок, 2014/15. година] Израчунати вредност детерминанте

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

реда n , ако је $n \geq 2$.

Решење: Применом *Лајласовог развоја* по последњој врсти детерминанте D_n добијамо

$$D_n = (-1)^{2n} \cdot 5 \cdot D_{n-1} + (-1)^{2n-1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Сада, применом Лапласовог развоја по последњој колони последње детерминанте следи

$$D_n = 5 \cdot D_{n-1} - 6 \cdot D_{n-2} \quad n \geq 3.$$

Одговарајућа *карактеристична једначина* претходне *диференцијалне једначине* једнака је $t^2 - 5t + 6 = 0$, тј. $(t - 2)(t - 3) = 0$. Дакле, карактеристична једначина има корене $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, па је опште решење диференцијалне једначине облика

$$D_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n,$$

где су $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ константе које одређујемо из почетних услова. Наиме, за $n = 1$ и $n = 2$ важи $D_1 = 1$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. Стога, добијамо систем

$$2C_1 + 3C_2 = 1$$

$$4C_1 + 9C_2 = -2,$$

чије је решење $C_1 = \frac{5}{2}$ и $C_2 = -\frac{4}{3}$. Према томе,

$$D_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

■

27. [Колоквијум, 2015/16. година] Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

Одредити A^n за $n \in \mathbb{Z}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = aI + bB,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *јединична матрица*, а $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Како је $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$, следи да је $B^k = \mathbb{O}$ за свако

$k \geq 2$ (видети 3. задатак).

Пошто матрице aI и bB комутирају при множењу, услов за примену *биномне формуле* на збир $aI + bB$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$) имамо само два ненулта сабирка, тј. за свако $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$A^n = (aI + bB)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (aI)^{n-k} \cdot (bB)^k = a^n I + na^{n-1}bB = \begin{bmatrix} a^n & 0 & nba^{n-1} \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

За $n = 0$ важи $A^0 = I$, што је такође обухваћено добијеном формулом.

Даље, пошто је $a \neq 0$, важи да је $\det A = a^3 \neq 0$, па је матрица A *регуларна*. Како је

$$A = a \left(I + \frac{b}{a} B \right)$$

и $B^2 = \mathbb{O}$, имамо да је $\left(I + \frac{b}{a} B \right)^{-1} = I - \frac{b}{a} B$, јер је

$$\left(I + \frac{b}{a} B \right) \cdot \left(I - \frac{b}{a} B \right) = I - \frac{b^2}{a^2} B^2 = I.$$

Према томе, $A^{-1} = \frac{1}{a} I - \frac{b}{a^2} B$.

Пошто матрице $\frac{1}{a}I$ и $\frac{b}{a^2}(-B)$ комутирају при множењу и важи $(-B)^k = \mathbb{O}$ за свако $k \geq 2$, за свако $m \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} A^{-m} &= (A^{-1})^m = \left(\frac{1}{a} \cdot I + \frac{b}{a^2} \cdot (-B) \right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot \left(\frac{1}{a}I \right)^{m-k} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}B \right)^k \\ &= \frac{1}{a^m}I - \frac{mb}{a^{m+1}}B = \begin{bmatrix} a^{-m} & 0 & -mba^{-m-1} \\ 0 & a^{-m} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ако ставимо да је $n = -m$, добијамо исти облик формуле као и за позитивне степене. Према томе,

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & nba^{n-1} \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

28. [Колоквијум, 2015/16. година] Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ и

$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Израчунати:

а) $(A^T - B)^{-1}$;

б) $\det(A^{-1}CB^{-1})$;

в) $\det X$, ако је $((AX)^T - X^TB)^{-1} = A - B$.

Решење: а) Како је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ симетрична у односу на главну дијагоналу, важи да је $A^T = A$. Даље,

$$A^T - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Како је $\det(A^T - B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, матрица $A^T - B$ је *регуларна*, па постоји њена *инверзна матрица*, коју налазимо помоћу формуле

$$(A^T - B)^{-1} = \frac{1}{\det(A^T - B)} \cdot \text{adj}(A^T - B),$$

где је $\text{adj}(A^T - B)$ *адјунгована матрица* матрице $A^T - B$. Њу добијамо помоћу формуле $\text{adj}(A^T - B) = [A_{i,j}]_{2 \times 2}^T$, где је $A_{i,j}$ *алгебарски кофактор* елемента $a_{i,j}$ матрице $A^T - B$, који налазимо помоћу формуле $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot D_{i,j}$, где је $D_{i,j}$ *детерминанта* која се добија од детерминанте матрице $A^T - B$ изостављањем i -те врсте и j -те

колоне. Применом наведених формула, добијамо да је

$$(A^T - B)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Дакле,

$$\boxed{(A^T - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}.$$

б) Према *Коши-Бинеовој формули*, за детерминанту производа квадратних матрица важи $\det(M_1 \cdot M_2) = \det M_1 \cdot \det M_2$.

Како су $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ и $\det C = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, матрице A и B су регуларне, па је

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}CB^{-1}) &= \det(A^{-1}) \cdot \det C \cdot \det(B^{-1}) \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \det C \cdot \frac{1}{\det B} = \frac{0}{(-1)(-1)} = 0. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\boxed{\det(A^{-1}CB^{-1}) = 0}.$$

в) Из једнакости $((AX)^T - X^TB)^{-1} = A - B$, инвертовањем обе стране добијамо

$$(AX)^T - X^TB = (A - B)^{-1}.$$

Како за транспоновани производ важи формула $(AX)^T = X^TA^T$ и како је $A^T = A$, следи да је $X^TA^T - X^TB = (A - B)^{-1}$, па је $X^T(A - B) = (A - B)^{-1}$.

Посматрањем детерминанти обе стране претходне једнакости добијамо

$$\det(X^T) \cdot \det(A - B) = \det((A - B)^{-1}),$$

па је

$$\det X \cdot \det(A - B) = \frac{1}{\det(A - B)}.$$

Пошто је $A^T = A$, из дела под а) имамо $\det(A - B) = \det(A^T - B) = -2$.

Стога је $\det X = \frac{1}{(\det(A - B))^2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$.

Дакле,

$$\boxed{\det X = \frac{1}{4}}.$$

■

29. [Колоквијум, 2022/23. година] Одредити матрицу A^n , $n \in \mathbb{N}$, ако је $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = 2I + B,$$

где је $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јединична матрица, а $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Како је

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

математичком индукцијом се једноставно показује да је $B^k = B$, за свако $k \in \mathbb{N}$ (видети 4. задатак).

Пошто матрице $2I$ и B комутирају при множењу, услов за примену *биномне формуле* на збир $2I + B$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за сваку матрицу B важи $B^0 = I$), за свако $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned} A^n &= (2I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (2I)^{n-k} \cdot B^k = 2^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B \\ &= 2^n I + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} - 2^n \right) B = 2^n I + (3^n - 2^n) B \\ &= \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} + (3^n - 2^n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 2^n - 3^n & 2^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

јер је

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k = (2 + 1)^n = 3^n.$$

Дакле,

$$A^n = \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 2^n - 3^n & 2^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■

30. [Колоквијум, 2022/23. година] Помоћу Крамеровог метода, у зависности од реалног параметра a , дискутовати и решити систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{aligned} x &- ay + az &= -a \\ -x &+ ay + z &= a \\ -ax &+ y + (a+1)z &= 2 \end{aligned}$$

Решење: Детерминанта датог система линеарних алгебарских једначина једнака је

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ -1 & a & 1 \\ -a & 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1)^2,$$

док су детерминанте које одговарају непознатим x , y и z , редом, једнаке

$$D_x = \begin{vmatrix} -a & -a & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = -a(a+1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ -1 & a & 1 \\ -a & 2 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-2),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ -1 & a & a \\ -a & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

У наставку разликујемо следеће случајеве.

1) Ако је $D \neq 0$, тј. ако је $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, систем има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-a(a+1)}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{a}{1-a^2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{(a+1)(a^2-2)}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{a^2-2}{a^2-1},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = 0.$$

Дакле, за $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{1-a^2}, \frac{a^2-2}{a^2-1}, 0 \right).$$

2) Ако је $a = 1$, тада је $D = 0$, а $D_x = -2 \neq 0$. Према томе,

$$a = 1 \implies \text{систем нема решења}.$$

3) Ако је $a = -1$, важи $D = D_x = D_y = D_z = 0$, а систем добија облик

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -x - y + z &= -1. \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Друга једначина је еквивалентна првој. Из треће једначине је $y = 2 - x$, а заменом у прву једначину добијамо $z = 1$. Ако узмемо $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, следи $y = 2 - t$. Стога, скуп свих решења је

$$a = -1 \implies \{(t, 2-t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Коначно,

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ a = -1 & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ a = 1 & \implies \text{систем је } \textit{неса\text{т}ласан} \end{array} \right. . \quad \blacksquare$$

31. [Поправни колоквијум, 2022/23. година] Дата је детерминанта D_n са

$$D_n = \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 - a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & 0 & a_3 - a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 - a_n \end{vmatrix},$$

где су $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Израчунати дату детерминанту D_n .

Решење: Користећи *Лапласов развој* по првој врсти дате детерминанте, добијамо

$$D_n = (a_3 - a_1) \begin{vmatrix} a_3 - a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_3 - a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 - a_n \end{vmatrix}.$$

Ако на последњу детерминанту поново применимо Лапласов развој по првој врсти, следи

$$D_n = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & a_3 - a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 - a_n \end{vmatrix}.$$

Последња детерминанта је детерминанта горње троугаоне матрице, па је њена вредност једнака производу елемената на главној дијагонали. Стога је

$$D_n = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)a_3(a_3 - a_4) \cdots (a_3 - a_n) = a_3 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^n (a_3 - a_i). \quad \blacksquare$$

32. [Поправни колоквијум, 2022/23. година] Дат је систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{array}{rrcrcl} (k+5)x & + & (2k+1)y & - & 9z & = & 3k+9 \\ 2x & + & ky & - & 3z & = & k+3 \\ 4x & + & (k+1)y & - & (k+5)z & = & k+7 \end{array}$$

Применом Крамерових формула дискутовати и решити дати систем у зависности од вредности реалног параметра k .

Решење: Детерминанта система једнака је

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} k+5 & 2k+1 & -9 \\ 2 & k & -3 \\ 4 & k+1 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{V_1-V_2-V_3 \rightarrow V_1} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ 2 & k & -3 \\ 4 & k+1 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)K_1+K_3 \rightarrow K_3} \\ &= \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 2 & k & -5 \\ 4 & k+1 & -(k+9) \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k+5). \end{aligned}$$

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су:

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 3k+9 & 2k+1 & -9 \\ k+3 & k & -3 \\ k+7 & k+1 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{V_1-V_2-V_3 \rightarrow V_1} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ k+3 & k & -3 \\ k+7 & k+1 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)K_3+K_1 \rightarrow K_1} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & k-1 \\ k+6 & k & -3 \\ 2k+12 & k+1 & -(k+5) \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k+6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} k+5 & 3k+9 & -9 \\ 2 & k+3 & -3 \\ 4 & k+7 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{V_1-V_2-V_3 \rightarrow V_1} \begin{vmatrix} k-1 & k-1 & k-1 \\ 2 & k+3 & -3 \\ 4 & k+7 & -(k+5) \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)K_1+K_2 \leftarrow K_2 \\ (-1)K_1+K_3 \leftarrow K_3}} \\ &= \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 2 & k+1 & -5 \\ 4 & k+3 & -(k+9) \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k+6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} k+5 & 2k+1 & 3k+9 \\ 2 & k & k+3 \\ 4 & k+1 & k+7 \end{vmatrix} \xrightarrow{V_1-V_2-V_3 \rightarrow V_1} \begin{vmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ 2 & k & k+3 \\ 4 & k+1 & k+7 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)K_1+K_3 \rightarrow K_3} \\ &= \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 2 & k & k+1 \\ 4 & k+1 & k+3 \end{vmatrix} = (k-1)^2. \end{aligned}$$

На основу добијених вредности за D , D_x , D_y и D_z , разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $D \neq 0$, тј. ако је $k \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$, систем има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{k+6}{k+5}, \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{k+6}{k+5}, \\ z &= \frac{D_z}{D} = -\frac{1}{k+5}. \end{aligned}$$

Дакле, за $k \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{k+6}{k+5}, \frac{k+6}{k+5}, -\frac{1}{k+5} \right).$$

2) Ако је $k = 1$, важи $D = D_x = D_y = D_z = 0$, а систем добија облик

$$\begin{aligned} 6x + 3y - 9z &= 12 \\ 2x + y - 3z &= 4. \\ 4x + 2y - 6z &= 8 \end{aligned}$$

Све три једначине су еквивалентне једначини $2x + y - 3z = 4$. Ако ставимо да је $x = \alpha$ и $z = \beta$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, добијамо $y = 4 - 2\alpha + 3\beta$. Стога, скуп свих решења је

$$k = 1 \implies \{(\alpha, 4 - 2\alpha + 3\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

3) Ако је $k = -5$, тада је $D = 0$, а $D_x = -36 \neq 0$. Према томе,

$$k = -5 \implies \text{систем нема решења}.$$

Коначно,

$$\begin{cases} k \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ k = 1 & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ k = -5 & \implies \text{систем је } \textit{несајласан} \end{cases}.$$

■

33. [Колоквијум, 2023/24. година] За дате $n \in \mathbb{N}$ и $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ за $1 \leq i \leq n$, израчунати детерминанту:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 + b_3 & \dots & a_3 & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} & \dots & a_{n-2} + b_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n & a_n & a_n + b_n \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

Решење: Од сваке колоне, почев од друге, одузмимо прву колону, тј. извршимо трансформације $C_j - C_1 \rightarrow C_j$ за свако $j \in \{2, 3, \dots, n\}$. Овим трансформацијама вредност детерминанте се не мења, па добијамо

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix}.$$

Развојем добијене детерминанте по првој врсти, а затим користећи чињеницу да је детерминанта дијагоналне матрице једнака производу елемената на њеној главној дијагонали, следи

$$D_n = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{vmatrix} = \boxed{a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n}. \quad \blacksquare$$

34. [Колоквијум, 2023/24. година] Нека је дат систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} x &+ py + p^2z &= 0 \\ p^2x &+ y + pz &= 0. \\ px &+ p^2y + z &= 0 \end{aligned}$$

а) Одредити све вредности параметра $p \in \mathbb{R}$ за које дати систем једначина има јединствено решење.

б) Одредити сва решења датог система за оне вредности реалног параметра p за које дати систем нема јединствено решење.

Решење: а) Дати систем линеарних алгебарских једначина је *хомоген*, па увек има *тривијално решење* $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Хомоген систем има јединствено решење ако и само ако је детерминанта матрице система различита од нуле. Детерминанта система једнака је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & p & p^2 \\ p^2 & 1 & p \\ p & p^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + p^3 + p^6 - p^3 - p^3 - p^3 = p^6 - 2p^3 + 1 = (p^3 - 1)^2.$$

Према томе, $D \neq 0 \iff p^3 \neq 1$. Како је $p \in \mathbb{R}$, једнакост $p^3 = 1$ важи само за $p = 1$. Дакле, дати систем има јединствено решење за

$$p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

б) Дати систем нема јединствено решење једино за $p = 1$. У том случају систем постаје

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0. \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

тј. своди се на једну једначину $x + y + z = 0$. Ако узмемо да су $x = t$ и $y = k$, где су $t, k \in \mathbb{R}$ произвољни параметри, тада је $z = -t - k$. Према томе, скуп свих решења је

$$p = 1 \implies \{(t, k, -t - k) \mid t, k \in \mathbb{R}\}.$$

Коначно,

$$\left\{ \begin{array}{ll} p \in \mathbb{R} \setminus \{1\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ p = 1 & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \end{array} \right\}. \quad \blacksquare$$

35. [Поправни колоквијум, 2023/24. година] **а)** Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

За све $n \in \mathbb{N}$ израчунати $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^n + A^{n+1}$.

б) За све $n \in \mathbb{N}$ израчунати $\det \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^n + A^{n+1} \right)$.

Решење: а) Нека је $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Како је $A^{n+1} = A \cdot A^n$, полазни израз можемо факторисати са десне стране на следећи начин:

$$C \cdot A^n + A^{n+1} = C \cdot A^n + A \cdot A^n = (C + A) \cdot A^n.$$

Притом, $C + A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Нека је $M = C + A$. Непосредним множењем добијамо

$$M \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = M.$$

Из једнакости $M \cdot A = M$, *математичком индукцијом* се једноставно може показати да је $M \cdot A^n = M$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

- 1) База индукције: за $n = 1$ је $M \cdot A = M$,
 2) Индукцијска хипотеза: ако је $M \cdot A^k = M$, добијамо да је и $M \cdot A^{k+1} = M \cdot A^k \cdot A = (M \cdot A^k) \cdot A = M \cdot A = M$. Према томе,

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^n + A^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

б) На основу резултата из дела под а) добијамо

$$\det \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^n + A^{n+1} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Напомена: Задатак под б) може се решити и без примене резултата из дела под а) на следећи начин:

$$\det \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A^n + A^{n+1} \right) = \det \left(\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + A \right) \cdot A^n \right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \det A^n = 0. \quad \blacksquare$$

36. [Поправни колоквијум, 2023/24. година] У зависности од вредности параметра $p \in \mathbb{R}$ решити систем линеарних алгебарских једначина:

$$\begin{aligned} px + y + 2z &= 1 \\ 2x + py + z &= 1. \\ px + 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

Решење: Дати систем линеарних алгебарских једначина можемо записати у матрич-

ном облику $A \cdot X = B$, где је $A = \begin{bmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & p & 1 \\ p & 2 & 1 \end{bmatrix}$ матрица система, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ колона

непознатих и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ колона слободних чланова. Детерминанта система једнака је

$$\begin{aligned} D = \det A &= \begin{vmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & p & 1 \\ p & 2 & 1 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ p & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & p \\ p & 2 \end{vmatrix} = p(p-2) - (2-p) + 2(4-p^2) \\ &= -p^2 - p + 6 = -(p+3)(p-2). \end{aligned}$$

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & p & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = p - 2 - (1 - 2) + 2(2 - 2p) = -3(p - 1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ p & 2 & 1 \end{vmatrix} = -p - (2 - p) + 2(4 - p) = -2(p - 3),$$

$$D_z = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & 1 \\ p & 2 & 2 \end{vmatrix} = p(2p - 2) - (4 - p) + (4 - p^2) = p(p - 1).$$

На основу добијених вредности за D , D_x , D_y и D_z , разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $D \neq 0$, тј. ако је $p \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, систем има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3(p - 1)}{-(p + 3)(p - 2)} = \frac{3(p - 1)}{(p + 3)(p - 2)},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(p - 3)}{-(p + 3)(p - 2)} = \frac{2(p - 3)}{(p + 3)(p - 2)},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{p(p - 1)}{-(p + 3)(p - 2)} = -\frac{p(p - 1)}{(p + 3)(p - 2)}.$$

Дакле, за $p \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{3(p - 1)}{(p + 3)(p - 2)}, \frac{2(p - 3)}{(p + 3)(p - 2)}, -\frac{p(p - 1)}{(p + 3)(p - 2)} \right).$$

2) Ако је $p = -3$, тада је $D = 0$, а $D_x = 12 \neq 0$, па систем нема решења. За $p = 2$ такође је $D = 0$, а $D_x = -3 \neq 0$, па ни у овом случају систем нема решења.

Према томе, $p \in \{-3, 2\} \implies$ систем нема решења.

3) Не постоји вредност параметра p за коју систем има бесконачно много решења, тј.

$$\nexists p \in \mathbb{R} \text{ за које систем има бесконачно много решења.}$$

Коначно,

$$\begin{cases} p \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ \nexists p \in \mathbb{R} & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ p \in \{-3, 2\} & \implies \text{систем је } \textit{несаљасан} \end{cases}.$$

■

37. [Колоквијум, 2025/26. година] Одредити матрицу X која је решење матричне једначине $ABX = 2C - X$, уколико је $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = A^T$ и $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Решење: Полазну матричну једначину $ABX = 2C - X$ најпре трансформишемо, тако што левој и десној страни једнакости додамо X , па добијемо $ABX + X = 2C$, а затим на левој страни једнакости извучемо здесна заједничку матрицу X , па добијемо $(AB + I) \cdot X = 2C$, где је I јединична матрица другог реда. Како је $B = A^T$, имамо да је

$$AB + I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Пошто је $\det(AB + I) = \begin{vmatrix} 15 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 90 - 64 = 26 \neq 0$, матрица $AB + I$ је *регуларна*, па постоји њена *инверзна матрица*. Множењем једначине $(AB + I) \cdot X = 2C$ са леве стране матрицом $(AB + I)^{-1}$ добијемо

$$X = (AB + I)^{-1} \cdot 2C.$$

Коначно,

$$X = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -30 & 16 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{8}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{15}{13} & \frac{8}{13} \end{bmatrix}}. \quad \blacksquare$$

38. [Колоквијум, 2025/26. година] Дата је матрична једначина $A(X - B)^{-1} = B^{-1}A$,

и матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

а) Који услов морају задовољавати матрице A и B да би дата једначина имала решење $X = 2B$?

б) Решити дату једначину ако матрице A и B не задовољавају тај услов.

Решење: Како је $\det A = 2 \neq 0$ и $\det B = -2 \neq 0$, матрице A и B су *регуларне*.

а) Полазну матричну једначину множимо са леве стране матрицом A^{-1} и добијемо $(X - B)^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$. Инвертовањем обе стране једнакости следи

$$X - B = (A^{-1}B^{-1}A)^{-1} = A^{-1}BA,$$

па је $X = A^{-1}BA + B$. Да би $X = 2B$ било решење дате једначине, потребно је и довољно да важи

$$2B = A^{-1}BA + B \iff B = A^{-1}BA \iff AB = BA.$$

Према томе, матрице A и B морају бити комутативне при множењу, тј. $\boxed{AB = BA}$.

б) За дате матрице A и B важи

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = BA,$$

па оне не задовољавају услов из дела под а).

$$\text{Како је } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj} A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ из опште формуле}$$

$X = A^{-1}BA + B$ добијамо

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}. \blacksquare$$

39. [Поправни колоквијум, 2025/26. година] Одредити све елементе матрице A^n ако

$$\text{је } A = \begin{bmatrix} p+q & 0 & q \\ q & p & q \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, \text{ где су } p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Решење: Матрицу A можемо записати у облику

$$A = pI + qB,$$

$$\text{где је } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ јединична матрица, а } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Како је}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

математичком индукцијом се једноставно показује да је $B^k = B$, за свако $k \in \mathbb{N}$ (видети 4. задатак).

Пошто матрице pI и qB комутирају при множењу, услов за примену биномне формуле на збир $pI + qB$ је задовољен (видети напомену у 2. задатку). Стога, (знајући да за

сваку матрицу B важи $B^0 = I$), за свако $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned}
 A^n &= (pI + qB)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (pI)^{n-k} \cdot (qB)^k = p^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot p^{n-k} q^k B \\
 &= p^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot p^{n-k} q^k \right) B = p^n I + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot p^{n-k} q^k - p^n \right) B \\
 &= p^n I + ((p+q)^n - p^n) B = \begin{bmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & p^n \end{bmatrix} + ((p+q)^n - p^n) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (p+q)^n & 0 & (p+q)^n - p^n \\ (p+q)^n - p^n & p^n & (p+q)^n - p^n \\ 0 & 0 & p^n \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Дакле,

$$A^n = \begin{bmatrix} (p+q)^n & 0 & (p+q)^n - p^n \\ (p+q)^n - p^n & p^n & (p+q)^n - p^n \\ 0 & 0 & p^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

■

40. [Поправни колоквијум, 2025/26. година] Применом Крамерових формула, у зависности од вредности параметра $m \in \mathbb{R}$, дискутовати и решити систем једначина

$$\begin{array}{rrrrcl}
 (9-2m)x & + & (5-m)y & + & z & = & m-3 \\
 (5-m)x & + & (5-m)y & + & z & = & 1 \\
 x & + & y & + & (5-m)z & = & 1
 \end{array}$$

Решење: Детерминанта система једнака је

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 9-2m & 5-m & 1 \\ 5-m & 5-m & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \stackrel{(-1)V_2+V_1 \rightarrow V_1}{=} \begin{vmatrix} 4-m & 0 & 0 \\ 5-m & 5-m & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \\
 &= (4-m)((5-m)^2 - 1) = (4-m)^2(6-m) = -(m-4)^2(m-6).
 \end{aligned}$$

Одговарајуће детерминанте у Крамеровим формулама су

$$\begin{aligned}
 D_x &= \begin{vmatrix} m-3 & 5-m & 1 \\ 1 & 5-m & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \stackrel{(-1)V_2+V_1 \rightarrow V_1}{=} \begin{vmatrix} m-4 & 0 & 0 \\ 1 & 5-m & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \\
 &= (m-4)((5-m)^2 - 1) = (m-4)^2(m-6),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_y &= \begin{vmatrix} 9-2m & m-3 & 1 \\ 5-m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \stackrel{(-1)V_2+V_1 \rightarrow V_1}{=} \begin{vmatrix} 4-m & m-4 & 0 \\ 5-m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5-m \end{vmatrix} \stackrel{(m-5)V_2+V_3 \rightarrow V_3}{=} \\
&= (4-m)((5-m)-1) - (m-4)((5-m)^2-1) \\
&= (4-m)^2 - (m-4)(4-m)(6-m) = -(m-4)^2(m-7), \\
D_z &= \begin{vmatrix} 9-2m & 5-m & m-3 \\ 5-m & 5-m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(m-5)V_3+V_2 \rightarrow V_2}{=} \begin{vmatrix} 9-2m & 5-m & m-3 \\ 0 & 0 & m-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(m-4) \begin{vmatrix} 9-2m & 5-m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(m-4)(4-m) = (m-4)^2.
\end{aligned}$$

На основу добијених вредности за D , D_x , D_y и D_z , разликујемо следеће случајеве:

1) Ако је $D \neq 0$, тј. ако $m \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$, систем има јединствено решење. Применом Крамерових формула добијамо

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = -\frac{(m-4)^2(m-6)}{(m-4)^2(m-6)} = -1, \\
y &= \frac{D_y}{D} = \frac{(m-4)^2(m-7)}{(m-4)^2(m-6)} = \frac{m-7}{m-6}, \\
z &= \frac{D_z}{D} = -\frac{(m-4)^2}{(m-4)^2(m-6)} = -\frac{1}{m-6}.
\end{aligned}$$

Дакле, за $m \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\}$ систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(-1, \frac{m-7}{m-6}, -\frac{1}{m-6} \right).$$

2) Ако је $m = 6$, тада је $D = 0$, а $D_z = 4 \neq 0$. Према томе,

$$m = 6 \implies \text{систем нема решења}.$$

3) Ако је $m = 4$, важи $D = D_x = D_y = D_z = 0$, а систем добија облик

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 1 \\
x + y + z &= 1. \\
x + y + z &= 1
\end{aligned}$$

Све три једначине су еквивалентне једначини $x + y + z = 1$. Ако узмемо да су $x = \alpha$ и $y = \beta$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ произвољни параметри, добијамо $z = 1 - \alpha - \beta$. Стога, скуп свих решења је

$$m = 4 \implies \{(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Коначно,

$$\left\{ \begin{array}{ll} m \in \mathbb{R} \setminus \{4, 6\} & \implies \text{систем је } \textit{огређен} \\ m = 4 & \implies \text{систем је } \textit{неогређен} \\ m = 6 & \implies \text{систем је } \textit{несагласан} \end{array} \right. .$$



Глава 3

Полиноми

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Да ли је полином $P(x) = nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x) + p$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - (p + 1)x + p$, где је $n \in \mathbb{N}$, а $p \in \mathbb{R}$? Посебно испитати случај када је $p = 1$.

Решење: Полином $P(x)$ је *дељив* полиномом $Q(x)$ ако је сваки *корен* полинома $Q(x)$ уједно и корен полинома $P(x)$ истог или већег *реда*. Корени полинома $Q(x)$ су $x_1 = 1$ и $x_2 = p$. Проверимо сада да ли су $x_1 = 1$ и $x_2 = p$ корени полинома $P(x)$. Како је $P(1) = n - 1 - np + (p - 1)(n - 1) + p = 0$ и $P(p) = np^{n+1} - (1 + np)p^n + p(p - 1)\frac{p^{n-1} - 1}{p - 1} + p = 0$, тврђење важи за $p \neq 1$. У случају $p = 1$ имамо да је $P(x) = nx^{n+1} - (1 + n)x^n + 1$ и $x = 1$ је корен другог реда полинома $Q(x)$. Према томе, треба показати да је $x = 1$ корен бар другог реда полинома $P(x)$. Уочимо да је $P(1) = 0$. Како је $P'(x) = n(n + 1)x^n - n(n + 1)x^{n-1}$, следи да је $P'(1) = 0$. Одавде можемо закључити да је $x = 1$ корен бар другог реда полинома $P(x)$. Коначно, закључујемо да $\boxed{Q|P}$.

Напомена: Подсетимо се *Теореме о вишесћружним коренима* која каже да ако је a корен реда $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, комплексног полинома $P(x)$, тада је a корен реда $k - 1$ полинома $P'(x)$. Обрат ове теореме не важи, тј. није сваки корен полинома $P'(x)$ уједно и корен полинома $P(x)$, али ако јесте корен полинома $P(x)$, онда је за 1 већег реда него што је за полином $P'(x)$. ■

2. [Фебруарски рок, 2010/11. година] За које рационалне вредности a и b је полином $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, дељив са $(x - 1)^2$?

Решење: Ако $(x - 1)^2 | P(x) \implies (x - 1) | P'(x) = (n + 1)ax^n + nbx^{n-1}$. На основу претходног задатка, можемо закључити да је број 1 *корен* бар другог *реда* полинома $P(x)$, тј. корен бар првог реда његовог извода. Из услова $P'(1) = (n + 1)a + nb = 0$ и $P(1) = a + b + 1 = 0$ налазимо да је $\boxed{a = n \text{ и } b = -1 - n}$. ■

3. [Септембарски рок, 2010/11. година] Дат је полином $P(x)$ степена $n \geq 3$. Ако је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$ једнак 8, а при дељењу са $x + 3$ једнак 3, одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x^2 + x - 6$.

Решење: Како је 8 остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$, следи да полином $P(x)$ можемо написати као:

$$P(x) = (x - 2) \cdot Q_1(x) + 8 \implies P(2) = 8.$$

Како је 3 остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x + 3$, следи да полином $P(x)$ можемо написати као:

$$P(x) = (x + 3) \cdot Q_2(x) + 3 \implies P(-3) = 3.$$

И на крају, имамо да је:

$$P(x) = (x^2 + x - 6) \cdot Q_3(x) + \underbrace{Ax + B}_{\text{остатак}} = (x - 2)(x + 3)Q_3(x) + \underbrace{Ax + B}_{\text{остатак}},$$

$A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, јер је остатак при дељењу два полинома за један мањег степена од степена полинома делиоца. Одавде добијамо систем две једначине:

$$\begin{aligned} 8 &= P(2) = 2A + B \\ 3 &= P(-3) = -3A + B \end{aligned}.$$

Коначно, добијамо да је $A = 1$ и $B = 6$, па је тражени остатак $\boxed{x + 6}$. ■

4. [Октобарски рок, 2010/11. година] Одредити све нуле полинома

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix},$$

а затим одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ биномом $x + 3$.

Решење: Од друге, треће и четврте врсте одузмемо прву врсту. Тада је

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 - x & 1 - x^2 & 1 - x^3 \\ 0 & 2 - x & 4 - x^2 & 8 - x^3 \\ 0 & 3 - x & 9 - x^2 & 27 - x^3 \end{vmatrix}.$$

Развијањем детерминанте по првој колони добијамо

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 - x^2 & 1 - x^3 \\ 2 - x & 4 - x^2 & 8 - x^3 \\ 3 - x & 9 - x^2 & 27 - x^3 \end{vmatrix}.$$

Користећи идентитет $a^k - x^k = (a - x)(a^{k-1} + a^{k-2}x + \dots + x^{k-1})$, из прве, друге и треће врсте издвајамо редом чиниоце $1 - x$, $2 - x$ и $3 - x$, па следи да је

$$P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 + x & 1 + x + x^2 \\ 1 & 2 + x & 4 + 2x + x^2 \\ 1 & 3 + x & 9 + 3x + x^2 \end{vmatrix}.$$

Од друге и треће врсте одузмемо прву врсту:

$$P(x) = (1 - x)(2 - x)(3 - x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 + x & 1 + x + x^2 \\ 0 & 1 & 3 + x \\ 0 & 2 & 8 + 2x \end{vmatrix}.$$

Развијањем детерминанте по првој колони добијамо

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 - x)(2 - x)(3 - x) \begin{vmatrix} 1 & 3 + x \\ 2 & 8 + 2x \end{vmatrix} = (1 - x)(2 - x)(3 - x)((8 + 2x) - 2(3 + x)) \\ &= 2(1 - x)(2 - x)(3 - x). \end{aligned}$$

Према томе, све нуле полинома $P(x)$ су $\boxed{x_1 = 1, x_2 = 2 \text{ и } x_3 = 3}$.

Према *Безуовој теореме*, *осишак* при дељењу полинома $P(x)$ биномом $x + 3$ једнак је вредности $P(-3)$. Дакле,

$$P(-3) = 2(1 - (-3))(2 - (-3))(3 - (-3)) = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \boxed{240}. \quad \blacksquare$$

5. [Колоквијум, 2011/12. година] **а)** Одредити највећи заједнички делилац полинома $P(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4$ и $Q(x) = 6x^5 - 24x^3 + 18x$.

б) Одредити вишеструке корене полинома $P(x)$.

Решење: **а)** Одредимо *највећи заједнички делилац* полинома $P(x)$ и $Q(x)$ помоћу *Еуклидовој алгоритама*:

$$\begin{aligned} P(x) : \frac{1}{6}Q(x) &= (x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4) : (x^5 - 4x^3 + 3x) = x, \\ &\quad \frac{x^6 - 4x^4 + 3x^2}{-2x^4 + 6x^2 - 4} \\ &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=R_1(x)} \end{aligned}$$

где је $R_1(x) = -2x^4 + 6x^2 - 4$ *осишак* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$.

Даље, потражимо остатак при дељењу полинома $Q(x)$ полиномом $R_1(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}Q(x) : \left(-\frac{1}{2}\right)R_1(x) &= (x^5 - 4x^3 + 3x) : (x^4 - 3x^2 + 2) = x, \\ &\quad \frac{x^5 - 3x^3 + 2x}{-x^3 + x} \\ &\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=R_2(x)} \end{aligned}$$

где је $R_2(x) = -x^3 + x$ тражени остатак. Поступак понављамо све док се не добије остатак нула. У наставку потражимо остатак при дељењу полинома $R_1(x)$ полиномом $R_2(x)$:

$$-\frac{1}{2}R_1(x) : (-1)R_2(x) = \frac{(x^4 - 3x^2 + 2) : (x^3 - x) = x,}{\begin{array}{r} x^4 - x^2 \\ \hline -2x^2 + 2 \\ \hline \end{array}} \\ = R_3(x)$$

при чему је $R_3(x) = -2x^2 + 2$ тражени остатак.

Коначно, потражимо остатак при дељењу полинома $R_2(x)$ полиномом $R_3(x)$:

$$-R_2(x) : \left(-\frac{1}{2}\right)R_3(x) = \frac{(x^3 - x) : (x^2 - 1) = x.}{\begin{array}{r} x^3 - x \\ \hline 0 \end{array}}$$

Пошто смо добили остатак 0, то је уједно крај поступка. Последњи добијени делилац је НЗД полинома $P(x)$ и $Q(x)$, тј. $\boxed{\text{НЗД}(P, Q) = x^2 - 1}$.

Напомена: С обзиром на то да НЗД два ненулта полинома над пољем F постоји и јединствен је до на мултипликативну константу (тј. ако је $R(x) = \text{НЗД}(P, Q)$, онда је и $a \cdot R(x) = \text{НЗД}(P, Q)$, $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$), могли смо да поделимо два полинома претходно помножена одговарајућим константама, ради добијања што мањег броја рационалних коефицијената полинома, и да притом НЗД остане исти, тј. да се разликује до на ненулту константу.

б) Да бисмо одредили *вишеструке корене* полинома $P(x)$, потребно је да нађемо НЗД(P, P'). Тада важи да је сваки корен *реда* k полинома НЗД(P, P') уједно корен реда $k + 1$ полинома $P(x)$. Приметимо да је $Q(x)$ заправо полином $P'(x)$. Како смо у делу под а) већ одредили $\text{НЗД}(P, Q) = x^2 - 1$, можемо закључити да су $\boxed{x_1 = 1}$ и $\boxed{x_2 = -1}$ двоструки корени полинома $P(x)$.

Напомена: Поред овог начина, вишеструке корене полинома $P(x)$ могли смо одредити и на други начин, на пример, растављањем полинома $P(x)$ на чиниоце, затим помоћу *Теореме о рационалним нулама* (видети 21. задатак) или налажењем корена полинома $P'(x)$, па ако је то и корен полинома $P(x)$, онда је за 1 већег реда. ■

6. [Колоквијум, 2011/12. година] Одредити вредности реалних параметара a и b ако се зна да је збир два корена полинома $P(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 2a$ једнак 2, а производ друга два корена једнак -6 . А затим одредити све корене полинома $P(x)$.

Решење: Применимо *Вијетове формуле*:

$$1) \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$2) \ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = a$$

- 3) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -b$
 4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2a$
 5) $x_1 + x_2 = 2$
 6) $x_3 \cdot x_4 = -6$.

Из ових шест једначина добијамо следеће везе:

$$\begin{aligned}
 1), 5) &\implies x_3 + x_4 = -1 \\
 4), 6) &\implies x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}a \\
 2) &\iff x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 = a \\
 &\iff -\frac{1}{3}a - 2 - 6 = a \\
 &\iff \boxed{a = -6} \implies x_1 \cdot x_2 = 2 \\
 3) &\iff x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 \cdot (x_1 + x_2) = -b \\
 &\iff -2 - 12 = -b \\
 &\iff \boxed{b = 14}.
 \end{aligned}$$

Како је $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1 \cdot x_2 = 2$, добијамо да је $\boxed{x_1 = 1 + i}$ и $\boxed{x_2 = 1 - i}$. Друга два корена добијамо из веза $x_3 + x_4 = -1$ и $x_3 \cdot x_4 = -6$. Одавде је $\boxed{x_3 = -3}$ и $\boxed{x_4 = 2}$. ■

7. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Одредити параметре a и b тако да је збир два корена полинома $P(x) = x^4 - ax^3 - 7x^2 + ax + b$ једнак 4, а производ друга два корена једнак 2. Затим одредити све корене полинома $P(x)$.

