

PRIMENA FURIJEOVE ANALIZE U TELEKOMUNIKACIJAMA

Mirjana Simić-Pejović

Decembar, 2020

dr Mirjana Simić-Pejović, vanredni profesor
Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
e-mail: mira@etf.rs

PRIMENA FURIJEOVE ANALIZE U TELEKOMUNIKACIJAMA

elektronski udžbenik

Recenzenti:

dr Milan Bjelica, redovni profesor
dr Nataša Čirović, vanredni profesor

Nastavno-naučno veće Elektrotehničkog fakulteta odobrilo je objavljivanje ovog udžbenika odlukom broj 50/2 od 03.02.2021. godine.

Izdavač:

Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu
Bulevar kralja Aleksandra 73, 11120 Beograd, Srbija

Štampa: Mirjana Simić-Pejović, Beograd, 2021.

Tiraž: 50 primeraka

ISBN: 978-86-7225-079-4



Neka prava zadržana. Ovo delo je licencirano pod uslovima licence Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Tekst ove knjige složen je u programskom paketu L^AT_EX 2_ε.

Sadržaj

Predgovor	5
1 LTI sistemi	7
1.1 Linearnost	7
1.2 Vremenska nepromenljivost	7
1.3 Linearni vremenski nepromenljivi sistemi, LTI	8
2 Furijeovi redovi	11
2.1 Uvod	11
2.1.1 Fazori	12
2.1.2 Primena fazora	14
2.2 Furijeov red u trigonometrijskom obliku	19
2.3 Ortogonalnost funkcija	21
2.4 Polarni oblik Furijeovog reda (jednostrani spektar)	25
2.5 Furijeov red u kompleksnom obliku (dvostrani spektar)	26
2.6 Osobine Furijeovih redova	29
2.6.1 Linearnost	30
2.6.2 Simetrije	30
2.6.3 Kašnjenje u vremenskom domenu	31
2.6.4 Inverzija vremenske ose	31
2.6.5 Diferenciranje	32
2.6.6 Integraljenje	32
2.7 Parsevalova teorema	33
2.8 Korelacija periodičnih signala	34
2.8.1 Autokorelacija periodičnih signala	34
2.9 Konvolucija periodičnih signala	35
2.10 Primeri	36
3 Furijeova transformacija	49
3.1 Uvod	49
3.2 Furijeov transformacioni par	49
3.3 Osobine Furijeove transformacije	52
3.3.1 Linearnost	52
3.3.2 Pomeranje u vremenskom domenu	52
3.3.3 Diferenciranje	53
3.3.4 Integraljenje	53
3.3.5 Skaliranje u vremenu	54
3.3.6 Inverzija vremenske ose	55
3.3.7 Pomeranje u frekvencijskom domenu	55
3.3.8 Dualnost	57
3.3.9 Korelacija aperiodičnih signala	58

3.3.10	Autokorelacija aperiodičnih signala	59
3.3.11	Rejljeva teorema o energiji	59
3.3.12	Konvolucija aperiodičnih signala	60
3.4	Primeri	61
4	Diskretna Furijeova transformacija	69
4.1	Uvod	69
4.2	Furijeov transformacioni par	69
4.3	Primeri	72
A	Furijeovi redovi nekih signala	75
B	Furijeove transformacije nekih signala	77
	Literatura	79

Predgovor

Ovaj udžbenik je proizašao iz materijala pripremljenih za predavanja i vežbe za predmet Osnovi telekomunikacija na smeru za Elektroniku, u okviru osnovnih studija na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Udžbenik pokriva deo gradiva za predmet Osnovi telekomunikacija koji se predaje na drugoj godini studija, a cilj mu je da se studentima netelekomunikacionih odseka na što jednostavniji način omogući savladavanje planiranog gradiva.

Materijal prati teorijske postavke nastavnih jedinica koje se obrađuju na predavanjima, kao i zadatke koji prate ove nastavne jedinice i rade se na časovima vežbi. Polaznu temu u udžbeniku čine linearni vremenski nepromenljivi sistemi koji zajedno sa sinusoidalnim signalima i njihovim osobinama u osnovi predstavljaju motivaciju za Furijeovu analizu signala. Sledi Furijeova analiza periodičnih signala, odnosno Furijeovi redovi. Radi potpunijeg razumevanja što kroz teoriju što kroz vizuelizaciju, kao i radi lakšeg rešavanja električnih kola, u okviru ove teme razmatrani su i fazori kao i veza Furijeovih redova i fazora. Udžbenik obuhvata i Furijeovu analizu za aperiodične determinističke signale u okviru teme Furijeova transformacija, kao i za slučaj signala koji nisu deterministički, u okviru teme diskretna Furijeova transformacija. Za svaku od tema, radi lakšeg praćenja i razumevanja izlagane materije, u tekst su uključeni i primeri u formi kraćih zadataka.

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima koji slušaju predmet Osnovi telekomunikacija na smeru za Elektroniku, ali se autor nada da će knjiga biti od koristi i studentima drugih smerova kao i samim inženjerima.

Autor se zahvaljuje recenzentima dr Milanu Bjelici, redovnom profesoru, i dr Nataši Ćirović, vanrednom profesoru na korisnim sugestijama tokom izrade ovog udžbenika. Takođe, autor se zahvaljuje dr Predragu Pejoviću, redovnom profesoru, na stručnim diskusijama koje su umnogome doprineli kvalitetu sadržaja ovog udžbenika. Posebnu zahvalnost autor upućuje studentima Elektrotehničkog fakulteta koji su svojim pitanjima i sugestijama značajno uticali na konačan oblik ovog udžbenika.