Решење: Применимо Вијејшове формуле:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$
 2) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = -7$
 3) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -a$
 4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = b$
 5) $x_1 + x_2 = 4$
 6) $x_3 \cdot x_4 = 2$.

Из ових шест једначина добијамо следеће везе:

$$\begin{aligned}
 1), 5) &\implies x_3 + x_4 = a - 4 \\
 4), 6) &\implies x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) &\iff x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 = -7 \\
&\iff \frac{b}{2} + 4 \cdot (a - 4) + 2 = -7 \\
&\iff b + 8a = 14 \quad (*) \\
3) &\iff x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 \cdot (x_1 + x_2) = -a \\
&\iff \frac{b}{2} \cdot (a - 4) + 2 \cdot 4 = -a \\
&\iff b \cdot (a - 4) + 2a + 16 = 0. \quad (**)
\end{aligned}$$

Из (*) и (**) добијамо $\boxed{a_1 = 5 \wedge b_1 = -26}$ или $\boxed{a_2 = 1 \wedge b_2 = 6}$.

У случају када је $a_1 = 5 \wedge b_1 = -26$, имамо да је $x_1 + x_2 = 4$ и $x_1 \cdot x_2 = -13$, као и да је $x_3 + x_4 = 1$ и $x_3 \cdot x_4 = 2$, па добијамо да је $\boxed{x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{17}}$ и $\boxed{x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}}$.

У случају када је $a_2 = 1 \wedge b_2 = 6$, имамо да је $x_1 + x_2 = 4$ и $x_1 \cdot x_2 = 3$, као и да је $x_3 + x_4 = -3$ и $x_3 \cdot x_4 = 2$, па добијамо $\boxed{x_1 = 3}$, $\boxed{x_2 = 1}$, $\boxed{x_3 = -1}$ и $\boxed{x_4 = -2}$. ■

8. [Јунски рок, 2011/12. година] Одредити реалан полином $P(x)$ четвртог степена тако да важи $(x - 1)^3 \mid (P(x) - 8)$ и $(x + 1)^2 \mid (P(x) + 8)$.

Решење: Нека је полином P у општем случају једнак $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$. Као што знамо, за два комплексна полинома P и Q важи: $P \mid Q$ ($\deg P > 0, \deg Q > 0$) ако и само ако је свака нула полинома P уједно и нула полинома Q истог или већег реда. Такође знамо да ако је a корен реда $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, комплексног полинома $P(x)$, тада је a корен реда $k - 1$ полинома $P'(x)$. Према томе, из услова $(x - 1)^3 \mid (P(x) - 8)$ добијамо следеће три везе коефицијената полинома P :

1) $x = 1$ је нула најмање трећег реда полинома $P(x) - 8$, тј. $P(1) - 8 = 0 \iff$

$$\boxed{A + B + C + D + E - 8 = 0};$$

2) из 1) следи да је $x = 1$ нула најмање другог реда полинома $(P(x) - 8)' = P'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$, тј. $\boxed{4A + 3B + 2C + D = 0}$;

3) из 2) следи да је $x = 1$ нула најмање првог реда полинома $P''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$, тј. $\boxed{12A + 6B + 2C = 0}$.

Из услова $(x + 1)^2 \mid (P(x) + 8)$ добијамо следеће две везе коефицијената полинома P :

4) $x = -1$ је нула најмање другог реда полинома $P(x) + 8$, тј. $P(-1) + 8 = 0 \iff$

$$\boxed{A - B + C - D + E + 8 = 0};$$

5) из 4) следи да је $x = -1$ нула најмање првог реда полинома $(P(x) + 8)' = P'(x)$, тј. $\boxed{-4A + 3B - 2C + D = 0}$.

Из система претходних пет једнакости добијамо да је $A = 3$, $B = -4$, $C = -6$, $D = 12$ и $E = 3$, па је тражени полином $\boxed{P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 3}$. ■

9. [Јулски рок, 2011/12. година] Одредити реалне коефицијенте полинома шестог степена тако да је $-\sqrt{2}i$ његова двострука нула, да је коефицијент уз x^5 једнак 0,

да при дељењу са $x - 2$ даје остатак 108 и да је коефицијент уз x^2 за један мањи од слободног члана.

Решење: Пошто је полином $P(x)$ реалан и број $-\sqrt{2}i$ је његова *двоспруга нула*, према *Теореме о конјуговано-комплексним коренима* и број $\sqrt{2}i$ мора бити двострука нула полинома $P(x)$. Како је полином шестог степена, можемо га записати у облику

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + \sqrt{2}i)^2 \cdot (x - \sqrt{2}i)^2 \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= (x^2 + 2)^2 \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= (x^4 + 4x^2 + 4) \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= ax^6 + bx^5 + (c + 4a)x^4 + 4bx^3 + (4c + 4a)x^2 + 4bx + 4c, \end{aligned}$$

где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$.

Пошто је коефицијент уз x^5 једнак 0, следи да је $b = 0$.

На основу *Безуове теореме о остацима* при дељењу полинома $P(x)$ биномом $x - 2$, важи да је $P(2) = 108$. Зато је

$$P(2) = (2^2 + 2)^2 (4a + 2b + c) = 108 \iff 36(4a + c) = 108 \iff 4a + c = 3. \quad (*)$$

Коефицијент уз x^2 једнак је $4c + 4a$, а слободни члан је $4c$. Према услову задатка добијамо да је $4c + 4a = 4c - 1 \iff a = -\frac{1}{4}$. Из једнакости (*) следи да је $c = 4$.

Према томе, $a = -\frac{1}{4}$, $b = 0$ и $c = 4$, па је тражени полином

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^6 + 3x^4 + 15x^2 + 16. \quad \blacksquare$$

10. [Септембарски рок, 2011/12. година] Наћи остатак при дељењу полинома

$$P(x) = x^{2m} - 2x^{2m-1} + x - 1 \text{ полиномом } Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Решење: Најпре раставимо полином $Q(x)$ на чиниоце:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1) \\ &= (x - 2)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$

Према томе, *корени* полинома $Q(x)$ су $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$.

Нека је *остатак* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$, знајући да је степен остатка за један мањи од степена полинома делиоца, једнак $R(x) = Ax^2 + Bx + C$. Тада постоји полином $S(x)$ такав да је

$$P(x) = Q(x)S(x) + Ax^2 + Bx + C,$$

при чему су полиноми $S(x)$ и $R(x)$ јединствени. За $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ и $m \in \mathbb{N}$ имамо да је

$$-1 = 1^{2m} - 2 \cdot 1^{2m-1} + 1 - 1 = P(1) = Q(1) \cdot S(1) + A + B + C,$$

$$1 = (-1)^{2m} - 2(-1)^{2m-1} - 1 - 1 = P(-1) = Q(-1) \cdot S(-1) + A - B + C,$$

$$1 = 2^{2m} - 2 \cdot 2^{2m-1} + 2 - 1 = P(2) = Q(2) \cdot S(2) + 4A + 2B + C.$$

Како су $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$ корени полинома $Q(x)$, добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ A - B + C = 1 \\ 4A + 2B + C = 1 \end{cases}.$$

Одузимањем друге једначине од прве добијамо $2B = -2$, па је $B = -1$. Затим из прве једначине следи да је $A + C = 0$, док из треће добијамо $4A + C = 3$. Према томе, $A = 1$ и $C = -1$. Коначно, тражени остатак је $\boxed{R(x) = x^2 - x - 1}$. ■

11. [Колоквијум, 2012/13. година] Наћи реалне коефицијенте a и b тако да је полином $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - x + b$ и за тако нађено b одредити нуле полинома $Q(x)$.

Решење: Дељењем полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ добијамо

$$P(x) = (x^2 - x + b) \cdot (6x^2 - x + a - 6b - 1) + \underbrace{(a - 5b + 2)x - ab + 6b^2 + b + 2}_{\text{остатак}}.$$

Полином $P(x)$ је *дељив* полиномом $Q(x)$ ако и само ако је добијени *остатак* идентички једнак нултом полиному. Према томе, добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} a - 5b + 2 &= 0 \\ -ab + 6b^2 + b + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Из прве једначине добијамо да је $a = 5b - 2$. Заменом у другу једначину следи

$$-(5b - 2)b + 6b^2 + b + 2 = 0 \iff b^2 + 3b + 2 = 0,$$

тј. $(b + 1)(b + 2) = 0$. Одавде је $b_1 = -1$ или $b_2 = -2$, па су одговарајуће вредности параметра a једнаке $a_1 = -7$ или $a_2 = -12$. Дакле, добијамо два пара коефицијената:

$$\boxed{(a, b) = (-7, -1)} \text{ или } \boxed{(a, b) = (-12, -2)}.$$

За $(a, b) = (-7, -1)$ је $Q(x) = x^2 - x - 1$, па су његове *нуле* $\boxed{x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$.

За $(a, b) = (-12, -2)$ је $Q(x) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$, па су његове нуле $\boxed{x_1 = 2}$ и $\boxed{x_2 = -1}$. ■

12. [Колоквијум, 2012/13. година] Одредити вредност реалног коефицијента k тако да производ два корена полинома $P(x) = 2x^3 - 19x^2 + 37x + k$ буде једнак 1, па за тако нађено k наћи корене полинома $P(x)$.

Решење: Нека су x_1 , x_2 и x_3 корени полинома $P(x)$ и нека је $x_1 \cdot x_2 = 1$. Применом Вијетових формула добијамо:

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 \cdot x_2 = 1 \\ 2) \quad & x_1 + x_2 + x_3 = \frac{19}{2} \\ 3) \quad & x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{37}{2} \\ 4) \quad & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Из 1) и 4) следи да је $x_3 = -\frac{k}{2}$, док из 1) и 3) добијамо $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = \frac{35}{2}$. Са друге стране, из 2) следи да је

$$x_1 + x_2 = \frac{19}{2} - x_3 = \frac{19 + k}{2}.$$

Заменом добијених вредности добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{19 + k}{2} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) &= \frac{35}{2} \iff -k(19 + k) = 70 \iff k^2 + 19k + 70 = 0 \\ &\iff (k + 5)(k + 14) = 0. \end{aligned}$$

Према томе, тражене вредности коефицијента су $k_1 = -5$ или $k_2 = -14$.

За $k_1 = -5$ имамо да је $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = 1$ и $x_1 + x_2 = 7$. Зато су x_1 и x_2 корени квадратне једначине $x^2 - 7x + 1 = 0$, (јер је $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$), па добијамо

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_3 = \frac{5}{2}.$$

За $k_2 = -14$ имамо да је $x_3 = 7$, $x_1 \cdot x_2 = 1$ и $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$. Зато су x_1 и x_2 корени квадратне једначине $2x^2 - 5x + 2 = 0$, одакле је

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2} \text{ и } x_3 = 7. \quad \blacksquare$$

13. [Јануарски рок, 2012/13. година] Корени полинома $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ су комплексни бројеви a и b и реалан број c . Одредити полином другог степена $P(x)$ за који важи $P(a) = b$, $P(b) = a$ и $P(c) = c$. Затим одредити остатак при дељењу полинома $P(P(x)) - x$ полиномом $Q(x)$.

Решење: Најпре раставимо полином $Q(x)$ на чиниоце:

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 2)(x^2 + 1).$$

Према томе, можемо узети да је $a = i$, $b = -i$ и $c = 2$. Нека је тражени полином другог степена облика $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$. Из услова $P(i) = -i$, $P(-i) = i$ и $P(2) = 2$ добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} -A + Bi + C &= -i \\ -A - Bi + C &= i \\ 4A + 2B + C &= 2 \end{aligned}$$

Сабирањем прве две једначине добијамо да је $C = A$, а њиховим одузимањем следи да је $B = -1$. Уврштавањем ових вредности у трећу једначину добијамо

$$4A - 2 + A = 2 \implies 5A = 4 \implies A = C = \frac{4}{5}.$$

Дакле, тражени полином је $P(x) = \frac{4}{5}x^2 - x + \frac{4}{5}$.

Одредимо сада *остатак* при дељењу полинома $P(P(x)) - x$ полиномом $Q(x)$. На основу датих услова важи:

$$\begin{aligned} P(P(a)) - a &= P(b) - a = 0, \\ P(P(b)) - b &= P(a) - b = 0, \\ P(P(c)) - c &= P(c) - c = 0. \end{aligned}$$

Према томе, сва три различита *корена* полинома $Q(x)$ уједно су и корени полинома $P(P(x)) - x$. Отуда следи да $Q(x) \mid (P(P(x)) - x)$, па је тражени остатак $\boxed{0}$. ■

14. [Јунски рок, 2012/13. година] Нека су r_a и r_b остаци при дељењу реалног полинома $P(x)$ са $x - a$, односно са $x - b$, где је $a \neq b$. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x) = (x - a)(x - b)$.

Решење: На основу *Безуове теореме о остацима* важи $P(a) = r_a$ и $P(b) = r_b$. Како је полином $Q(x)$ другог степена, остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ је облика $R(x) = Ax + B$, јер је степен остатка за један мањи од степена полинома делиоца. Према томе, полином $P(x)$ можемо записати у облику

$$P(x) = (x - a)(x - b)S(x) + Ax + B.$$

За $x = a$ и $x = b$ добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} Aa + B &= r_a \\ Ab + B &= r_b \end{aligned}$$

Одузимањем друге једначине од прве следи $A(a - b) = r_a - r_b$, па је, пошто је $a \neq b$, $A = \frac{r_a - r_b}{a - b}$. Затим, из једнакости $Aa + B = r_a$, добијамо $B = r_a - a \cdot \frac{r_a - r_b}{a - b} =$

$\frac{ar_b - br_a}{a - b}$. Дакле, тражени остатак је $\boxed{R(x) = \frac{r_a - r_b}{a - b}x + \frac{ar_b - br_a}{a - b}}$. ■

15. [Јулски рок, 2012/13. година] Одредити све вредности a и b за које реални полиноми $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ и $Q(x) = x^3 + bx + 12$ имају два заједничка корена, а затим их одредити.

Решење: Пошто су $P(x)$ и $Q(x)$ монични полиноми трећег степена са реалним коефицијентима и имају два заједничка корена, они имају заједнички монични квадратни чинилац. Нека је тај чинилац $x^2 + ux + v$. Тада постоје реални бројеви α и β такви да је $P(x) = (x^2 + ux + v)(x + \alpha)$ и $Q(x) = (x^2 + ux + v)(x + \beta)$. Развијањем производа и упоређивањем одговарајућих коефицијената добијамо

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + (u + \alpha)x^2 + (v + \alpha u)x + \alpha v, \\ Q(x) &= x^3 + (u + \beta)x^2 + (v + \beta u)x + \beta v, \end{aligned}$$

па важе једнакости

$$u + \alpha = a, \quad v + \alpha u = 0, \quad \alpha v = 18,$$

и

$$u + \beta = 0, \quad v + \beta u = b, \quad \beta v = 12.$$

Из $u + \beta = 0$ и $\beta v = 12$ следи да је $uv = -12$. Такође, из $\alpha v = 18$ имамо да је $\alpha = \frac{18}{v}$, при чему је $v \neq 0$. Уврштавањем у једнакост $v + \alpha u = 0$ добијамо

$$v + \frac{18u}{v} = 0 \iff v^2 + 18u = 0.$$

Како је $u = -\frac{12}{v}$, следи да је

$$v^2 - \frac{216}{v} = 0 \iff v^3 = 216,$$

одакле је $v = 6$. Затим добијамо да је $u = -2$, $\alpha = 3$ и $\beta = 2$. Према томе,

$$\boxed{a = u + \alpha = 1} \text{ и } \boxed{b = v + \beta u = 2}.$$

За ове вредности параметара полиноми се растављају у облику

$$P(x) = (x^2 - 2x + 6)(x + 3) \text{ и } Q(x) = (x^2 - 2x + 6)(x + 2).$$

Њихови заједнички корени су корени полинома $x^2 - 2x + 6$, па је

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 24}}{2} = 1 \pm i\sqrt{5}.$$

Дакле, тражени заједнички корени су $\boxed{x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{5}}$.

Напомена: Заједничке корене полинома $P(x)$ и $Q(x)$ можемо наћи и као корене полинома $P(x) - Q(x)$, тј. $ax^2 - bx + 6$. Како су то и једини корени добијеног полинома, то су дати полиноми *дељиви* без *остатка* добијеним полиномом. На основу тога добијају се услови

$$(a^2 + b)b - 6a = 0,$$

$$b = 2a^2,$$

одакле је $a = 1$ и $b = 2$. Корени полинома $P(x)$ су -3 и $1 \pm i\sqrt{5}$, а полинома $Q(x)$ су -2 и $1 \pm i\sqrt{5}$. ■

16. [Септембарски рок, 2012/13. година] Ако је познато да је $x^2 + x + 1 = 0$, израчунати вредност израза $R = x^{2012} + x^{-2012}$.

Решење: Из једнакости $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ и услова $x^2 + x + 1 = 0$ следи да је $x^3 = 1$. Како је $2012 = 3 \cdot 670 + 2$, добијамо да је

$$R = x^{2012} + x^{-2012} = x^{3 \cdot 670 + 2} + x^{-(3 \cdot 670 + 2)} = x^2 + x^{-2}.$$

Из $x^3 = 1$ следи да је $x^{-2} = x$, па је $R = x^2 + x = -1$. Према томе, тражена вредност је $R = -1$. ■

17. [Колоквијум, 2013/14. година] **а)** За које реалне вредности параметра p бином $x + 1$ дели полином $P(x) = x^3 + p^2x^2 + px - 5$.

б) За $p = 2$ изразити полином $P(x)$ као полином по променљивој $x + 1$.

Решење: а) Према *Безуовој теореме о остатку*, бином $x + 1$ дели полином $P(x)$ ако и само ако је $P(-1) = 0$. Стога, имамо да је

$$P(-1) = (-1)^3 + p^2(-1)^2 + p(-1) - 5 = -1 + p^2 - p - 5 = p^2 - p - 6 = (p + 2)(p - 3).$$

Према томе, $P(-1) = 0 \iff (p + 2)(p - 3) = 0 \iff p \in \{-2, 3\}$.

б) За $p = 2$ добијамо $P(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 5$. Представимо полином $P(x)$ у облику

$$P(x) = a_0(x + 1)^3 + a_1(x + 1)^2 + a_2(x + 1) + a_3.$$

Развијањем десне стране добијамо:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + a_1(x^2 + 2x + 1) + a_2(x + 1) + a_3 \\ &= a_0x^3 + (3a_0 + a_1)x^2 + (3a_0 + 2a_1 + a_2)x + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3). \end{aligned}$$

Поређењем одговарајућих коефицијената следи:

$$a_0 = 1, \quad 3a_0 + a_1 = 4, \quad 3a_0 + 2a_1 + a_2 = 2, \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = -5.$$

Одавде добијамо да је $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -3$ и $a_3 = -4$. Дакле,

$$P(x) = (x+1)^3 + (x+1)^2 - 3(x+1) - 4. \quad \blacksquare$$

18. [Колоквијум, 2013/14. година] **а)** Доказати да је полином

$$P(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2},$$

$m, n, p \in \mathbb{N}_0$, дељив полиномом $Q(x) = x^2 + x + 1$.

б) За $m = 2$, $n = 1$ и $p = 0$ наћи све корене полинома $P(x)$.

Решење: а) Како је $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = (x-1)Q(x)$, сваки *корен* x_0 полинома $Q(x)$ задовољава $x_0^3 = 1$ и $x_0 \neq 1$. Одавде следи

$$P(x_0) = x_0^{3m} + x_0^{3n+1} + x_0^{3p+2} = (x_0^3)^m + x_0(x_0^3)^n + x_0^2(x_0^3)^p = 1 + x_0 + x_0^2 = Q(x_0) = 0.$$

Према томе, сваки корен полинома $Q(x)$ уједно је и корен полинома $P(x)$. Пошто полином $Q(x)$ има два различита корена, закључујемо да $Q(x) \mid P(x)$.

б) За $m = 2$, $n = 1$ и $p = 0$ добијамо

$$P(x) = x^6 + x^4 + x^2 = x^2(x^4 + x^2 + 1) = x^2((x^2 + 1)^2 - x^2) = x^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Из фактора x^2 добијамо двоструки корен $x_1 = x_2 = 0$. Корени полинома $x^2 - x + 1$ су

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

док су корени полинома $x^2 + x + 1$ једнаки

$$x_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Према томе, сви корени полинома $P(x)$ су

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad x_{5,6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \blacksquare$$

19. [Јануарски рок, 2013/14. година] Одредити реалне бројеве a и b тако да $x = i$ буде корен полинома $P(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 5$, а затим решити једначину $P(x) = 0$.

Решење: Како је $x = i$ *корен* полинома $P(x)$, важи

$$P(i) = i^4 + 4i^3 + ai^2 + bi + 5 = 1 - 4i - a + bi + 5 = (6 - a) + (b - 4)i = 0.$$

Пошто су $a, b \in \mathbb{R}$, реални и имагинарни део претходног израза морају бити једнаки нули, па је $6 - a = 0$ и $b - 4 = 0$. Према томе, $a = 6$ и $b = 4$.

За добијене вредности параметара једначина $P(x) = 0$ има облик

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Како је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима, према *Теорему о конјуговано-комплексним коренима* следи да је, поред i , и $-i$ корен полинома $P(x)$. Зато је $x^2 + 1$ делилац полинома $P(x)$, а његовим растављањем добијамо $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5)$. Према томе,

$$P(x) = 0 \iff x^2 + 1 = 0 \text{ или } x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Из прве једначине добијамо $x_{1,2} = \pm i$, док из друге следи

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm i.$$

Коначно, решења једначине су $\boxed{x_1 = i, x_2 = -i, x_3 = -2 + i \text{ и } x_4 = -2 - i}$. ■

20. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Доказати да је полином

$$P(x) = mx^{m+n} - (m+n)x^m + n,$$

$(m, n \in \mathbb{N})$ дељив са $(x-1)^2$ и одредити количник.

Решење: Полином $P(x)$ је *дељив* полиномом $Q(x)$ ако је сваки *корен* полинома $Q(x)$ уједно и корен полинома $P(x)$ истог или већег *реда*. Према томе, да бисмо доказали да је полином $P(x)$ дељив са $(x-1)^2$, довољно је показати да је $x=1$ његова *нула* најмање другог реда. Користећи *Теорему о вишеструким коренима* можемо закључити да је довољно да покажемо да важи да је $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$ (видети 1. задатак). Заиста важи да је $P(1) = m - m - n + n = 0$, а како је

$$P'(x) = m(m+n)x^{m+n-1} - m(m+n)x^{m-1},$$

закључујемо да важи и да је $P'(1) = m(m+n) - m(m+n) = 0$.

Дакле, $x=1$ је нула полинома $P(x)$ најмање другог реда, па важи

$$(x-1)^2 \mid P(x).$$

Дељење полинома $P(x)$ полиномом $(x-1)^2$ ћемо извршити двоструком применом *Хорнерове шеме* на следећи начин:

$P(x)$	m	0	0	...	0	$-(m+n)$	0	0	...	0	0	n
1	m	m	m	...	m	$-n$	$-n$	$-n$	...	$-n$	$-n$	$\boxed{0}$
1	m	$2m$	$3m$	...	$n \cdot m$	$(m-1) \cdot n$	$(m-2) \cdot n$	$(m-3) \cdot n$	...	n	$\boxed{0}$	

Дакле, *количник* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $(x-1)^2$ једнак је

$$\boxed{mx^{m+n-2} + 2mx^{m+n-3} + \dots + nmx^{m-1} + (m-1)nx^{m-2} + (m-2)nx^{m-3} + \dots + 2nx + n}. \quad \blacksquare$$

21. [Јунски рок, 2013/14. година] Дат је реалан полином

$$P(x) = 4x^5 - 24x^4 + 53x^3 - 61x^2 + ax + b.$$

Наћи све нуле полинома $P(x)$ ако се зна да је $1 + i$ једна нула и да постоји бар једна рационална нула.

Решење: Како је $P(x)$ реалан полином и $1 + i$ његова нула, на основу *Теореме о конјуговано-комплексним коренима* следи да је и $1 - i$ нула полинома $P(x)$ истог реда. Према томе, полином $P(x)$ је *дељив* полиномом

$$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2,$$

па га можемо записати у облику

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

Из једнакости

$$4x^5 - 24x^4 + 53x^3 - 61x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 2)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D),$$

изједначавањем одговарајућих коефицијената, добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B - 2A &= -24 \\ C - 2B + 2A &= 53 \\ D - 2C + 2B &= -61 \\ 2C - 2D &= a \\ 2D &= b \end{aligned}$$

Одавде редом следи да је $A = 4$, $B = -16$, $C = 13$, $D = -3$, $a = 32$ и $b = -6$. Дакле,

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(4x^3 - 16x^2 + 13x - 3).$$

Како полином $x^2 - 2x + 2$ нема рационалних нула (јер је дискриминанта $D = b^2 - 4ac = -4 < 0$, па су нуле конјуговано-комплексни бројеви), рационална нула полинома $P(x)$ мора бити нула полинома $Q(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$. Према *Теореме о рационалним нулама*, свака рационална нула полинома $Q(x)$ облика је $x_0 = \frac{m}{n}$, где $m \mid 3$ и $n \mid 4$. Провером свих вредности из скупа свих могућности за рационалну нулу $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4} \right\}$, добијамо да је $Q(3) = 0$, па важи

$$Q(x) = (x - 3)(4x^2 - 4x + 1) = (x - 3)(2x - 1)^2.$$

Према томе, $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 3)(2x - 1)^2$, па су све нуле полинома $P(x)$

$$\boxed{x_1 = 1 + i, \ x_2 = 1 - i, \ x_3 = 3 \text{ и } x_4 = x_5 = \frac{1}{2}}.$$

Напомена: Подсетимо се Теореме о рационалним нулама: Нека је $P(x)$ комплексан полином са целобројним коефицијентима, тј. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,

$a_n \neq 0$ и $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Ако је $x_0 = \frac{p}{q}$ корен полинома $P(x)$, где су p и q узајамно прости цели бројеви, онда $p \mid a_0$ и $q \mid a_n$. ■

22. [Јулски рок, 2013/14. година] Израчунати количник и остатак при дељењу полинома $P(x) = 2x^5 + x^4 + x^2 + 2x + 2$ полиномом $Q(x) = 2x^2 + 1$, ако су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми:

а) над пољем реалних бројева;

б) над пољем $GF(3)$.

Решење: У оба случаја тражимо полиноме $S(x)$ и $R(x)$ такве да важи

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x),$$

при чему је $\deg R(x) < \deg Q(x) = 2$.

а) Посматрајмо најпре полиноме над пољем $\mathbb{R}$. Дељењем полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ добијамо:

$$P(x) = (2x^2 + 1) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{2}x + \frac{7}{4}.$$

Према томе, *количник* и *остатак* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ над пољем $\mathbb{R}$ су редом

$$\boxed{S(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} \text{ и } \boxed{R(x) = \frac{5}{2}x + \frac{7}{4}}.$$

б) Посматрајмо сада полиноме над пољем $GF(3)$. У овом пољу важи $2^{-1} = 2$, јер је $2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \pmod{3}$, а сви коефицијенти се рачунају по модулу 3. Дељењем добијамо

$$P(x) = (2x^2 + 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 1) + (x + 1).$$

Дакле, *количник* и *остатак* при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ над пољем $GF(3)$ су редом

$$\boxed{S(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1} \text{ и } \boxed{R(x) = x + 1}. \quad \blacksquare$$

23. [Септембарски рок, 2013/14. година] Дат је полином

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x + a.$$

Одредити све вредности реалног параметра a за које полином $P(x)$ има једну рационалну двоструку нулу, а затим одредити и преостале нуле тог полинома.

Решење: Нека је $x_0 \in \mathbb{Q}$ рационална *двострука нула* полинома $P(x)$. Тада је, према *Теореме о вишеструким коренима*, x_0 уједно *проста рационална нула* полинома $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 14x + 20$ (видети 1. задатак). Потражимо сада рационалне нуле

полинома $P'(x)$ применом *Теореме о рационалним нулама* (видети 21. задатак). Како је $P'(x)$ полином са целобројним коефицијентима, кандидате за рационалне нуле тражимо у облику $\frac{p}{q}$, где $p \mid 20$ и $q \mid 4$, па

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}, \pm 10, \pm 20 \right\}.$$

Добијамо да је $P'(2) = 0$, па је $x_0 = 2$ једна рационална нула полинома $P'(x)$. Дељењем полинома $P'(x)$ са $(x - 2)$ добијамо

$$P'(x) = 2(x - 2)(2x^2 + x - 5),$$

па су нуле полинома $P'(x)$ једнаке

$$x_1 = 2 \text{ и } x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}.$$

Пошто су x_2 и x_3 ирационални бројеви, једина рационална нула полинома $P'(x)$ је $x_0 = 2$. Да би $x_0 = 2$ била двострука нула полинома $P(x)$, мора важити и $P(2) = 0$. Имамо да је

$$P(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 + a = 12 + a,$$

па из услова $P(2) = 0$ следи да је $a = -12$.

За ову вредност параметра a полином је облика

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12.$$

Како је $x_0 = 2$ двострука нула, полином $P(x)$ је *дељив* са $(x - 2)^2$. Дељењем и даљим растављањем на чиниоце добијамо

$$P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 2x - 3) = (x - 2)^2(x - 1)(x + 3).$$

Према томе, рационална двострука нула је $x_{1,2} = 2$, док су преостале нуле полинома $P(x)$ $x_3 = 1$ и $x_4 = -3$. ■

24. [Октобарски рок, 2013/14. година] Реалан полином $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, $b \neq 0$, има три корена који образују геометријску прогресију, док њихове реципрочне вредности образују аритметичку прогресију. Одредити коефицијенте a и b .

Решење: Нека су x_1, x_2 и x_3 *корени* полинома $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$. Како корени образују геометријску прогресију, важи $x_1 \cdot x_3 = x_2^2$. Са друге стране, њихове реципрочне вредности образују аритметичку прогресију, па је $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3} = \frac{2}{x_2}$. Пошто је $b \neq 0$, ниједан корен полинома није једнак нули. Множењем последње једнакости са $x_1 x_2 x_3$ добијамо $x_2 x_3 + x_1 x_2 = 2x_1 x_3$. Како је $x_1 x_3 = x_2^2$, следи да је $x_2(x_1 + x_3) = 2x_2^2$. Дељењем са $x_2 \neq 0$ добијамо $x_1 + x_3 = 2x_2$. Одавде је $x_3 = 2x_2 - x_1$. Уврштавањем у

једнакост $x_1x_3 = x_2^2$ следи $x_1(2x_2 - x_1) = x_2^2 \iff (x_1 - x_2)^2 = 0$. Према томе, $x_1 = x_2$, а из $x_1 + x_3 = 2x_2$ следи и $x_3 = x_2$. Дакле, сва три корена су једнака. Нека је

$$x_1 = x_2 = x_3 = \lambda.$$

На основу *Вијетових формула* важи

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3,$$

па је $3\lambda = -3$, тј. $\lambda = -1$. Стога је

$$P(x) = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Коначно, тражени коефицијенти су $\boxed{a = 3}$ и $\boxed{b = 1}$. ■

25. [Колоквијум, 2014/15. година] Одредити реалне бројеве a и b тако да $x = -2 + i$ буде корен једначине $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$, а затим решити тако добијену једначину.

Решење: Са леве стране дате једначине налази се полином $P(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 5$ са реалним коефицијентима. Према *Теорему о конјуговано-комплексним коренима*, ако је $x_1 = -2 + i$ корен полинома $P(x)$, онда је и $x_2 = \bar{x}_1 = -2 - i$ његов корен. Према томе, полином $P(x)$ *дељив* је полиномом

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 2 - i)(x + 2 + i) = x^2 + 4x + 5.$$

При дељењу полинома $P(x)$ полиномом $Q(x)$ добијамо

$$P(x) = Q(x)(x^2 + a - 5) + (b - 4a + 20)x + 5(6 - a).$$

Да би полином $P(x)$ био дељив полиномом $Q(x)$, *осиштак* при дељењу мора бити идентички једнак нули, па важи систем једначина:

$$\begin{aligned} b - 4a + 20 &= 0 \\ 6 - a &= 0 \end{aligned}$$

Одавде добијамо тражене вредности параметара $\boxed{a = 6 \text{ и } b = 4}$. За добијене вредности параметара полином се раставља на чиниоце на следећи начин:

$$P(x) = (x^2 + 4x + 5)(x^2 + 1) = (x + 2 - i)(x + 2 + i)(x - i)(x + i).$$

Према томе, решења дате једначине су

$$\boxed{x_1 = -2 + i, \ x_2 = -2 - i, \ x_3 = i \text{ и } x_4 = -i}. \quad \blacksquare$$

26. [Колоквијум, 2014/15. година] **а)** Одредити реалан полином $P(x)$ четвртог степена који задовољава услове

$$(x-1)^3 \mid (P(x)-8) \quad \text{и} \quad (x+1)^2 \mid (P(x)+8).$$

б) Изразити полином $P(x)$ као полином по променљивој $x+1$.

Решење: а) Према *Теореме о вишеструким коренима* (видети 1. задатак), из датих услова следи

$$(x-1)^2 \mid P'(x) \quad \text{и} \quad (x+1) \mid P'(x).$$

Како је полином $P(x)$ четвртог степена, његов извод $P'(x)$ је трећег степена. Притом, како је један полином *дељив* другим полиномом акко је сваки *корен* другог полинома уједно и корен првог полинома истог или већег *реда*, следи да је $x_1 = 1$ корен најмање другог реда, а $x_2 = -1$ корен најмање првог реда полинома $P'(x)$. У овом случају, због степена полинома $P'(x)$, следи да је $x_1 = 1$ корен тачно другог реда, док је $x_2 = -1$ корен тачно првог реда полинома $P'(x)$. Према томе, полином $P'(x)$ можемо раставити на чиниоце у облику

$$P'(x) = A(x-1)^2(x+1) = A(x^3 - x^2 - x + 1),$$

за неко $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Интеграцијом последње једнакости добијамо

$$P(x) = \int P'(x)dx = \frac{A}{4}x^4 - \frac{A}{3}x^3 - \frac{A}{2}x^2 + Ax + C,$$

где је $C \in \mathbb{R}$. Из датих услова следи да је $P(1) = 8$ и $P(-1) = -8$, па добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} \frac{5A}{12} + C &= 8, \\ -\frac{11A}{12} + C &= -8 \end{aligned}.$$

Решавањем овог система налазимо да је $A = 12$ и $C = 3$. Дакле, тражени полином је

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 3.$$

б) Полином $P(x)$ изразићемо као полином по променљивој $x+1$ узастопном применом *Хорнерове шеме*:

-1	3	-4	-6	12	3	
-1	3	-7	1	11	-8	
-1	3	-10	11	0		
-1	3	-13	24			
-1	3	-16				
-1	3					

Према томе, полином $P(x)$ изражен као полином по променљивој $x + 1$ има облик

$$P(x) = 3(x+1)^4 - 16(x+1)^3 + 24(x+1)^2 - 8. \quad \blacksquare$$

27. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Показати да полином $P_5(x) = 9x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 16x^2 - 15x + 6$ има нулу $x_1 = -i\sqrt{3}$. Одредити затим остале нуле полинома.

Решење: Проверимо најпре да је $x_1 = -i\sqrt{3}$ нула полинома $P_5(x)$. Како је

$$(-i\sqrt{3})^2 = -3, \quad (-i\sqrt{3})^3 = 3i\sqrt{3}, \quad (-i\sqrt{3})^4 = 9 \text{ и } (-i\sqrt{3})^5 = -9i\sqrt{3},$$

добивамо

$$\begin{aligned} P_5(-i\sqrt{3}) &= 9 \cdot (-9i\sqrt{3}) - 6 \cdot 9 + 22 \cdot 3i\sqrt{3} - 16 \cdot (-3) - 15 \cdot (-i\sqrt{3}) + 6 \\ &= (-81 + 66 + 15)i\sqrt{3} - 54 + 48 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Према томе, $x_1 = -i\sqrt{3}$ је нула полинома $P_5(x)$.

Пошто је $P_5(x)$ полином са реалним коефицијентима, према *Теореме о конјуговано-комплексним коренима*, има и њој конјуговану нулу $x_2 = i\sqrt{3}$. Зато полином

$$(x + i\sqrt{3})(x - i\sqrt{3}) = x^2 + 3$$

дели полином $P_5(x)$. Делјењем добијамо

$$P_5(x) = (x^2 + 3)(9x^3 - 6x^2 - 5x + 2).$$

Помоћу *Теореме о рационалним коренима* (видети 21. задатак), кубни полином се даље раставља на чиниоце:

$$9x^3 - 6x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(9x^2 + 3x - 2) = (x - 1)(3x - 1)(3x + 2).$$

Одавде следе преостале нуле $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{1}{3}$ и $x_5 = -\frac{2}{3}$.

Дакле, све нуле полинома су

$$\left\{ -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\}. \quad \blacksquare$$

28. [Јулски рок, 2014/15. година] Нека су p , q и r природни бројеви. Под којим је условом полином $P(x) = x^{3p} + ax^{3q+1} + x^{3r+2}$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 + ax + 1$ ако је:

а) $a = 1$;

б) $a = -1$?

Решење: а) На основу задатка 18. а), можемо закључити да $Q(x) \mid P(x) \quad \forall p, q, r \in \mathbb{N}_0$.

б) За $a = -1$ имамо да је $Q(x) = x^2 - x + 1$. Како је $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = (x - 1)Q(x)$, сваки *корен* x_i , $i \in \{1, 2\}$, полинома $Q(x)$ задовољава $x_i^3 = -1$ и $x_i \neq -1$. Одавде следи

$$P(x_i) = (x_i^3)^p - (x_i^3)^q x_i + (x_i^3)^r x_i^2 = (-1)^p - (-1)^q x_i + (-1)^r x_i^2 = 0$$

$$\iff p, q, r \text{ су исте парности.}$$

Коначно, према *Теореме о вишеструким коренима* (видети 1. задатак) следи

$$\boxed{Q(x) \mid P(x) \iff p, q \text{ и } r \text{ су исте парности.}} \quad \blacksquare$$

29. [Септембарски рок, 2014/15. година] Реалан полином P четвртог степена има двоструку нулу $x = 1$, а полином $Q(x) = P(x) + 4$ има двоструку нулу $x = -1$. Одредити полином P ако је $Q(0) = -2$.