Autor

U Beogradu, decembra 2020. godine

Glava 1

LTI sistemi

Formalno govoreći, LTI (*Linear Time-Invariant*) sistemi su sistemi kod kojih važe osobina linearnosti (*Linear*, L) i vremenske nepromenljivosti (*Time-Invariant*, TI).

1.1 Linearnost

U linearnim sistemima važi princip superpozicije. Princip superpozicije zasniva se na osobinama: aditivnosti i homogenosti.

Osobina aditivnosti zahteva da je odziv (izlaz) sistema na brojne različite pobude (ulazne signale) kojima je simultano izložen, jednak zbiru odziva na svaku pojedinačnu pobudu. Osobina homogenosti zahteva da kad god je ulazni signal skaliran nekim konstantnim faktorom, i izlazni signal mora biti skaliran identičnim konstantnim faktorom. Drugim rečima, izlaz linearnog sistema na linearnu kombinaciju ulaznih signala, jednak je istoj linearnoj kombinaciji izlaznih signala gde svaki izlazni signal odgovara određenom ulaznom signalu [1].

Dakle, sistem je linearan ako je ispunjeno:

$$\text{ako je } x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \text{ i } x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \text{ tada je } \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (1.1)$$

gde su α i β konstante različite od nule. Na slici 1.1 dat je primer linearnog sistema.

U linearnim sistemima, kada je ulaz jednak nuli, izlaz iz sistema je uvek nula. Vrlo je važno naglasiti da linearnost omogućava dekompoziciju složenih ulaznih signala na linearnu kombinaciju nekih osnovnih, najčešće dobro poznatih signala, čiji je izlaz mnogo lakše odrediti.

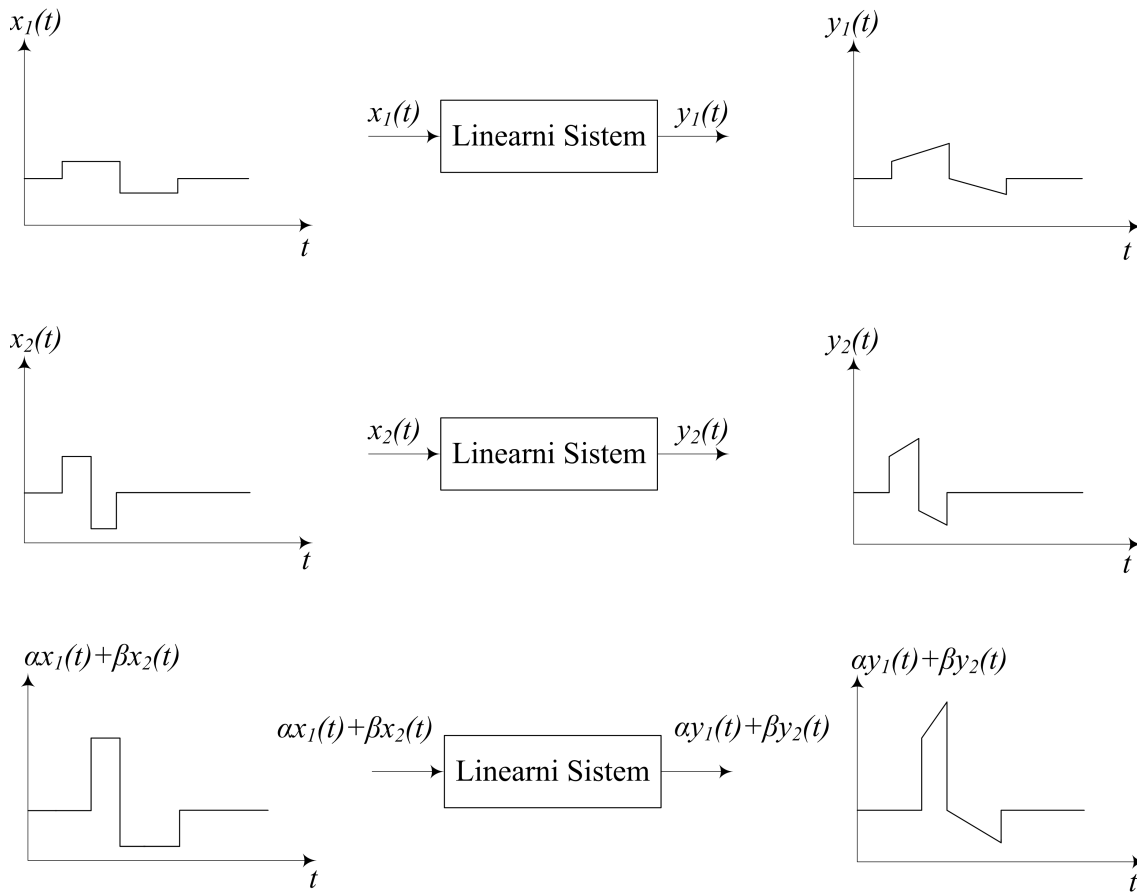
1.2 Vremenska nepromenljivost

Kod vremenski nepromenljivih sistema veza ulaza i izlaza se ne menja tokom vremena. To znači da vremensko kašnjenje ili napredovanje ulaznog signala rezultira odgovarajućim vremenskim pomeranjem i izlaznog signala. Dakle, karakteristike vremenski nepromenljivih sistema se ne menjaju tokom vremena. Drugim rečima, za dati ulazni signal, izlaz iz vremenski nepromenljivog sistema ostaje isti bez obzira kada se taj signal pojavi na ulazu u sistem.

Sistem je vremenski nepromenljiv (TI) ako i samo ako je ispunjeno:

$$\text{ako je } x(t) \longrightarrow y(t) \text{ tada je } x(t - \tau) \longrightarrow y(t - \tau) \quad (1.2)$$

gde je τ realna konstanta različita od nule. Na slici 1.2 dat je primer vremenski nepromenljivog sistema.



Slika 1.1: Linearni sistem.

1.3 Linearni vremenski nepromenljivi sistemi, LTI

Kod linearnih vremenski nepromenljivih sistema (LTI) ispunjen je i uslov linearnosti (1.1) i uslov vremenske nepromenljivosti (1.2).

Linearnost: ako je $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ i $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$ tada je $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Vremenska nepromenljivost: ako je $x(t) \rightarrow y(t)$ tada je $x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$.

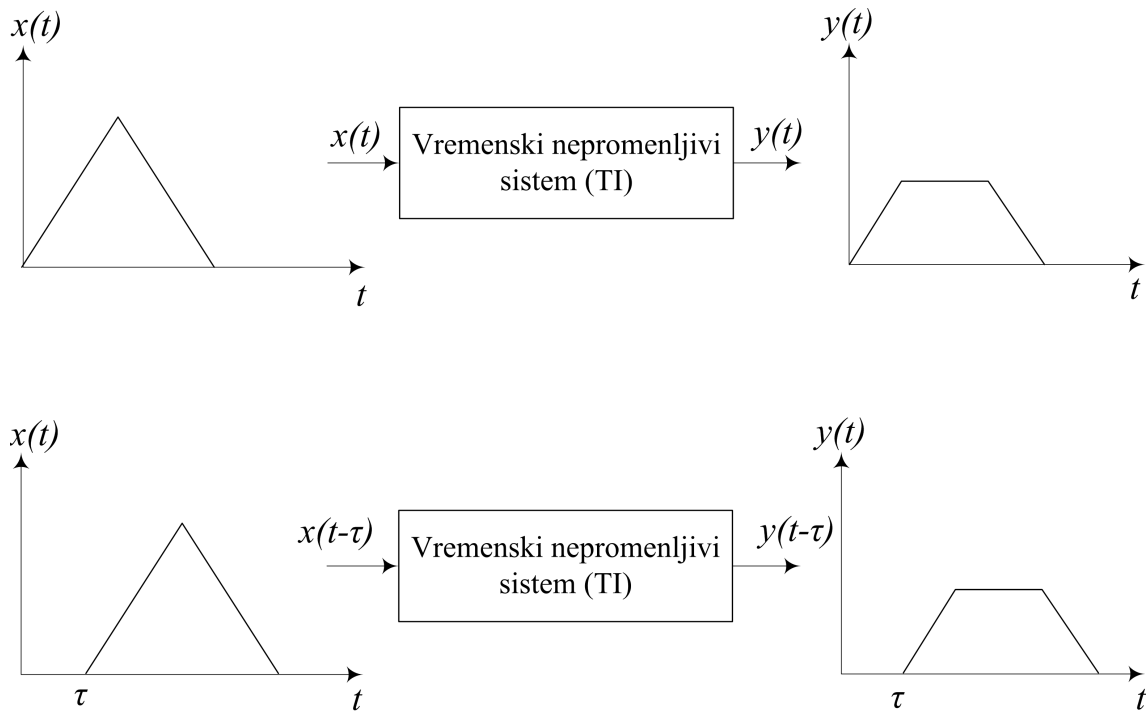
Važno je naglasiti da se u vremenskom domenu LTI sistem u potpunosti može okarakterisati jednom jedinom funkcijom a to je impulsni odziv sistema (odziv sistema $h(t)$ sa nultim početnim uslovima kada je na njegovom ulazu delta impuls $\delta(t)$). Poznavajući samo impulsni odziv, primenom konvolucije moguće je dobiti odziv LTI sistema na bilo koji drugi ulazni signal. Ekvivalentna veličina u frekvencijskom domenu je funkcija prenosa, $H(f)$, slika (1.4).

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1.3)$$

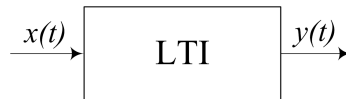
gde $*$ označava operaciju konvolucije. Jednačina (1.3) se zove konvolucioni integral. U frekvencijskom domenu odziv se dobija kao

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega). \quad (1.4)$$

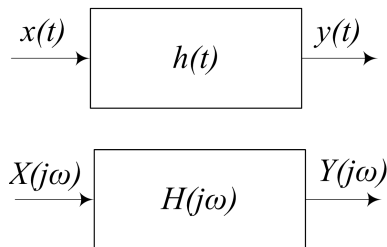
Treba istaći da na izlazu iz LTI sistema mogu postojati samo one frekvencijske komponente koje su bile na ulazu u LTI sistem. Drugim rečima, LTI sistem ne može generisati nove frekvencijske komponente. U skladu sa tim, možemo zaključiti da u LTI sistemima ako se na ulaz



Slika 1.2: Vremenski nepromenljiv sistem.

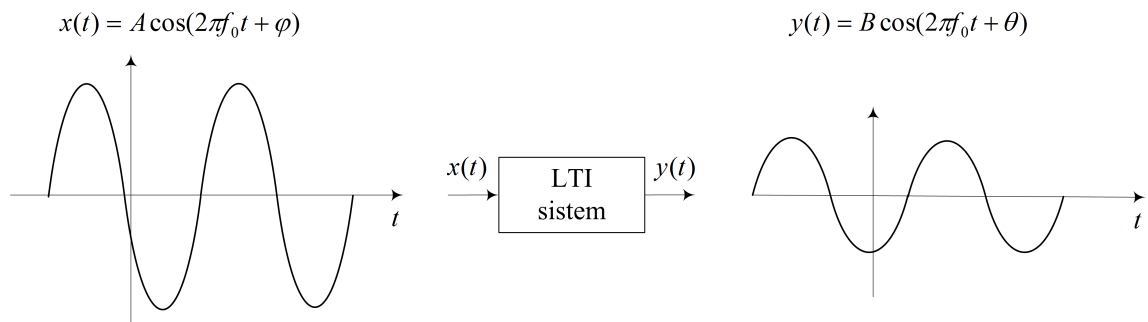


Slika 1.3: Linearni vremenski nepromenljivi sistem.