Решење: Нека је полином P у општем облику дат са

$$P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E, \quad A \neq 0,$$

па је

$$P'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D.$$

Како је $x = 1$ двострука нула полинома P , према *Теореме о вишеструким коренима* (видети 1. задатак), важи $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$. Пошто је $x = -1$ двострука нула полинома $Q(x) = P(x) + 4$, имамо да је $Q(-1) = 0$ и $Q'(-1) = 0$. При томе је $Q'(x) = P'(x)$. Најзад, из услова $Q(0) = -2$ следи $P(0) + 4 = -2$. Према томе, добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} A + B + C + D + E &= 0 \\ 4A + 3B + 2C + D &= 0 \\ A - B + C - D + E &= -4. \\ -4A + 3B - 2C + D &= 0 \\ E &= -6 \end{aligned}$$

Користећи $E = -6$, из прве и треће једначине следи

$$A + C = 4 \text{ и } B + D = 2,$$

док сабирањем, односно одузимањем друге и четврте једначине добијамо

$$3B + D = 0 \text{ и } 2A + C = 0.$$

Решавањем ових једначина налазимо $A = -4$, $B = -1$, $C = 8$, $D = 3$ и $E = -6$. Пошто је $A = -4 \neq 0$, добијени полином је заиста четвртог степена. Дакле, тражени полином је $\boxed{P(x) = -4x^4 - x^3 + 8x^2 + 3x - 6}$. $\blacksquare$

30. [Колоквијум, 2015/16. година] **а)** Одредити све нуле полинома

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

као и њихову вишеструкост.

б) Решити једначину

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

Решење: а) Најпре извршимо трансформацију над првом колоном:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{K_1+K_2+K_3+K_4 \rightarrow K_1} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & x \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Сада од прве, друге и треће врсте одузмемо четврту врсту, тј. даље је

$$P(x) \xrightarrow{\substack{(-1)V_4+V_1 \leftarrow V_1 \\ (-1)V_4+V_2 \leftarrow V_2 \\ (-1)V_4+V_3 \leftarrow V_3}} (x+3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x+3)(x-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Развојем последње детерминанте по првој колони следи

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Према томе, $P(x) = (x+3)(x-1)^3$. Одавде закључујемо да је $x = -3$ *просића нула*, док је $x = 1$ *шросирука нула* полинома $P(x)$. Коначно,

$$\boxed{x = -3 \text{ је проста нула, } x = 1 \text{ је трострука нула.}}$$

б) Означимо дату детерминанту са

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix}.$$

Одузмимо прву врсту од свих преосталих врста:

$$D_n(x) \stackrel{(-1)V_1+V_i \rightarrow V_i}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)-x \end{vmatrix},$$

за $i = 2, \dots, n$. Развојем по првој колони, а затим коришћењем чињенице да је детерминанта дијагоналне матрице једнака производу елемената на главној дијагонали, следи

$$D_n(x) = (-x) \cdot (1-x) \cdot (2-x) \cdot \dots \cdot ((n-2)-x).$$

Према томе, $D_n(x) = 0 \iff x \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$. Коначно, скуп решења дате једначине је $\boxed{x \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}}$. ■

31. [Колоквијум, 2015/16. година] Одредити коефицијенте $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, полинома $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + a^2x - 6$, ако је збир две нуле тог полинома 3, а производ друге две нуле -3 . Одредити све нуле тог полинома.

Решење: Нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 нуле полинома $P(x)$. Применимо Вијетове формуле:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$
- 2) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = b$
- 3) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -a^2$
- 4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -6$.

Без умањења општости, услове задатка можемо записати у облику

$$5) \ x_1 + x_2 = 3 \text{ и } 6) \ x_3 \cdot x_4 = -3.$$

Из једнакости 4) и 6) следи да је $x_1 \cdot x_2 = 2$. Према томе, x_1 и x_2 су *корени* квадратне једначине $x^2 - 3x + 2 = 0$, одакле добијамо $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Из једнакости 1) и 5) добијамо $x_3 + x_4 = -a - 3$. Са друге стране, једнакост 3) можемо записати у облику

$$-a^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 \cdot (x_1 + x_2) = 2(-a - 3) - 3 \cdot 3 = -2a - 15.$$

Одавде следи да је $a^2 - 2a - 15 = 0 \iff (a - 5)(a + 3) = 0$, па је $a = 5$ или $a = -3$. Како је по услову задатка $a > 0$, добијамо да је $a = 5$. Тада је $x_3 + x_4 = -8$, док је $x_3 \cdot x_4 = -3$. Зато су x_3 и x_4 корени квадратне једначине $x^2 + 8x - 3 = 0$, па је $x_3 = -4 + \sqrt{19}$ и $x_4 = -4 - \sqrt{19}$. Коначно, из једнакости 2) добијамо

$$b = x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 \cdot x_4 = 2 + 3 \cdot (-8) - 3 = -25.$$

Дакле, тражени коефицијенти су $\boxed{a = 5 \text{ и } b = -25}$, а све нуле полинома су

$$\boxed{x_1 = 1, \ x_2 = 2, \ x_3 = -4 + \sqrt{19} \text{ и } x_4 = -4 - \sqrt{19}}. \quad \blacksquare$$

32. [Фебруарски рок, 2022/23. година] Полином $P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ има један комплексан корен чији је реалан део једнак имагинарном делу. Одредити све корене тог полинома.

Решење: Први начин: Нека је $x_1 = a + ai$, $a \in \mathbb{R}$, корен полинома $P(x)$. Пошто је $P(x)$ реалан полином, према *Теореме о конјуговано-комплексним коренима*, и број $x_2 = \bar{x}_1 = a - ai$ је његов корен. Према томе,

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - a - ai)(x - a + ai) = x^2 - 2ax + 2a^2$$

дели полином $P(x)$. Дељењем полинома $P(x)$ полиномом $x^2 - 2ax + 2a^2$ добијамо

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2ax + 2a^2) (x^2 + (2a + 1)x + 2a^2 + 2a + 2) \\ &\quad + (2a^2 + 4a + 2)x + 4 - 4a^4 - 4a^3 - 4a^2. \end{aligned}$$

Како је $x^2 - 2ax + 2a^2$ *делилац* полинома $P(x)$, *остатак* мора бити једнак нули, па важи $2a^2 + 4a + 2 = 0$ и $4 - 4a^4 - 4a^3 - 4a^2 = 0$. Из прве једначине добијамо

$$2(a + 1)^2 = 0 \implies a = -1.$$

За $a = -1$ задовољена је и друга једначина, јер је

$$4 - 4 \cdot (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 = 4 - 4 + 4 - 4 = 0.$$

Дакле, два корена полинома $P(x)$ су $x_1 = -1 - i$ и $x_2 = -1 + i$, па важи

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x + 1 + i)(x + 1 - i) = x^2 + 2x + 2.$$

Дељењем добијамо $P(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - x + 2)$. Преостала два корена су решења једначине $x^2 - x + 2 = 0$, па је

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Према томе, сви корени полинома $P(x)$ су

$$\boxed{x_1 = -1 - i, \ x_2 = -1 + i \text{ и } x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}}.$$

Други начин: Нека је $x = a + ai = a(1 + i)$, $a \in \mathbb{R}$, корен полинома $P(x)$. Тада је

$$P(a(1 + i)) = a^4(1 + i)^4 + a^3(1 + i)^3 + 2a^2(1 + i)^2 + 2a(1 + i) + 4 = 0.$$

Како је $(1 + i)^2 = 2i$, $(1 + i)^3 = -2 + 2i$ и $(1 + i)^4 = -4$, следи

$$\begin{aligned} P(a(1 + i)) &= -4a^4 + (-2 + 2i)a^3 + 4ia^2 + 2a + 2ai + 4 \\ &= (-4a^4 - 2a^3 + 2a + 4) + i(2a^3 + 4a^2 + 2a) = 0. \end{aligned}$$

Изједначавањем реалног и имагинарног дела са нулом добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} -4a^4 - 2a^3 + 2a + 4 = 0 \\ 2a^3 + 4a^2 + 2a = 0 \end{cases}.$$

Друга једначина даје $2a(a + 1)^2 = 0 \implies a = 0$ или $a = -1$. Вредност $a = 0$ не задовољава прву једначину, док је за $a = -1$ она задовољена. Према томе, $-1 - i$ је корен полинома $P(x)$, а пошто је полином реалан, и $-1 + i$ је његов корен, према *Теорему о конјуговано-комплексним коренима*. Зато је $P(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$, па су преостала два корена

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Коначно, $\boxed{x_1 = -1 - i, \ x_2 = -1 + i \text{ и } x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}}.$ ■

33. [Јулски рок, 2022/23. година] Дат је реалан полином

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Ако су његове нуле 1, 1, 3 и -2 и ако је $P(0) = -6$, одредити нуле полинома

$$Q(x) = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P(0)}{0!}.$$

Решење: Како су нуле полинома $P(x)$ бројеви 1, 1, 3 и -2, постоји константа $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ таква да је $P(x) = c(x - 1)^2(x - 3)(x + 2)$. Из услова $P(0) = -6$ добијамо

$$-6 = P(0) = c(0 - 1)^2(0 - 3)(0 + 2) = -6c,$$

па је $c = 1$. Према томе, $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)(x + 2)$.

Како је $P(x)$ полином четвртог степена, његов *Маклоренов развој* (видети 7. главу) има облик

$$P(x) = \frac{P^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P(0)}{0!}.$$

Из дефиниције полинома $Q(x)$ следи да је $Q(x) = P(x)$, па су нуле полинома $Q(x)$ исте као нуле полинома $P(x)$. Дакле, $x = 1$ је двострука нула, док су $x = 3$ и $x = -2$ просте нуле полинома $Q(x)$, тј. $\boxed{x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3 \text{ и } x_4 = -2}$. ■

34. [Фебруарски рок, 2023/24. година] Дат је полином

$$P(x) = x^{18} + 8x^8 - 4x^5 - 16x^4 + ax^2 + b.$$

а) Одредити вредности реалних параметара a и b тако да полином $P(x)$ буде дељив полиномом $x^2 - 2x + 1$;

б) За тако добијене $a, b \in \mathbb{R}$, наћи производ нула полинома $Q(x)$, где је $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$.

Решење: а) Како је $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, полином $P(x)$ је *дељив* полиномом $(x - 1)^2$ ако и само ако је $x = 1$ *нула* полинома $P(x)$ најмање другог *реда*. Према томе, мора важити $P(1) = 0$ и $P'(1) = 0$ (видети 1. задатак).

Из услова $P(1) = 0$ добијамо $1 + 8 - 4 - 16 + a + b = 0$, тј. $a + b = 11$.

Како је $P'(x) = 18x^{17} + 64x^7 - 20x^4 - 64x^3 + 2ax$, из услова $P'(1) = 0$ следи $18 + 64 - 20 - 64 + 2a = 0$, па је $2a - 2 = 0$, тј. $a = 1$. Из оба ова услова добијамо да је $b = 10$. Дакле, $\boxed{a = 1 \text{ и } b = 10}$.

б) За добијене вредности параметара важи $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$. Полином $P(x)$ је *моничан* осамнаестог степена, па је $Q(x)$ моничан полином шеснаестог степена. Ако су $x_1, x_2, \dots, x_{16}$ све нуле полинома $Q(x)$, рачунајући њихове *вишеструкосили*, онда на основу *Вијетових формула* важи $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{16} = Q(0)$, јер је степен полинома $Q(x)$ паран.

Са друге стране, из једнакости $P(x) = (x - 1)^2 Q(x)$ за $x = 0$ добијамо $P(0) = Q(0)$. Како је $P(0) = b = 10$, следи да је $\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{16} = 10}$. ■

35. [Августовски рок, 2023/24. година] Дат је полином

$$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 - 6x + 4.$$

а) Ако је $x_0 \neq 0$ такво да је $P(x_0) = 0$, одредити вредност $P\left(\frac{1}{x_0}\right)$.

б) Одредити све корене полинома $P(x)$ уколико је познато да је $P(1 + i\sqrt{3}) = 0$.

Решење: а) Како је $P(x_0) = 0$ и $x_0 \neq 0$, дељењем једнакости

$$4x_0^5 - 6x_0^4 + 11x_0^3 + 11x_0^2 - 6x_0 + 4 = 0$$

са x_0^5 добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= 4 - 6 \cdot \frac{1}{x_0} + 11 \cdot \frac{1}{x_0^2} + 11 \cdot \frac{1}{x_0^3} - 6 \cdot \frac{1}{x_0^4} + 4 \cdot \frac{1}{x_0^5} \\ &= 4 \left(\frac{1}{x_0} \right)^5 - 6 \left(\frac{1}{x_0} \right)^4 + 11 \left(\frac{1}{x_0} \right)^3 + 11 \left(\frac{1}{x_0} \right)^2 - 6 \left(\frac{1}{x_0} \right) + 4 \\ &= P \left(\frac{1}{x_0} \right). \end{aligned}$$

Према томе, тражена вредност је $P \left(\frac{1}{x_0} \right) = 0$.

б) Пошто је $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$ *корен* полинома $P(x)$, на основу дела под а) и *Теореме о конјуговано-комплексним коренима*, следи да су и бројеви

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_1 = 1 - i\sqrt{3}, \\ x_3 &= \frac{1}{x_1} = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ и} \\ x_4 &= \bar{x}_3 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

корени полинома $P(x)$.

Нека је x_5 преостали корен. Према *Вијетовој формули* важи

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Како је

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

добијамо да је $x_5 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$. Дакле, сви корени полинома $P(x)$ су

$$x_1 = 1 + i\sqrt{3}, x_2 = 1 - i\sqrt{3}, x_3 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}, x_4 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ и } x_5 = -1. \quad \blacksquare$$

36. [Септембарски рок, 2023/24. година] Дати су полиноми $P(x) = x^{2024} + x^5 + x^3 + 1$ и $Q(x) = x^{2024} + x^5 + 3x + 3$. Одредити све заједничке корене датих полинома, као и вишеструкост тих заједничких корена.

Решење: Уколико је $\eta \in \mathbb{C}$ заједнички *корен* полинома $P(x)$ и $Q(x)$, тада је η корен и њихове разлике. Како је $P(x) - Q(x) = x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2$, једини могући заједнички корени датих полинома су $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

За $x_1 = -1$ важи $P(-1) = Q(-1) = 0$, па је $x_1 = -1$ заједнички корен полинома $P(x)$ и $Q(x)$. Да бисмо одредили његову *вишеструкост*, израчунајмо изводе:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2024x^{2023} + 5x^4 + 3x^2, \\ Q'(x) &= 2024x^{2023} + 5x^4 + 3. \end{aligned}$$

Како је $P'(-1) = Q'(-1) = -2016 \neq 0$, број -1 је корен првог *реда* оба полинома.

За $x_2 = 2$ важи $P(2) = 2^{2024} + 41 \neq 0$ и $Q(2) = 2^{2024} + 41 \neq 0$, па $x_2 = 2$ није заједнички корен датих полинома. Према томе, једини заједнички корен је $x = -1$ и он је **вишеструкости 1**. ■

37. [Септембарски 1. рок, 2024/25. година] Дат је полином $P(x) = x^5 + 5x^3 + 1$ чије су нуле x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 .

а) Показати да је $x_i^5 + x_i^{-5} = 25x_i - 2$.

б) Одредити вредност израза $\sum_{i=1}^5 x_i^5 + \sum_{i=1}^5 x_i^{-5}$.

Решење: **а)** Како је $P(0) = 1$, ниједан *корен* полинома $P(x)$ није једнак нули. За свако $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ важи $x_i^5 + 5x_i^3 + 1 = 0$. Дељењем ове једнакости са x_i^2 , односно са x_i^5 , добијамо редом

$$x_i^3 + 5x_i + x_i^{-2} = 0$$

и

$$1 + 5x_i^{-2} + x_i^{-5} = 0.$$

Према томе,

$$x_i^5 + x_i^{-5} = (-5x_i^3 - 1) + (-5x_i^{-2} - 1) = -5(x_i^3 + x_i^{-2}) - 2 = 25x_i - 2.$$

Дакле, за свако $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ важи $x_i^5 + x_i^{-5} = 25x_i - 2$.

б) На основу резултата из дела под а) имамо

$$\sum_{i=1}^5 x_i^5 + \sum_{i=1}^5 x_i^{-5} = \sum_{i=1}^5 (x_i^5 + x_i^{-5}) = \sum_{i=1}^5 (25x_i - 2) = 25 \sum_{i=1}^5 x_i - 10.$$

По *Вијетовим формулама* је $\sum_{i=1}^5 x_i = 0$, јер је коефицијент уз x^4 једнак нули. Зато је

$$\sum_{i=1}^5 x_i^5 + \sum_{i=1}^5 x_i^{-5} = -10. \quad \blacksquare$$

38. [Септембарски 2. рок, 2024/25. година] Полином $P(x)$ при дељењу са $x^2 - x - 2$ даје остатак $3x + 1$, док при дељењу са $x^2 + x - 2$ даје остатак x . Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x^2 - 3x + 2$.

Решење: Приметимо да се полиноми којима се *дели* полином $P(x)$ могу раставити на чиниоце на следећи начин:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1),$$

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Како је $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ полином другог степена, то је тражени *остатак* при дељењу полинома $P(x)$ са овим полиномом облика $Ax + B$, за $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, јер је остатак при дељењу два полинома за један мањег степена од степена полинома делиоца, и притом важи да је

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + Ax + B. \quad (*)$$

Према условима задатка постоје јединствени полиноми $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ такви да важи

$$P(x) = (x - 2)(x + 1) \cdot Q_1(x) + 3x + 1, \quad (**)$$

$$P(x) = (x - 1)(x + 2) \cdot Q_2(x) + x. \quad (***)$$

Заменом $x = 2$ у $(**)$ добијамо $P(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, док заменом $x = 1$ у $(***)$ добијамо $P(1) = 1$. Коначно, заменом $x = 2$ и $x = 1$ у $(*)$, добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 2A + B &= P(2) = 7 \\ A + B &= P(1) = 1 \end{aligned}$$

одакле следи да је $A = 6$ и $B = -5$. Стога, тражени остатак једнак је $\boxed{6x - 5}$. ■

39. [Октобарски 1. рок, 2024/25. година] Доказати да је полином

$$P(x) = x^{44} + x^{38} + x^{32} + x^{26} + 1$$

дељив полиномом $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Решење: Како је

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1 - (-x)^5}{1 - (-x)} = \frac{x^5 + 1}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

(збир геометријског низа са количником $-x$), следи да је

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = (x + 1)Q(x).$$

Ово важи $\forall x \in \mathbb{R}$ (чак је испуњено и за $x = -1$, тада имамо $0 = 0$).

Одавде закључујемо да су сви *корени* полинома $Q(x)$ заправо пети корени из -1 , различити од -1 , тј. уколико је x_0 корен полинома $Q(x)$, за x_0 важи

$$x_0^5 = -1 \text{ и } x_0 \neq -1.$$

Додатно знамо и да су сва четири корена полинома $Q(x)$ међусобно различита, тј. сви су *вишеструкоси* 1.

Да бисмо доказали да $Q(x) \mid P(x)$, довољно је да докажемо да су сви корени полинома $Q(x)$ уједно и корени полинома $P(x)$ истог или већег *реда*, тј. ако је x_0 произвољан корен полинома $Q(x)$, важиће да је $P(x_0) = 0$ (видети 1. задатак).

Нека је x_0 произвољан корен полинома $Q(x)$. Тада важи

$$Q(x_0) = x_0^4 - x_0^3 + x_0^2 - x_0 + 1 = 0, \quad x_0^5 = -1,$$

па је

$$\begin{aligned} P(x_0) &= x_0^{44} + x_0^{38} + x_0^{32} + x_0^{26} + 1 = (x_0^5)^8 \cdot x_0^4 + (x_0^5)^7 \cdot x_0^3 + (x_0^5)^6 \cdot x_0^2 + (x_0^5)^5 \cdot x_0 + 1 \\ &= (-1)^8 x_0^4 + (-1)^7 x_0^3 + (-1)^6 x_0^2 + (-1)^5 x_0 + 1 = x_0^4 - x_0^3 + x_0^2 - x_0 + 1 \\ &= Q(x_0) = 0, \end{aligned}$$

одакле закључујемо да $\boxed{Q(x) \mid P(x)}$. ■

40. [Октобарски 2. рок, 2024/25. година] **а)** Одредити реалан моничан полином $P(x)$ другог степена који задовољава услове

$$(x-1) \mid (P(x)-3) \text{ и } (x-3) \mid (P(x)+3).$$

б) Изразити полином $P(x)$ као полином по променљивој $x+1$.

Решење: а) Како је $P(x)$ реалан моничан полином другог степена, он је облика $P(x) = x^2 + ax + b$, за неке $a, b \in \mathbb{R}$. Из услова $(x-1) \mid (P(x)-3)$ и $(x-3) \mid (P(x)+3)$, према Теореме о вишеструким коренима (видети 1. задатак), следи да је $P(1) = 3$ и $P(3) = -3$. Према томе, добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 1 + a + b &= 3 \\ 9 + 3a + b &= -3 \end{aligned}$$

Решавањем овог система налазимо да је $a = -7$ и $b = 9$. Дакле, тражени полином је

$$\boxed{P(x) = x^2 - 7x + 9}.$$

б) Полином $P(x)$ изразићемо као полином по променљивој $x+1$ узастопном применом Хорнерове шеме за $x_0 = -1$:

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 1 & -8 & \boxed{17} \\ -1 & 1 & \boxed{-9} & \\ -1 & \boxed{1} & & \end{array}.$$

Одавде следи да је $\boxed{P(x) = (x+1)^2 - 9(x+1) + 17}$. ■

41. [Јануарски рок, 2025/26. година] Доказати да је полином

$$P(x) = x^{4n+1} \cdot \sin((4n-1)\theta) + x^{4n-1} \cdot \sin((4n+1)\theta) + 2x \cdot \sin \theta - 2 \sin^2 \theta,$$

где је $n \in \mathbb{N}$, а $\theta \in \mathbb{R}$, дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 2x \cdot \sin \theta + 1$.

Решење: Размотримо најпре случај када је $\cos \theta \neq 0$. Корени полинома $Q(x)$ су различити конјуговано-комплексни бројеви $z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$ и $z_2 = \sin \theta - i \cos \theta$ (јер је $b^2 - 4ac = -4 \cos^2 \theta < 0$). Како је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима, довољно је показати да је $P(z_1) = 0$, јер тада важи и $P(z_2) = \overline{P(z_1)} = 0$, према *Теореме о вишеструким коренима* (видети 1. задатак) и *Теореме о конјуговано-комплексним коренима*. Приметимо да је

$$z_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = e^{i \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}.$$

На основу *Моаврове формуле* имамо да је

$$\begin{aligned} z_1^{4n+1} &= \sin((4n+1)\theta) + i \cos((4n+1)\theta), \\ z_1^{4n-1} &= -\sin((4n-1)\theta) - i \cos((4n-1)\theta). \end{aligned}$$

Користећи тригонометријске идентитете $\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$ и $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, добијамо да је

$$\begin{aligned} P(z_1) &= (\sin((4n+1)\theta) + i \cos((4n+1)\theta)) \cdot \sin((4n-1)\theta) \\ &\quad + (-\sin((4n-1)\theta) - i \cos((4n-1)\theta)) \cdot \sin((4n+1)\theta) \\ &\quad + 2(\sin \theta + i \cos \theta) \cdot \sin \theta - 2 \sin^2 \theta \\ &= i \left(\cos((4n+1)\theta) \cdot \sin((4n-1)\theta) - \cos((4n-1)\theta) \cdot \sin((4n+1)\theta) + 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \right) \\ &= i(\sin(-2\theta) + \sin(2\theta)) = 0. \end{aligned}$$

Дакле, оба корена полинома $Q(x)$ су уједно и корени полинома $P(x)$, па $Q(x) \mid P(x)$. Остаје да размотримо случај када је $\cos \theta = 0$ ($b^2 - 4ac = -4 \cos^2 \theta = 0$). Тада је $\sin \theta = \varepsilon$, где је $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и важи $Q(x) = x^2 - 2\varepsilon x + 1 = (x - \varepsilon)^2$. Такође је

$$\sin((4n-1)\theta) = -\varepsilon \text{ и } \sin((4n+1)\theta) = \varepsilon,$$

па полином $P(x)$ има облик $P(x) = -\varepsilon x^{4n+1} + \varepsilon x^{4n-1} + 2\varepsilon x - 2$, јер је $\varepsilon^2 = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1$. Сада је

$$P(\varepsilon) = -\varepsilon^{4n+2} + \varepsilon^{4n} + 2\varepsilon^2 - 2 = 0,$$

а како је

$$P'(x) = -\varepsilon(4n+1)x^{4n} + \varepsilon(4n-1)x^{4n-2} + 2\varepsilon,$$

следи да је

$$P'(\varepsilon) = \varepsilon(-(4n+1) + (4n-1) + 2) = 0.$$

Према томе, $x = \varepsilon$ је корен полинома $P(x)$ бар другог реда, те и у овом случају $(x - \varepsilon)^2 \mid P(x)$.

Коначно, за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $\theta \in \mathbb{R}$ важи $\boxed{Q(x) \mid P(x)}$. ■

Глава 4

Реални низови

1. [Фебруарски рок, 2010/11. година] а) Ако је $a > 0$, наћи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a}$.

б) Наћи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$.

Решење: а) Означимо са $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ и са $y_n = \ln x_n = \ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \ln a$. Тада је $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \ln a \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Како је $x_n = e^{y_n}$, добијамо да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n} = e^0 = \boxed{1}.$$

б) С обзиром на то да је $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$, добијамо да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^0 = \boxed{1}$, јер је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ због *брзине конвергенције* низова (видети 23. задатак).

Напомена: У овом задатку искористили смо чињеницу да је функција e^x *непреривна*, па лimes и функција могу да замене места. ■

2. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Наћи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Решење: Означимо са $x_n = 1^p + 2^p + \dots + n^p$ и са $y_n = n^{p+1}$. За низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ и
- $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је *моноћоно растући* низ, тј. $y_{n+1} = (n+1)^{p+1} > n^{p+1} = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

па су задовољени услови *Штолцовог теореме*, тј.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p + (n+1)^p - 1^p - 2^p - \dots - n^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^p}{n^{p+1} + (p+1)n^p + \dots + 1 - n^{p+1}} \\ &= \boxed{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned}$$

Напомена: Штолцова теорема: Нека су испуњени услови:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$;
- низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је монотono растући низ, тј. $y_{n+1} > y_n$ за скоро свако n ;
- постоји (коначна или бесконачна) *гранична вредност* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, где је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ произвољан низ.

Тада постоји и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n}$, и важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. ■

3. [Септембарски рок, 2010/11. година] Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \ln \frac{n^3 + 3n}{n^3 + 1}$.

Решење:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \ln \frac{n^3 + 3n}{n^3 + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{3n - 1}{n^3 + 1} \right)^{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(\left(1 + \frac{3n - 1}{n^3 + 1} \right)^{\frac{n^3 + 1}{3n - 1}} \right)^{\frac{3n - 1}{n^3 + 1} \cdot n^2} \right) = \ln e^3 = \boxed{3}. \end{aligned}$$

Напомена: У овом задатку искористили смо добро познати *лимес низа*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

и чињеницу да је функција $\ln x$ *непреривна*, па лимес и функција могу да замене места. ■

4. [Јануарски рок, 2011/12. година] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{2+3} + \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^3+3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}}.$$

Решење: Означимо са L дату *граничну вредност*. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2+3} + \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^3+3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}}{n} \\ &\stackrel{\text{Штолцова ш.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{1}} \implies L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}. \end{aligned}$$

Како је

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3,$$

према *Теорему о два полицајца* следи да је и $\boxed{L = 3}$.

Напомена: Јасно је да су услови *Штолцове теореме* задовољени (видети 2. задатак).

Како $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, за $a > 0$, имамо да $\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Теорема о два полицајца: Нека су $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низови за које је $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = c$, где је $c \in \mathbb{R}$. Ако за скоро свако n важе неједнакости $y_n \leq x_n \leq z_n$, тада и низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ има граничну вредност и важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$. ■

5. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Одредити тачке нагомилавања низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ задатог својим општим чланом

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n}{n+1} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Решење: Како су функције $\sin x$ и $\cos x$ 2π -периодичне, од важности је да разматрамо *поднизове* низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ чији индекси дају исти остатак при дељењу са 4. Тада важи:

$$\begin{aligned} x_{4k} &= \left(\frac{4k+1}{4k}\right)^{4k} \cdot \sin 2k\pi + \frac{4k}{4k+1} \cdot \cos 2k\pi = \frac{4k}{4k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, \\ x_{4k+1} &= \left(\frac{4k+2}{4k+1}\right)^{4k+1} \cdot \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4k+1}{4k+2} \cdot \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right)^{4k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e, \\ x_{4k+2} &= \left(\frac{4k+3}{4k+2}\right)^{4k+2} \cdot \sin(2k\pi + \pi) + \frac{4k+2}{4k+3} \cdot \cos(2k\pi + \pi) = -\frac{4k+2}{4k+3} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -1, \\ x_{4k+3} &= \left(\frac{4k+4}{4k+3}\right)^{4k+3} \cdot \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{4k+3}{4k+4} \cdot \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{4k+3}\right)^{4k+3} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -e, \end{aligned}$$

па *шачке* нагомилавања низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ припадају скупу $\boxed{\{-e, -1, 1, e\}}$. ■

6. [Јунски рок, 2011/12. година] У зависности од вредности параметра $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ одредити граничну вредност $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(m)$, где је

$$L(m) = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{n^m+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[m]{n^m+n}}\right).$$

Решење: Ограничимо низ са *ошћим* чланом $L(m)$ одозго и одоздо:

$$1 \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt[m]{1 + \frac{1}{n^{m-1}}}} = \frac{n}{\sqrt[m]{n^m + n}} \leq L(m) \leq \frac{n}{\sqrt[m]{n^m + 1}} \leq \frac{n}{n \sqrt[m]{1 + \frac{1}{n^m}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Како $\frac{1}{n^{m-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ за $m \geq 2$, следи да лева страна неједнакости $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Слично важи и за десну страну неједнакости. Према *Теорему о два полицајца* (видети 4. задатак), важи да је $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} L(m) = 1 \text{ за } \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$. ■

7. [Септембарски рок, 2011/12. година] Одредити лимес инфериор и лимес супериор реалних низова датих својим општим члановима

а) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot n;$

б) $x_n = \cos^n \left(\frac{2\pi n}{3} \right);$

в) $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + (-1)^{n(n+1)/2}.$

Решење: а) Размотримо поднизове са парним и непарним индексима. Тада је

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \frac{1 + (-1)^{2k}}{2} \cdot 2k = \frac{1}{2k} + 2k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \frac{1 + (-1)^{2k+1}}{2} \cdot (2k+1) = -\frac{1}{2k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Према томе, *лимес инфериор*, тј. најмања тачка нагомилавања је $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$, а

лимес супериор, тј. највећа тачка нагомилавања је $\boxed{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}$.

б) Како је функција $\cos x$ 2π -периодична, разматрамо поднизове чији индекси дају исти остатак при дељењу са 3. Добијамо

$$x_{3k} = \cos^{3k}(2k\pi) = 1,$$

$$x_{3k+1} = \cos^{3k+1} \left(2k\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^{3k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

$$x_{3k+2} = \cos^{3k+2} \left(2k\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right)^{3k+2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Отуда је лимес инфериор, тј. најмања тачка нагомилавања $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$, а лимес

супериор, тј. највећа тачка нагомилавања $\boxed{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1}$.

в) Пошто вредности члана $(-1)^{n(n+1)/2}$ зависе од остатка индекса n при дељењу са 4, разматрамо одговарајуће поднизове:

$$x_{4k} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+1} + (-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} = 1 - 2 + 1 = 0,$$

$$x_{4k+1} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+2} + (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = 1 + 2 - 1 = 2,$$

$$x_{4k+2} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+3} + (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = 1 - 2 - 1 = -2,$$

$$x_{4k+3} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+4} + (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Дакле, лимес инфериор, тј. најмања тачка нагомилавања је $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -2}$, а лимес

супериор, тј. највећа тачка нагомилавања је $\boxed{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4}$. ■

8. [Јануарски рок, 2012/13. година] Израчунати граничну вредност низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ датог својим општим чланом

$$a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Решење: Означимо са $x_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}$ и са $y_n = n$. За низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ и
- $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је монотонно растући низ,

па су задовољени услови Штолцове теореме (видети 2. задатак), тј.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1} = \boxed{1}, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$ (видети 1. задатак). ■

9. [Јунски рок, 2012/13. година] Наћи следеће лимесе:

а) $L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{(n+1) + (n+2) + \dots + 2n},$

б) $L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1}}{1 - 25^n}.$

Решење: а) Како је

$$(n+1) + (n+2) + \dots + 2n = n^2 + (1 + 2 + \dots + n) = n^2 + \frac{n(n+1)}{2},$$

добивамо

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 2n - 2}{3n^2 + n} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

б) Применом формуле за збир првих n чланова геометријског низа добијамо

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 5^n}{1 - 5} \cdot \frac{1}{1 - 25^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 5^n}{-4(1 - 5^n)(1 + 5^n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{4(1 + 5^n)} = \boxed{0}.$$

Напомена: Подсетимо се формуле за збир првих n природних бројева

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

што се лако може показати *математичком индукцијом*, као и формуле за збир првих n чланова геометријског низа $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$. Такође, за $q \in \mathbb{R}$, важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ \text{не постоји,} & q \leq -1 \end{cases} . \quad \blacksquare$$

10. [Септембарски рок, 2012/13. година] Одредити (уколико постоји) граничну вредност низа са општим чланом $a_n = 2n \cdot (\ln n - \ln(n-2))$.

Решење: За довољно велико n , тј. за $n > 2$, важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \cdot \ln \frac{n}{n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \cdot \ln \left(1 + \frac{2}{n-2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n-2} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left[\left(\left(1 + \frac{2}{n-2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right)^{\frac{4n}{n-2}} \right] \\ &= \ln e^4 = \boxed{4} \end{aligned}$$

(видети 3. задатак). \blacksquare

11. [Јануарски рок, 2013/14. година] Израчунати граничну вредност $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$, где су низови $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ дати својим општим члановима:

$$a_n = \frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1}{n} - n \quad \text{и} \quad b_n = \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{n} - n.$$

Решење: Пре свега упростимо изразе којима су дати *општи чланови* низова $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Важи да је

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1),$$

као и

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + 2n) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2, \end{aligned}$$

(видети 9. задатак).

Коришћењем претходно добијених формула следи

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n^2}{n} - n = 0, \\b_n &= \frac{n(n+1)}{n} - n = 1,\end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Према томе, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. ■

12. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Одредити тачке нагомилавања низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ако је

$$x_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2\pi n}{3}.$$

Решење: Како је функција $\cos x$ 2π -периодична, од важности је да разматрамо *под*низове низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ чији индекси дају исти остатак при дељењу са 3. Са друге стране, вредност $(-1)^n$ зависи од парности броја n . Стога је довољно разматрати поднизове чији индекси дају исти остатак при дељењу са НЗС(2, 3) = 6. Тада важи

$$\begin{aligned}x_{6k} &= \frac{2(6k)^2 + 6k}{3(6k)^2 - 1} + \cos(4k\pi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \\x_{6k+1} &= \frac{6k+1}{3(6k+1)^2 - 1} + \cos\left(4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}, \\x_{6k+2} &= \frac{2(6k+2)^2 + 6k+2}{3(6k+2)^2 - 1} + \cos\left(4k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \\x_{6k+3} &= \frac{6k+3}{3(6k+3)^2 - 1} + \cos(4k\pi + 2\pi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, \\x_{6k+4} &= \frac{2(6k+4)^2 + 6k+4}{3(6k+4)^2 - 1} + \cos\left(4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \\x_{6k+5} &= \frac{6k+5}{3(6k+5)^2 - 1} + \cos\left(4k\pi + \frac{10\pi}{3}\right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Према томе, *тачке нагомилавања* низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ чине скуп

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 1, \frac{5}{3}\right\}.$$
 ■

13. [Јунски рок, 2013/14. година] Нека је дат реалан низ својим општим чланом

$$x_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

а) Одредити тачке нагомилавања низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

б) Одредити вредност A тако да низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ буде конвергентан.

Решење: а) Одредимо пре свега *граничну вредност* првог сабирка у формули за општи члан низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right]^{\frac{2n}{2n+1}} = e \end{aligned}$$

(видети 3. задатак). Како први сабирак *конвертира* ка e , а функција $\sin x$ је 2π -периодична, разматрамо *поднизове* чији индекси дају исти остатак при дељењу са 4. Тада важи

$$\begin{aligned} x_{4k} &= \left(\frac{8k+3}{8k+1} \right)^{4k} + A \sin 2k\pi \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e, \\ x_{4k+1} &= \left(\frac{8k+5}{8k+3} \right)^{4k+1} + A \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e + A, \\ x_{4k+2} &= \left(\frac{8k+7}{8k+5} \right)^{4k+2} + A \sin (2k\pi + \pi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e, \\ x_{4k+3} &= \left(\frac{8k+9}{8k+7} \right)^{4k+3} + A \sin \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e - A. \end{aligned}$$

Према томе, *тачке нагомилавања* низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ припадају скупу

$$\boxed{\{e - A, e, e + A\}}.$$

б) Да би низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ био конвергентан, сви наведени поднизови морају имати исту граничну вредност, тј. тачка нагомилавања мора бити јединствена. Дакле, потребно је да важи

$$e = e + A = e - A,$$

одакле следи да је $\boxed{A = 0}$. За $A = 0$ важи $x_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$, па је овај услов и довољан. ■

14. [Септембарски рок, 2013/14. година] У зависности од вредности реалног параметра p одредити граничну вредност низа чији је општи члан

$$x_n = \left(\frac{n^2 - 3n + 4}{n^2 - 2n + 3} \right)^{\frac{n^2 - 2n + 3}{pn^2 + (p+2)n - 1}}.$$

Решење: Важи да је

$$\frac{n^2 - 3n + 4}{n^2 - 2n + 3} = 1 - \frac{n - 1}{n^2 - 2n + 3},$$

па ојшши члан датог низа можемо писати у облику

$$x_n = \left(1 - \frac{n-1}{n^2-2n+3}\right)^{\frac{n^2-2n+3}{pn^2+(p+2)n-1}}.$$

Како $-\frac{n-1}{n^2-2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, имамо

$$x_n = \left(\left(1 + \frac{-n+1}{n^2-2n+3}\right)^{\frac{n^2-2n+3}{-n+1}} \right)^{\frac{-n+1}{pn^2+(p+2)n-1}}.$$

Притом, важи

$$\left(1 + \frac{-n+1}{n^2-2n+3}\right)^{\frac{n^2-2n+3}{-n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

(видети 3. задатак).