Slika 1.4: LTI sistem, vremenski i frekvencijski domen.

dovede sinusoida, izlaz je takođe sinusoida. Ona može biti drugačije amplitude i početne faze u odnosu na sinusoidu na ulazu u sistem, ali njihova frekvencija ostaje ista. Dakle, LTI sistemi održavaju princip: sinusoida na ulazu - sinusoida na izlazu [1], slika (1.5).



Slika 1.5: Sinusoidalni signali u LTI sistemima.

Naglasimo i to da se LTI sistem može modelovati kao linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima [2]. Opšti oblik linearne diferencijalne jednačine n -tog reda sa konstantnim koeficijentima je

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t) \quad (1.5)$$

uz dodatna dva uslova:

1. koeficijenti a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 i b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 moraju biti konstantni, tj. ne zavisi od vremena. Ovaj uslov obezbeđuje da je posmatrani sistem vremenski nepromenljiv (TI);

2. početni uslovi moraju biti jedanaki nuli. Ovaj uslov obezbeđuje da je posmatrani sistem linearan (L).

Primer 1. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t). \quad (1.6)$$

Kako nisu dati početni uslovi, smatra se da su jednaki nuli pa ovo jeste linearni sistem. Koeficijenti u ovom sistemu su: $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 4$, $b_0 = 1$ i svi su konstante, tj. ne zavise od vremena, pa ovo jeste i vremenski nepromenljivi sistem. Kako su ispunjena oba uslova a jednačina (1.6) ima standardni oblik (1.5), zaključujemo da je sistem (1.6) linearni i vremenski nepromenljiv, tj. LTI [3].

Primer 2. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2 \left(\frac{dy(t)}{dt} \right)^2 + y(t) = x(t). \quad (1.7)$$

Koeficijenti u ovom sistemu su: $a_1 = 2$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ i svi su konstante, tj. ne zavise od vremena, pa ovo jeste vremenski nepromenljivi sistem. Ipak, forma (1.7) ne odgovara standardnoj formi LTI sistema pošto sadrži kvadrat člana $\left(\frac{dy(t)}{dt} \right)$ koji u (1.5) ne postoji, pa ovaj sistem nije linearni. Dakle, sistem (1.7) nije LTI.

Primer 3. Ispitati da li je sledeći sistem LTI:

$$2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2t \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t). \quad (1.8)$$

Kako nisu dati početni uslovi a jednačina (1.8) ima standardni oblik (1.5), ovaj sistem jeste linearni. Koeficijenti u ovom sistemu su $a_2 = 2$, $a_1 = 2t$, $b_1 = 1$, $b_0 = 2$, pri čemu koeficijent a_1 nije konstanta i menja se sa vremenom, pa zaključujemo da je ovaj sistem vremenski promenljiv. Dakle, sistem (1.8) nije LTI.

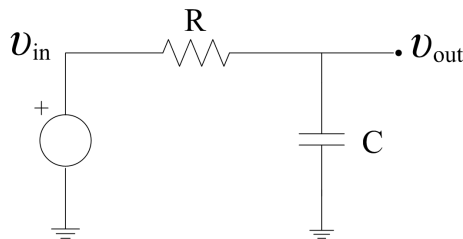
Glava 2

Furijeovi redovi

2.1 Uvod

Primer.

Odrediti ustaljeni odziv kola sa slike 2.1 (filar propusnik niskih učestanosti, NF), v_{out} , na pobudu $v_{in} = 10V \sin^2 \omega_0 t$. Poznato je $RC = \frac{1}{2\omega_0}$.



Slika 2.1: NF filtar.

Rešenje.

Na osnovu slike 2.1 može se pisati

$$\begin{aligned} i_C &= \frac{v_{in} - v_{out}}{R} \\ C \frac{dv_{out}}{dt} &= \frac{v_{in} - v_{out}}{R}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Diferencijalna jednačina (2.1) može se pisati u obliku

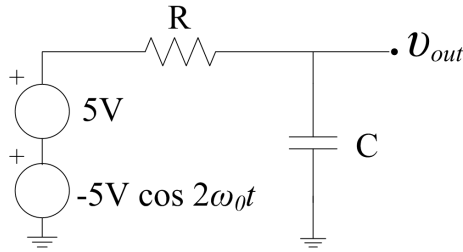
$$RC \frac{dv_{out}}{dt} + v_{out} = v_{in}. \quad (2.2)$$

Kao što vidimo, diferencijalna jednačina (2.2) ima oblik koji odgovara optem obliku diferencijalne jednačina za LTI sisteme, (1.5). Takođe, početni uslovi nisu dati pa smatramo da su jednaki nuli. I najzad, svi koeficijenti u (2.2) su konstanti, tj. ne zavise od vremena ($a_1 = RC = \frac{1}{2\omega_0}$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$), što znači da je kolo sa slike 2.1 LTI sistem.

Sa druge strane, iz trigonometrije je poznato da je $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, pa pobudu možemo pisati i u obliku

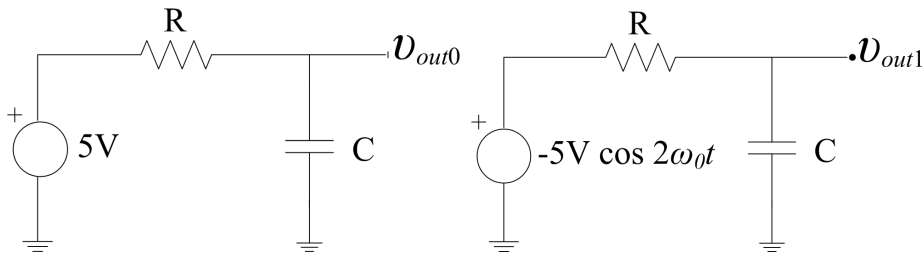
$$v_{in} = 10V \sin^2 \omega_0 t = 5V - 5V \cos 2\omega_0 t \quad (2.3)$$

a naše kolo sa slike 2.1 možemo predstaviti kao na slici 2.2.



Slika 2.2: NF filter, drugi oblik.

Kako je ovo kolo LTI sistem, a u LTI sistemima važi princip superpozicije, dalje se kolo može dekomponovati na dva kola različitih pobuda, a odziv tražiti kao zbir odziva na pojedinačne pobude, što je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3: NF filter, superpozicija.

Odziv sada postaje

$$v_{out} = v_{out0} + v_{out1}. \quad (2.4)$$

Sa slike 2.3 je očigledno da je $v_{out0} = 5V$, dok se v_{out1} dobija rešavanjem diferencijalne jednačine

$$RC \frac{dv_{out1}}{dt} + v_{out1} = v_{in1}. \quad (2.5)$$

gde je $v_{in1} = -5V \cos 2\omega_0 t$, čime se najzad dobija traženo rešenje, tj. odziv kola sa slike 2.1 na zadatu pobudu.

2.1.1 Fazori

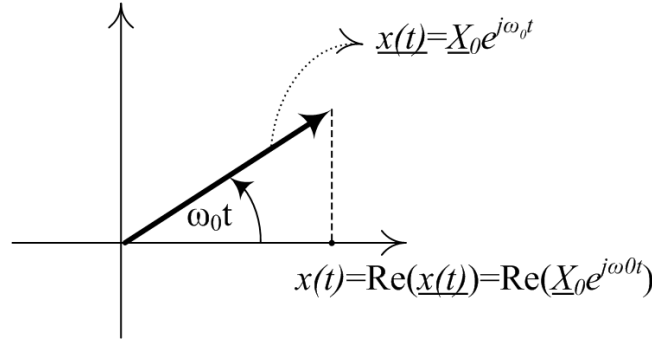
Na ovom mestu bi bilo pogodno prikazati alternativni a znatno jednostavniji način traženja odziva kola sa slike 2.1, obzirom da se izbegava rešavanje diferencijalnih jednačina. Ovaj način predstavlja i suštinu za teme koje slede u okviru ovog poglavlja.

Dakle, pitanje je da li je moguće prilikom rešavanja LTI sistema čiji je matematički model dat kao (1.5) izbeći rešavanje diferencijalnih jednačina, tj. olakšati i pojednostaviti rešavanje kola na neki način? Odgovor na ovo pitanje dao je *Charles Proteus Steinmetz* (1865-1923), nemački matematičar, inženjer elektrotehnike i profesor [4]. Svoju ideju predstavio je u revolucionarnom radu *Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering*, publikovanom 1893. god. u *American Institute of Electrical Engineers* (AIEE), današnji IEEE.

Dakle, razmatra se prinudni odziv električnih kola na sinusoidalne pobude tipa:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (2.6)$$

gde $x(t)$ može biti struja ili napon, tj. $x \in (v, i)$, a $A, B \in \mathbb{R}$, dok je ω_0 isto za sve izvore u kolu. $x(t)$ je klasa funkcija koje su definisane realnim parametrima A i B . Dakle, dva realna broja su dovoljna da definišu $x(t)$, a predstava preko kompleksnog broja je forma koja dva realna broja "pakuje" u jedan. Dakle, cilj je (2.6) predstaviti kao kompleksan broj, u formi obrtnog vektora, tzv. fazora. Geometrijska interpretacija prikazana je na slici



Slika 2.4: Fazor.

gde je

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega_0 t} \quad (2.7)$$

dok se naša pobuda (2.6) sada može pisati kao $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$, tj. $x(t) = \Re(\underline{X}_0 e^{j\omega_0 t})$. Član \underline{X}_0 je tražena forma kompleksnog broja, tj. fazor, dok član $e^{j\omega_0 t}$ predstavlja obrtanje. Ostaje da se odredi tačan oblik tog kompleksnog broja, odnosno njegov realni i imaginarni deo $\underline{X}_0 = X_r + jX_i$ ($X_r, X_i = ?$).