Ако је $p \neq 0$, онда $\frac{-n+1}{pn^2+(p+2)n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, па је $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e^0 = 1$.

Ако је $p = 0$, онда $\frac{-n+1}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$, па је $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

Према томе,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} 1, & p \neq 0 \\ e^{-\frac{1}{2}}, & p = 0 \end{cases}.$$

■

15. [Октобарски рок, 2013/14. година] Израчунати следеће граничне вредности низова:

$$\text{а) } L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi}\right)^k}; \quad \text{б) } L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2}; \quad \text{в) } L_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}.$$

Решење: а) И бројилац и именилац ојшши члана низа чију граничну вредност треба одредити представљају суме теометријских прогресија, па важи

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}},$$

као и

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\pi}\right)^k = \frac{\frac{1}{\pi} \left(1 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{\pi}}$$

(видети 9. задатак). Према томе,

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}}{\frac{\frac{1}{\pi} \left(1 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{\pi}}} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{e}}}{\frac{\frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}}} = \frac{\pi - 1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e(\pi - 1)}{e - 1}.$$

Дакле, $L_1 = \boxed{\frac{e(\pi - 1)}{e - 1}}.$

б) Издвајањем константе и коришћењем формуле за збир првих n природних бројева (видети 9. задатак), добијамо

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k - n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $L_2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$

в) Издвајањем константе и коришћењем познате формуле

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

која се лако може показати *математичком индукцијом*, добијамо

$$L_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}.$$

Дакле, $L_3 = \boxed{\frac{1}{3}}.$ ■

16. [Јануарски рок, 2014/15. година] Израчунати граничне вредности:

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$

б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n+1)^2}{3n^3}.$

Решење: а) *Општи члан x_n низа чију граничну вредност треба одредити представља суму чланова облика $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, $1 \leq k \leq n$. Како је*

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right),$$

добиамо

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Према томе,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

б) Користимо познати идентитет

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

За $m = 2n + 1$ имамо

$$1^2 + 2^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6},$$

док је

$$2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1).$$

Одужимањем добијамо

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2 &= \frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6} - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Стога је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2}{3n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{9n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{9n^3} = \boxed{\frac{4}{9}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

17. [Фебруарски рок, 2014/15. година] У зависности од реалних параметара p и q одредити граничну вредност низа са општим чланом

$$x_n = \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 2} \right)^{\frac{n^2 - n + 2}{pn^2 + (q-1)n + 1}}.$$

Решење: Важи да је

$$\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 2} = 1 - \frac{n + 1}{n^2 - n + 2},$$

па *ојшши члан* датог *низа* можемо написати у облику

$$x_n = \left(1 - \frac{n + 1}{n^2 - n + 2} \right)^{\frac{n^2 - n + 2}{pn^2 + (q-1)n + 1}}.$$

Како $-\frac{n+1}{n^2-n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, имамо

$$x_n = \left[\left(1 + \frac{-n-1}{n^2-n+2} \right)^{-\frac{n^2-n+2}{n+1}} \right]^{-\frac{n+1}{pn^2+(q-1)n+1}}.$$

Притом, важи

$$\left(1 + \frac{-n-1}{n^2-n+2} \right)^{-\frac{n^2-n+2}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

(видети 3. задатак).

Даље је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-(n+1)}{pn^2+(q-1)n+1} = \begin{cases} 0, & p \neq 0 \\ \frac{1}{1-q}, & p = 0, q \neq 1 \\ -\infty, & p = 0, q = 1 \end{cases}.$$

Према томе,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} 1, & p \neq 0 \\ e^{\frac{1}{1-q}}, & p = 0, q \neq 1 \\ 0, & p = 0, q = 1 \end{cases}.$$

■

18. [Септембарски рок, 2014/15. година] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^p},$$

где је $p > 1$ природан број.

Решење: Означимо са

$$x_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n \text{ и } y_n = n^p.$$

За низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ и
- $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је строго моноћноно расћући низ, јер је $p > 1$.

Према томе, задовољени су услови *Штолцове теореме* (видети 2. задатак). Даље је

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n + \cos(n+1) \\ &\quad - \cos 1 - \cos 2 - \dots - \cos n \\ &= \cos(n+1), \end{aligned}$$

док је

$$y_{n+1} - y_n = (n+1)^p - n^p.$$

Стога, применом Штолцове теореме,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^p} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^p - n^p}. \end{aligned}$$

Биномном формулом добијамо

$$\begin{aligned} (n+1)^p - n^p &= n^p + pn^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \dots + pn + 1 - n^p \\ &= pn^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + \dots + pn + 1. \end{aligned}$$

Како је $p \in \mathbb{N}$ и $p > 1$, важи $p-1 \geq 1$, па је

$$(n+1)^p - n^p \geq pn^{p-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Са друге стране, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$|\cos(n+1)| \leq 1.$$

Зато је

$$0 \leq \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^p - n^p} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^p - n^p} \leq \frac{1}{pn^{p-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Према Теорему о два полицајца (видети 4. задатак) следи да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^p - n^p} = 0.$$

Отуда, применом Штолцове теореме, добијамо да је

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n}{n^p} = 0}.$$

■

19. [Фебруарски рок, 2022/23. година] Дат је низ

$$x_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}}_{n \text{ јединица}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да је низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и ограничен и одредити $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Решење: Први начин: Имамо да је

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{1} \\x_2 &= \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{1 + x_1} \\x_3 &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + x_2} \\&\vdots \\x_{n+1} &= \sqrt{1 + x_n},\end{aligned}$$

па је низ задат овом *рекурентном везом*.

Пробајмо *математичком индукцијом* да докажемо да је, нпр. $x_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$ (можда би се могла дати и финија процена, али није неопходно, и ова је довољно добра за сада):

$$(Б.И.) \quad x_1 = \sqrt{1} = 1 < 2 \quad (n = 1)$$

$$(И.Х.) \quad \text{претпоставимо да је } x_n < 2 \text{ за неко } n \in \mathbb{N}$$

$$(И.К.) \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \stackrel{(И.Х.)}{<} \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2.$$

Дакле, $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Такође, очигледно је да је $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (може се показати математичком индукцијом).

Дакле, $\boxed{0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ па је низ } \{x_n\} \text{ ограничѐн}}.$

Докажимо сада да је *монотонно растући* (наслућујемо да ће бити такав на основу првих неколико чланова низа, али и саме његове дефиниције). Довољно је да важи $x_n \leq x_{n+1}$, за скоро свако $n \in \mathbb{N}$.

Како је $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, претпоставимо да је $x_n \leq \sqrt{1 + x_n}$. Пошто је $x_n > 0$, можемо квадратити претходну неједнакост:

$$x_n^2 \leq 1 + x_n \iff x_n^2 - x_n - 1 \leq 0.$$

Одавде је

$$x_n \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right]. \quad (*)$$

Лева граница интервала није проблематична, јер је x_n свакако > 0 . Међутим, ми смо показали да је $x_n < 2$, али да би низ био монотонно растући, требало би да важи да је $x_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Зато ћемо пробати то да докажемо математичком индукцијом:

$$(Б.И.) \quad x_1 = \sqrt{1} = 1 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6 \quad (n = 1)$$

$$(И.Х.) \quad \text{претпоставимо да је } x_n \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ за неко } n \in \mathbb{N}$$

$$(И.К.) \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} \stackrel{(И.Х.)}{\leq} \sqrt{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2^2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Дакле, заиста је $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, па важи $(\star)$, одакле закључујемо да је низ $\{x_n\}$ монотono растући (јер $x_n \leq x_{n+1}$ ако и само ако важи $(\star)$).

Други начин (лакши!): Докажимо да је низ монотono растући.

Математичком индукцијом доказујемо да је $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(Б.И.) \quad x_1 < x_2 ? \quad (n = 1)$$

$$x_1 = \sqrt{1} = 1, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2}, \quad 1 < \sqrt{2}.$$

(И.Х.) претпоставимо да је $x_n < x_{n+1}$ за неко $n \in \mathbb{N}$

(И.К.) $x_{n+1} < x_{n+2}$?

$$\text{Важи } x_n < x_{n+1} \iff 1 + x_n < 1 + x_{n+1} \iff \sqrt{1 + x_n} < \sqrt{1 + x_{n+1}}.$$

$$\iff x_{n+1} < x_{n+2}.$$

Дакле, $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, тј. низ $\{x_n\}$ је монотono растући.

Како је низ $\{x_n\}$ монотono растући и ограничен одозго, он *конвертира* према *Теорему о монотоним и ограниченим низовима*, тј. $\exists A \in \mathbb{R}$ тако да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$.

Из $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, преласком на *граничну вредност*, добијамо $A = \sqrt{1 + A}$.

Коначно, квадрирањем добијамо:

$$A^2 = 1 + A \iff A^2 - A - 1 = 0.$$

Дакле, $A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Како је $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, следи да је $A > 0$, па је $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Према томе, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Напомена: Теорема о монотоним и ограниченим низовима:

1) Ако је низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотono растући (непадајући) и ограничен одозго, онда је он конвергентан.

2) Ако је низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ монотono опадајући (нерастући) и ограничен одоздо, онда је он конвергентан. ■

20. [Јулски рок, 2022/23. година] Одредити граничну вредност низа $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, уколико је:

$$x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} + \sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 - 3n + 1} \\ + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}},$$

за $n \in \mathbb{N}$.

Решење: Означимо са

$$y_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}, \quad z_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 - 3n + 1}$$

и

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Тада је $x_n = y_n + z_n + t_n$.

За низ $\{n^3\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи да је *моноћоно распући* и да тежи ка $+\infty$, па су испуњени услови *Штолцове теореме* (видети 2. задатак). Стога,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Даље, *рационалисањем* добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 3n + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n + 1} + \sqrt{n^2 - 3n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \right)} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Затим, за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, важи

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

па сабирањем, за свако $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, добијамо

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq t_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Како $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ и $\frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, према *Теореме о два*

полицајца (видети 4. задатак), следи да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$.

Према томе,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} + 1 = \frac{23}{6}}. \quad \blacksquare$$

21. [Августовски рок, 2022/23. година] Одредити следеће граничне вредности:

$$\text{а)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad \text{б)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3} \sqrt[4]{3} \sqrt[8]{3} \dots \sqrt[2n]{3}.$$

Решење: а) Означимо са

$$x_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2n - 1) - 2n \text{ и } y_n = \sqrt{n^2 + 1}.$$

За низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ и он је *моноћоно расћући*, па су задовољени услови *Шћолцове теореме* (видети 2. задатак). Како је

$$x_{n+1} - x_n = (2n + 1) - 2(n + 1) = -1,$$

добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}{(n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 1}}{2n + 1} \\ &= \boxed{-1}. \end{aligned}$$

б) Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3} \sqrt[4]{3} \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{1 - (\frac{1}{2})^n} = \boxed{3} \end{aligned}$$

(видети 9. задатак). ■

22. [Фебруарски рок, 2023/24. година] Нека је низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ задат са

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_1 = \pi,$$

при чему је $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Показати да је дати низ конвергентан и наћи му граничну вредност.

Решење: Покажимо најпре да је $a_n > 0$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $a_1 = \pi > 0$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}} > 0$ кад год је $a_n > 0$, *математичком индукцијом* следи да је $a_n > 0$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Даље, пошто је $\sqrt{1+a_n^2} > 1$, важи

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}} < a_n,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дакле, низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је *моноћоно опадајући* и *ограничен одоздо* нулом, па је *конвергентан*, према *Теореме о моноћоним и ограниченим низовима* (видети 19. задатак).

Означимо са a његову *граничну вредност*. Тада, због *непрекидности* функције f , имамо да је

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Одавде следи да је $a\sqrt{1+a^2} = a$. Како је $a \geq 0$, добијамо да је $a = 0$ или $\sqrt{1+a^2} = 1$, а у оба случаја следи да је $a = 0$.

Према томе, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0}$. ■

23. [Августовски рок, 2023/24. година] Израчунати:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k!$,

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(2n\pi) + \sin(n\pi))^n$.

Решење: а) Означимо са $x_n = \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k!$. Како је

$$0 < 1! < 2! < \dots < n!,$$

следи да је

$$0 < \sum_{k=1}^n k! \leq n \cdot n!,$$

па важи

$$0 < x_n \leq \frac{n \cdot n!}{n^n} = \frac{n!}{n^{n-1}}. \quad (*)$$

Даље, како је

$$\frac{n!}{n^{n-1}} = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n},$$

при чему је најмање половина чинилаца $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ мања или једнака $\frac{1}{2}$, док су сви остали мањи или једнаки 1, важи

$$0 < \frac{n!}{n^{n-1}} \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} = \frac{n}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

јер експоненцијални низ $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ расте брже од линеарног низа n , па њихов количник тежи нули, када $n \rightarrow +\infty$. Тада, према Теореме о два полицајца (видети 4. задатак), следи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^{n-1}} = 0.$$

Коначно, поновном применом Теореме о два полицајца у (*), добијамо

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k! = 0}.$$

Напомена: Када $n \rightarrow +\infty$ важи познати поредак брзина раста, тј. брзина којом низови теже ка $+\infty$:

$$\boxed{\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 0, \quad a > 1}.$$

б) За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $\cos(2n\pi) = 1$ и $\sin(n\pi) = 0$, па је

$$(\cos(2n\pi) + \sin(n\pi))^n = (1 + 0)^n = 1.$$

Према томе, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(2n\pi) + \sin(n\pi))^n = 1$. ■

24. [Септембарски 1. рок, 2024/25. година] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^2]{(4+3) \cdot (4^2+3^2) \cdot \dots \cdot (4^n+3^n)}.$$

Решење: Како је за свако $k \in \mathbb{N}$

$$4^k \leq 4^k + 3^k \leq 2 \cdot 4^k,$$

множењем ових неједнакости за $k = 1, 2, \dots, n$ добијамо

$$4^{1+2+\dots+n} \leq (4+3) \cdot (4^2+3^2) \cdot \dots \cdot (4^n+3^n) \leq 2^n \cdot 4^{1+2+\dots+n}.$$

Према томе,

$$4^{\frac{n(n+1)}{2n^2}} \leq \sqrt[n^2]{(4+3)(4^2+3^2)\dots(4^n+3^n)} \leq 2^{\frac{1}{n}} \cdot 4^{\frac{n(n+1)}{2n^2}}$$

(видети 9. задатак). Како $4^{\frac{n+1}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ и $2^{\frac{1}{n}} \cdot 4^{\frac{n+1}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, (видети 1. задатак) према *Теореме о два полицајца* (видети 4. задатак), следи да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n^2]{(4+3)(4^2+3^2)\dots(4^n+3^n)} = 2. \quad \blacksquare$$

25. [Септембарски 2. рок, 2024/25. година] У зависности од вредности параметара $a > 1$ и $k \in \mathbb{R}$, одредити граничну вредност низа $\{\sqrt[n]{a^n + n^k}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Решење: За свако $a > 1$ и свако $k \in \mathbb{R}$, ако посматрамо брзину конвергенције низова (видети 23. задатак), можемо закључити да важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $\frac{n^k}{a^n} < 1$ (јер је $a^n > n^k$) за свако $n \geq n_0$. Отуда је

$$a = \sqrt[n]{a^n} < \sqrt[n]{a^n + n^k} = a \sqrt[n]{1 + \frac{n^k}{a^n}} < a \sqrt[n]{2}.$$

Како је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (видети 1. задатак), према *Теореме о два полицајца* (видети 4. задатак), следи да за свако $a > 1$ и свако $k \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + n^k} = a. \quad \blacksquare$$

26. [Октобарски 1. рок, 2024/25. година] Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} \right),$

б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!}.$

Решење:

а) Како је

$$\frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right),$$

имамо да је

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

б) Означимо са $x_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$ и са $y_n = (n+1)!$.

За низ $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ важи

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ и
- $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је монотонно растући низ,

па су задовољени услови *Штолцове теореме* (видети 2. задатак), тј.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+1} = \boxed{1}. \end{aligned}$$

■

27. [Октобарски 2. рок, 2024/25. година] Одредити граничну вредност низа чији је

општи члан дат формулом $a_n = \left(\frac{\ln n}{n+1} + n \cdot 2^n \right)^{\frac{1}{n}}.$

Решење: Важи да је

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{\ln n}{n+1} + n \cdot 2^n \right)^{\frac{1}{n}} = \left(n \cdot 2^n \left(1 + \frac{\ln n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= n^{\frac{1}{n}} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{\ln n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)} \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Како $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ (видети 1. задатак) и $\frac{\ln n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ због брзине конвергенције низова (видети 23. задатак), следи да

$$\left(1 + \frac{\ln n}{n \cdot 2^n \cdot (n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Према томе, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2}$. ■

28. [Јануарски рок, 2025/26. година] Одредити граничну вредност низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ који је задат рекурентном формулом $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, при чему је $a_1 = 3$.

Решење: Најпре приметимо да је $a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Покажимо да је низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одозго бројем 9:

$$(Б.И.) \quad a_1 = 3 \leq 9 \quad (n = 1)$$

$$(И.Х.) \quad \text{претпоставимо да је } a_n \leq 9 \text{ за неко } n \in \mathbb{N}$$

$$(И.К.) \quad a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} \stackrel{(И.Х.)}{\leq} 3\sqrt{9} = 9.$$

Стога, према *математичкој индукцији* следи да је $a_n \leq 9$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Даље, како је $0 < a_n \leq 9$, имамо да је

$$a_{n+1} - a_n = 3\sqrt{a_n} - a_n = \sqrt{a_n} (3 - \sqrt{a_n}) \geq 0,$$

па је низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *монотонно растући*. Према *Теорему о монотоним и ограниченим низовима* (видети 19. задатак), низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ је *конвергентан*.

Означимо са L његову *граничну вредност*. Преласком на граничну вредност у *рекурентној формули* добијамо

$$L = 3\sqrt{L} \iff L(9 - L) = 0,$$

одакле је $L = 0$ или $L = 9$. С обзиром на то да је низ монотонно растући и $a_1 = 3$, важи $L \geq 3$, па је $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 9}$. ■

Глава 5

Гранична вредност, непрекидност и диференцијабилност функција

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Решење: У питању је неодређен облик 1^∞ . Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin x} \cdot \ln \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)}{\sin x},$$

пронађимо најпре

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9+x}} \right)}{\sin x} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0} \right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 + \sqrt{9+x}}{5} \cdot \frac{-\frac{5}{2} \cdot (9+x)^{-\frac{1}{2}}}{(2 + \sqrt{9+x})^2}}{\cos x} = -\frac{1}{30},$$

па је, стога, полазни *лимес* једнак $\boxed{e^{-\frac{1}{30}}}$.

Напомена: У овом задатку искористили смо чињеницу да је функција e^x непрекидна, па лимес и функција могу да замене места. ■

2. [Јануарски рок, 2010/11. година] Дата је функција $f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ A, & x \leq 0 \end{cases}$.

а) Одредити реалну константу A тако да функција $f(x)$ буде непрекидна.

б) Наћи извод функције $f(x)$ за $x > 0$.

Решење: а) Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као композиција непрекидних функција (за $x < 0$ је линеарна, док је за $x > 0$ експоненцијална функција). Да би била непрекидна на целом домену ($D_f = \mathbb{R}$), поставимо услов непрекидности у тачки $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

Са једне стране имамо да је $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = 1$, јер је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Са друге стране, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = A = f(0)$, па из услова непрекидности дате функције у тачки $x = 0$ добијамо да је $A = 1$.

б) За $x > 0$ $f(x) = x^x$, па је

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

Дакле, $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$. ■

3. [Јануарски рок, 2010/11. година] Написати једначине тангенти из тачке $M(-2, 5)$ на криву $K : y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$.

Решење: Пошто је $f(-2) = 5$, тачка M припада кривој K . Нека је a апсциса тачке додира тражене тангенте и криве K . Како је $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$, једначина тангенте је $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. С обзиром на то да тангента пролази кроз тачку $M(-2, 5)$, важи $5 - f(a) = f'(a)(-2 - a)$, тј. $2a(a + 2)^2 = 0$, па је $a = -2$ или $a = 0$. За $a = -2$ је $f(-2) = 5$ и $f'(-2) = 0$, па је $t_1 : y = 5$. За $a = 0$ је $f(0) = -3$ и $f'(0) = -4$, па је $t_2 : y = -4x - 3$. Дакле, тражене тангенте су t_1 и t_2 . ■

4. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Ако су $m, n \in \mathbb{N}$, израчунати $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$.

Решење: У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$, који решавамо рационализацијом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[n]{x} - 1) \cdot \left(x^{\frac{m-1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} + 1\right) \cdot \left(x^{\frac{n-1}{m}} + \dots + x^{\frac{1}{m}} + 1\right)}{(\sqrt[m]{x} - 1) \cdot \left(x^{\frac{n-1}{m}} + \dots + x^{\frac{1}{m}} + 1\right) \cdot \left(x^{\frac{m-1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \left(x^{\frac{n-1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}} + 1\right)}{(x - 1) \left(x^{\frac{m-1}{m}} + \dots + x^{\frac{1}{m}} + 1\right)} = \boxed{\frac{n}{m}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Одредити реалне бројеве c и d тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq 2 \\ cx + d, & x > 2 \end{cases}$$

буде диференцијабилна у тачки $x = 2$.

Решење: Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Функција $f(x)$ је *непрекидна* на $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (за $x < 2$ је *квадратна*, док је за $x > 2$ *линеарна* функција). Да би у тачки $x = 2$ функција била *диференцијабилна*, пре свега мора бити непрекидна у тој тачки. Стога, прво поставимо услов непрекидности функције $f(x)$ у тачки $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

Како је $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 5) = 9 = f(2)$ и $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (cx + d) = 2c + d$, из услова непрекидности функције $f(x)$ добијамо прву везу између параметара c и d , а то је $2c + d = 9$. Сада можемо поставити и услов диференцијабилности функције $f(x)$ у тачки $x = 2$:

$$f'_+(2) = f'_-(2).$$

Како је

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{c(2+h) + d - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2c + d - 9 + ch}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ch}{h} = c \end{aligned}$$

и

$$f'_-(2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h)^2 + 5 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (h+4) = 4,$$

одавде добијамо другу везу између параметара c и d , а то је $c = 4$. Заменом $c = 4$ у прву везу $2c + d = 9$, добијамо да је $d = 1$. Дакле, за

$$\boxed{c = 4 \text{ и } d = 1}$$

функција $f(x)$ је диференцијабилна у тачки $x = 2$. ■

6. [Септембарски рок, 2010/11. година] Одредити једначину тангенте криве

$$f(x) = \frac{x+9}{x+5}$$

која садржи координатни почетак.

Решење: Пошто *уланђениа* дате *криве* садржи координатни почетак, она је облика $t : y = ax$. Нека је $A(x_0, y_0)$ тачка додира криве и тангенте. Стога, са једне стране, њене координате задовољавају једначину тангенте, тј. $y_0 = ax_0$, док са друге стране, њене координате задовољавају једначину криве, тј. $y_0 = \frac{x_0 + 9}{x_0 + 5}$. Поред тога, имамо да је *коэффициент иравца* тангенте $a = f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 + 5)^2}$. Елиминисањем x_0 и y_0 из претходне три једнакости, добијамо два решења: $a_1 = -\frac{1}{25}$ и $a_2 = -1$. Према томе, добијамо две тангенте дате криве: $\boxed{t_1 : y = -\frac{1}{25}x}$ и $\boxed{t_2 : y = -x}$. ■

7. [Јануарски рок, 2011/12. година] Израчунати граничне вредности:

а) $L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 2})$,

б) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - \cos 2x}{x \sin x}$.

Решење: а) $L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - x + 2}) \stackrel{\text{рационализујући}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + x - 2}{x - \sqrt{x^2 - x + 2}}$

$\stackrel{=}{=} \lim_{t=-x, t \rightarrow +\infty} \frac{-2 - t}{-t - \sqrt{t^2 + t + 2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t + 2}{t + \sqrt{t^2 + t + 2}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$

б) $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} + \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^2}{\frac{\sin x}{x}} = \boxed{3}.$

Напомена: У делу под а) смо имали неодређен облик $\infty - \infty$, који смо решили *рационализујући*, док смо у делу под б) имали неодређен облик $\frac{0}{0}$, где смо користили добро познате *лимесе*: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. ■

8. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Одредити изводе функција:

а) $u(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$,

б) $v(x) = \ln(x^x + \sqrt{1 + x^{2x}})$, $x > 0$.

Решење: а) Када тражимо *извод* функције облика $f(x) = u(x)^{v(x)}$, најпре дату функцију *логаритмујемо*, а потом потражимо њен извод. Нека су $u_1(x)$ и $u_2(x)$ редом функције $(\sin x)^{\cos x}$ и $(\cos x)^{\sin x}$. Логаритмовањем прве функције добијамо

$$\ln u_1(x) = \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\sin x).$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости имамо да је

$$\frac{u_1'(x)}{u_1(x)} = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

одакле је

$$u_1'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{-\sin^2 x \cdot \ln(\sin x) + \cos^2 x}{\sin x}.$$

Слично, логаритмовањем друге функције је

$$\ln u_2(x) = \ln(\cos x)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln(\cos x).$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости имамо да је

$$\frac{u_2'(x)}{u_2(x)} = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

одакле је

$$u'_2(x) = (\cos x)^{\sin x} \cdot \frac{\cos^2 x \cdot \ln(\cos x) - \sin^2 x}{\cos x}.$$

Коначно,

$$u'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{-\sin^2 x \cdot \ln(\sin x) + \cos^2 x}{\sin x} + (\cos x)^{\sin x} \cdot \frac{\cos^2 x \cdot \ln(\cos x) - \sin^2 x}{\cos x}.$$

б) Означимо са $v_1(x)$ и $v_2(x)$ редом функције x^x и $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Приметимо да је $v(x) = v_2(v_1(x))$, одакле је $v'(x) = v'_2(v_1(x)) \cdot v'_1(x)$. Како је $\ln v_1(x) = \ln x^x = x \cdot \ln x$, диференцирањем леве и десне стране ове једнакости добијамо да је $\frac{v'_1(x)}{v_1(x)} = \ln x + 1$,

па је $v'_1(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$. Како је и $v'_2(t) = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t}{t + \sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, коначно добијамо да је

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2x}}} \cdot x^x \cdot (\ln x + 1).$$

■

9. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Одредити реалне параметре A и B тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(9+x)^A - 1}{8+x}, & x \in (-\infty, -8) \\ \frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2} + \frac{x+8}{x} \cdot (e^x - 1), & x \in (-8, 0) \\ \frac{\sin Bx}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

има отклоњиве прекиде у тачкама $x = -8$ и $x = 0$.

Решење: Приметимо да је функција $f(x)$ *непрекидна* на $\mathbb{R} \setminus \{-8, 0\}$ као *композиција* непрекидних функција. У тачкама $x = -8$ и $x = 0$ поставимо услов постојања *отклоњивог прекида*. Знамо да функција $f(x)$ има у *тачки* *напомилавања домена* отклоњив прекид ако су *лева и десна гранична вредности функције* у тој тачки једнаке, али нису једнаке вредности функције у тој тачки. Услов постојања отклоњивог прекида функције $f(x)$ у тачки $x = -8$ је:

$$\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -8^+} f(x).$$

Како је

$$\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -8^-} \frac{(9+x)^A - 1}{8+x} \underbrace{=}_{t=8+x} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(1+t)^A - 1}{t} = A$$

и

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -8^+} \left(\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2} + \frac{x+8}{x} \cdot (e^x - 1) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -8^+} \left(\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)}{\sqrt{1-x}+3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-2 \cdot \sqrt[3]{x}+4}{(\sqrt[3]{x}+2) \cdot (\sqrt[3]{x^2}-2 \cdot \sqrt[3]{x}+4)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x+8}{x} \cdot (e^x - 1) \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -8^+} \left(\frac{1-x-9}{\sqrt{1-x}+3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-2 \cdot \sqrt[3]{x}+4}{x+8} + \frac{x+8}{x} \cdot (e^x - 1) \right) \\
 &= -\frac{12}{6} = -2,
 \end{aligned}$$

из услова постојања отклоњивог прекида функције $f(x)$ у тачки $x = -8$ добијамо да је $\boxed{A = -2}$.

Услов постојања отклоњивог прекида функције $f(x)$ у тачки $x = 0$ је:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2} + (x+8) \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1-3}{2} + 8 = 7$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{Bx}{x} = B$$

из услова постојања отклоњивог прекида функције $f(x)$ у тачки $x = 0$ добијамо да је $\boxed{B = 7}$.

Напомена: Термин „тачка прекида” користи се и за оне тачке нагомилавања домена у којима функција није дефинисана.

У овом задатку користили смо добро познате *лимесе*: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$. ■

10. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Написати једначине тангенти на криву

$$K : y = \frac{x}{x+4},$$

које су паралелне правој $p : y = x + 4$.

Решење: Потражимо једначину *тангенције* на криву K у тачки $M(x_0, y_0)$ која је паралелна правој p . *Коефицијент правца* праве p је 1, па је то и коефицијент правца тражене тангенте. Са друге стране, коефицијент правца тражене тангенте налазимо

као вредност првог извода функције којом је задата крива K у тачки x_0 . Тада добијамо $y' = \frac{4}{(x+4)^2}$, па је $y'_{x=x_0} = \frac{4}{(x_0+4)^2} = 1$, одакле добијамо да је $x_0 = -2 \vee x_0 = -6$. Како је $M(x_0, y_0)$ тачка додира тражене тангенте и задате криве, она припада и тангенти и кривој. Како припада кривој, следи да је $y_0 = \frac{-2}{-2+4} = -1$ за $x_0 = -2$ и $y_0 = \frac{-6}{-6+4} = 3$ за $x_0 = -6$. Према томе, добијамо две тачке додира, а тиме и две тангенте. Једначина тангенте има облик $y - y_0 = y'_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$, па су тражене тангенте:

$$\boxed{t_1 : y = x + 1} \quad \text{и} \quad \boxed{t_2 : y = x + 9}.$$

■

11. [Јулски рок, 2011/12. година] Одредити граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[5]{\cos 3x}}{x^2}.$$

Решење: У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$, који решавамо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[5]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[5]{\cos 3x}}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos 2x - 1}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + 1)} + \frac{1 - \cos 3x}{x^2 (1 + \sqrt[5]{\cos 3x} + \sqrt[5]{\cos^2 3x} + \sqrt[5]{\cos^3 3x} + \sqrt[5]{\cos^4 3x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2 (\sqrt{\cos 2x} + 1)} \right. \\ &\quad \left. + 9 \cdot \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2 (1 + \sqrt[5]{\cos 3x} + \sqrt[5]{\cos^2 3x} + \sqrt[5]{\cos^3 3x} + \sqrt[5]{\cos^4 3x})} \right) \\ &= -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{-\frac{1}{10}}. \end{aligned}$$

Напомена: У овом задатку користили смо добро познат *лимес*: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. ■

12. [Септембарски рок, 2011/12. година] Испитати врсту прекида следећих функција:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x| - x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{в) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x}}, & x \neq 0 \\ e, & x = 0 \end{cases}$$

у тачки $x = 0$.

Решење: а) За $x \neq 0$ имамо

$$\frac{|x| - x}{x^2} = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ -\frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

Стога је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{2}{x}\right) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. Како једна од једностранних граничних вредности (лева) није коначна, функција $f(x)$ у тачки $x = 0$ има прекид друге врсте слева.

б) За $x \neq 0$ важи

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Према томе, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. Обе једностране граничне вредности су коначне, али нису једнаке, па функција $f(x)$ у тачки $x = 0$ има прекид прве врсте слева.

в) Имамо да је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{x+1}{x}} = 0 \neq f(0)$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x+1}{x}} = +\infty$. Како једна од једностранних граничних вредности јесте коначна, али није једнака вредности функције у тачки $x = 0$ (лева), а друга није коначна (десна), функција $f(x)$ у тачки $x = 0$ има прекид прве врсте слева и прекид друге врсте десна.

Напомена: Све три функције су *непреривне* за свако $x \neq 0$ као композиције непреривних функција. ■

13. [Јануарски рок, 2012/13. година] Одредити граничне вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}.$

Решење: а) У питању је неодређен облик 1^∞ , који решавамо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left[(1 + (\operatorname{tg} x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}} \right]^{\operatorname{tg}(2x) \cdot (\operatorname{tg} x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left[(1 + (\operatorname{tg} x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}} \right]^{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left[(1 + (\operatorname{tg} x - 1))^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}} \right]^{-\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \pi/4} -\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} = e^{-1} = \left[\frac{1}{e} \right]. \end{aligned}$$

б) У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$, који решавамо додавањем и одузимањем броја 1, па *рационализацијом*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 3x} - 1}{x^2}.$$

За прву *граничну вредност* имамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2 (\sqrt{\cos 2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2 (\sqrt{\cos 2x} + 1)} = -1.$$

За другу граничну вредност важи

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 3x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x^2 \left(\sqrt[3]{\cos^2 3x} + \sqrt[3]{\cos 3x} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -9 \cdot \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2 \left(\sqrt[3]{\cos^2 3x} + \sqrt[3]{\cos 3x} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Стога је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$

Напомена: У овом задатку искористили смо чињеницу да је функција e^x непрекидна, па *лимес* и функција могу да замене места. Такође смо користили и добро познате лимесе: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$ ■

14. [Јануарски рок, 2012/13. година] Наћи први извод функције

$$f(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x}.$$

Решење: Како је у питању функција облика $u(x)^{v(x)}$, најпре је *логаритмујемо*. За $x > 1$ имамо

$$\ln f(x) = \sin x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right).$$

Диференцирањем леве и десне стране ове једнакости добијамо

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \sin x \cdot \left(\ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)'$$

Како је

$$\left(\ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) \right)' = (\ln(\ln x) - \ln x)' = \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x \ln x},$$

следи да је

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln \left(\frac{\ln x}{x} \right) + \frac{(1 - \ln x) \sin x}{x \ln x} \right). \quad \blacksquare$$

15. [Јануарски рок, 2012/13. година] Одредити заједничке тангенте кривих

$$y = x^2 - 6x + 5 \text{ и } y = -x^2 - 4x.$$

Решење: Нека је $A(a, f(a))$ тачка додира *тангенције* са *кривом* $f(x) = x^2 - 6x + 5$, а $B(b, g(b))$ тачка додира исте тангенте са кривом $g(x) = -x^2 - 4x$. Како је $f'(x) = 2x - 6$, једначина тангенте на прву криву у тачки A је

$$t_1 : y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

тј.

$$t_1 : y = (2a - 6)x - a^2 + 5.$$

Слично, пошто је $g'(x) = -2x - 4$, једначина тангенте на другу криву у тачки B је

$$t_2 : y - g(b) = g'(b)(x - b),$$

тј.

$$t_2 : y = (-2b - 4)x + b^2.$$

Да би ове тангенте биле исте праве, морају имати једнаке *коэффицијенте правца* и једнаке слободне чланове. Стога важи $2a - 6 = -2b - 4$ и $-a^2 + 5 = b^2$, тј. $a + b = 1$ и $a^2 + b^2 = 5$. Заменом $b = 1 - a$ у другу једначину добијамо $a^2 + (1 - a)^2 = 5$, тј. $a^2 - a - 2 = 0$, па је $a = -1$ ∨ $a = 2$. Тада су одговарајуће вредности $b = 2$ или $b = -1$. За $a = 2$ добијамо тангенту $y = -2x + 1$, док за $a = -1$ добијамо тангенту $y = -8x + 4$. Према томе, тражене заједничке тангенте су $\boxed{t_1 : y = -2x + 1}$ и $\boxed{t_2 : y = -8x + 4}$. ■

16. [Јануарски рок, 2013/14. година] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\ln(1 + \operatorname{tg} x - \sin x)}.$$

Решење: У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$. Настојимо да израз чију *граничну вредност* треба да одредимо трансформишемо до облика познатих *лимеса* и то чинимо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\ln(1 + \operatorname{tg} x - \sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^3} - 1}{x^3} - \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1}{x^3}}{\frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x - \sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^3} - 1}{x^3} - \frac{(1 + x^3)^{\frac{1}{3}} - 1}{x^3}}{\frac{\ln(1 + \operatorname{tg} x - \sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1} = \boxed{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Напомена: У овом задатку користили смо добро познате лимесе $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. ■

17. [Јануарски рок, 2013/14. година] Одредити једначину оне тангенте криве

$$f(x) = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{2e^{2x} - 1}}$$

која је паралелна са x -осом.

Решење: Најпре приметимо да из услова $\frac{e^{2x}}{2e^{2x} - 1} > 0$ следи $2e^{2x} - 1 > 0$, па је *домен* функције $D_f = \left(-\frac{\ln 2}{2}, +\infty\right)$.

Одредимо сада *ајсцису* x_0 тачке у којој је *танјента* на криву $f(x)$ паралелна x -оси. Пошто је *коэффицијент иравца* такве тангенте једнак нули, мора важити $f'(x_0) = 0$. Како је

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{4x} + 1} + 1 - \frac{2e^{2x}}{2e^{2x} - 1},$$

тражено x_0 одређујемо из једначине

$$\frac{2e^{2x_0}}{e^{4x_0} + 1} - \frac{1}{2e^{2x_0} - 1} = 0.$$

Уведимо смену $t = e^{2x_0}$. Како је $x_0 \in D_f$, важи $t > \frac{1}{2}$. Тада претходна једначина постаје

$$\frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{1}{2t - 1} = 0,$$

тј.

$$2t(2t - 1) = t^2 + 1 \iff 3t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Корени ове квадратне једначине су $t_1 = 1$ и $t_2 = -\frac{1}{3}$. Други корен одбацујемо, јер је $t = e^{2x_0} > 0$, па је $t = 1$. Одавде следи да је $e^{2x_0} = 1$, тј. $x_0 = 0$.

Као што знамо, једначина тангенте паралелне x -оси је облика $y = y_0$, где је

$$y_0 = f(0) = \operatorname{arctg} 1 + \ln \sqrt{\frac{1}{2 - 1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Према томе, тражена тангента је $t : y = \frac{\pi}{4}$. ■

18. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Израчунати граничне вредности

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right),$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}.$

Решење: а) У питању је неодређен облик $\infty \cdot 0$. Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$, имамо

да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0$. Стога, тражену *граничну вредност* можемо

записати у облику погодном за примену *Лопиталовој правила*. При томе је

$$\left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}}} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{x^2 + 1},$$

па добијамо

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0} \right)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2 + 1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Дакле, $\boxed{L_1 = 1}$.

б) У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$, који решавамо *рационализацијом*:

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x (1 - 2 \sin^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x (1 + 2 \cos^2 x)}{x^2 (1 + \cos x \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1 + 2 \cos^2 x}{1 + \cos x \sqrt{\cos 2x}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $\boxed{L_2 = \frac{3}{2}}$.