Da bismo to dobili, formu (2.7) napišimo kao

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega_0 t} &= (X_r + jX_i)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) = \\ &X_r \cos \omega_0 t + jX_r \sin \omega_0 t + jX_i \cos \omega_0 t - X_i \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Koristeći da je $x(t) = \Re(\underline{x}(t))$, dobija se

$$x(t) = X_r \cos \omega_0 t - X_i \sin \omega_0 t. \quad (2.9)$$

Najzad, izjednačavanjem (2.6) i (2.9), dobija se traženi kompleksni broj, tj. $X_r = A$ a $X_i = -B$, pa je

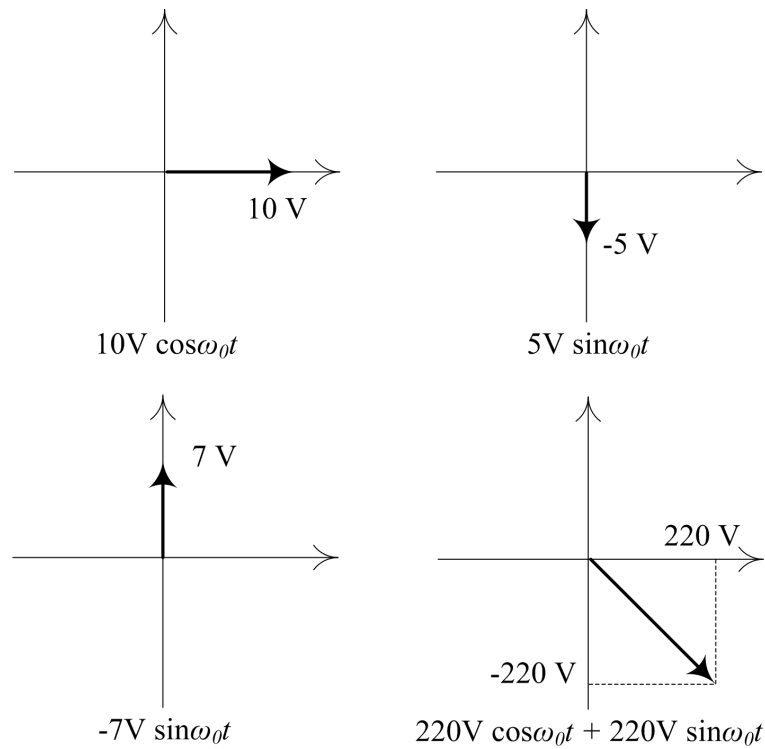
$$\underline{X}_0 = A - jB. \quad (2.10)$$

Dakle, na ovaj način uveden je pojam fazora, tj. predstava pobude tipa (2.6) preko kompleksnog broja, gde je došlo do sledećih preslikavanja [5]

$$x(t) \longrightarrow \underline{X}_0$$

$$A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \longrightarrow A - jB$$

$$\cos \omega_0 t \longrightarrow 1$$



Slika 2.5: Fazori, primeri.

$\sin \omega_0 t \rightarrow -j$.

Na slici 2.5 prikazani su neki primeri fazora.

2.1.2 Primena fazora

Kao što je već rečeno, fazori se uvode radi lakšeg rešavanja električnih kola. Pre argumentacije ove stavke, navedimo i nekoliko činjenica u vezi fazora.

Prvo, Kirhofovi zakoni (*Kirchhoff's circuit laws*) važe i za fazore. To se odnosi i na prvi i na drugi Kirhofov zakon. Prema prvom Kirhofovom zakonu, algebarski zbir struja u čvoru je jednak nuli, tj. $\sum i = 0$, i zbir napona u konturi je jednak nuli, tj. $\sum u = 0$. Pretpostavimo da u našem slučaju imamo dve pobude $x_1(t)$ i $x_2(t)$ tipa (2.6), tj.

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t \quad (2.11)$$

i

$$x_2(t) = A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t \quad (2.12)$$

čije su fazorske prezentacije

$$\underline{X}_1 = A_1 - jB_1 \quad (2.13)$$

i

$$\underline{X}_2 = A_2 - jB_2 \quad (2.14)$$

respektivno, tada se može pokazati da ako je

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + (B_1 + B_2) \sin \omega_0 t \quad (2.15)$$

sledi i da je

$$\underline{X} = (A_1 + A_2) - j(B_1 + B_2) = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 \quad (2.16)$$

što znači da Kirhofovi zakoni važe i za fazore. Fazorska transformacija je linearna transformacija, što znači da važe aditivnost i homogenost, pa, kao što se vidi, Kirhofovi zakoni važe usled važenja osobine aditivnosti. Za sada je olakšanje to što umesto sabiranja sinusoida sabiramo kompleksne brojeve.

Usled važenja homogenosti, može se pokazati da i Omov zakon (*Ohm's law*) važi i za fazore. Ako je $i(t)$ pobuda tipa (2.6), tj. $i(t) = I_A \cos \omega_0 t + I_B \sin \omega_0 t$, i ako važi da je $u(t) = Ri(t)$, tada je

$$u(t) = Ri(t) = RI_A \cos \omega_0 t + RI_B \sin \omega_0 t \quad (2.17)$$

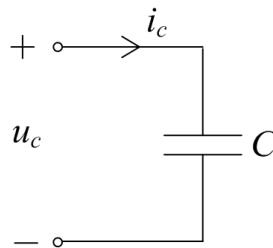
odnosno, sledi da je

$$\underline{U} = R\underline{I} \quad (2.18)$$

gde je $\underline{I} = I_A - jI_B$ fazor struje $i(t)$ a \underline{U} fazor napona $u(t)$.

Sledeća ključna primena fazora je uvođenje pojma impedanse, i značajno olakšavanje rešavanja električnih kola, obzirom da omogućava svodenje diferencijalnih jednačina na algebarske jednačine.

Pođimo od slike 2.6 gde je napon na kondenzatoru naša pobuda tipa (2.6), tj.



Slika 2.6: Primer primene fazora - kondenzator.

$$u_c = U_{cA} \cos \omega_0 t + U_{cB} \sin \omega_0 t. \quad (2.19)$$

Struja kondenzatora se računa kao

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad (2.20)$$

što u konkretnom slučaju pobude tipa (2.19) postaje

$$i_c = \omega_0 C U_{cB} \cos \omega_0 t - \omega_0 C U_{cA} \sin \omega_0 t. \quad (2.21)$$

Pokušajmo sada da uradimo isto, tj. odredimo struju kondenzatora, samo primenom fazora. Kao što je poznato na osnovu (2.7), napon na kondenzatoru možemo pisati kao

$$u_c = \Re(\underline{u}_c) = \Re(\underline{U}_c e^{j\omega_0 t}). \quad (2.22)$$

gde je $\underline{U}_c = U_{cA} - jU_{cB}$.

Tada je

$$\frac{du_c}{dt} = \Re\left(\frac{d}{dt}\underline{U}_c e^{j\omega_0 t}\right) = \Re(j\omega_0 \underline{U}_c e^{j\omega_0 t}) \quad (2.23)$$

na osnovu čega možemo videti da je $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega_0$ što predstavlja ključno pojednostavljenje obzirom da diferencijalne jednačine svodi na algebarske jednačine.

Struje kondenzatora je sada

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = C \Re\left(\frac{d}{dt}\underline{U}_c e^{j\omega_0 t}\right) = \Re(j\omega_0 C \underline{U}_c e^{j\omega_0 t}) = \Re(\underline{I}_c e^{j\omega_0 t}). \quad (2.24)$$

Kako je

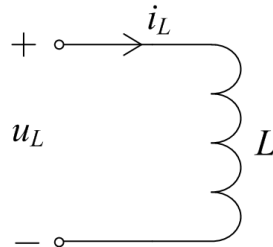
$$\underline{I}_c = j\omega_0 C \underline{U}_c \quad (2.25)$$

na ovaj način je zapravo uveden i pojam impedanse

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{j\omega_0 C} \quad (2.26)$$

što nam dalje omogućava da kondenzator tretiramo kao otpornik otpornosti (2.26).

Na sličan način se dobija i impedansa kalema, slika 2.7.



Slika 2.7: Primer primene fazora - kalem.

Ako je struja kalema data kao

$$i_L = I_{LA} \cos \omega_0 t + I_{LB} \sin \omega_0 t \quad (2.27)$$

može se pisati

$$i_L = \Re(\underline{i}_L) = \Re(\underline{I}_L e^{j\omega_0 t}) \quad (2.28)$$

gde je $\underline{I}_L = I_{LA} - jI_{LB}$.

Napon na kalemu se računa kao

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \Re\left(\frac{d}{dt} \underline{I}_L e^{j\omega_0 t}\right) = \Re(j\omega_0 L \underline{I}_L e^{j\omega_0 t}) = \Re(\underline{U}_L e^{j\omega_0 t}). \quad (2.29)$$

Kako je

$$\underline{U}_L = j\omega_0 L \underline{I}_L \quad (2.30)$$

impedansa kalema je

$$\underline{Z}_L = j\omega_0 L \quad (2.31)$$

što nam dalje omogućava da i kalem tretiramo kao otpornik otpornosti (2.31).

Vratimo se sada našem primeru iz poglavlja 2.1, gde smo poznavajući trigonometrijsku formulu i koristeći činjenicu da je kolo sa slike 2.1 LTI sistem, rešavanje sveli na slučaj kola sa slike 2.3. Kao što se vidi iz (2.4), izlazni napon se dobija kao superpozicija odziva na pobude: $v_{in0} = 5V$ i $v_{in1} = -5V \cos 2\omega_0 t$. Odziv na pobudu $v_{in0} = 5V$ je $v_{out0} = 5V$, dok se odziv na pobudu $v_{in1} = -5V \cos 2\omega_0 t$ dobija rešavanjem diferencijalne jednačine (2.5).

Kako bismo izbegli rešavanje diferencijalne jednačine i olakšali račun, uvedeni su fazori koji problem svode na rešavanje algebarske jednačine. Primenimo rešavanje preko fazora na (2.5), koju možemo pisati u obliku

$$RC \frac{dv_{out1}}{dt} + v_{out1} = -5V \cos 2\omega_0 t. \quad (2.32)$$

Kako iz fazorske transformacije proizilazi

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow j2\omega_0$$

i

$$\cos 2\omega_0 t \longrightarrow 1$$

diferencijalna jednačina (2.32) prelazi u algebarsku jednačinu

$$j2\omega_0 RC \underline{V}_{out1} + \underline{V}_{out1} = -5V \quad (2.33)$$

iz čega se dobija da je

$$\underline{V}_{out1} = \frac{-5V}{1 + j2\omega_0 RC}. \quad (2.34)$$

Kako je u postavci dato da je $RC = \frac{1}{2\omega_0}$, konačno se dobija

$$\underline{V}_{out1} = \frac{-5V}{1 + j} = -2.5 + j2.5. \quad (2.35)$$

Primenom fazorskih transformacija gde

$$\cos \omega_0 t \longrightarrow 1$$

$$\sin \omega_0 t \longrightarrow -j$$

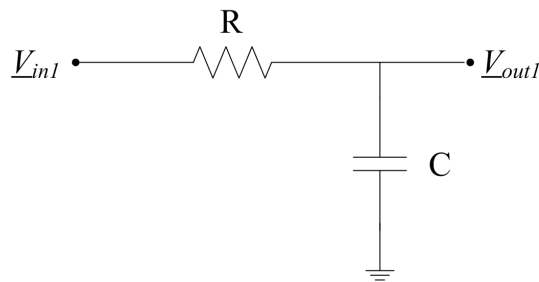
konačno se dobija

$$v_{out1} = -2.5V \cos 2\omega_0 t - 2.5V \sin 2\omega_0 t \quad (2.36)$$

a konačan odziv

$$v_{out} = v_{out0} + v_{out1} = 5V - 2.5V \cos 2\omega_0 t - 2.5V \sin 2\omega_0 t. \quad (2.37)$$