Напомена: У овом задатку користили смо добро познат *лимес* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

19. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Испитати непрекидност и карактер тачака прекида следећих функција:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad f(x) &= \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, & \text{б)} \quad f(x) &= \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}, \\ \text{в)} \quad f(x) &= \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1 \\ |x - 1|, & |x| > 1 \end{cases}, & \text{г)} \quad f(x) &= \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Решење: а) Домен дате функције је $D_f = [0, 2]$. Функција $f(x)$ је *непрекидна* на интервалима $[0, 1]$ и $(1, 2]$ (као *квадратна* функција), па је потребно испитати непрекидност у тачки $x = 1$ здесна. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = f(1)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x^2) = 1,$$

слиди да је функција непрекидна и у тачки $x = 1$.

Према томе, $f(x)$ је непрекидна на $D_f = [0, 2]$, тј. нема тачака *прекида*.

б) Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Функција $f(x)$ је непрекидна на интервалима $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ (као *линеарна*, односно *константна* функција), па треба испитати непрекидност у тачкама $x = -1$ и $x = 1$. За $x = 1$ важи

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

па је функција непрекидна у тачки $x = 1$. За $x = -1$ важи

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 = f(-1).$$

Како су *лева и десна гранична вредност* коначне, али различите, функција у тачки $x = -1$ има прекид прве врсте слева.

Дакле, $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, а $x = -1$ је тачка прекида прве врсте слева.

в) Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Функција $f(x)$ је непрекидна на интервалима $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ (као *тригонометријска*, односно *линеарна* функција), па треба испитати непрекидност у тачкама $x = -1$ и $x = 1$. За $x = 1$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x),$$

па је функција непрекидна у тачки $x = 1$. За $x = -1$ важи

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x - 1| = 2,$$

док је

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 = f(-1).$$

Како су лева и десна гранична вредност коначне, али различите, функција у тачки $x = -1$ има прекид прве врсте слева.

Према томе,

$f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, а $x = -1$ је тачка прекида прве врсте слева.

г) Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Функција $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \pi x$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. За произвољно $k \in \mathbb{Z}$ важи

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \operatorname{ctg}^2 \pi x = +\infty,$$

док је $f(k) = 0$. Према томе, сваки цео број је тачка прекида друге врсте, па важи

$f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, а $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, су тачке прекида друге врсте. ■

20. [Септембарски рок, 2013/14. година] Одредити граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

Решење: У питању је неодређен облик $\frac{0}{0}$. Како је

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)},$$

добивамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}}{x^3}.$$

Пошто $\sin x \cdot \ln(\cos x) \rightarrow 0$ када $x \rightarrow 0$, можемо применити добро познату *граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Стога је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}}{x^3} &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} - 1}{\sin x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \frac{\sin x \cdot \ln(\cos x)}{x^3} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} - 1}{\sin x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Прве две граничне вредности једнаке су 1, док је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\frac{1}{2},$$

с обзиром на добро познате *лимите* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Према томе, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{2}}.$ ■

21. [Октобарски рок, 2013/14. година] У пресечним тачкама праве $x - y + 1 = 0$ и криве $y = x^2 - 4x + 5$ повучене су тангенте на криву. Наћи њихове једначине, као и њихову пресечну тачку.

Решење: Пресечне *тачке* *праве* $x - y + 1 = 0$, тј. $y = x + 1$, и *криве* $y = x^2 - 4x + 5$ одређујемо решавањем једначине $x + 1 = x^2 - 4x + 5$, одакле је

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x - 1)(x - 4) = 0.$$

Према томе, добијамо да је $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, па су пресечне тачке $A(1, 2)$ и $B(4, 5)$.

Нека је $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Како је $f'(x) = 2x - 4$, *коэффициент* *правца* *тангенте* у тачки $A(1, 2)$ је $f'(1) = -2$. Зато је $y - 2 = -2(x - 1)$, па је прва тражена тангента

$$\boxed{t_A : y = -2x + 4}.$$

Слично, коефицијент правца тангенте у тачки $B(4, 5)$ је $f'(4) = 4$, па је $y - 5 = 4(x - 4)$, одакле добијамо другу тражену тангенту

$$\boxed{t_B : y = 4x - 11}.$$

Пресечну тачку тангенти t_A и t_B одређујемо из система једначина

$$\begin{aligned} y &= -2x + 4 \\ y &= 4x - 11 \end{aligned}.$$

Изједначавањем десних страна добијамо

$$-2x + 4 = 4x - 11 \implies 6x = 15 \implies x = \frac{5}{2},$$

па је $y = -1$. Дакле, пресечна тачка тангенти је

$$\boxed{T\left(\frac{5}{2}, -1\right)}.$$

■

22. [Јануарски рок, 2014/15. година] Наћи леву и десну граничну вредност реалне функције $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + c^2 + c}{e^{\frac{1}{x}} + 2}$, $c \in \mathbb{R}$, у тачки $x = 0$. За коју је вредност константе $c \in \mathbb{R}$ функција $f(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$?

Решење: Функција $f(x)$ је *непрекидна* на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као количник и *композиција* непрекидних функција, при чему је именилац увек позитиван. Како за $x \rightarrow 0^-$ важи $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, па $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, добијамо

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{c^2 + c}{2}}.$$

Са друге стране, за $x \rightarrow 0^+$ важи $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, па $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$. Стога је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + c^2 + c}{e^{\frac{1}{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + (c^2 + c) \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{1 + 2e^{-\frac{1}{x}}} = \boxed{1}.$$

Из услова непрекидности у тачки $x = 0$ захтевамо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0),$$

па је $\frac{c^2 + c}{2} = 1$. Одавде добијамо

$$c^2 + c - 2 = 0 \iff (c + 2)(c - 1) = 0,$$

тј. $\boxed{c = -2 \text{ или } c = 1}$.

За обе вредности параметра важи $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, па функцију у тачки $x = 0$ треба дефинисати са

$$\boxed{f(0) = 1}.$$

Тада је функција $f(x)$ непрекидна на целом скупу $\mathbb{R}$. ■

23. [Јануарски рок, 2014/15. година] У произвољној тачки криве

$$y = z(x) = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{2 - \sqrt{4 - x^2}} \right) - \sqrt{4 - x^2}$$

конструисана је тангента на ту криву. Нека је A тачка додира криве и тангенте, а B тачка пресека тангенте и y -осе. Израчунати дужину дужи $\overline{AB}$.

Решење: Домен функције z је $D_z = [-2, 0) \cup (0, 2]$. Нека је $A(a, z(a))$ произвољна тачка криве у којој је тангенција одређена, где је $a \in (-2, 0) \cup (0, 2)$. Најпре одредимо извод функције z . За $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ важи

$$\begin{aligned} z'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}(2+\sqrt{4-x^2})} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}(2-\sqrt{4-x^2})} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \left(1 - \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} \right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \left(1 - \frac{4}{x^2} \right) = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Према томе, коефицијент правца тангенте у тачки A је $z'(a) = -\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$, док су координате тачке A

$$A \left(a, \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{2 - \sqrt{4 - a^2}} \right) - \sqrt{4 - a^2} \right).$$

Једначина тангенте t у тачки A је

$$t : y - \left(\ln \left(\frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{2 - \sqrt{4 - a^2}} \right) - \sqrt{4 - a^2} \right) = -\frac{\sqrt{4 - a^2}}{a} \cdot (x - a),$$

тј.

$$t : y = -\frac{\sqrt{4 - a^2}}{a}x + \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{2 - \sqrt{4 - a^2}} \right).$$

За $x = 0$ добијамо да тангента t пресеца Oy -осу у тачки

$$B \left(0, \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{2 - \sqrt{4 - a^2}} \right) \right).$$

Коначно, тражена дужина дужи $\overline{AB}$ износи

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(a-0)^2 + \left(\ln \left(\frac{2 + \sqrt{4-a^2}}{2 - \sqrt{4-a^2}} \right) - \sqrt{4-a^2} - \ln \left(\frac{2 + \sqrt{4-a^2}}{2 - \sqrt{4-a^2}} \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 4 - a^2} = \boxed{2}. \end{aligned}$$

■

24. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Израчунати:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}},$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin 2x \cdot \sin^2 x}.$

Решење: **а)** Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$, полазни израз је неодређеног облика 1^∞ . Стога важи

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x}}.$$

Одредимо најпре *граничну вредност* у експоненту:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{\frac{x + e^x}{1}} = 2.$$

Према томе, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = e^2}.$

б) Имамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x}{\sin 2x \cdot \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{\sin 2x \cdot \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Напомена: У овом задатку користили смо добро познате *лимесе* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, као и чињеницу да је функција e^x *непрекидна*, па лимес и функција могу да замене места. ■

25. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Одредити реалне параметре A и B тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}, & \text{за } x < \frac{\pi}{2} \\ A, & \text{за } x = \frac{\pi}{2} \\ Ae + \frac{B}{x}, & \text{за } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

буде непрекидна у свим тачкама домена.

Решење: Приметимо најпре да је дата функција *непрекидна* у свим тачкама свог домена различитим од $x = \frac{\pi}{2}$, као *композиција*, односно збир елементарних непрекидних функција. Према томе, потребно је одредити параметре $A, B \in \mathbb{R}$ тако да функција буде непрекидна у тачки $x = \frac{\pi}{2}$. Услов непрекидности у тој тачки је

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A.$$

Најпре одредимо *леву граничну вредност*. Како је

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\operatorname{tg}^2 x \cdot \ln(\sin x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}^2 x \cdot \ln(\sin x)},$$

потражимо граничну вредност која се налази у експоненту. Важи

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}^2 x \cdot \ln(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x \cdot \ln(\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{1 - \sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{\sin x - 1} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$. Према томе, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$, па из услова непрекид-

ности у тачки $x = \frac{\pi}{2}$ следи $A = e^{-\frac{1}{2}}$.

Са друге стране,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(Ae + \frac{B}{x} \right) = Ae + \frac{2B}{\pi}.$$

Услов непрекидности даје везу $Ae + \frac{2B}{\pi} = A$, па је $B = \frac{\pi}{2} \cdot (1 - e) \cdot e^{-\frac{1}{2}}$.

Дакле, за

$$A = e^{-\frac{1}{2}} \text{ и } B = \frac{\pi}{2} \cdot (1 - e) \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

функција $f(x)$ је непрекидна у свим тачкама свог домена. ■

26. [Јулски рок, 2014/15. година] Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} x + a^2, & \text{за } x < 0 \\ a \cos x + b \sin x, & \text{за } x \geq 0 \end{cases}$$

буде диференцијабилна у тачки $x = 0$.

Решење: Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као композиција непрекидних функција. Да би функција била диференцијабилна у тачки $x = 0$, пре свега мора бити непрекидна у тој тачки. Стога поставимо услов непрекидности у тачки $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a^2) = a^2$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \cos x + b \sin x) = a = f(0),$$

из услова непрекидности добијамо да је

$$a^2 = a \iff a(a - 1) = 0,$$

па је $a = 0$ или $a = 1$.

Сада поставимо услов диференцијабилности функције $f(x)$ у тачки $x = 0$:

$$f'_+(0) = f'_-(0).$$

За $a \in \{0, 1\}$ важи $a^2 = a$, па је

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a \cos h + b \sin h - a}{h} \\ &= -a \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos h}{h} + b \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = b, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{1} = 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. Са друге стране,

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h + a^2 - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1.$$

Према томе, из услова $f'_+(0) = f'_-(0)$ добијамо да је $b = 1$.

Дакле, $\boxed{(a, b) \in \{(0, 1), (1, 1)\}}$. ■

27. [Јануарски рок, 2022/23. година] **а)** Одредити први извод функције $f(x) = x^x$.

б) Одредити све вредности реалних параметара α , β и γ , тако да функција

$$g(x) = \begin{cases} \alpha, & x \leq 0 \\ \frac{x^x - 1}{x \ln x} + \beta, & 0 < x < 1 \\ \gamma, & x = 1 \\ \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}, & x > 1 \end{cases}$$

буде непрекидна на свом домену.

Решење: а) За $x > 0$ је $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. Лоџариџмовањем добијамо $\ln f(x) = x \ln x$, па диференцирањем леве и десне стране ове једнакости следи

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1.$$

Стога је $\boxed{f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1), x > 0}$.

(б) Домен дате функције је $\mathbb{R}$. Функција g је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ као композиција непрекидних функција, па је потребно поставити услове непрекидности у тачкама $x = 0$ и $x = 1$.

У тачки $x = 0$ услов непрекидности је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0).$$

Са једне стране, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \alpha = g(0)$. Са друге стране, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \beta + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$.

Како је $x^x = e^{x \ln x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, применом добро

познатог *лимеса* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1.$$

Према томе, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \beta + 1$, па из услова непрекидности у тачки $x = 0$ следи

$$\alpha = \beta + 1.$$

У тачки $x = 1$ услов непрекидности је

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x).$$

Најпре, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \beta + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$. Применом *Лопиталовој правила* добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^x - 1}{x \ln x} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{0}{0})} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^x (\ln x + 1)}{\ln x + 1} = 1,$$

па је $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \beta + 1$. Са друге стране имамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{0}{0})} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\ &\underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{0}{0})} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2. \end{aligned}$$

Зато из услова непрекидности у тачки $x = 1$ следи

$$\gamma = \beta + 1 = -2.$$

Одавде је $\beta = -3$, а из $\alpha = \beta + 1$ добијамо да је $\alpha = -2$. Према томе,

$$\boxed{\alpha = -2, \beta = -3 \text{ и } \gamma = -2}.$$

■

28. [Фебруарски рок, 2022/23. година] Одредити вредност реалног параметра a тако да функција

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$, а затим испитати њену диференцијабилност.

Решење: Функција $h(x)$ је *непрекидна* на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као *композиција* непрекидних функција. Да би била непрекидна на целом *домени*, $D_h = \mathbb{R}$, потребно је да буде непрекидна и у тачки $x = 0$, тј. да важи

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = a.$$

Како је $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, за $x \neq 0$ важи $\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2$. Пошто је $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, на основу

Теореме о два полицајца следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ (да је овај *лимес* једнак нули могло се закључити и из чињенице да је синус ограничена функција, а x^2 тежи нули, па и њихов производ тежи нули). Стога, из услова непрекидности у тачки $x = 0$ добијамо да је $\boxed{a = 0}$.

За $a = 0$ функција је *диференцијабилна* на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, при чему је

$$h'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Преостаје да испитамо диференцијабилност у тачки $x = 0$. По дефиницији *извода* имамо да је

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

из истог разлога из ког је $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$.

Према томе, за $\boxed{a = 0}$ функција $h(x)$ је диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$, а њен извод је

$$\boxed{h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}}.$$

■

29. [Јулски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$g(x) = \sin x \cdot |\sin x|.$$

Испитати непрекидност и диференцијабилност ове функције.

Решење: Како је

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \sin x \geq 0 \\ -\sin^2 x, & \sin x < 0 \end{cases},$$

тј.

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ -\sin^2 x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

функција g је *непрекидна* на $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ као *композиција* непрекидних функција.

У тачкама $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, имамо

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} g(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} \sin x \cdot |\sin x| = 0 = g(k\pi),$$

па је функција непрекидна и у свакој од ових тачака.

Према томе, функција $g(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R}$.

За $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, функција је *диференцијабилна* и важи

$$g'(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -\sin 2x, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Проверимо диференцијабилност у тачкама $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. По дефиницији извода,

$$\begin{aligned} g'(k\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(k\pi + h) - g(k\pi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi + h) \cdot |\sin(k\pi + h)|}{h} \\ &= (-1)^k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot |\sin h| = 0. \end{aligned}$$

Ово је такође могло да се провери као $g'_\pm(k\pi) = \lim_{x \rightarrow k\pi^\pm} g'(x) = 0$. Дакле, функција g је диференцијабилна и у свакој тачки $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, при чему је $g'(k\pi) = 0$.

Стога, функција $g(x)$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

Напомена: У задатку је коришћена адициона формула за синус збира углова

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

као и чињеница да је $\sin k\pi = 0$ и $\cos k\pi = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ је паран број} \\ -1 & k \text{ је непаран број} \end{cases}$. ■

30. [Августовски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \quad x \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

а) Наћи први извод дате функције $f(x)$.

б) Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Решење: а) За $x \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ важи $\sin x > 0$, па дату функцију можемо записати у облику $f(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)}$. Диференцирањем добијамо

$$f'(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)} \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

Како је $\operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$, следи да је $f'(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right)$.

б) Како је функција e^x непрекидна, важи

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x)}.$$

Пронађимо најпре граничну вредност у експоненту, која је у неодређеном облику $0 \cdot \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\sin x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x \cdot \cos x) = 0. \end{aligned}$$

Према томе, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. ■

31. [Фебруарски рок, 2023/24. година] Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}.$$

Одредити, уколико постоји, вредност реалног параметра a тако да функција f буде непрекидна на свом домену.

Решење: Функција $f(x)$ је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као композиција непрекидних функција. Да би била непрекидна на целом домену $D_f = \mathbb{R}$, довољно је испитати непрекидност у тачки $x = 0$ и поставити услов

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

За $x \neq 0$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1,$$

јер производ ограничене функције и нечега што тежи нули, тежи нули, па важи $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, а такође важи и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Како је још и $f(0) = a$, услов непрекидности у тачки $x = 0$ даје $a = 1$.

Дакле, функција f је непрекидна на свом домену за $\boxed{a = 1}$. ■

32. [Августовски рок, 2023/24. година] Одредити граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{x+1}{x} \pi \right) - \sin \left(\frac{x}{x+1} \pi \right)}{\frac{x+1}{x} \pi - \frac{x}{x+1} \pi}.$$

Решење: Уведимо ознаке $A = \frac{x+1}{x} \pi$ и $B = \frac{x}{x+1} \pi$. Тада $A \rightarrow \pi$ и $B \rightarrow \pi$ када $x \rightarrow \infty$, па $A - B \rightarrow 0$. Користећи идентитет

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2},$$

добивамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin A - \sin B}{A - B} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}}{A - B} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{A+B}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\frac{A-B}{2}} \\ &= \cos \pi \cdot 1 = -1. \end{aligned}$$

Према томе, $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{x+1}{x} \pi \right) - \sin \left(\frac{x}{x+1} \pi \right)}{\frac{x+1}{x} \pi - \frac{x}{x+1} \pi} = -1}$, јер је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ■

33. [Августовски рок, 2023/24. година] Одредити реалне параметре a , b , γ и δ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x - a, & x \leq \gamma \\ x^2 + x + 1, & x \in (\gamma, \delta) \\ -x^2 + 5x - b, & x \geq \delta \end{cases}$$

буде диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

Решење: Дата функција је *непрекидна* и *диференцијабилна* на интервалима $(-\infty, \gamma)$, (γ, δ) и $(\delta, +\infty)$, јер је на сваком од њих *полиномска функција*. Према томе, потребно је одредити параметре тако да функција буде диференцијабилна у тачкама спајања $x = \gamma$ и $x = \delta$.

У тачки $x = \gamma$ најпре поставимо услов непрекидности:

$$-\gamma^2 + \gamma - a = \lim_{x \rightarrow \gamma^-} f(x) = f(\gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} f(x) = \gamma^2 + \gamma + 1.$$

Поред тога, морају бити једнаки *леви и десни извод*, па је

$$-2\gamma + 1 = f'_-(\gamma) = f'_+(\gamma) = 2\gamma + 1,$$

одакле добијамо да је $\gamma = 0$. Заменом $\gamma = 0$ у услов непрекидности у тачки $x = \gamma$ следи да је $-a = 1$, па је $a = -1$.

У тачки $x = \delta$ услов непрекидности је:

$$\delta^2 + \delta + 1 = \lim_{x \rightarrow \delta^-} f(x) = f(\delta) = \lim_{x \rightarrow \delta^+} f(x) = -\delta^2 + 5\delta - b,$$

док из услова једнакости левог и десног извода добијамо

$$2\delta + 1 = f'_-(\delta) = f'_+(\delta) = -2\delta + 5.$$

Одавде је $\delta = 1$. Заменом $\delta = 1$ у услов непрекидности у тачки $x = \delta$ следи да је

$$1 + 1 + 1 = -1 + 5 - b,$$

па је $b = 1$.

Дакле, функција је диференцијабилна на $\mathbb{R}$ за $a = -1, b = 1, \gamma = 0$ и $\delta = 1$. ■

34. [Септембарски рок, 2023/24. година] Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x \cdot e^x}{\ln(1+x)}}, & x \in (-1, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \\ c, & x = 0 \end{cases}.$$

Наћи вредност параметра $c \in \mathbb{R}$ тако да функција f буде непрекидна на свом домену.

Решење: Функција $f(x)$ је *непрекидна* на $(-1, 0)$ и на $(0, \frac{\pi}{2})$ као *композиција* елементарних функција. Да би функција $f(x)$ била непрекидна и у тачки $x = 0$, потребно је да важи $c = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Како је у питању неодређени облик типа 1^∞ , *логаритмовањем* добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x \cdot e^x}{\ln(1+x)} \cdot \ln(\cos x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \cdot e^x \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{0}{0})} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{0}{0})} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Пошто је експоненцијална функција непрекидна, следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$, па је тражена вредност параметра $\boxed{c = e^{-\frac{1}{2}}}$. ■

35. [Септембарски 1. рок, 2024/25. година] Дата је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Одредити вредност параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да функција f буде непрекидна.

б) Испитати диференцијабилност функције у тачки $x = 0$.

в) Испитати диференцијабилност функције у тачки $x = \pi$.

Решење: а) Како је $\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = |\cos \frac{x}{2}|$ и $\cos \frac{x}{2} > 0$ у некој околини тачке $x = 0$, важи

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{4}}{x^2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} \right)^2 = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $1 - \cos \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{4}$. Да би функција $f(x)$ била непрекидна у

тачки $x = 0$, мора бити $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, па је $\boxed{\alpha = \frac{1}{8}}$.

б) За вредност $\alpha = \frac{1}{8}$ испитајмо постојање извода у тачки $x = 0$. Пошто је у некој околини нуле $\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2}$, користећи *Маклоренов развој*

$$\cos \frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

(видети 7. главу), добијамо да је

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x^2} - \frac{1}{8}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{384} + o(x^4) - \frac{x^2}{8}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x}{384} + o(x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Према томе, $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ је диференцијабилна у тачки } x = 0 \text{ и важи } f'(0) = 0.}$

в) Како је $\cos \frac{x}{2} > 0$ за $x < \pi$ у некој левој околини тачке $x = \pi$, а $\cos \frac{x}{2} < 0$ за $x > \pi$ у некој десној околини те тачке, имамо да је

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{x^2}, & x < \pi \\ \frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{x^2}, & x > \pi \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot x^2 - (1 - \cos \frac{x}{2}) \cdot 2x}{x^4}, & x < \pi \\ \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot x^2 - (1 + \cos \frac{x}{2}) \cdot 2x}{x^4}, & x > \pi \end{cases}$$

у одговарајућим једностраним околинама тачке $x = \pi$. Стога је

$$f'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \pi^2 \sin \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)}{\pi^4} = \frac{1}{2\pi^2} - \frac{2}{\pi^3},$$

док је

$$f'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = \frac{-\frac{1}{2} \pi^2 \sin \frac{\pi}{2} - 2\pi \left(1 + \cos \frac{\pi}{2}\right)}{\pi^4} = -\frac{1}{2\pi^2} - \frac{2}{\pi^3}.$$

Како је $f'_-(\pi) \neq f'_+(\pi)$, функција f није диференцијабилна у тачки $x = \pi$.

Дакле, функција $f(x)$ није диференцијабилна у тачки $x = \pi$. ■

36. [Септембарски 2. рок, 2024/25. година] У зависности од реалног параметра α , дефинисана је функција

$$h(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + \alpha^2 + \alpha}{e^{\frac{1}{x}} + 2}.$$

Одредити све вредности параметра α за које функција $h(x)$ има отклоњив прекид у тачки $x = 0$.

Решење: Функција $h(x)$ дефинисана је на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Као што знамо, термин „*тачка прелома*” користи се и за оне *тачке наволавања домена* у којима функција није дефинисана. Да би у тачки $x = 0$ функција $h(x)$ имала *отклоњив прелом*, потребно је да постоји коначна *гранична вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, тј. да су лева и десна гранична вредност у тачки $x = 0$ једнаке.

На основу 22. задатка, можемо закључити да $\alpha \in \{-2, 1\}$. ■

37. [Септембарски 2. рок, 2024/25. година] Одредити једначине оних тангенти криве $g(x) = x - \arctg 2x$ које су паралелне са x -осом.

Решење: Одредимо најпре *ајсцисе* x_0 тачака у којима су *тангенте* на криву $g(x)$ паралелне са x -осом. Пошто је *коэффициент правца* такве тангенте једнак нули, мора важити $g'(x_0) = 0$. Како је

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{1 + 4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{1 + 4x^2},$$

услов $g'(x_0) = 0$ даје

$$\frac{4x_0^2 - 1}{1 + 4x_0^2} = 0 \iff 4x_0^2 - 1 = 0,$$

одакле је $x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

За $x_0 = \frac{1}{2}$ добијамо $y_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$, док за $x_0 = -\frac{1}{2}$ добијамо $y_2 = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Према томе, тражене једначине тангенти су $t_1 : y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ и $t_2 : y = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. ■

38. [Октобарски 1. рок, 2024/25. година] Одредити вредности реалних параметара p и q ($p < 0$) тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{p}{x}, & x < \sqrt{3}p \\ x + q, & x \geq \sqrt{3}p \end{cases}$$

буде диференцијабилна на скупу $\mathbb{R}$.

Решење: Функција $f(x)$ је *непреривна* и *диференцијабилна* на $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}p\}$ као композиција елементарних функција. Да би била диференцијабилна на целом скупу $\mathbb{R}$, потребно је да буде непрекидна и да има једнаке *леви* и *десни извод* у тачки $x = \sqrt{3}p$. Најпре поставимо услов непрекидности:

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^+} f(x) = f(\sqrt{3}p).$$

Како је

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^-} \operatorname{arctg} \frac{p}{x} = \operatorname{arctg} \frac{p}{\sqrt{3}p} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

и

$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^+} (x + q) = \sqrt{3}p + q = f(\sqrt{3}p),$$

из услова непрекидности добијамо $\sqrt{3}p + q = \frac{\pi}{6}$.

Даље, за $x \neq \sqrt{3}p$ важи

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{p}{x^2 + p^2}, & x < \sqrt{3}p \\ 1, & x > \sqrt{3}p \end{cases}.$$

Према томе, $f'_-(\sqrt{3}p) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^-} \left(-\frac{p}{x^2 + p^2}\right) = -\frac{p}{3p^2 + p^2} = -\frac{1}{4p}$, док је $f'_+(\sqrt{3}p) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}p)^+} 1 = 1$. Из услова диференцијабилности

$$f'_-(\sqrt{3}p) = f'_+(\sqrt{3}p)$$

добијамо да је $-\frac{1}{4p} = 1$, па је $p = -\frac{1}{4}$. Заменом у услов непрекидности следи да је

$q = \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}p = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. Дакле, $p = -\frac{1}{4}$ и $q = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. ■

39. [Октобарски 2. рок, 2024/25. година] Испитати непрекидност и диференцијабилност функције $f(x) = |x - 1| + \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)$.

Решење: Приметимо најпре да је

$$|x - 1| = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \\ 0, & x \in \{-1, 2\} \\ -1, & x \in (-1, 2) \end{cases}.$$

Одавде добијамо

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ -x, & x \in (-1, 1) \\ x - 2, & x \in [1, 2) \\ 1, & x = 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}.$$

Функција $f(x)$ је *непрекидна* на сваком од интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$ као *линеарна* или *константна* функција, па је потребно испитати непрекидност у тачкама $x = -1$, $x = 1$ и $x = 2$.

За $x = -1$ имамо

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x + 2) = 3 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1,$$

па функција није непрекидна у тачки $x = -1$.

За $x = 1$ важи

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = -1 = f(1),$$

па је функција непрекидна у тачки $x = 1$.

За $x = 2$ добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2,$$

па функција није непрекидна у тачки $x = 2$.

Према томе, функција је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

На интервалима на којима је дата линеарним изразима функција је *диференцијабилна*. Како у тачкама $x = -1$ и $x = 2$ није непрекидна, у тим тачкама не може бити ни диференцијабилна. У тачки $x = 1$ имамо

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1 \quad \text{и} \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 1,$$

па функција није диференцијабилна ни у тачки $x = 1$.

Дакле, функција је диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$. ■

40. [Јануарски рок, 2025/26. година] Дата је функција $f(x) = |x + 2|e^{-\frac{1}{|x|}}$.

а) Испитати диференцијабилност функције $f(x)$ на свом домену.

б) Одредити једначину тангенте на график функције $f(x)$ у тачки $(1, f(1))$.

Решење: **а)** Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Како за $x < 0$ важи $|x| = -x$, а за $x > 0$ важи $|x| = x$, и како се знак израза $x + 2$ мења у тачки $x = -2$, функцију можемо записати у облику

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)e^{\frac{1}{x}}, & x \in (-\infty, -2] \\ (x+2)e^{\frac{1}{x}}, & x \in (-2, 0) \\ (x+2)e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

На интервалима $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ и $(0, +\infty)$ функција $f(x)$ је *диференцијабилна* као производ и *композиција* диференцијабилних елементарних функција. На тим интервалима је

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} + \frac{x+2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, & x \in (-\infty, -2) \\ e^{\frac{1}{x}} - \frac{x+2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}, & x \in (-2, 0) \\ e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x+2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}.$$

Преостаје да испитамо диференцијабилност у тачки $x = -2$. Јасно је да је функција $f(x)$ *непрекидна* у тачки $x = -2$, јер је $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 0$, па можемо испитивати диференцијабилност у тој тачки. Пошто је $f(-2) = 0$, за *десни извод* добијамо

$$f'_+(-2) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h e^{\frac{1}{-2+h}}}{h} = e^{-\frac{1}{2}},$$

док је *леви извод*

$$f'_-(-2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h e^{\frac{1}{-2+h}}}{h} = -e^{-\frac{1}{2}}.$$

Како је $f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$, функција $f(x)$ није диференцијабилна у тачки $x = -2$. Тачка $x = 0$ не припада домену функције.

Према томе, функција $f(x)$ је диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

б) Како је $1 > 0$, имамо да је $f(1) = 3e^{-1}$ и $f'(1) = 4e^{-1}$. Једначина *тангенте* на график функције $f(x)$ у тачки $(1, f(1))$ је

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1),$$

па је $t : y = 4e^{-1} \cdot x - e^{-1}$. ■

Глава 6

Испитивање функција

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Одредити домен и наћи асимптоте функције $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$.

Решење: Како је $D_f = \mathbb{R}$, дата $\boxed{\text{функција нема вертикалних асимптоша}}$.
Даље,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \mp\infty,$$

па $\boxed{\text{функција нема ни хоризонталних асимптоша}}$. Стога, потражимо *косе асимптоше*:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = -1$$

и

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{x^2 - x^3} + x^2}{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2} - x \sqrt[3]{x^2 - x^3} + x^2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

па је права $\boxed{y = -x + \frac{1}{3}}$ обострана коса асимптота дате функције. ■

2. [Јануарски рок, 2010/11. година] Дата је функција $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}$.

а) Испитати монотоност и одредити локалне екстремуме дате функције.

б) Наћи интервале конвексности и превојне тачке дате функције.

Решење: а) Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Да бисмо испитали *моноћносћ* и одредили *екстремуме* ове функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x + 2) = \frac{4}{3} \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}, \quad x \neq -2, 0.$$

Даље, важи $f'(x) > 0 \iff x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$, па је

функција $f(x)$ *моноџоно растућа* на интервалу $(-2, -1)$ и на интервалу $(0, +\infty)$.

Са друге стране, како је $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$,

$f(x)$ је *моноџоно опадајућа* на интервалу $(-\infty, -2)$ и на интервалу $(-1, 0)$. Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $(-2, 0)$ *локални минимум*,
- $(-1, 1)$ *локални максимум* и
- $(0, 0)$ *локални минимум*.

Напомена: Посебно испитајмо шта се дешава у тачкама из домена у којима изводна функција $f'(x)$ није дефинисана. Како је

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\infty \text{ и } f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = +\infty,$$

слиди да у тачки $x = -2$ функција није *диференцијабилна*, али је са леве стране *монотонно опадајућа*, а са десне стране *монотонно растућа*. Зато у тачки $x = -2$ достиже локални минимум.

Такође, како је

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty \text{ и } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty,$$

слиди да у тачки $x = 0$ функција није *диференцијабилна*, али је са леве стране *монотонно опадајућа*, а са десне стране *монотонно растућа*. Зато у тачки $x = 0$ достиже локални минимум.

Напоменимо да функција може у некој тачки да има локални (глобални) екстремум, иако није *диференцијабилна* у тој тачки. У тачкама $x = -2$ и $x = 0$ график дате функције има *шипи*.

б) Да бисмо одредили интервале *конвексности* и *превојне тачке*, нађимо *групи извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2 + 2x - 2}{\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^4}}, \quad x \neq -2, 0.$$

Сада имамо да је $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1 - \sqrt{3}) \cup (-1 + \sqrt{3}, +\infty)$, па је функција

$f(x)$ *конвексна* на интервалу $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ и на интервалу $(-1 + \sqrt{3}, +\infty)$.

Са друге стране, како је $f''(x) < 0 \iff x \in (-1 - \sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, -1 + \sqrt{3})$,

$f(x)$ је *конкавна* на интервалима $(-1 - \sqrt{3}, -2)$, $(-2, 0)$ и на $(0, -1 + \sqrt{3})$. Одав-

де видимо да су *превојне тачке* $(-1 - \sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$ и $(-1 + \sqrt{3}, \sqrt[3]{4})$. ■

3. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Детаљно испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2}$.

Решење: За дату функцију испитајмо следеће особине:

1) Домен функције: Функција $f(x)$ дефинисана је за $x > 0$ и $\ln x \neq 2$, тј. $x \neq e^2$. Дакле, домен дате функције је $D_f : x \in (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$.

2) Парност функције: Како домен функције $f(x)$ није симетричан у односу на $x = 0$, дата функција није ни парна ни непарна.

3) Периодичност функције: С обзиром на то да је $f(x + T) \neq f(x)$, где је T период, функција $f(x)$ није периодична.

4) Нуле и знак функције: За функцију $f(x)$ важи $f(x) = 0 \iff \ln|x| - 1 = 0 \iff x = e$. Такође, важи $f(x) > 0 \iff \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2} > 0 \iff x \in (0, e) \cup (e^2, +\infty)$, односно $f(x) < 0 \iff x \in (e, e^2)$. Дакле,

- $x = e$ је нула функције $f(x)$,
- функција $f(x)$ је позитивна на интервалима $(0, e)$ и $(e^2, +\infty)$ и
- функција $f(x)$ је негативна на интервалу (e, e^2) .

5) Асимптоте функције: Потражимо вертикалне асимптоте у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачке $x = 0$ и $x = e^2$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2} \underset{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

дата функција нема вертикалну асимптоту у тачки $x = 0$. Даље, како је

$$\lim_{x \rightarrow e^{2-}} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^{2-}} \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow e^{2+}} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^{2+}} \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

слиди да је $x = e^2$ обострана вертикална асимптота функције $f(x)$. Остаје још да проверимо постојање хоризонталних, односно косих асимптоа. Како је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2} \underset{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

права $y = 1$ је десна хоризонтална асимптота функције $f(x)$, па косу нема.

6) Моношност и локални екстремуми функције: Да бисмо испитали моношност и одредили екстремуме ове функције, нађимо њен први извод и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \frac{-1}{x(\ln x - 2)^2} < 0, \quad \forall x \in D_f.$$

Дакле, функција $f(x)$ је моноџоно оџагајућа на интервалима $(0, e^2)$ и $(e^2, +\infty)$, па нема локалних екстремума. Ради прецизнијег цртања графика дате функције, испитајмо још и понашање првог извода у десној околини тачке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x - 2)^2} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}(\ln x - 2)} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})} -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Одавде добијамо да се права $x = 0$ понаша као тангенс на криву $f(x)$ када $x \rightarrow 0^+$.

7) Конвексности, конкавности и превојне тачке: Да бисмо одредили интервале конвексности, односно конкавности, и превојне тачке, нађимо *групи извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

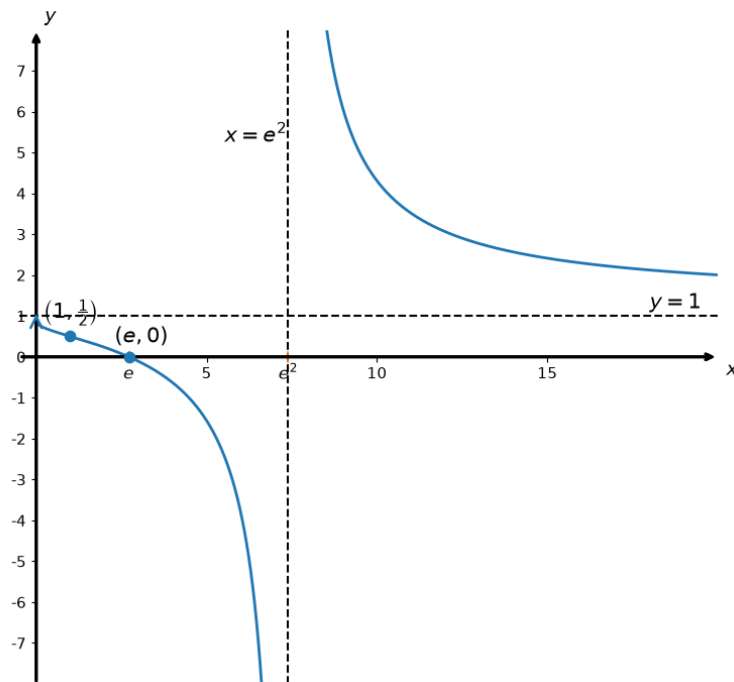
$$f''(x) = \frac{\ln x}{x^2(\ln x - 2)^3}.$$

Сада имамо да је $f''(x) > 0 \iff x \in (0, 1) \cup (e^2, +\infty)$, па је

функција $f(x)$ конвексна на интервалима $(0, 1)$ и $(e^2, +\infty)$. Са друге стране, како је $f''(x) < 0 \iff x \in (1, e^2)$, $f(x)$ је конкавна на интервалу $(1, e^2)$. Одавде видимо

да постоји једна превојна тачка $(1, \frac{1}{2})$.

8) График функције: Коначно, повежимо претходних седам тачака и нацртајмо график дате функције.



Слика 6.1 – График функције $f(x) = \frac{\ln|x| - 1}{\ln x - 2}$.

■

4. [Јануарски рок, 2011/12. година] Испитати монотоност и одредити (ако постоје) локалне екстремне вредности функције $f(x) = x - 8 \cdot \arctan \frac{x}{2}$.

Решење: Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Да бисмо испитали *моноџоносии* и одредили *екстремуме* ове функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = 1 - 8 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 + x^2 - 16}{4 + x^2} = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}.$$

Даље, важи $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$, па имамо да је функција

$f(x)$ *моноџоно распућа* на интервалу $(-\infty, -2\sqrt{3})$ и на интервалу $(2\sqrt{3}, +\infty)$.

Са друге стране, с обзиром на то да је $f'(x) < 0 \iff x \in (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, добијамо да је

функција $f(x)$ *моноџоно опадајућа* на интервалу $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$. Из овога можемо

закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $\left(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right)$ *локални максимум* и
- $\left(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}\right)$ *локални минимум*. ■

5. [Јануарски рок, 2011/12. година] Испитати конвексност и одредити (ако постоје) превојне тачке функције $h(x) = \frac{\ln |x|}{x} + \frac{1}{x}$.

Решење: Домен дате функције је $D_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Како је $h(-x) = -h(x)$, функција $h(x)$ је *непарна*, па је довољно испитати *конвексносии* само на позитивном, односно само на негативном делу домена, а онда пресликати симетрично у односу на координатни почетак. Посматрајмо рестрикцију функције $h(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$. Да бисмо одредили интервале конвексности и *превојне тачке* дате функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак на $(0, +\infty)$, па пресликајмо симетрично у односу на $(0, 0)$:

$$h'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} \implies h''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

Сада имамо да је $h''(x) > 0 \iff x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, па је функција $h(x)$ конвексна на интервалу $(\sqrt{e}, +\infty)$. Са друге стране, како је $h''(x) < 0 \iff x \in (0, \sqrt{e})$, $h(x)$ је *конкавна* на интервалу $(0, \sqrt{e})$. Коначно, због непарности функције $h(x)$ можемо закључити да је функција $h(x)$ конвексна на интервалу $(-\sqrt{e}, 0)$ и на интервалу $(\sqrt{e}, +\infty)$, а

конкавна на интервалу $(-\infty, -\sqrt{e})$ и на интервалу $(0, \sqrt{e})$. Одавде видимо да су

превојне тачке $\left(-\sqrt{e}, -\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$. ■

6. [Јануарски рок, 2011/12. година] Дата је функција $g(x) = a + \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+1}}$, где је параметар $a \in \mathbb{R}$.

а) Одредити вертикалне, хоризонталне и косе асимптоте функције $g(x)$.

б) Да ли је за неке вредности $a \in \mathbb{R}$ функција $g(x)$ парна или непарна?

Решење: **а)** Како је $D_g = \mathbb{R}$, дата функција нема вертикалних асимптоша. Да бисмо одредили *хоризонталне*, односно *косе асимптоше*, најпре дату функцију *рационалисањем* сведимо на погодан облик, а затим одредимо *Маклоренов развој* (видети 7. главу) те функције одговарајућег степена.

Наиме,

$$\begin{aligned} g(x) &= a + \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+1}} = a + \frac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{2x} = a + \frac{1}{2x} \cdot \left(x+1-|x| \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/2} \right) \\ &= a + \frac{1}{2x} \cdot \left(x+1-|x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) \\ &= \begin{cases} a + \frac{1}{2x} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = a + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & \text{за } x > 0 \\ a + \frac{1}{2x} \cdot \left(2x + \frac{3}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = a + 1 + \frac{3}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & \text{за } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Сада лако закључујемо да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = a+1$. Према томе, дата

функција има обе хоризонталне асимптоте, па косих нема.

Дакле, једине асимптоте дате функције су:

$$\begin{cases} \text{десна хоризонтална асимптота је права } y = a, \\ \text{лева хоризонтална асимптота је права } y = a+1 \end{cases}.$$

Напомена: У овом задатку је за одређивање хоризонталних, односно косих асимптота погодно користити Маклоренов развој, јер $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.

б) Како је $g(-x) = a + \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}-x}$, следи да не важи услов *парности* дате функције ни за једно $a \in \mathbb{R}$, тј. $g(x) \neq g(-x)$ ($\forall a \in \mathbb{R}$). Проверимо сада услов *непарности* функције, тј. $g(x) = -g(-x)$:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+1}} &= -a - \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}-x} \Rightarrow \\ 2a &= - \left(\frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}-x} \right) \Rightarrow \\ 2a &= -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, функција $g(x)$ је непарна за $a = -\frac{1}{2}$. ■

7. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Одредити домен и асимптоте функције

$$h(x) = \frac{1-x^2}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, па вертикалне асимптоте потражимо у коначним тачкама прекида домена које му не припадају (тачке $x = -2$ и $x = 0$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{1-x^2}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-x^2}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x^2}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

слиди да је права $x = -2$ вертикална асимптота и са леве и са десне стране, а права $x = 0$ је вертикална асимптота са десне стране.

Да бисмо одредили хоризонталне, односно косе асимптоте, најпре дату функцију сведимо на погодан облик, а затим одредимо Маклоренов развој (видети 7. главу) те функције одговарајућег степена. Наиме,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1-x^2}{x+2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{1-x^2}{x} \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1-x^2}{x} \cdot \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{1-x^2}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{x} - x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= -x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Пуштајући да $x \rightarrow \pm\infty$ добијамо да је $y = -x + 1$ обострана коса асимптота, па хоризонталних асимптота нема.

Напомена: У овом задатку је за одређивање хоризонталних, односно косих асимптота погодно користити Маклоренов развој, јер $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. ■

8. [Јунски рок, 2011/12. година] Детаљно испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{|x-1|}{(x+1)^3}$.

Решење: За дату функцију

$$f(x) = \frac{|x-1|}{(x+1)^3} = \begin{cases} \frac{x-1}{(x+1)^3}, & x \in [1, +\infty) \\ \frac{1-x}{(x+1)^3}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}$$

испитајмо следеће особине:

1) *Домен функције*: Функција $f(x)$ дефинисана је за $x + 1 \neq 0$. Дакле, *домен* дате функције је $D_f : x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) *Парност функције*: Како домен функције $f(x)$ није симетричан у односу на $x = 0$, дата функција није ни *парна* ни *непарна*.

3) *Периодичност функције*: С обзиром на то да је $f(x + T) \neq f(x)$, где је T период, функција $f(x)$ није *периодична*.

4) *Нуле и знак функције*: За функцију $f(x)$ важи $f(x) = 0 \iff x = 1$. Такође, важи $f(x) > 0 \iff x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, односно $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1)$.

Дакле,

- $x = 1$ је *нула функције* $f(x)$,
- функција $f(x)$ је *позитивна* на интервалу $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ и
- функција $f(x)$ је *негативна* на интервалу $(-\infty, -1)$.

5) *Асимптоте функције*: Потражимо *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачка $x = -1$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x - 1|}{(x + 1)^3} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x - 1|}{(x + 1)^3} = -\infty,$$

права $x = -1$ је обострана вертикална асимптота функције $f(x)$. Остаје још да провимо постојање *хоризонталних*, односно *косих асимптоа*. Како је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0,$$

права $y = 0$ је обострана хоризонтална асимптота функције $f(x)$, па косих нема.

6) *Моношност и локални екстремуми функције*: Да бисмо испитали *моношност* и одредили *екстремуме* ове функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot (2 - x)}{(x + 1)^4}, & x \in (1, +\infty) \\ \frac{2 \cdot (x - 2)}{(x + 1)^4}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}.$$

Одавде видимо да је $f'(x) > 0$ за $x \in (1, 2)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$. Дакле,

$f(x)$ *моношно расте* на $(1, 2)$ и *моношно опада* на $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и на $(2, +\infty)$.

Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $(1, 0)$ *локални минимум* и
- $\left(2, \frac{1}{27}\right)$ *локални максимум*.

Напомена: Посебно испитајмо шта се дешава у тачки из домена у којој изводна функција $f'(x)$ има прекид. Како је

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{8} \text{ и } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \frac{1}{8},$$

следи да у тачки $x = 1$ функција није *диференцијабилна*, али је са леве стране монотono опадајућа, а са десне стране монотono растућа. Зато у тачки $x = 1$ достиже локални минимум и у тој тачки график функције има *шиш*.

7) Конвексност, конкавност и превојне тачке: Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *други извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6 \cdot (x-3)}{(x+1)^5}, & x \in (1, +\infty) \\ \frac{6 \cdot (3-x)}{(x+1)^5}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \end{cases}.$$

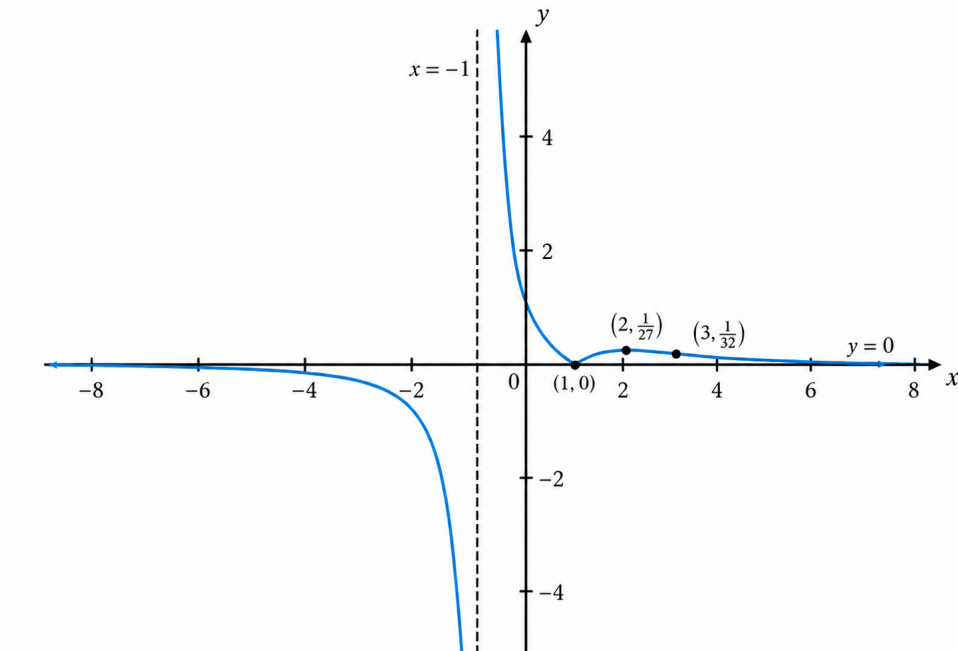
Сада имамо да је $f''(x) > 0 \iff x \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$, па је

функција $f(x)$ конвексна на интервалима $(-1, 1)$ и $(3, +\infty)$. Са друге стране, како је $f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$,

$f(x)$ је конкавна на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, 3)$. Одавде видимо да постоје две

превојне тачке $(1, 0)$ и $(3, \frac{1}{32})$.

8) График функције: Коначно, нацртајмо график дате функције.



Слика 6.2 – График функције $f(x) = \frac{|x-1|}{(x+1)^3}$.

■

9. [Јулски рок, 2011/12. година] Одредити тачке у којима функција

$$f(x) = \frac{|x-3|}{2\sqrt{x^2+9}}$$

има локалне екстремуме и испитати монотоност дате функције.

Решење: Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Како је

$$f(x) = \frac{|x-3|}{2\sqrt{x^2+9}} = \begin{cases} \frac{x-3}{2\sqrt{x^2+9}}, & x \in [3, +\infty) \\ \frac{3-x}{2\sqrt{x^2+9}}, & x \in (-\infty, 3) \end{cases},$$

за испитивање *монононости* нађимо *први извод* функције на одговарајућим интервалима и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3(x+3)}{2(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (3, +\infty) \\ -\frac{3(x+3)}{2(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}, & x \in (-\infty, 3) \end{cases}.$$

Пошто је именилац у оба израза позитиван, знак првог извода одређен је бројоцем. Дакле, $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, док је $f'(x) < 0 \iff x \in (-3, 3)$. Према томе, функција $f(x)$ је *монононо растућа* на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(3, +\infty)$, а *монононо опадајућа* на интервалу $(-3, 3)$.

Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже *локалне екстремуме* у следећим тачкама:

- $\left(-3, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *локални максимум* и
- $(3, 0)$ *локални минимум*.

Напомена: Посебно испитајмо шта се дешава у тачки из домена у којој изводна функција $f'(x)$ има прекид. Како је

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x+3)}{2(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{18}{2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{6\sqrt{2}}$$

и

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x+3)}{2(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{18}{2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}},$$

слиди да у тачки $x = 3$ функција није *диференцијабилна*, али је са леве стране монотонно опадајућа, а са десне стране монотонно растућа. Зато у тачки $x = 3$ достиже локални минимум и у тој тачки график функције има *шпиц*. ■

10. [Јануарски рок, 2012/13. година] Детаљно испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

Решење: За дату функцију испитајмо следеће особине:

1) Домен функције: Функција $f(x)$ дефинисана је за $x \neq 1$. Дакле, домен дате функције је $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Парност функције: Како домен функције $f(x)$ није симетричан у односу на $x = 0$, дата функција није ни парна ни непарна.

3) Периодичност функције: С обзиром на то да је $f(x+T) \neq f(x)$, где је T период, функција $f(x)$ није периодична.

4) Нуле и знак функције: Пошто је $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ за свако $x \in D_f$, знак функције одређен је знаком чиниоца $x+1$. Зато је $f(x) = 0 \iff x = -1$. Такође, важи $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1)$, док је $f(x) > 0 \iff x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Дакле,

- $x = -1$ је нула функције $f(x)$,
- функција $f(x)$ је негативна на интервалу $(-\infty, -1)$ и
- функција $f(x)$ је позитивна на интервалима $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

5) Асимптотске функције: Потражимо вертикалне асимптотске у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачка $x = 1$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

следи да је права $x = 1$ вертикална асимптота са десне стране.

Да бисмо одредили хоризонталне, односно косе асимптотске, одредимо Маклоренов развој (видети 7. главу) те функције одговарајућег степена. Наиме,

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{и}$$

$$e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\text{па је } f(x) = (x+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 2 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Пуштајући да $x \rightarrow \pm\infty$ добијамо да је $y = x + 2$ обострана коса асимптота, па хоризонталних асимптота нема.

Напомена: У овом задатку је за одређивање хоризонталних, односно косих асимптота погодније користити Маклоренов развој, јер $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$.

6) Мононозит и локални екстремуми функције: Да бисмо испитали мононозит и одредили екстремуме ове функције, нађимо први извод и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} - (x+1)e^{\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Пошто су $(x-1)^2 > 0$ и $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ за свако $x \in D_f$, знак првог извода одређен је знаком производа $x(x-3)$. Зато је $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, док је $f'(x) < 0 \iff x \in (0, 1) \cup (1, 3)$. Према томе,

функција $f(x)$ је *моноћонo расћућа* на интервалима $(-\infty, 0)$ и $(3, +\infty)$ и

функција $f(x)$ је *моноћонo опадајућа* на интервалима $(0, 1)$ и $(1, 3)$. Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ *локални максимум* и
- $(3, 4\sqrt{e})$ *локални минимум*.

Ради прецизнијег цртања графика дате функције, испитајмо још и понашање првог извода у левој околини тачке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Како $\frac{x(x-3)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$ и $e^{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0$ имамо неодређен облик $\infty \cdot 0$, који решавамо

сменом $t = \frac{1}{1-x}$. Тада је $x = 1 - \frac{1}{t}$, $(x-1)^2 = \frac{1}{t^2}$ и $e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-t}$, па је

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{t}\right) \left(-2 - \frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-2t^2 + t + 1)e^{-t} = 0,$$

јер експоненцијална функција e^t расте брже од било ког полинома.

Одавде добијамо да се $y = 0$ понаша као *тангенција* на криву $f(x)$ када $x \rightarrow 1^-$.

7) Конвексности, конкавности и превојне тачке: Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *групи извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \frac{5x-3}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

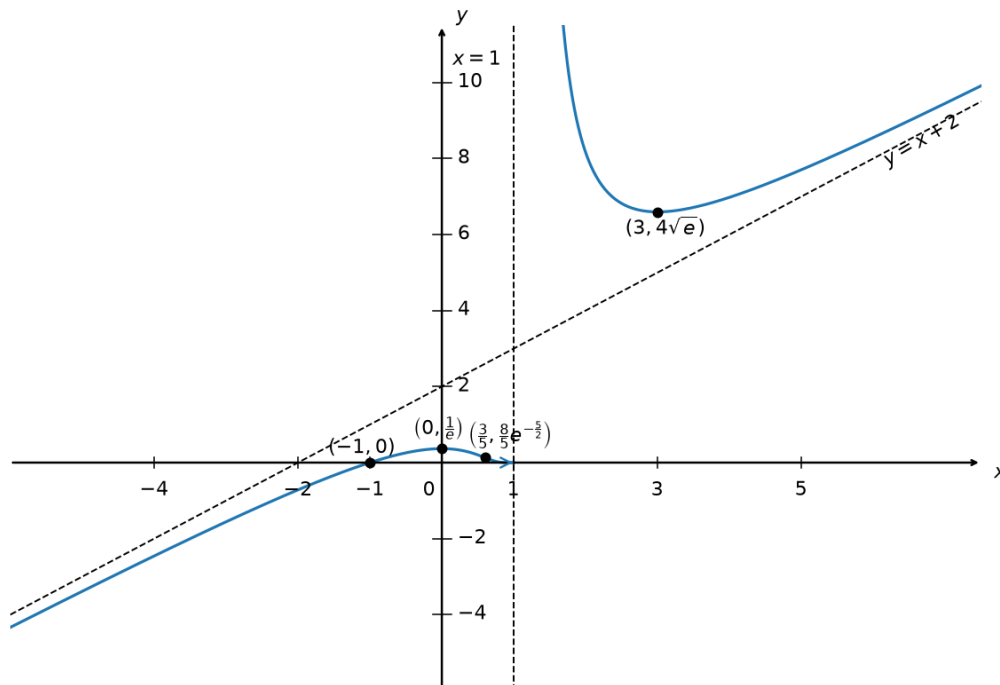
Како су $(x-1)^4 > 0$ и $e^{\frac{1}{x-1}} > 0$ за свако $x \in D_f$, знак другог извода одређен је знаком израза $5x-3$. Дакле, $f''(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$, док је $f''(x) > 0 \iff x \in$

$\left(\frac{3}{5}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. Према томе, функција $f(x)$ је конкавна на интервалу $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right)$ и

функција $f(x)$ је конвексна на интервалима $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ и $(1, +\infty)$. Одавде видимо да по-

стоји једна превојна тачка $\left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

8) *График функције:* Коначно, повежимо претходних седам тачака и нацртајмо график дате функције.



Слика 6.3 – График функције $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

■

11. [Јунски рок, 2012/13. година] Наћи асимптоте функције $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3}}$.

Решење: Најпре одредимо *домен* дате функције. Како је $\frac{x^3 - 2x^2}{x - 3} = x^2 \cdot \frac{x - 2}{x - 3}$, услов дефинисаности је $x^2 \cdot \frac{x - 2}{x - 3} \geq 0$, $x \neq 3$, па је $D_f = (-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$. Дату функцију можемо посматрати у облику

$$f(x) = |x| \sqrt{\frac{x - 2}{x - 3}}.$$

Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачка $x = 3$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} |x| \sqrt{\frac{x - 2}{x - 3}} = +\infty,$$

слиеди да је права $x = 3$ вертикална асимптота са десне стране.

Даље,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

па $\boxed{\text{функција нема хоризонталних асимптота}}$. Стога, потражимо *косе асимптоте*.

Када $x \rightarrow +\infty$ имамо да је $|x| = x$, па је

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = 1.$$

Затим,

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{\frac{x-2}{x-3} - 1}{\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x-3) \left(\sqrt{\frac{x-2}{x-3}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Према томе, права $y = x + \frac{1}{2}$ је десна коса асимптота.

Када $x \rightarrow -\infty$ важи $|x| = -x$, па је

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = -1.$$

Даље,

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{x-2}{x-3}}{1 + \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{x}{(x-3) \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} \right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Одавде је права $y = -x - \frac{1}{2}$ лева коса асимптота. ■

12. [Јулски рок, 2012/13. година] Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2}.$$

Решење: За дату функцију испитајмо следеће особине:

- 1) Домен функције:** Функција $f(x)$ дефинисана је за $x \neq 2$. Дакле, домен дате функције је $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
- 2) Парност функције:** Како домен функције $f(x)$ није симетричан у односу на $x = 0$, дата функција није ни парна ни непарна.
- 3) Периодичност функције:** С обзиром на то да је $f(x+T) \neq f(x)$, где је T период, функција $f(x)$ није периодична.

4) Нуле и знак функције: Како је функција $\operatorname{arctg} t$ строго растућа и има исти знак као t , важи $f(x) = 0 \iff \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2} = 0 \iff \frac{x+2}{x-2} = 0 \iff x = -2$. Такође, $f(x) > 0 \iff \frac{x+2}{x-2} > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, док је $f(x) < 0 \iff x \in (-2, 2)$. Дакле,

- $x = -2$ је нула функције $f(x)$,
- функција $f(x)$ је *позитивна* на интервалима $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$ и
- функција $f(x)$ је *негативна* на интервалу $(-2, 2)$.

5) Асимптоте функције: Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачка $x = 2$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2} = \frac{\pi}{2},$$

оба једностранна лимеса су коначна, па функција $f(x)$ нема вертикалних асимптота. Остаје још да проверимо постојање *хоризонталних*, односно *косих асимптота*.

Како је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

права $y = \frac{\pi}{4}$ је обострана хоризонтална асимптота функције $f(x)$, па нема косих.

6) Моношност и локални екстремуми функције: Да бисмо испитали *моношност* и одредили *локалне екстремуме*, нађимо *први извод* функције и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{-4}{(x-2)^2} = -\frac{2}{x^2 + 4} < 0, \quad \forall x \in D_f.$$

Дакле, функција $f(x)$ је *монононо опадајућа* на интервалима $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$, па нема локалних екстремума. Ради прецизнијег цртања графика дате функције, испитајмо још и понашање првог извода у левој и десној околини тачке $x = 2$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{-2}{x^2 + 4} = -\frac{1}{4},$$

а важи

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{\pi}{2},$$

добивамо да се

права $y = -\frac{1}{4}(x-2) - \frac{\pi}{2}$ понаша као *тангенца* на криву $f(x)$ када $x \rightarrow 2^-$

и

права $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}$ понаша као *тангенција* на криву $f(x)$ када $x \rightarrow 2^+$.

7) Конвексности, конкавности и превојне тачке: Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *други извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Сада имамо да је $f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$, па је

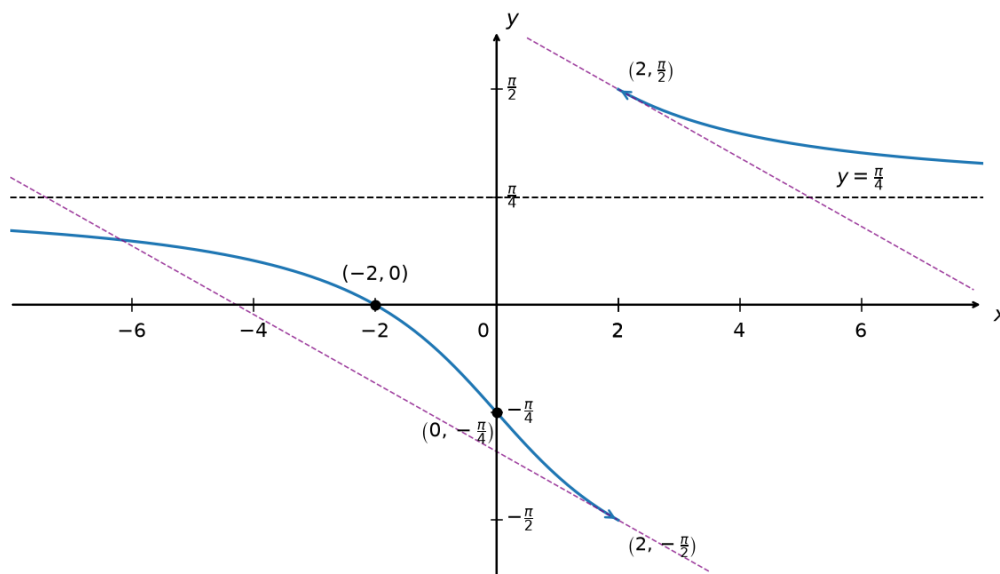
функција $f(x)$ је конкавна на интервалу $(-\infty, 0)$.

Са друге стране, како је $f''(x) > 0 \iff x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$,

функција $f(x)$ је конвексна на интервалима $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$. Одавде видимо да по-

стоји једна превојна тачка $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$.

8) График функције: Коначно, повежимо претходних седам тачака и нацртајмо график дате функције.



Слика 6.4 – График функције $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-2}$.

■

13. [Септембарски рок, 2012/13. година] Дата је функција

$$f(x) = \ln \frac{1+2x}{1+\frac{x}{2}}.$$

а) Одредити домен и асимптоте функције $f(x)$.

б) Одредити вредности првих шест извода ове функције у нули.

в) Одредити $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Да би функција била дефинисана, потребно је да важи

$$\frac{1+2x}{1+\frac{x}{2}} > 0.$$

Дакле, *домен* функције је $D_f = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Потражимо, најпре, *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају $\left(\text{тачке } x = -2 \text{ и } x = -\frac{1}{2}\right)$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \frac{1+2x}{1+\frac{x}{2}} = +\infty,$$

слиди да је $x = -2$ вертикална асимптота функције $f(x)$ са леве стране.

Такође, како је

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \ln \frac{1+2x}{1+\frac{x}{2}} = -\infty,$$

слиди да је $x = -\frac{1}{2}$ вертикална асимптота функције $f(x)$ са десне стране.

Остаје још да проверимо постојање *хоризонталних*, односно *косих асимптота*. Како је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{1+2x}{1+\frac{x}{2}} = \ln 4,$$

$y = \ln 4$ је обострана хоризонтална асимптота функције $f(x)$, па косих нема.

б) Пошто је

$$f(x) = \ln(1+2x) - \ln\left(1+\frac{x}{2}\right),$$

користећи *Маклоренов развој* функције

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n),$$

(видети 7. главу), добијамо да је Маклоренов развој функције $f(x)$, до чланова шестог степена, једнак

$$\begin{aligned} f(x) = & \left(2 - \frac{1}{2}\right) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot x^3 \\ & - \frac{1}{4} \cdot \left(2^4 - \frac{1}{2^4}\right) \cdot x^4 + \frac{1}{5} \cdot \left(2^5 - \frac{1}{2^5}\right) \cdot x^5 - \frac{1}{6} \cdot \left(2^6 - \frac{1}{2^6}\right) \cdot x^6 + o(x^6). \end{aligned}$$

Поређењем са Маклореновом формулом

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + o(x^6), \quad (*)$$

слиди да је

$$\begin{aligned}f'(0) &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\f''(0) &= -\left(2^2 - \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{15}{4}, \\f^{(3)}(0) &= 2! \cdot \left(2^3 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{63}{4}, \\f^{(4)}(0) &= -3! \cdot \left(2^4 - \frac{1}{2^4}\right) = -\frac{765}{8}, \\f^{(5)}(0) &= 4! \cdot \left(2^5 - \frac{1}{2^5}\right) = \frac{3069}{4}, \\f^{(6)}(0) &= -5! \cdot \left(2^6 - \frac{1}{2^6}\right) = -\frac{61425}{8}.\end{aligned}$$

Дакле,

$$\boxed{\begin{array}{lll}f'(0) = \frac{3}{2}, & f''(0) = -\frac{15}{4}, & f^{(3)}(0) = \frac{63}{4}, \\f^{(4)}(0) = -\frac{765}{8}, & f^{(5)}(0) = \frac{3069}{4}, & f^{(6)}(0) = -\frac{61425}{8}.\end{array}}.$$

в) Из претходног развоја функције $f(x)$ видимо да је коефицијент уз x^n једнак

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right).$$

Са друге стране, како је у Маклореновој формули (*) коефицијент уз x^n једнак $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, следи

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right),$$

па је

$$\boxed{f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.}$$

■

14. [Јануарски рок, 2013/14. година] Одредити све асимптоте функције

$$f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$, јер је

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Према томе, дата функција нема вертикалних асимптоота.

Да бисмо одредили *хоризонталне*, односно *косе асимптоте*, запишимо функцију у облику погодном за примену *Маклореновог развоја* (видети 7. главу). Како је

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 2 \cdot |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = x - 2 \cdot |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x - 2 \cdot |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \begin{cases} -x - 1 - \frac{3}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & \text{за } x > 0 \\ 3x + 1 + \frac{3}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & \text{за } x < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

лако закључујемо да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x + 1] = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x - 1] = 0$. Према томе, дата функција има обе косе асимптоте, па хоризонталних нема. Дакле, једине асимптоте дате функције су:

$$\begin{cases} \text{десна коса асимптота је права } y = -x - 1, \\ \text{лева коса асимптота је права } y = 3x + 1 \end{cases}.$$

Напомена: У овом задатку је за одређивање хоризонталних, односно косих асимптота погодно користити Маклоренов развој, јер $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. ■

15. [Јануарски рок, 2013/14. година] Одредити интервале монотоности и локалне екстремуме функције

$$h(x) = \frac{\ln x}{x} e^{-\ln^2 x}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_h = (0, +\infty)$. Да бисмо испитали *моноћност* и одредили *локалне екстремуме*, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$h'(x) = \frac{e^{-\ln^2 x}}{x^2} (1 - \ln x - 2 \ln^2 x).$$

Како је $\frac{e^{-\ln^2 x}}{x^2} > 0$ за свако $x \in D_h$, знак првог извода одређен је знаком израза $1 - \ln x - 2 \ln^2 x$. Уведимо смену $t = \ln x$. Тада је

$$1 - \ln x - 2 \ln^2 x = 1 - t - 2t^2 = -(2t - 1)(t + 1).$$

Према томе,

$$h'(x) > 0 \iff -1 < \ln x < \frac{1}{2} \iff x \in \left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right),$$

док је

$$h'(x) < 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (\sqrt{e}, +\infty).$$

Дакле, функција $h(x)$ је *монотонно растућа* на интервалу $\left(\frac{1}{e}, \sqrt{e}\right)$ и

функција $h(x)$ је *монотонно опадајућа* на интервалима $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ и $(\sqrt{e}, +\infty)$. Из овога можемо закључити да функција $h(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ *локални минимум* и
- $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e^{3/4}}\right)$ *локални максимум*. ■

16. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Одредити све асимптоте функције

$$f(x) = |x + 1|e^{-\frac{1}{x}}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају (тачка $x = 0$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x + 1|e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x + 1|e^{-\frac{1}{x}} = +\infty,$$

слиди да је права $x = 0$ вертикална асимптота са леве стране.

Даље,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота. Стога, потражимо *косе асимптоте*.

Када $x \rightarrow +\infty$, важи $|x + 1| = x + 1$, па је

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 1.$$

Затим,

$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - a_1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x + 1)e^{-\frac{1}{x}} - x\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) + e^{-\frac{1}{x}}\right] = - \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^t - 1}{t} - e^t\right) = 0, \end{aligned}$$

где је $t = -\frac{1}{x}$. Према томе, права $y = x$ је десна коса асимптота.

Када $x \rightarrow -\infty$, важи $|x + 1| = -x - 1$, па је

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - 1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = -1.$$

Даље,

$$\begin{aligned} b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - a_2 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((-x - 1)e^{-\frac{1}{x}} + x\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(e^{-\frac{1}{x}} - 1\right) - e^{-\frac{1}{x}}\right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^t - 1}{t} - e^t\right) = 0, \end{aligned}$$

где је $t = -\frac{1}{x}$. Одавде је права $y = -x$ лева коса асимптота.

Напомена: У овом задатку искористили смо добро познати лимес

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad \blacksquare$$

17. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Дата је функција $f(x) = xe^{-|x-1|}$.

а) Испитати диференцијабилност дате функције.

б) Испитати монотоност и одредити екстремуме дате функције.

в) Наћи интервале конвексности и превојне тачке дате функције.

Решење: а) За дату функцију $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ важи

$$f(x) = xe^{-|x-1|} = \begin{cases} xe^{-x+1}, & x \geq 1 \\ xe^{x-1}, & x < 1 \end{cases}.$$

На интервалима $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ функција $f(x)$ је *непрекидна* и *диференцијабилна* као производ елементарних функција. Поред тога,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} xe^{x-1} = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} xe^{-x+1} = 1 = f(1),$$

па је функција непрекидна и у тачки $x = 1$. Да бисмо испитали диференцијабилност у тој тачки, одредимо леви и десни извод. Важи

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)e^h - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} e^h + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)e^{-h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{-h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{-h} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Како је $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, функција није диференцијабилна у тачки $x = 1$. Дакле, функција $f(x)$ је диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

б) Да бисмо испитали *моноћносћ* и одредили *екстремуме* дате функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x+1}, & x > 1 \\ (1+x)e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}.$$

Како су експоненцијални чиниоци позитивни, знак првог извода одређен је знацима израза $1-x$, односно $1+x$. Према томе,

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1),$$

док је

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Дакле, функција $f(x)$ је *моноћно растућа* на интервалу $(-1, 1)$ и

функција $f(x)$ је *моноћно опадајућа* на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $(-1, -e^{-2})$ *локални минимум*,
- $(1, 1)$ *локални максимум*.

Напомена: Како је $f(-1) = -e^{-2}$, а $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и $f(x) > -e^{-2}$ за $x \neq -1$, овај минимум је уједно и глобални. Са друге стране, посебно испитајмо шта се дешава у тачки из домена у којој изводна функција $f'(x)$ има прекид. Како је

$$f'_-(1) = 2 \text{ и } f'_+(1) = 0,$$

слиди да у тачки $x = 1$ функција није *диференцијабилна* (видети део под а)), али је са леве стране монотонно растућа, а са десне стране монотонно опадајућа. Зато у тачки $x = 1$ достиже локални максимум и у тој тачки график функције има *шпиц*. Пошто је $f(1) = 1$ и $f(x) < 1$ за $x \neq 1$, овај максимум је уједно и глобални.

в) Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *други извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-x+1}, & x > 1 \\ (x+2)e^{x-1}, & x < 1 \end{cases}.$$

Како су експоненцијални чиниоци позитивни, имамо

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-2, 1) \cup (2, +\infty),$$

па је $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ конвексна на интервалима } (-2, 1) \text{ и } (2, +\infty)}$. Са друге стране,

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2),$$

па је $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ конкавна на интервалима } (-\infty, -2) \text{ и } (1, 2)}$. Одавде видимо да

постоје три превојне тачке $\boxed{(-2, -2e^{-3})}$, $\boxed{(1, 1)}$ и $\boxed{\left(2, \frac{2}{e}\right)}$. ■

18. [Јунски рок, 2013/14. година] Дата је функција $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

а) Испитати диференцијабилност дате функције.

б) Испитати монотоност и одредити екстремуме дате функције.

в) Наћи интервале конвексности и превојне тачке дате функције.

Решење: **а)** Како је

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$. Функција је *непрекидна* на целом домену као *композиција непрекидних функција*. За $x \neq -1, 1$ *диференцирањем* добијамо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{|x^2-1|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|x^2-1|} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{2}{1+x^2}, & x \in (-1, 1) \\ -\frac{2}{1+x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}. \end{aligned}$$

Јасно је да је функција *диференцијабилна* за $x \neq -1, 1$, док диференцијабилност у овим тачкама ($x = -1$ и $x = 1$) посебно испитујемо. Важи

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{1+x^2} = -1 \text{ и } f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{1+x^2} = 1,$$

као и

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{1+x^2} = 1 \text{ и } f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{1+x^2} = -1.$$

Пошто се леви и десни изводи у овим тачкама разликују, функција није диференцијабилна у $x = -1$ и $x = 1$. Дакле, $\boxed{f(x) \text{ је диференцијабилна на } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$.

б) Из израза за *први извод* видимо да је

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1),$$

док је

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Према томе, $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ је моноџоно растућа на интервалу } (-1, 1)}$ и $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ је моноџоно опадајућа на интервалима } (-\infty, -1) \text{ и } (1, +\infty)}$. Из овога можемо закључити да функција $f(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $\boxed{\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right) \text{ локални минимум}}$ и
- $\boxed{\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ локални максимум}}$.

Напомена: Добијени минимум и максимум су уједно и глобални. Са друге стране, посебно испитајмо шта се дешава у тачкама из домена у којима изводна функција $f'(x)$ има прекид. Како је

$$f'_-(-1) = -1, \quad f'_+(-1) = 1, \quad f'_-(1) = 1 \text{ и } f'_+(1) = -1,$$

следи да у тачкама $x = -1$ и $x = 1$ функција није диференцијабилна (видети део под а)), али је са леве стране тачке $x = -1$ монотонно опадајућа, док је са десне стране те тачке монотонно растућа, и са леве стране тачке $x = 1$ монотонно растућа, а са десне стране те тачке монотонно опадајућа. Зато у тачкама $x = -1$ и $x = 1$ функција $f(x)$ редом достиже локални минимум, односно максимум, и у тим тачкама график функције има *шпиц*.

в) Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *групи извод* функције $f(x)$ на интервалима на којима је диференцијабилна и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-\infty, -1) \\ -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-1, 1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

Како је $(1+x^2)^2 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, добијамо

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty),$$

па је $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ конвексна на интервалима } (-1, 0) \text{ и } (1, +\infty)}$. Са друге стране,

$$f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1),$$

па је $\boxed{\text{функција } f(x) \text{ конкавна на интервалима } (-\infty, -1) \text{ и } (0, 1)}$. Одавде видимо да

постоје три превојне тачке $\boxed{\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)}$, $\boxed{(0, 0)}$ и $\boxed{\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}$. ■

19. [Септембарски рок, 2013/14. година] Дата је функција $f(x) = \ln \frac{2x-1}{3x+2}$.

а) Одредити домен и асимптоте функције $f(x)$.

б) Одредити интервале монотоности и екстремне вредности (уколико постоје) функције $f(x)$.

в) Испитати конвексност и конкавност и одредити (уколико постоје) превојне тачке функције $f(x)$.

Решење: **а)** Најпре одредимо *домен* дате функције. Како логаритам мора имати позитиван аргумент, важи $\frac{2x-1}{3x+2} > 0$, па је

$$D_f = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Потражимо сада *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $f(x)$ које му не припадају $\left(\text{тачке } x = -\frac{2}{3} \text{ и } x = \frac{1}{2}\right)$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}^-} \ln \frac{2x-1}{3x+2} = +\infty$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \ln \frac{2x-1}{3x+2} = -\infty,$$

слиди да је права $x = -\frac{2}{3}$ вертикална асимптота са леве стране и права

$$x = \frac{1}{2} \text{ вертикална асимптота са десне стране.}$$

Остаје да проверимо постојање *хоризонталних*, односно *косих асимптота*. Важи

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{2x-1}{3x+2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} \right) = \ln \frac{2}{3}.$$

Према томе, права

$$y = \ln \frac{2}{3} \text{ је обострана хоризонтална асимптота функције } f(x), \text{ па косих нема.}$$

б) Да бисмо испитали *монотоност* и одредили *екстремуме* дате функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)'}{\frac{2x-1}{3x+2}} = \frac{\frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2}}{\frac{2x-1}{3x+2}} = \frac{7}{(3x+2)(2x-1)}.$$

Како за свако $x \in D_f$ важи $(3x + 2)(2x - 1) > 0$, добијамо да је

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in D_f.$$

Дакле, функција $f(x)$ *моноџоно расте* на интервалима $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Према томе, функција $f(x)$ нема локалних екстремума.

в) Да бисмо испитали *конвексност* и *конкавност*, и одредили *превојне тачке*, нађимо *групи извод* функције $f(x)$ и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \left(\frac{7}{(3x+2)(2x-1)} \right)' = -7 \cdot \frac{3(2x-1) + 2(3x+2)}{(3x+2)^2(2x-1)^2} = -\frac{84x+7}{(3x+2)^2(2x-1)^2}.$$

Пошто је именилац позитиван за свако $x \in D_f$, знак другог извода одређен је знаком израза $-(84x+7)$. Стога, важи

$$f''(x) > 0 \iff x < -\frac{1}{12}$$

и

$$f''(x) < 0 \iff x > -\frac{1}{12}.$$

Узимајући у обзир домен функције, следи да је

$$\text{функција } f(x) \text{ конвексна на интервалу } \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$$

и

$$\text{функција } f(x) \text{ конкавна на интервалу } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Тачка $x = -\frac{1}{12}$ не припада домену функције, па дата функција нема превојних

тачака, тј. функција $f(x)$ нема превојних тачака. ■

20. [Јануарски рок, 2014/15. година] Одредити домен и асимптоте реалне функције

$$h(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

Решење: Најпре одредимо *домен* дате функције. Потребно је да важи

$$\frac{x-1}{x-2} \geq 0, \quad x \neq 2.$$

Решавањем ове неједнакости добијамо да је $D_h = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$.

Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $h(x)$ које му не припадају. Једина таква тачка је $x = 2$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty,$$

слиди да је $\boxed{\text{права } x = 2 \text{ вертикална асимптота са десне стране}}$. У тачки $x = 1$ функција је дефинисана и важи $h(1) = 0$, па у тој тачки нема вертикалних асимптота.

Даље,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty,$$

па $\boxed{\text{функција нема хоризонталних асимптота}}$. Стога, потражимо *косе асимптоте*.

Када $x \rightarrow \pm\infty$ имамо да је

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 1.$$

Затим,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot \frac{\frac{x-1}{x-2} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x-2) \left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Према томе, $\boxed{\text{права } y = x + \frac{1}{2} \text{ је обострана коса асимптота}}$. ■

21. [Јануарски рок, 2014/15. година] Испитати монотоност и одредити (уколико постоје) локалне екстремне вредности функције $g(x) = x^2 \ln |x|$.

Решење: Домен дате функције је $D_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Како је $g(-x) = g(x)$, функција $g(x)$ је *парна*. Да бисмо испитали *моноитоност* и одредили *локалне екстремуме*, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$g'(x) = 2x \ln |x| + x = x(2 \ln |x| + 1), \quad x \neq 0.$$

Стационарне тачке добијамо из једначине

$$g'(x) = 0 \iff x(2 \ln |x| + 1) = 0.$$

Како $x = 0 \notin D_g$, слиди

$$2 \ln |x| + 1 = 0 \iff \ln |x| = -\frac{1}{2} \iff |x| = e^{-\frac{1}{2}},$$

па су стационарне тачке $x_1 = -e^{-\frac{1}{2}}$ и $x_2 = e^{-\frac{1}{2}}$.

Даље, важи

$$g'(x) > 0 \iff x \in \left(-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right) \cup \left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right),$$

па је

$\boxed{\text{функција } g(x) \text{ моноитонно растућа на интервалима } \left(-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right) \text{ и } \left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)}$.

Са друге стране, како је

$$g'(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -e^{-\frac{1}{2}}\right) \cup \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right),$$

добивамо да је

функција $g(x)$ *моноћоно оџадајућа* на интервалима $\left(-\infty, -e^{-\frac{1}{2}}\right)$ и $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

На основу промене знака првог извода видимо да функција у обе стационарне тачке достиже *локални минимум*. Како је

$$g\left(\pm e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e},$$

локални екстремуми су

- $\left(-e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$ локални минимум и
- $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$ локални минимум.

Дакле, функција нема *локални максимум*. ■

22. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Дата је функција $g(x) = |x + 1|e^{\frac{1}{x}}$.

а) Испитати диференцијабилност функције $g(x)$ у тачки $x = -1$.

б) Одредити интервале монотоности и екстремне вредности (уколико постоје) функције $g(x)$.

в) Испитати конвексност и конкавност и одредити (уколико постоје) превојне тачке функције $g(x)$.

Решење: Домен дате функције је $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Како је

$$g(x) = |x + 1|e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} -(x + 1)e^{\frac{1}{x}}, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \\ (x + 1)e^{\frac{1}{x}}, & x > -1, x \neq 0 \end{cases},$$

испитајмо тражене особине функције.

а) Функција $g(x)$ је *непрекидна* у тачки $x = -1$, јер је

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0 = g(-1),$$

па је непрекидна на целом свом домену (на $D_g \setminus \{-1\}$ је непрекидна као *композиција* непрекидних функција). За $x \neq -1, 0$ *први извод* је

$$g'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x^2}, & x < -1 \\ e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x^2}, & x > -1, x \neq 0 \end{cases}.$$

Даље,

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -\frac{1}{e} \text{ и } g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = \frac{1}{e}.$$

Пошто је $g'_-(-1) \neq g'_+(-1)$, следи да

функција $g(x)$ није диференцијабилна у тачки $x = -1$. Иначе, јасно је да је функција $g(x)$ диференцијабилна на $D_g \setminus \{-1\}$.

б) Да бисмо испитали *моноитноси* и одредили *екстремне вредности* дате функције, испитајмо знак њеног *првог извода*. Нуле израза $x^2 - x - 1$ су

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Како је $x^2 > 0$ и $e^{\frac{1}{x}} > 0$ за свако $x \in D_g$, знак првог извода одређен је знаком израза $x^2 - x - 1$. Зато важи

$$g'(x) > 0 \iff x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right),$$

док је

$$g'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Према томе,

$$\left[g(x) \text{ је моноитно распућа на интервалима } \left(-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \right]$$

и

$$\left[g(x) \text{ је моноитно опадајућа на интервалима } (-\infty, -1), \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right) \text{ и } \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \right].$$

Из овога можемо закључити да функција $g(x)$ достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $(-1, 0)$ локални минимум,
- $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1 - \sqrt{5}}}\right)$ локални максимум и
- $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1 + \sqrt{5}}}\right)$ локални минимум.

Напомена: Посебно испитајмо шта се дешава у тачкама из домена у којима изводна функција $g'(x)$ има прекид. Како је

$$g'_-(-1) \neq g'_+(-1),$$

следи да у тачки $x = -1$ функција није диференцијабилна (видети део под а)), али је са леве стране тачке $x = -1$ монотono опадајућа, док је са десне стране те тачке монотono растућа. Зато у тачки $x = -1$ $g(x)$ достиже локални минимум и у тој тачки график функције има *шипи*.

в) Да бисмо одредили интервале *конвексношћи*, односно *конкавношћи*, и *превојне тачке*, нађимо *групи извод* функције $g(x)$ и испитајмо његов знак:

$$g''(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x+1}{x^4}, & x < -1 \\ e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x+1}{x^4}, & x > -1, x \neq 0 \end{cases}.$$

Како је $x^4 > 0$ и $e^{\frac{1}{x}} > 0$ за свако $x \in D_g$, добијамо

$$g''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty),$$

док је

$$g''(x) < 0 \iff x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right).$$

Према томе,

функција $g(x)$ је конвексна на интервалима $(-\infty, -1)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ и $(0, +\infty)$

и

функција $g(x)$ је конкавна на интервалу $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$.

Одавде видимо да постоје две превојне тачке $\boxed{(-1, 0)}$ и $\boxed{\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}e^{-3}\right)}$. ■

23. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Одредити асимптоте функције

$$f(x) = x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решење: Најпре одредимо *гомен* дате функције. Да би функција $\arcsin t$ била дефинисана, мора важити $-1 \leq t \leq 1$. У нашем случају је

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Како је $1+x^2 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, имамо да је

$$\frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \iff 2x \geq -1-x^2 \iff (x+1)^2 \geq 0,$$

што важи за свако $x \in \mathbb{R}$. Такође,

$$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff 2x \leq 1+x^2 \iff (x-1)^2 \geq 0,$$

што такође важи за свако $x \in \mathbb{R}$. Према томе, $D_f = \mathbb{R}$, па

функција нема *вертикалних асимптота*.

Даље, пошто је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

важи да је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Зато је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

па функција нема *хоризонталних асимптота*. Стога, потражимо *косе асимптоте*.

Имамо да је

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right) = 1,$$

и

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Према томе, *права $y = x$ је обострана коса асимптота* дате функције. ■

24. [Јулски рок, 2014/15. година] Одредити (ако постоје) све асимптоте функције

$$g(x) = \frac{|x+2|}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, па *вертикалне асимптоте* потражимо у коначним тачкама прекида домена функције $g(x)$ које му не припадају (тачка $x = 0$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x+2|e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x+2|e^{-\frac{1}{x}} = +\infty,$$

слиди да је права *$x = 0$ вертикална асимптота са леве стране*.

Да бисмо одредили *хоризонталне*, односно *косе асимптоте*, одредимо *Маклоренов развој* функције $e^{-\frac{1}{x}}$ одговарајућег степена (видети 7. главу). Како је

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

размотримо посебно случајеве када $x \rightarrow -\infty$ и када $x \rightarrow +\infty$.

Када $x \rightarrow -\infty$, важи $|x+2| = -(x+2)$, па је

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x+2) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = -(x+2) + \frac{x+2}{x} - \frac{x+2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -x - 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Пуштајући да $x \rightarrow -\infty$, добијамо да је $y = -x - 1$ лева коса асимптота.

Када $x \rightarrow +\infty$, важи $|x + 2| = x + 2$, па је

$$\begin{aligned} g(x) &= (x + 2) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x + 2 - \frac{x + 2}{x} + \frac{x + 2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Пуштајући да $x \rightarrow +\infty$, добијамо да је $y = x + 1$ десна коса асимптота.

Пошто функција има обе косе асимптоте, следи да хоризонталних асимптота нема.

Напомена: У овом задатку је за одређивање хоризонталних, односно косих асимптота погодно користити Маклоренов развој, јер $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. ■

25. [Септембарски рок, 2014/15. година] Одредити вредност реалног параметра a тако да функција $f(x) = \ln^2(ax + 2)$ има екстремну вредност у тачки $x = -\frac{1}{3}$. Да ли је тако добијена екстремна вредност локални минимум или локални максимум?

Решење: Да би функција имала *локални екстремум* у тачки $x = -\frac{1}{3}$, најпре та тачка мора припадати *домену* функције, па важи

$$-\frac{a}{3} + 2 > 0 \iff a < 6.$$

Даље, функција је *диференцијабилна* у околини тачке $x = -\frac{1}{3}$ за свако $a < 6$, па је, према *Фермаовој теорем*и, неопходан услов да тачка $x = -\frac{1}{3}$ буде локални екстремум

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Како је

$$f'(x) = 2 \ln(ax + 2) \cdot \frac{a}{ax + 2},$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 &\iff 2 \ln\left(-\frac{a}{3} + 2\right) \cdot \frac{a}{-\frac{a}{3} + 2} = 0 \iff a = 0 \text{ или } \ln\left(-\frac{a}{3} + 2\right) = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ или } -\frac{a}{3} + 2 = 1 \\ &\iff a = 0 \text{ или } a = 3. \end{aligned}$$

За $a = 3$ имамо да је $f(x) = \ln^2(3x + 2)$, $D_f = \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ и $f'(x) = \frac{6 \ln(3x + 2)}{3x + 2}$. Пошто је $3x + 2 > 0$ на домену функције, знак *првог извода* одређен је знаком израза $\ln(3x + 2)$. Стога је

$$f'(x) < 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ и } f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

Према томе, функција је лево од $x = -\frac{1}{3}$ *моноћоно опадајућа*, а десно *моноћоно*

распућа, па у тачки $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ *достиге локални минимум*.

Посебно, за $a = 0$ важи $f(x) = \ln^2 2$, па је функција *константна*.

Дакле, једино решење је $a = 3$ и у питању је *локални минимум*.

Напомена: Фермаова теорема: Ако функција $f(x)$ у тачки x_0 има локални екстремум и ако у тој тачки има извод, онда је $f'(x_0) = 0$. ■

26. [Јануарски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$h(x) = \begin{cases} -e, & x = 0 \\ \frac{|x|}{1 + \ln |x|}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

а) Испитати парност функције h .

б) Одредити интервале монотоности и локалне екстремне вредности (ако постоје) функције h .

в) Одредити интервале конвексности и конкавности и превојне тачке (ако постоје) функције h .

Решење: Најпре одредимо *домен* дате функције. За $x \neq 0$ мора важити $1 + \ln |x| \neq 0$, тј. $|x| \neq e^{-1}$, док је у тачки $x = 0$ функција посебно дефинисана. Према томе, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-e^{-1}, e^{-1}\}$.

а) Домен функције симетричан је у односу на координатни почетак. За свако $x \in D_h$, $x \neq 0$, важи

$$h(-x) = \frac{|-x|}{1 + \ln |-x|} = \frac{|x|}{1 + \ln |x|} = h(x),$$

а у тачки $x = 0$ је $h(-0) = h(0) = -e$. Дакле, *функција $h(x)$ је парна*.

б) За $x > 0$ је

$$h(x) = \frac{x}{1 + \ln x} \implies h'(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2},$$

док за $x < 0$ важи

$$h(x) = \frac{-x}{1 + \ln(-x)} \implies h'(x) = -\frac{\ln(-x)}{(1 + \ln(-x))^2}.$$

Одавде добијамо

$$h'(x) > 0 \iff x \in (-1, -e^{-1}) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (1, +\infty),$$

и

$$h'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, 1).$$

Према томе,

$h(x)$ је *моноџоно растућа* на интервалима $(-1, -e^{-1})$, $(-e^{-1}, 0)$ и $(1, +\infty)$

и

$h(x)$ је *моноџоно опадајућа* на интервалима $(-\infty, -1)$, $(0, e^{-1})$ и $(e^{-1}, 1)$.

Из овога можемо закључити да функција $h(x)$ достиже *локалне екстремуме* у следећим тачкама:

- $(-1, 1)$ *локални минимум*,
- $(1, 1)$ *локални минимум* и
- $(0, -e)$ *локални минимум*.

Напомена: У тачкама $x = -1$ и $x = 1$ *први извод* мења знак са негативног на позитиван, па функција у њима достиже локалне минимуме.

Посебно испитајмо тачку $x = 0$, у којој функција није *непреривна*. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{1 + \ln |x|} = 0 > -e = h(0),$$

слиди да функција и у тачки $x = 0$ достиже локални минимум.

в) За $x > 0$ имамо

$$h''(x) = \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)^3},$$

док је за $x < 0$

$$h''(x) = \frac{1 - \ln(-x)}{(-x)(1 + \ln(-x))^3}.$$

Сада важи

$$h''(x) > 0 \iff x \in (-e, -e^{-1}) \cup (e^{-1}, e),$$

а

$$h''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -e) \cup (-e^{-1}, 0) \cup (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty).$$

Према томе,

функција $h(x)$ је *конвексна* на интервалима $(-e, -e^{-1})$ и (e^{-1}, e)

и

функција $h(x)$ је *конкавна* на интервалима $(-\infty, -e)$, $(-e^{-1}, 0)$, $(0, e^{-1})$ и $(e, +\infty)$.

Одавде видимо да постоје две *пребожне тачке* $\left(-e, \frac{e}{2}\right)$ и $\left(e, \frac{e}{2}\right)$. ■

27. [Фебруарски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^n}.$$

а) Одредити домен, нуле и знак функције $f(x)$.

б) Испитати монотоност функције $f(x)$.

в) Нацртати график функције $f(x)$.

Решење: Најпре одредимо експлицитан облик дате функције. Ако је $x \in (-1, 1)$, онда је $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, па је

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^n} = x.$$

За $x = 1$ имамо да је

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 1^n} = \frac{1}{2}.$$

Ако је $x > 1$, онда $x^n \rightarrow +\infty$, па је

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^n} = 0.$$

За $x < -1$ важи

$$\frac{x}{1 + x^n} = \frac{x^{1-n}}{x^{-n} + 1},$$

а како $x^{1-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ и $x^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, следи да је $f(x) = 0$. Коначно, за $x = -1$ именилац $1 + (-1)^n$ једнак је нули за свако непарно n , па функција у тој тачки није дефинисана.

Дакле,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ x, & x \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \text{не постоји,} & x = -1 \end{cases}.$$

За дату функцију испитајмо следеће особине:

а) 1) Домен функције: Из претходног разматрања непосредно следи да је

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

2) Нуле и знак функције: Из експлицитног облика функције имамо да је

$$f(x) = 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty).$$

Такође,

$$f(x) < 0 \iff x \in (-1, 0),$$

док је

$$f(x) > 0 \iff x \in (0, 1].$$

Дакле,

- нуле функције су тачка $x = 0$ и све тачке на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$,
- функција $f(x)$ је *непозитивна* на интервалу $(-1, 0)$ и
- функција $f(x)$ је *позитивна* на интервалу $(0, 1]$.

б) 3) Моношносћ функције: На интервалу $(-\infty, -1)$ функција је *константна*, јер је $f(x) = 0$. На интервалу $(-1, 1)$ важи $f(x) = x$, па је функција *монотоно растућа*. На интервалу $(1, +\infty)$ функција је поново константна. Према томе,

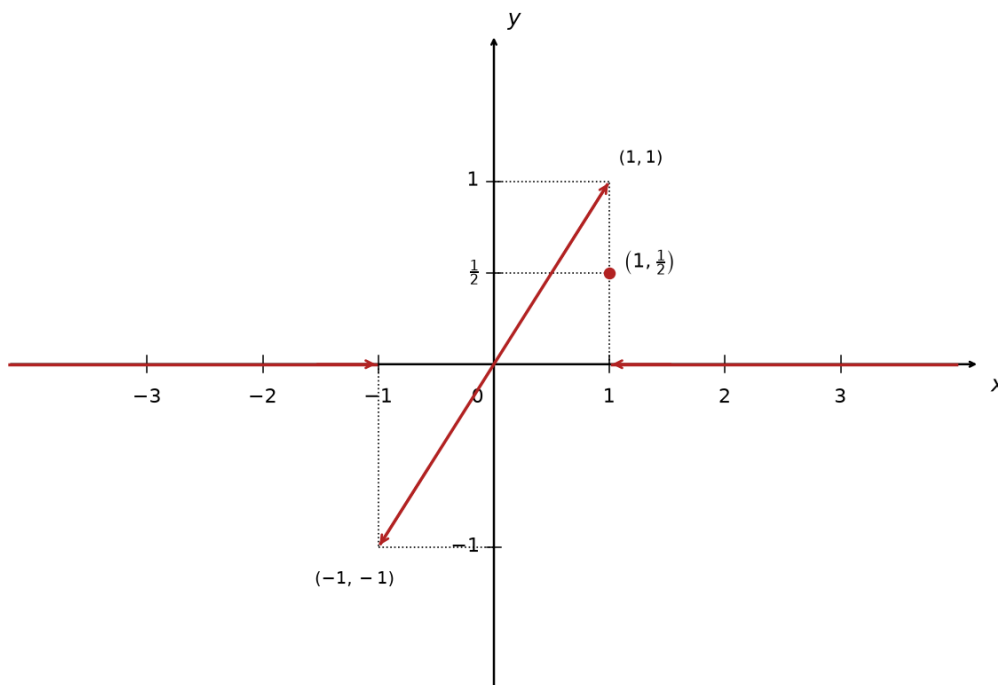
функција $f(x)$ је монотоно растућа на интервалу $(-1, 1)$

и

функција $f(x)$ је константна на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$.

в) 4) График функције: График функције чине део праве $y = 0$ за $x \in (-\infty, -1)$ и за $x \in (1, +\infty)$, део праве $y = x$ за $x \in (-1, 1)$ и издвојена тачка $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Дакле,

$$\Gamma_f = \{(x, 0) : x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cup \{(x, x) : x \in (-1, 1)\} \cup \left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$



Слика 6.5 – График функције $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^n}$.

■

28. [Фебруарски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$g(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}.$$

а) Наћи све асимптоте функције $g(x)$.

б) Одредити Маклоренов полином петог степена функције $g(x)$.

Решење: а) Домен дате функције је $D_g = \mathbb{R}$, па

дата функција нема *вертикалних асимптоота*.

Даље,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1,$$

па је $y = 1$ *десна хоризонтална асимптоота*.

Са друге стране,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -1,$$

па је $y = -1$ *лева хоризонтална асимптоота*.

Како функција има и леву и десну хоризонталну асимптоту, *косих асимптоота* нема.

б) Да бисмо одредили *Маклоренов полином* петог степена (видети 7. главу), користимо развој

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + o(t^2), \quad t \rightarrow 0.$$

За $t = \frac{x^2}{2}$ добијамо

$$\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{32} + o(x^4).$$

Зато је

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{32} + o(x^4)\right) \\ &= -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{64}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Према томе, тражени Маклоренов полином петог степена је

$$M_5(x) = -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}x^3 - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{64}x^5.$$

■

29. [Јулски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$h(x) = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}.$$

а) Одредити домен дате функције и њене асимптоте.

б) Испитати монотоност и одредити, ако постоје, нуле функције $h(x)$.

Решење: **а)** Како је $e^{2x} > 0$ и $1 + e^{2x} > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, важи $\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 0$, па је домен дате функције $D_h = \mathbb{R}$. Зато функција нема вертикалних асимптоота.

Да бисмо одредили *хоризонталне*, односно *косе асимптооте*, најпре посматрајмо понашање функције када $x \rightarrow \pm\infty$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right) = \frac{\pi}{2},$$

слиди да је права $y = \frac{\pi}{2}$ десна хоризонтална асимптота функције $h(x)$.

Са друге стране,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty,$$

па функција нема леву хоризонталну асимптоту.

Стога, потражимо леву косу асимптоту. Најпре је

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} e^x}{x} - \frac{1}{2} \frac{\ln e^{2x}}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} \right) = -1, \end{aligned}$$

јер је $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x}{x} = 0$ као одређен облик $\frac{0}{-\infty}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln e^{2x}}{x} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } (\frac{\infty}{\infty})} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{2x})}{e^{2x}} \cdot \frac{e^{2x}}{x} = 0$, знајући да важи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} = 0$ је одређен облик $\frac{0}{-\infty}$.

Затим,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + x \right) = 0. \end{aligned}$$

Према томе, права $y = -x$ је лева коса асимптота функције $h(x)$.

б) Да бисмо испитали *мононосносћ* функције, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$h'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - 1 + \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Пошто је $1 + e^{2x} > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, знак првог извода одређен је знаком израза $e^x - 1$. Дакле, $h'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$ и $h'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$. Према томе, функција $h(x)$ је *мононосно опадајућа* на $(-\infty, 0)$ и *мононосно растућа* на $(0, +\infty)$.

Из овога следи да функција достиже минимум за $x = 0$. Како је

$$h(0) = \operatorname{arctg} 1 - \ln \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} > 0,$$

имамо да је $h(x) \geq h(0) > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Дакле, функција $h(x)$ је *позитивна* на $D_h = \mathbb{R}$, па $h(x)$ нема нула. ■

30. [Августовски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3-x)}{x-2}, & x \in (-\infty, 2) \\ 4x + a, & x \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

а) Одредити вредност реалне константе a тако да дата функција g буде непрекидна за све $x \in \mathbb{R}$.

б) За вредност константе a добијену у делу под а), одредити нуле и знак функције g и наћи све њене асимптоте.

Решење: а) За свако $a \in \mathbb{R}$ функција g дефинисана је на $\mathbb{R}$ и *непрекидна* на интервалима $(-\infty, 2)$ и $(2, +\infty)$ као *композиција* елементарних непрекидних функција. Зато је потребно испитати само непрекидност у тачки $x = 2$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(3-x)}{x-2} \underset{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{3-x} \right) = -1,$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x + a) = 8 + a = g(2),$$

функција g непрекидна је у тачки $x = 2$ ако и само ако је $8 + a = -1$. Дакле, тражена вредност константе је $a = -9$.

б) За вредност $a = -9$ добијену у делу под а), дата функција има облик

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(3-x)}{x-2}, & x \in (-\infty, 2) \\ 4x - 9, & x \in [2, +\infty) \end{cases}.$$

1) *Нуле и знак функције:* За $x < 2$ важи $3 - x > 1$, па је $\ln(3-x) > 0$, док је $x - 2 < 0$. Зато је $g(x) < 0$ на интервалу $(-\infty, 2)$, те на том интервалу функција нема нула.

За $x \geq 2$ важи

$$g(x) = 0 \iff 4x - 9 = 0 \iff x = \frac{9}{4},$$

при чему је $\frac{9}{4} \in [2, +\infty)$. Такође, $g(x) < 0$ за $x \in \left[2, \frac{9}{4}\right)$, док је $g(x) > 0$ за $x \in \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$. Повезујући ове резултате, добијамо:

- $x = \frac{9}{4}$ је једина нула функције $g(x)$,
- функција $g(x)$ је *непозитивна* на интервалу $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$ и
- функција $g(x)$ је *позитивна* на интервалу $\left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

2) Асимптотичке функције: Како је за $a = -9$ функција g непрекидна на $\mathbb{R}$, функција нема *вертикалних асимптота*.

Потражимо сада *хоризонталне*, односно *косе асимптотичке*. Када $x \rightarrow -\infty$, имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(3-x)}{x-2} \underbrace{=}_{\text{Л.П. } \left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3-x}\right) = 0,$$

па следи да је *права $y = 0$ лева хоризонтална асимптота*.

Када $x \rightarrow +\infty$, имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - 9) = +\infty,$$

па *десне хоризонталне асимптоте нема*.

Даље, како је $g(x) = 4x - 9$ за свако $x \geq 2$, важи

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 4 \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 4x) = -9.$$

Дакле, *права $y = 4x - 9$ је десна коса асимптота*, па се график функције за $x \geq 2$ поклапа са овом правом. ■

31. [Септембарски рок, 2022/23. година] Дата је функција

$$g(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}.$$

а) Наћи све асимптоте функције $g(x)$, ако постоје.

б) Испитати монотоност и конвексност функције $g(x)$ и одредити њене локалне екстреме и превојне тачке, ако постоје.

Решење: а) Домен дате функције је $D_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $g(x)$ (које му не припадају) (тачка $x = 0$). Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

слиди да је права $x = 0$ вертикална асимптота са десне стране, док са леве стране није вертикална асимптота.

Даље, пошто $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$ када $x \rightarrow \pm\infty$, имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота. Стога, потражимо *косе асимптоте*:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Затим,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 2e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}}_{\text{Л.П. } \left(\frac{0}{0}\right)} + 2 = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Према томе, права $y = x + 3$ је обострана коса асимптота дате функције.

Напомена: Како $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, искористили смо добро познат лимес $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

б) Да бисмо испитали *моноћоност* и одредили *локалне екстремуме* функције $g(x)$, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{1}{x}} - (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right) \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in D_g. \end{aligned}$$

Пошто је $x^2 > 0$ и $e^{\frac{1}{x}} > 0$ за свако $x \in D_g$, знак првог извода одређен је знаком производа $(x+1)(x-2)$. Зато је

$$g'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty),$$

док је

$$g'(x) < 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (0, 2).$$

Према томе,

$$\boxed{g(x) \text{ моноћоно расће на интервалима } (-\infty, -1) \text{ и } (2, +\infty)}$$

и

$$g(x) \text{ моноћоно оћада на интервалима } (-1, 0) \text{ и } (0, 2).$$

Из овога можемо закључити да функција $g(x)$ достиже *локалне екстремуме* у следећим тачкама:

- $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$ *локални максимум* и
- $(2, 4\sqrt{e})$ *локални минимум*.

Да бисмо одредили интервале *конвексности*, односно *конкавности*, и *превојне тачке*, нађимо *други извод* функције $g(x)$ и испитајмо његов знак:

$$g''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = \frac{5x+2}{x^4} e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in D_g.$$

Како је $x^4 > 0$ и $e^{\frac{1}{x}} > 0$ за свако $x \in D_g$, знак другог извода одређен је знаком израза $5x+2$. Сада имамо да је

$$g''(x) > 0 \iff x \in \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty),$$

па је

$$g(x) \text{ конвексна на интервалима } \left(-\frac{2}{5}, 0\right) \text{ и } (0, +\infty).$$

Са друге стране, како је

$$g''(x) < 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right),$$

следи да је

$$g(x) \text{ конкавна на интервалу } \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right).$$

Одавде видимо да постоји једна *превојна тачка* $\left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

Напомена: Тачка $x = 0$ не припада домену, па се у њој не разматрају локални екстремуми ни *превојне тачке*. ■

32. [Септембарски рок, 2023/24. година] Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задата са

$$f(x) = \arctg e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}).$$

а) Одредити глобални минимум функције f и одредити вредност функције f у тачки глобалног минимума.

б) Одредити апсцисе *превојних тачака* функције f .

в) Одредити леву косу асимптоту функције f .

Решење: а) Домен дате функције је $D_f = \mathbb{R}$, јер је $1 + e^{2x} > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Да бисмо одредили глобални минимум, нађимо први извод функције и испитајмо његов знак:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - 1 + \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Пошто је именилац позитиван за свако $x \in \mathbb{R}$, знак првог извода одређен је знаком израза $e^x - 1$. Зато је $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$, док је $f'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$, а $f'(0) = 0$.

Дакле, функција $f(x)$ је *моноџоно опадајућа* на интервалу $(-\infty, 0)$ и *моноџоно растућа* на интервалу $(0, +\infty)$. Како је функција *непрекидна* на $\mathbb{R}$, закључујемо да у тачки $x = 0$ достиже јединствени глобални минимум. Вредност функције у тој тачки је

$$f(0) = \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}.$$

Према томе, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$.

б) Да бисмо одредили апсцисе *превојних* тачака, нађимо *други извод* функције и испитајмо његов знак:

$$f''(x) = \frac{e^x(1 + e^{2x}) - 2e^{2x}(e^x - 1)}{(1 + e^{2x})^2} = -\frac{e^x(e^{2x} - 2e^x - 1)}{(1 + e^{2x})^2}.$$

Како је $e^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, важи $f''(x) = 0 \iff e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$. Уведимо смену $t = e^x$, при чему је $t > 0$. Тада добијамо квадратну једначину

$$t^2 - 2t - 1 = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Решење $t = 1 - \sqrt{2} < 0$ одбацујемо, јер мора бити $t > 0$. Преостаје $t = 1 + \sqrt{2}$, па је $x = \ln(1 + \sqrt{2})$ једино решење једначине $f''(x) = 0$.

Пошто је $t^2 - 2t - 1 < 0$ за $t \in (0, 1 + \sqrt{2})$, а $t^2 - 2t - 1 > 0$ за $t \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$, враћањем смene и узимајући у обзир знак минус у изразу за други извод добијамо

$$f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, \ln(1 + \sqrt{2})),$$

односно

$$f''(x) < 0 \iff x \in (\ln(1 + \sqrt{2}), +\infty).$$

Дакле, функција је *конвексна* на интервалу $(-\infty, \ln(1 + \sqrt{2}))$ и *конкавна* на интервалу $(\ln(1 + \sqrt{2}), +\infty)$. Како други извод мења знак у тачки $x = \ln(1 + \sqrt{2})$, апсциса једине превојне тачке је $x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

в) Потражимо *леву косу асимптоту* функције $f(x)$ у облику $y = kx + n$, где су $k, n \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$. Како $e^x \rightarrow 0$ када $x \rightarrow -\infty$, важи

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} e^x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0.$$

Зато је

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})}{x} \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})}{x} = -1. \end{aligned}$$

Даље,

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) \right) = 0.$$

Према томе, права $y = -x$ је лева коса асимптота дате функције.

Напомена: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})}{x} = 0$, јер је то одређен облик $\frac{0}{\infty} = 0$. ■

33. [Септембарски 1. рок, 2024/25. година] Одредити интервале монотоности и локалне екстремне вредности функције

$$g(x) = \sqrt{|x^2 + 2x|}.$$

Решење: Домен дате функције је $D_g = \mathbb{R}$. Како је

$$g(x) = \sqrt{|x^2 + 2x|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x}, & x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ \sqrt{-x^2 - 2x}, & x \in [-2, 0] \end{cases},$$

за испитивање *моноџиности* нађимо *први извод* функције на одговарајућим интервалима и испитајмо његов знак:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}, & x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \\ -\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}}, & x \in (-2, 0) \end{cases}.$$

Пошто су имениоци у оба израза позитивни на одговарајућим интервалима, знак првог извода одређен је знаком бројиоца. Зато је $g'(x) > 0 \iff x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$, док је $g'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$. Такође, $g'(x) = 0 \iff x = -1$.

Према томе, функција $g(x)$ је

моноџионо растућа на интервалима $(-2, -1)$ и $(0, +\infty)$ и

моноџионо опадајућа на интервалима $(-\infty, -2)$ и $(-1, 0)$.

Функција $g(x)$ је *непреривна* на целом свом домену. У тачкама $x = -2$ и $x = 0$ прелази из опадања у раст, док у тачки $x = -1$ прелази из раста у опадање. Како је $g(-2) = g(0) = 0$ и $g(-1) = 1$, закључујемо да функција достиже следеће *локалне екстремуме*:

- $(-2, 0)$ локални минимум,
- $(-1, 1)$ локални максимум и
- $(0, 0)$ локални минимум.

Напомена: Посебно испитајмо шта се дешава у тачкама из домена у којима изводна функција $g'(x)$ није дефинисана. Како је

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g'(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -2^+} g'(x) = +\infty,$$

функција у тачки $x = -2$ није диференцијабилна, али је са леве стране монотono опадајућа, а са десне стране монотono растућа. Зато у овој тачки достиже локални минимум.

Такође, како је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty,$$

функција ни у тачки $x = 0$ није диференцијабилна, али је са леве стране монотono опадајућа, а са десне стране монотono растућа, па и у овој тачки достиже локални минимум. У обе тачке график функције има *шпиц*.

Напоменимо да функција може у некој тачки да има локални екстремум, иако није диференцијабилна у тој тачки. ■

34. [Октобарски 1. рок, 2024/25. година] Одредити вредности реалних параметара a и b тако да функција

$$g(x) = a \ln x + bx^2 + x$$

има екстремне вредности у тачкама $x = 1$ и $x = 2$, а затим за тако добијене вредности a и b одредити природу тих екстремних вредности.

Решење: Домен дате функције је $D_g = (0, +\infty)$. Да би функција $g(x)$ имала екстремне вредности у тачкама $x = 1$ и $x = 2$, према Фермаовој теореме (видети 25. задатак) неопходно је да важи $g'(1) = g'(2) = 0$. Како је

$$g'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1,$$

добијамо систем једначина

$$g'(1) = 0 \iff a + 2b + 1 = 0$$

$$g'(2) = 0 \iff \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0.$$

Из прве једначине је $a = -2b - 1$, па заменом у другу добијамо

$$\frac{-2b - 1}{2} + 4b + 1 = 0 \iff 3b + \frac{1}{2} = 0 \iff b = -\frac{1}{6},$$

и онда је

$$a = -2 \left(-\frac{1}{6} \right) - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Дакле,

$$\boxed{a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{1}{6}}.$$

За овако добијене вредности параметара имамо

$$g'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + 1 = -\frac{x^2 - 3x + 2}{3x} = -\frac{(x-1)(x-2)}{3x}.$$

Како је $3x > 0$ за свако $x \in D_g$, важи

$$g'(x) < 0 \iff x \in (0, 1) \cup (2, +\infty),$$

док је

$$g'(x) > 0 \iff x \in (1, 2).$$

Према томе, функција $g(x)$ је *моноћоно опадајућа* на интервалу $(0, 1)$, затим *моноћоно растућа* на интервалу $(1, 2)$ и поново *моноћоно опадајућа* на интервалу $(2, +\infty)$.

Из овога следи да функција достиже локалне екстремуме у следећим тачкама:

- $\left(1, \frac{5}{6}\right)$ *локални минимум* и
- $\left(2, \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \ln 2\right)$ *локални максимум*. ■

35. [Октобарски 2. рок, 2024/25. година] Испитати монотоност функције

$$g(x) = e^{\frac{1}{1+x}} \sqrt{x^2 + 4x + 3}.$$

Решење: Најпре одредимо *домен* дате функције. Како је

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3) \geq 0$$

и $x \neq -1$, следи да је

$$D_g = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty).$$

Да бисмо испитали *моноћоносћ* функције $g(x)$, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак. За $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ важи

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{1}{1+x}} \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right) \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 3} + e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \\ &= e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \cdot \left(-\frac{x+3}{x+1} + x+2 \right) \\ &= e^{\frac{1}{1+x}} \cdot \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}. \end{aligned}$$

Како је $e^{\frac{1}{1+x}} > 0$ и $\sqrt{x^2 + 4x + 3} > 0$ за све $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, знак првог извода одређен је знаком израза

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 - 2}{x + 1}.$$

На интервалу $(-\infty, -3)$ важи $g'(x) < 0$. На интервалу $(-1, +\infty)$ једина нула првог извода је

$$x = -1 + \sqrt{2},$$

при чему је $g'(x) < 0$ за $x \in (-1, -1 + \sqrt{2})$, а $g'(x) > 0$ за $x \in (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Према томе,

функција $g(x)$ је *моноћоно опадајућа* на интервалима $(-\infty, -3]$ и $(-1, -1 + \sqrt{2})$ и функција $g(x)$ је *моноћоно растућа* на интервалу $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$. ■

36. [Јануарски рок, 2025/26. година] Испитати монотоност и конвексност функције $g(x) = \frac{2 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

Решење: Домен дате функције је $D_g = \mathbb{R}$, јер је $1 + e^{-x} > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Да бисмо испитали *моноћоносћ* функције $g(x)$, нађимо њен *први извод* и испитајмо његов знак:

$$g'(x) = \frac{e^{-x} \cdot (1 + e^{-x}) - (2 - e^{-x}) \cdot (-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{3e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Дакле, функција $g(x)$ је *моноћоно растућа* на целом свом домену.

Да бисмо испитали *конвексносћ*, односно *конкавносћ*, нађимо *други извод* функције $g(x)$ и испитајмо његов знак:

$$g''(x) = \frac{3e^{-x} \cdot (e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}.$$

Како је $e^{-x} > 0$ и $(1 + e^{-x})^3 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, знак другог извода одређен је знаком израза $e^{-x} - 1$. Стога је

$$g''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0) \text{ и } g''(x) < 0 \iff x \in (0, +\infty),$$

док је $g''(0) = 0$. Према томе, функција $g(x)$ је конвексна на интервалу $(-\infty, 0)$, а конкавна на интервалу $(0, +\infty)$. ■

Глава 7

Тејлоров и Маклоренов развој функција

1. [Јануарски рок, 2010/11. година] Наћи Маклоренов полином петог степена функције $f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$.

Решење: Дату функцију најпре запишемо у облику $f(x) = x^2 e^{-2x} + 3e^{-x}$, а затим одредимо *Маклоренов развој* ове функције одговарајућег степена, користећи Маклоренов развој експоненцијалне функције редом трећег и петог степена:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 e^{-2x} + 3e^{-x} = x^2 \cdot \left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + o(x^3)\right) + \\ &+ 3 \cdot \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\ &= x^2 - 2x^3 + 2x^4 - \frac{4x^5}{3} + 3 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{3x^5}{120} + o(x^5) = \\ &= 3 - 3x + \frac{5x^2}{2} - \frac{5x^3}{2} + \frac{17x^4}{8} - \frac{163x^5}{120} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином петог степена

$$M_5(x) = 3 - 3x + \frac{5x^2}{2} - \frac{5x^3}{2} + \frac{17x^4}{8} - \frac{163x^5}{120}.$$

Напомена: Маклоренов развој експоненцијалне функције гласи

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Такође, напомнимо да симбол $o(x^n)$, $x \rightarrow 0$, означава функцију која тежи нули брже од x^n . Прецизније, запис

$$g(x) = o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

значи да важи

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0.$$

На пример, $x^{n+1} = o(x^n)$, $x \rightarrow 0$, јер је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n+1}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Ову чињеницу користимо у свим наредним задацима у овој глави. ■

2. [Фебруарски рок, 2010/11. година] Наћи Маклоренов полином петог степена функције $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1+x+2x^2}$.

Решење: Најпре, функцију $f(x)$ запишимо на следећи начин:

$$f(x) = \frac{1+x-x^2+2x^2-2x^2}{1+x+2x^2} = 1 - \frac{3x^2}{1+x+2x^2} = 1 - 3x^2 \cdot \left(1 + \underbrace{(x+2x^2)}_{=t}\right)^{-1},$$

а онда потражимо *Маклоренов развој* ове функције петог степена. Уочимо да је за то потребно наћи Маклоренов развој трећег степена функције $(1+(x+2x^2))^{-1}$, јер је $x+2x^2 \sim x$, када $x \rightarrow 0$. Уведимо сада смену $t = x+2x^2$. Тада важи $x \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$, па ћемо, заправо, наћи Маклоренов развој трећег степена функције $(1+t)^{-1}$ и добити да је $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3)$, када $t \rightarrow 0$. Коначно, враћањем смене добијамо Маклоренов развој функције $f(x)$ петог степена:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 3x^2 \cdot (1 - x - 2x^2 + x^2 + 4x^3 - x^3 + o(x^3)) \\ &= 1 - 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 - 9x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

па одавде издвојимо тражени полином:

$$\boxed{M_5(x) = 1 - 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 - 9x^5}.$$

Напомена: Маклоренов развој степене функције, за $\alpha \in \mathbb{R}$, гласи

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. [Септембарски рок, 2010/11. година] Одредити Маклоренов полином петог степена функције $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Решење: Дату функцију најпре запишемо у облику:

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \cdot (\sin 2x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot (\sin 2x)^2,$$

а затим одредимо *Маклоренов развој* ове функције одговарајућег степена, користећи Маклоренов развој синусне функције трећег степена (боље је функцију развијати више, тј. до већег степена од потребног, па оно што је вишак сместити у o , тј. у остатак који брже тежи нули од почетног дела развоја):

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4) \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(4x^2 - \frac{32x^4}{6} + o(x^4) \right) = 1 - 2x^2 + \frac{8x^4}{3} + o(x^4), \end{aligned}$$

па одавде издвојимо тражени полином:

$$M_5(x) = 1 - 2x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^4.$$

Напомена: Маклоренов развој синусне функције гласи

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

4. [Јануарски рок, 2011/12. година] Применом Маклореновог развоја израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{4}} - \sqrt{\frac{4+x}{4-x}}}{x^3}.$$

Решење: Пошто је x у околини нуле, за обе функције у бројиоцу посматрајмо *Маклоренов развој* (видети 1. и 2. задатак). У развијању ових функција идемо до трећег степена, јер је у имениоцу x^3 најмањег степена. С тим у вези имамо:

$$e^{\frac{x}{4}} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{6 \cdot 64} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0$$

и

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4+x}{4-x}} &= \sqrt{\frac{4 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)}{4 \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)}} = \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{x^3}{64} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^2}{16} + \frac{5}{16} \cdot \frac{x^3}{64} + o(x^3)\right) \\ &= 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Према томе, $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6 \cdot 64} - \frac{x^3}{2 \cdot 64} + o(x^3)}{x^3} = \boxed{-\frac{1}{3 \cdot 2^6}}.$ ■

5. [Фебруарски рок, 2011/12. година] Дата је функција $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^{-x}$.

а) Одредити n -ти извод функције $f(x)$.

б) Наћи Маклоренов полином шестог степена функције $f(x)$.

Решење: а) Применићемо *Лајбницову формулу* за n -ти извод производа две функције

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f_1^{(k)}(x) \cdot f_2^{(n-k)}(x), \quad (*)$$

где је $f_1(x) = x^2 - x$ и $f_2(x) = e^{-x}$. За функцију $f_1(x) = x^2 - x$ важи $f_1'(x) = 2x - 1$, $f_1''(x) = 2$, $f_1'''(x) = 0$, па је $(\forall k \geq 3) f_1^{(k)}(x) = 0$.

За функцију $f_2(x) = e^{-x}$ важи $f_2^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), што показујемо математичком индукцијом:

1) *База индукције:* за $n = 1$ је $f_2'(x) = -e^{-x}$,

2) *Индукцијска хипотеза:* нека је за $n = k$ $f_2^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot e^{-x}$, тада је за $n = k + 1$ $f_2^{(k+1)}(x) = (f_2^{(k)}(x))' = -(-1)^k \cdot e^{-x} = (-1)^{k+1} \cdot e^{-x}$, па тврђење важи.

Враћањем у $(*)$ добијамо

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (x^2 - x)^{(k)} \cdot (e^{-x})^{(n-k)} = \binom{n}{0} (x^2 - x) \cdot (-1)^n \cdot e^{-x} \\ &\quad + \binom{n}{1} (2x - 1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot e^{-x} + \binom{n}{2} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-2} \cdot e^{-x} \\ &= (-1)^n \cdot [x^2 - x - (2x - 1) \cdot n + n(n - 1)] e^{-x} \\ &= \boxed{(-1)^n \cdot [x^2 - (2n + 1)x + n^2] e^{-x}}. \end{aligned}$$

б) Одредимо *Маклоренов развој* дате функције шестог степена, користећи Маклоренов развој експоненцијалне функције петог степена (видети 1. задатак):

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x) \cdot e^{-x} = (x^2 - x) \cdot \left[1 - x + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{120} \cdot x^5 + o(x^5) \right] \\ &= x^2 - x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^4 - \frac{1}{6} \cdot x^5 + \frac{1}{24} \cdot x^6 - x + x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{1}{6} \cdot x^4 - \frac{1}{24} \cdot x^5 + \frac{1}{120} \cdot x^6 + o(x^6) \\ &= -x + 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x^3 + \frac{4}{6} \cdot x^4 - \frac{5}{24} \cdot x^5 + \frac{6}{120} \cdot x^6 + o(x^6), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином шестог степена

$$M_6(x) = -x + 2 \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^4 - \frac{5}{24} \cdot x^5 + \frac{1}{20} \cdot x^6. \quad \blacksquare$$

6. [Јунски рок, 2011/12. година] Израчунати:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right).$$

Решење: Како $\frac{1}{x^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ за $k \in \mathbb{N}$, користићемо *Маклоренов развој* функција $e^{\frac{1}{x}}$ и $\left(1 + \frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}}$, кад $x \rightarrow +\infty$ (видети 1. и 2. задатак).

Дакле,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^6} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) - x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 + x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{6} - x^2 - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{12x^2} + o(1) - x^3 - \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

Напомена: Ознака $o(1)$, када $x \rightarrow +\infty$, означава произвољну функцију $\varepsilon(x)$ такву да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$. ■

7. [Јулски рок, 2011/12. година] Одредити Маклоренов полином петог степена функције

$$f(x) = \ln \frac{2-3x}{3+2x}.$$

Решење: За $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$ важи

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{2-3x}{3+2x} = \ln(2-3x) - \ln(3+2x) = \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{3}{2}x\right) - \ln 3 - \ln \left(1 + \frac{2}{3}x\right) \\ &= \ln \frac{2}{3} + \ln \left(1 - \frac{3}{2}x\right) - \ln \left(1 + \frac{2}{3}x\right). \end{aligned}$$

Користећи *Маклоренов развој* логаритамске функције

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5), \quad t \rightarrow 0,$$

добивамо, када $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 - \frac{3}{2}x\right) &= -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8}x^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{81}{16}x^4 - \frac{1}{5} \cdot \frac{243}{32}x^5 + o(x^5) \\ &= -\frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^3 - \frac{81}{64}x^4 - \frac{243}{160}x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{2}{3}x\right) &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27}x^3 - \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{81}x^4 + \frac{1}{5} \cdot \frac{32}{243}x^5 + o(x^5) \\ &= \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + \frac{8}{81}x^3 - \frac{4}{81}x^4 + \frac{32}{1215}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{9}{8}x^3 - \frac{81}{64}x^4 - \frac{243}{160}x^5 \\ &\quad - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{81}x^3 + \frac{4}{81}x^4 - \frac{32}{1215}x^5 + o(x^5) \\ &= \ln \frac{2}{3} - \frac{13}{6}x - \frac{65}{72}x^2 - \frac{793}{648}x^3 - \frac{6305}{5184}x^4 - \frac{60073}{38880}x^5 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином петог степена

$$M_5(x) = \ln \frac{2}{3} - \frac{13}{6}x - \frac{65}{72}x^2 - \frac{793}{648}x^3 - \frac{6305}{5184}x^4 - \frac{60073}{38880}x^5.$$

Напомена: Маклоренов развој логаритамске функције гласи

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

8. [Септембарски рок, 2011/12. година] Одредити реалне константе a и b тако да када $x \rightarrow 0$ важи асимптотска релација

$$5e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^6 - 5 \sim ax^b.$$

Решење: Одредимо *Маклоренов развој* леве стране до првог ненулног члана. Користећи Маклоренове развоје експоненцијалне (видети 1. задатак) и косинусне функције, добијамо

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0,$$

и

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Одавде је

$$(\cos x - 1)^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

Како је $x^6 = o(x^4)$, следи

$$\begin{aligned} 5e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^6 - 5 &= 5(1 + x^4 + o(x^4)) + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + x^6 - 5 \\ &= \frac{21}{4}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Према томе,

$$5e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^6 - 5 \sim \frac{21}{4}x^4, \quad x \rightarrow 0,$$

па су тражене константе

$$a = \frac{21}{4} \text{ и } b = 4.$$

Напомена: Маклоренов развој косинусне функције гласи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

9. [Јануарски рок, 2012/13. година] Да ли постоје реални бројеви A , B и C такви да у околини тачке $x = 0$ важи:

$$\sin(Ax) + B \cdot \ln(1 + 2x) + e^{Ax} + C \cdot \cos(3x) = 2 - 4x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)?$$

Решење: Развијмо функције на левој страни једнакости у *Маклоренов ред* до потребног степена (видети 1., 3., 7. и 8. задатак):

$$\begin{aligned} \sin(Ax) &= Ax - \frac{A^3x^3}{3!} + o(x^3), \\ B \cdot \ln(1 + 2x) &= B \cdot \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) \right), \\ e^{Ax} &= 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{3!} + o(x^3), \\ C \cdot \cos(3x) &= C \cdot \left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^3) \right), \end{aligned}$$

када $x \rightarrow 0$. Сабирањем ових развоја добијамо

$$\begin{aligned} &\sin(Ax) + B \cdot \ln(1 + 2x) + e^{Ax} + C \cdot \cos(3x) \\ &= (1 + C) + (2A + 2B)x + \left(-2B + \frac{A^2}{2} - \frac{9}{2}C \right) x^2 + \frac{8B}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поређењем коефицијената са датим развојем следи систем једначина

$$\begin{aligned} 1 + C &= 2 \\ 2A + 2B &= -4 \\ -2B + \frac{A^2}{2} - \frac{9}{2}C &= -\frac{1}{2} \\ \frac{8B}{3} &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Из прве и четврте једначине добијамо да је $C = 1$ и $B = 2$, а затим из друге једначине

$$2A + 4 = -4,$$

па је $A = -4$. За добијене вредности важи

$$-2B + \frac{A^2}{2} - \frac{9}{2}C = -4 + 8 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2},$$

те је задовољена и преостала једначина система.

Према томе, такви реални бројеви постоје и једнаки су

$$\boxed{A = -4, B = 2 \text{ и } C = 1}.$$

■

10. [Јулски рок, 2012/13. година] Применом Маклоренове формуле израчунати

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Решење: Пошто је x у околини нуле, функције у бројиоцу развијамо у *Маклоренов развој* до петог степена, јер је у имениоцу x^5 најмањег степена. Најпре, користећи Маклоренов развој синусне функције (видети 3. задатак), добијамо

$$\begin{aligned} \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^5}{5!} + o(x^5) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + \frac{1}{120} (x + o(x))^5 + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6} \cdot \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Са друге стране, применом Маклореновог развоја степене функције за $\alpha = \frac{1}{3}$ (видети 2. задатак), имамо да је

$$\begin{aligned} x \sqrt[3]{1-x^2} &= x \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{3}} = x \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)(-x^2) + \left(\frac{1}{2}\right)(-x^2)^2 + o(x^4)\right) \\ &= x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Према томе,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{19}{90}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \boxed{\frac{19}{90}}. \quad \blacksquare$$

11. [Септембарски рок, 2012/13. година] Одредити:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$$

Решење: Пошто је x у околини нуле, у бројиоцу и имениоцу користимо *Маклоренов развој* експоненцијалне и синусне функције (видети 1. и 3. задатак) до трећег степена, јер је после одговарајућих скраћивања трећи степен најмањи и у бројиоцу и у

имениоцу, па добијамо:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \boxed{2}. \quad \blacksquare$$

12. [Јануарски рок, 2013/14. година] Дата је функција $r(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

а) Написати Маклоренов полином степена $n \in \mathbb{N}$ функције $r(x)$.

б) Користећи резултат под а), израчунати $r^{(n)}(0)$, за $n \in \mathbb{N}$.

Решење: а) Најпре трансформишемо израз којим је дата функција $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} \cdot \frac{1-x}{1-x} = \frac{1-2x+2x^2-x^3}{1-x^3}$$

$$= (1-2x+2x^2-x^3) \cdot (1-x^3)^{-1}.$$

Када $x \rightarrow 0$ важи

$$(1-x^3)^{-1} = 1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3k} + o(x^{3k})$$

(видети 2. задатак), па добијамо *Маклоренов развој*

$$r(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + 2x^8 - \dots = 1 + 2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (x^{3j+2} - x^{3j+1}).$$

Дакле, коефицијенти уз позитивне степене дељиве са 3 једнаки су нули, док је коефицијент уз x^{3j+1} једнак -2 , а уз x^{3j+2} једнак 2 . Зато разликујемо следећа три случаја:

1) Ако је $n = 3k$, за неко $k \in \mathbb{N}$, тада је

$$M_n(x) = 1 + 2 \sum_{j=0}^{k-1} (x^{3j+2} - x^{3j+1}).$$

2) Ако је $n = 3k - 1$, за неко $k \in \mathbb{N}$, тада је

$$M_n(x) = 1 + 2 \sum_{j=0}^{k-1} (x^{3j+2} - x^{3j+1}).$$

3) Ако је $n = 3k - 2$, за неко $k \in \mathbb{N}$, тада је

$$M_n(x) = 1 - 2x^{3k-2} + 2 \sum_{j=0}^{k-2} (x^{3j+2} - x^{3j+1}).$$

б) За Маклоренов полином степена n функције $r(x)$ важи

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{r^{(i)}(0)}{i!} x^i,$$

па је $r^{(n)}(0)$ $n!$ пута већи од коефицијента уз x^n у Маклореновом развоју функције $r(x)$. Према резултату под а) добијамо

$$r^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 3k \\ 2n!, & n = 3k - 1, \\ -2n!, & n = 3k - 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

■

13. [Фебруарски рок, 2013/14. година] Применом Маклореновог развоја израчунати граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{2x^3}.$$

Решење: Означимо тражену граничну вредност са L . Користећи *Маклоренове развоје* експоненцијалне и синусне функције (видети 1. и 3. задатак),

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

добијамо

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x(x+1)}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} - x^2 - x + o(x^3)}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2x^3} = \boxed{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

■

14. [Јунски рок, 2013/14. година] Применом Маклореновог развоја одредити асимптоте функције

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} + x^2 + x - x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Решење: Домен дате функције једнак је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена које му не припадају (тачка $x = 0$). Када $x \rightarrow 0^-$, важи $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, па је

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Са друге стране, када $x \rightarrow 0^+$, важи $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ и $x^2 e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ (јер експоненцијална функција расте много брже од степене, или се може показати сменом $t = \frac{1}{x}$, па *Лопиталовим правилом*), док $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, $x^2 \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$. Зато је

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

па је права $x = 0$ вертикална асимптота функције $f(x)$ са десне стране.

Када $x \rightarrow \pm\infty$, важи $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, па користимо *Маклоренове развоје* синусне и експоненцијалне функције (видети 3. и 1. задатак):

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \\ e^{\frac{1}{x}} &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) + x^2 + x - x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 + x - x^2 - x - \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Отуда је

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2},$$

па је права $y = \frac{1}{2}$ обопшрана хоризонтална асимптота функције $f(x)$. ■

15. [Јулски рок, 2013/14. година] Одредити Тејлоров полином трећег степена функције $h(x) = x^x$ у околини тачке $x = 1$.

Решење: Најпре функцију $h(x)$ запишимо у погоднијем облику као $h(x) = e^{x \ln x}$. Тејлоров полином трећег степена у околини тачке $x_0 = 1$ има облик

$$T_3(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{h''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{h'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Одредимо редом прва три извода функције $h(x)$. Важи

$$h'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Диференцирањем првог извода добијамо

$$h''(x) = (x^x(\ln x + 1))' = x^x(\ln x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right).$$

За трећи извод потом имамо

$$\begin{aligned} h'''(x) &= \left[x^x \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) \right]' \\ &= x^x(\ln x + 1) \left((\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right) + x^x \left(\frac{2(\ln x + 1)}{x} - \frac{1}{x^2} \right). \end{aligned}$$

Сада израчунамо вредности функције и њених извода у тачки $x = 1$. Како важи $h(1) = 1$, $h'(1) = 1$, $h''(1) = 2$ и $h'''(1) = 3$, тражени Тејлоров полином трећег степена је

$$T_3(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3. \quad \blacksquare$$

16. [Октобарски рок, 2013/14. година] Одредити Маклоренов полином четвртог степена функције $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$.

Решење: Аргумент логаритма најпре раставимо на производ:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3),$$

па функцију $f(x)$ можемо записати у облику

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((x+2)(x+3)) = \ln(x+2) + \ln(x+3) = \ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \ln 3 + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right) = \ln 6 + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

Сада користимо *Маклоренов развој* логаритамске функције (видети 7. задатак)

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4), \quad t \rightarrow 0.$$

Према томе,

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + o(x^4)$$

и

$$\ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^4 + o(x^4) = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + \frac{x^3}{81} - \frac{x^4}{324} + o(x^4).$$

Сабирањем добијамо

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{18}\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{81}\right)x^3 - \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{324}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \ln 6 + \frac{5}{6}x - \frac{13}{72}x^2 + \frac{35}{648}x^3 - \frac{97}{5184}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином четвртог степена

$$M_4(x) = \ln 6 + \frac{5}{6}x - \frac{13}{72}x^2 + \frac{35}{648}x^3 - \frac{97}{5184}x^4.$$

■

17. [Фебруарски рок, 2014/15. година] Применом Маклореновог развоја израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Решење: Како је $\cos x > 0$ у некој околини нуле, важи

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}.$$

Одредимо најпре *Маклоренов развој* израза у експоненту. Користећи развоје

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ и } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

као и $\ln(1+t) = t + o(t)$, када $t \rightarrow 0$, добијамо

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

па је

$$\sin x \cdot \ln(\cos x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Сада, применом Маклореновог развоја експоненцијалне функције, следи

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Према томе,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

■

18. [Септембарски рок, 2014/15. година] Одредити Маклоренов полином петог степена функције $g(x) = \ln \frac{\alpha - \beta x}{\alpha + \beta x}$, ако су α и β позитивни реални бројеви.

Решење: Дату функцију најпре запишимо у облику

$$g(x) = \ln \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} x \right) - \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} x \right).$$

Како је $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, у некој околини нуле важи $\left| \frac{\beta}{\alpha} x \right| < 1$ (аргументи логаритама су позитивни), па можемо применити *Маклоренов развој* логаритамске функције (видети 7. задатак). Када $x \rightarrow 0$ добијамо

$$\begin{aligned} g(x) &= \left[-\frac{\beta}{\alpha} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 x^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 x^4 - \frac{1}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 x^5 + o(x^5) \right] \\ &\quad - \left[\frac{\beta}{\alpha} x - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 x^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 x^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^4 x^4 + \frac{1}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 x^5 + o(x^5) \right] \\ &= -2 \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{2}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 x^3 - \frac{2}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином петог степена

$$M_5(x) = -2 \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{2}{3} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 x^3 - \frac{2}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^5 x^5. \quad \blacksquare$$

19. [Јануарски рок, 2022/23. година] **а)** Одредити Маклоренов полином трећег степена функције $F(x) = \operatorname{tg} x$.

б) Израчунати граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решење:

а) *Маклоренов полином* трећег степена функције F има облик

$$M_3(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \frac{F'''(0)}{3!}x^3.$$

За функцију $F(x) = \operatorname{tg} x$ важи

$$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$F''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

и

$$F'''(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{6 \sin^2 x}{\cos^4 x}.$$

Према томе,

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0 \quad \text{и} \quad F'''(0) = 2,$$

па је

$$M_3(x) = x + \frac{x^3}{3}.$$

б) На основу претходног дела имамо

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

док је Маклоренов развој синусне функције (видети 3. задатак)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Зато је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

■

20. [Августовски рок, 2022/23. година] Одредити вредности реалних параметара A и B (ако постоје), тако да у околини тачке $x = 0$ важи:

$$Ax \cdot \sin(2x) + Bx \cdot \ln(1 - 3x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x^3 - 5x^4 + o(x^4).$$

Решење: Користећи *Маклоренове развоје* синусне и логаритамске функције до одговарајућег степена (видети 3. и 7. задатак), добијамо

$$\begin{aligned} Ax \cdot \sin(2x) + Bx \cdot \ln(1 - 3x) &= Ax \cdot \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &\quad + Bx \cdot \left(-3x - \frac{(-3x)^2}{2} + \frac{(-3x)^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= Ax \cdot \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) + Bx \cdot \left(-3x - \frac{9}{2}x^2 - 9x^3 + o(x^3)\right) \\ &= (2A - 3B)x^2 - \frac{9}{2}Bx^3 - \left(\frac{4}{3}A + 9B\right)x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поређењем коефицијената са датим развојем $2x^2 - \frac{3}{2}x^3 - 5x^4 + o(x^4)$, добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2 \\ -\frac{9}{2}B &= -\frac{3}{2} \\ -\left(\frac{4}{3}A + 9B\right) &= -5 \end{aligned}$$

Из друге једначине следи да је $B = \frac{1}{3}$, а затим из прве једначине добијамо да је $A = \frac{3}{2}$. За ове вредности задовољена је и трећа једначина, јер је

$$-\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} + 9 \cdot \frac{1}{3}\right) = -5.$$

Према томе,

$$\boxed{A = \frac{3}{2} \text{ и } B = \frac{1}{3}}. \quad \blacksquare$$

21. [Септембарски рок, 2022/23. година] Применом Маклоренових развоја израчунајте граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + \ln(\cos 3x) - \sqrt{1 + 6x}}{(\sin 2x)^2}.$$

Решење: Означимо са L тражену граничну вредност. Пошто је x у околини нуле, функције у бројиоцу развијамо до другог степена, јер је у имениоцу x^2 најмањег степена.

За експоненцијалну функцију (видети 1. задатак) имамо

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Даље, како је

$$\cos 3x = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

(видети 8. задатак), коришћењем *Маклореновог развоја* функције $\ln(1 + t) = t + o(t)$, када $t \rightarrow 0$, добијамо

$$\ln(\cos 3x) = \ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

За степену функцију (видети 2. задатак) важи

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 6x} &= (1 + 6x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} \cdot (6x)^2 + o(x^2) \\ &= 1 + 3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Са друге стране, $\sin 2x = 2x + o(x)$, па је

$$(\sin 2x)^2 = 4x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Према томе, бројилац се може записати у облику

$$\begin{aligned} e^{3x} + \ln(\cos 3x) - \sqrt{1+6x} &= \left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \\ &\quad - \left(1 + 3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{9x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Зато је

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9x^2}{2} + o(x^2)}{4x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2} + o(1)}{4 + o(1)} = \boxed{\frac{9}{8}}.$$

Напомена: Кажемо да је $r(x) = o(1)$, када $x \rightarrow 0$, ако важи $\lim_{x \rightarrow 0} r(x) = 0$. ■

22. [Фебруарски рок, 2023/24. година] Израчунати граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \frac{1 - \ln(\cos(\sin x)) - \cos(\sin(\ln(1+x)))}{2\ln(1+x) - 2x + x^2}.$$

Решење: Користићемо одговарајуће *Маклоренове развоје* у околини нуле:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \sin x = x + o(x) \quad \text{и} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

као и развој $\ln(1+t) = t + o(t)$, када $t \rightarrow 0$.

Најпре развијмо именилац:

$$2\ln(1+x) - 2x + x^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2x + x^2 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

За први израз у бројиоцу важи $\sin x = x + o(x)$ када $x \rightarrow 0$, па је

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + o((\sin x)^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Отуда, применом развоја логаритамске функције (видети 7. задатак), добијамо

$$\ln(\cos(\sin x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Са друге стране, пошто је $\ln(1+x) = x + o(x)$, када $x \rightarrow 0$, следи

$$\sin(\ln(1+x)) = x + o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

па је

$$\begin{aligned}\cos(\sin(\ln(1+x))) &= 1 - \frac{(\sin(\ln(1+x)))^2}{2} + o((\sin(\ln(1+x)))^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Према томе, бројилац разломка има развој

$$\begin{aligned}1 - \ln(\cos(\sin x)) - \cos(\sin(\ln(1+x))) &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^2) \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Коначно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \frac{1 - \ln(\cos(\sin x)) - \cos(\sin(\ln(1+x)))}{2 \ln(1+x) - 2x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cdot \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)} = \boxed{3}. \quad \blacksquare$$

23. [Августовски рок, 2023/24. година] Дата је функција

$$g(x) = \sin(\ln(4x)).$$

Одредити Тејлоров полином трећег степена ове функције у околини тачке $x = 1$.

Решење: За Тејлоров полином трећег степена функције g у околини тачке $x = 1$ потребно је одредити вредности $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$ и $g'''(1)$. Најпре одредимо изводе:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \cos(\ln(4x)) \cdot \frac{1}{x}, \\ g''(x) &= \left(\frac{\cos(\ln(4x))}{x} \right)' = -\frac{\sin(\ln(4x)) + \cos(\ln(4x))}{x^2}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}g'''(x) &= \left(-\frac{\sin(\ln(4x)) + \cos(\ln(4x))}{x^2} \right)' \\ &= -\frac{\cos(\ln(4x)) - \sin(\ln(4x))}{x^3} + \frac{2(\sin(\ln(4x)) + \cos(\ln(4x)))}{x^3} \\ &= \frac{3 \sin(\ln(4x)) + \cos(\ln(4x))}{x^3}.\end{aligned}$$

За $x = 1$ добијамо да је $g(1) = \sin(\ln 4)$, $g'(1) = \cos(\ln 4)$, $g''(1) = -(\sin(\ln 4) + \cos(\ln 4))$ и $g'''(1) = 3 \sin(\ln 4) + \cos(\ln 4)$.

Према формули за Тејлоров полином трећег степена у околини тачке $x = 1$,

$$T_3(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g'''(1)}{3!}(x-1)^3,$$

добиамо

$$\boxed{T_3(x) = \sin(\ln 4) + \cos(\ln 4)(x - 1) - \frac{\sin(\ln 4) + \cos(\ln 4)}{2}(x - 1)^2 + \frac{3\sin(\ln 4) + \cos(\ln 4)}{6}(x - 1)^3} \quad \blacksquare$$

24. [Септембарски рок, 2023/24. година] Функцију $f(x) = \cos x^2$ апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Решење: Важи да је $f'(x) = -2x \sin x^2$ и $f''(x) = -2 \sin x^2 - 4x^2 \cos x^2$, па за $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ добијамо

$$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 0,$$

$$f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -\sqrt{2\pi}$$

и

$$f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = -2.$$

Сходно томе, *Тејлоров полином* другог степена функције f у околини тачке $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ је

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{1!} \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}{2!} \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \\ &= -\sqrt{2\pi} \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \boxed{\frac{\pi}{2} - x^2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

25. [Септембарски 1. рок, 2024/25. година] Одредити Маклоренов полином трећег степена функције

$$h(x) = \sin(\arccos x),$$

а затим израчунати граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arccos x) - e^x}{\cos x - e^x}.$$

Решење: Како за $x \in (-1, 1)$ $\arccos x \in (0, \pi)$, а тиме је $\sin(\arccos x) \geq 0$, важи да је

$$h(x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Одредимо сада *Маклоренов развој* функције h трећег степена, користећи Маклоренов развој степене функције (видети 2. задатак):

$$h(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Одавде видимо да је Маклоренов полином трећег степена

$$M_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

За израчунавање дате граничне вредности користимо Маклоренове развоје функција $h(x)$, e^x и $\cos x$ до другог степена (видети 1. и 8. задатак):

$$\sin(\arccos x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Према томе,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arccos x) - e^x}{\cos x - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - x^2 + o(x^2)}{-x - x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + o(x)}{1 + x + o(x)} = \boxed{1}. \quad \blacksquare$$

26. [Септембарски 2. рок, 2024/25. година] Функцију $f(x) = \cos(\ln x)$ апроксимирати Тејлоровим полиномом другог степена у околини тачке $x = e^\pi$.

Решење: Како важи $f'(x) = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$ и $f''(x) = \frac{\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$, за $x = e^\pi$ добијамо

$$f(e^\pi) = -1, \quad f'(e^\pi) = 0 \quad \text{и} \quad f''(e^\pi) = \frac{1}{e^{2\pi}}.$$

Сходно томе, тражени *Тејлоров полином* другог степена је

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(e^\pi) + \frac{f'(e^\pi)}{1!}(x - e^\pi) + \frac{f''(e^\pi)}{2!}(x - e^\pi)^2 = -1 + \frac{1}{2e^{2\pi}}(x - e^\pi)^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{2e^{2\pi}}x^2 - \frac{1}{e^\pi}x - \frac{1}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

27. [Октобарски 1. рок, 2024/25. година] Дата је функција

$$h(x) = \sqrt{x^2 + x} \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

а) Одредити вредност константи $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$h(x) = A_1x + B_1 + \frac{C_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

односно

$$h(x) = A_2x + B_2 + \frac{C_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

б) Одредити све асимптоте функције $h(x)$.

Решење: а) Како је

$$\sqrt{x^2 + x} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}},$$

користећи *Маклоренове развоје*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

и

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(видети 1. и 2. задатак), добијамо

$$\begin{aligned} h(x) &= |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= |x| \cdot \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \begin{cases} x + \frac{3}{2} + \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & x \rightarrow +\infty \\ -x - \frac{3}{2} - \frac{7}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right), & x \rightarrow -\infty \end{cases}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\boxed{\begin{array}{lll} A_1 = 1, & B_1 = \frac{3}{2}, & C_1 = \frac{7}{8}, \\ A_2 = -1, & B_2 = -\frac{3}{2}, & C_2 = -\frac{7}{8} \end{array}}.$$

б) Најпре одредимо *домен* функције. Како мора важити

$$x^2 + x = x(x + 1) \geq 0$$

и $x \neq 0$, добијамо да је

$$D_h = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty).$$

Потражимо најпре *вертикалне асимптоте* у коначним тачкама прекида домена функције $h(x)$ које му не припадају (тачка $x = 0$). Сменом $t = \frac{1}{x}$ добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}} \cdot e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+t}}{t} \cdot e^t = +\infty,$$

јер e^t брже тежи $+\infty$ од t (или се може добити помоћу *Лопиталовог правила*), па $\frac{e^t}{t} \rightarrow +\infty$, док $\sqrt{1+t^2} \rightarrow +\infty$, и коначно $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$.

Дакле, права $x = 0$ је вертикална асимптота са десне стране.

Из дела под а) следи да је права $y = x + \frac{3}{2}$ десна коса асимптота и да је

права $y = -x - \frac{3}{2}$ лева коса асимптота. Како функција има косу асимптоту и када

$x \rightarrow +\infty$ и када $x \rightarrow -\infty$, хоризонталних асимптота нема. ■

28. [Октобарски 2. рок, 2024/25. година] Дата је функција $h(x) = x \ln \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)$.

Одредити вредности константи $A, B, C \in \mathbb{R}$ тако да важи $h(x) = Ax + B + \frac{C}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, када $x \rightarrow +\infty$.

Решење: Како $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, када $x \rightarrow +\infty$, користићемо познате *Маклоренове развоје*

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + o(t), \quad t \rightarrow 0,$$

и

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

(видети 2. и 7. задатак).

Најпре развијамо израз који се налази у аргументу логаритма:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2x+1} &= \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{-1} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Пошто је $\frac{2}{2x+1} \sim \frac{1}{x}$, када $x \rightarrow +\infty$, применом Маклореновог развоја логаритамске функције добијамо

$$\begin{aligned} h(x) &= x \ln \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= x \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= x \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Поређењем са $h(x) = Ax + B + \frac{C}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ следи да су тражене константе

$$\boxed{A = 0, B = 1 \text{ и } C = -1}.$$

■

29. [Јануарски рок, 2025/26. година] **а)** Одредити Маклоренов полином трећег степена функције $h(x) = \arcsin x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \ln(1+x)}{1 - x \arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Решење: а) За функцију $h(x) = \arcsin x$ важи

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad h''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ и } h'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Пошто је $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $h''(0) = 0$ и $h'''(0) = 1$, *Маклоренов полином* трећег степена функције h је

$$M_3(x) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!}x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \frac{h'''(0)}{3!}x^3 = \boxed{x + \frac{x^3}{6}}.$$

б) Посматрана гранична вредност је неодређеног типа 1^∞ . Користећи *непрекидност* експоненцијалне функције, добијамо

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \ln(1+x)}{1 - x \arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1 + x \ln(1+x)}{1 - x \arcsin x} \right)}{\sin^2 x} \right)}.$$

Када $x \rightarrow 0$ важи

$$\ln(1+x) = x + o(x), \quad \arcsin x = x + o(x) \quad \text{и} \quad \sin x = x + o(x)$$

(видети 7. и 3. задатак и део под а)), па је

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + x \ln(1+x)}{1 - x \arcsin x} \right) &= \ln(1 + x \ln(1+x)) - \ln(1 - x \arcsin x) \\ &= \ln(1 + x^2 + o(x^2)) - \ln(1 - x^2 + o(x^2)) \\ &= x^2 + o(x^2) - (-x^2 + o(x^2)) \\ &= 2x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Такође, $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$, када $x \rightarrow 0$, па следи

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1 + x \ln(1+x)}{1 - x \arcsin x} \right)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Према томе, тражена гранична вредност је

$$\boxed{L = e^2}.$$

■

Литература

- [1] П. Васић, Б. Иричанин, М. Јовановић, Б. Малешевић, Т. Маџаревић, Б. Михаиловић, З. Радосављевић, С. Симић, Д. Цветковић, **Збирка задатака из алгебре, I део, Булове алгебре, квантификаторски рачун, комбинаторика и графови, општа алгебра, полиноми**, VI издање, Академска мисао, Београд 2006.
- [2] П. Васић, Б. Иричанин, М. Јовановић, Т. Маџаревић, Б. Михаиловић, З. Радосављевић, С. Симић, Д. Цветковић, **Збирка задатака из алгебре, II део, линеарна алгебра, разни задаци**, V издање, Академска мисао, Београд 2006.
- [3] М. Меркле, **Математичка анализа, теорија и хиљаду задатака, за студенте технике**, треће измењено и допуњено издање, Академска мисао, Београд 2015.
- [4] Д. Цветковић, И. Лацковић, М. Меркле, З. Радосављевић, С. Симић, П. Васић, **Математика 1, Алгебра**, X издање, Академска мисао, Београд 2014.

CIP - Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

512.5/.6(075.8)(076)(0.034.2)

517.1/.52(075.8)(076)(0.034.2)

САВАТОВИЋ, Милица, 1986-

Математика 1 [Електронски извор] : збирка решених испитних задатака / Милица Саватовић, Милош Вујчић. - Београд : Универзитет, Електротехнички факултет, 2026 (Београд : Универзитет, Електротехнички факултет). - 1 електронски оптички диск (CD-ROM) ; 12 cm

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловне стране документа.
- Тираж 50. - Садржи библиографију.

ISBN 978-86-7225-105-0

1. Вујчић, Милош, 1998- [autor]

а) Алгебра -- Задаци б) Математичка анализа -- Задаци

COBISS.SR-ID 203861257