Napomenimo da smo odziv v_{out1} mogli odrediti i preko razdelnika napona, zahvaljujući uvođenju impedanse kondenzatora. Na osnovu slike 2.8



Slika 2.8: Kolo, fazorska prezentacija.

može se pisati

$$\underline{V}_{out1} = \frac{\underline{Z}_c}{R + \underline{Z}_c} \underline{V}_{in1} = \frac{\frac{1}{j\omega_0 C}}{R + \frac{1}{j\omega_0 C}} \underline{V}_{in1} = \frac{1}{1 + j2\omega_0 RC} \underline{V}_{in1} = \frac{-5V}{1 + j2\omega_0 RC} \quad (2.38)$$

što je isti rezultat kao i (2.34).

Napomenimo i to da se iz 2.38 vidi i funkcija prenosa ovog sistema

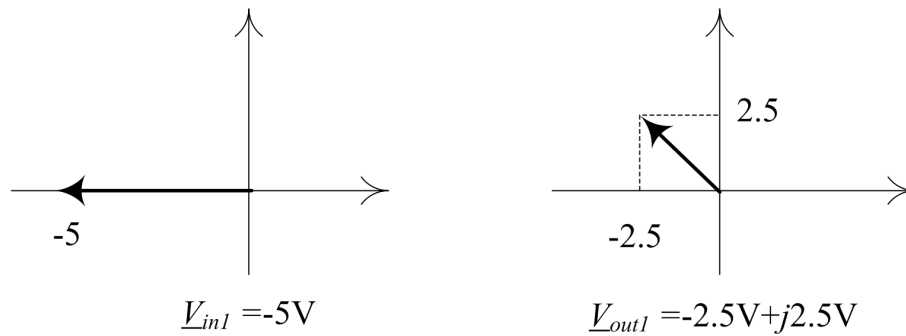
$$\frac{\underline{V}_{out1}}{\underline{V}_{in1}} = \frac{1}{1 + j2\omega_0 RC}. \quad (2.39)$$

Očigledno je da funkcija prenosa važi i za DC slučaj, tj. $\omega_0 = 0$, kada se dobija da je $\underline{V}_{out0} = \underline{V}_{in0} = 5V$.

Šta je naše kolo iz primera uradilo sa pobudom i kakav je odziv dalo, možemo videti i preko geometrijske interpretacije fazora u konkretnom slučaju, prikazane na slici 2.9.

Dakle, naša putanja rešavanja kola iz primera je bila:

$$10V \sin^2 \omega_0 t \longrightarrow v_{in}$$



Slika 2.9: Pobuda i odziv, fazorska prezentacija.

↓ transformacija primenom trigonometrijske formule

$$5V - 5V \cos 2\omega_0 t \longrightarrow v_{in}$$

↓ LTI (rešenje dobijeno rešavanjem diferencijalne jednačine ili fazorima)

$$5V - 2.5V \cos 2\omega_0 t - 2.5V \sin 2\omega_0 t \longrightarrow v_{out}.$$

Kao što se i moglo očekivati, obzirom da je kolo sa slike 2.1 LTI sistem, svaka sinusoida je prošla kroz LTI sistem kao sinusoida, izmenjene amplitude i faze, ali iste frekvencije. Takođe, kolo sa slike 2.1 je NF filtar (filtrar propusnik niskih učestanosti), čija je granična učestanost $2\omega_0$, što znači da je filtar propustio sve do $2\omega_0$, a na $2\omega_0$ oslabio za pola (3dB-ski propusni opseg).

2.2 Furijeov red u trigonometrijskom obliku

Da li smo električno kolo iz primera (slika 2.1) rešili zahvaljući tome što smo imali sreće i znali trigonometrijsku formulu kojom smo razbili pobudu na sinusoida i time znatno olakšali rešavanje, ili je u pitanju princip gde je naša pobuda iz primera samo jedan slučaj koji proizilazi iz tog principa? Da li u opštem slučaju postoji mogućnost da se bilo koji drugi signal razbije na sinusoida?

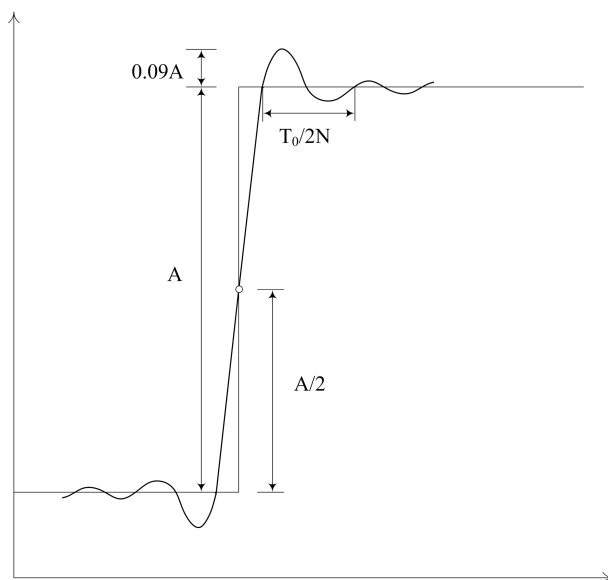
Odgovor na ovo pitanje dao je *Jean-Baptiste Joseph Fourier* (1768-1830), francuski matematičar i fizičar. On je pokazao da se svaki (preciznije, skoro svaki) periodični signal može predstaviti beskonačnom sumom sinusoida, određenih amplituda, učestanosti i faza. Ta ekspanzija periodičnih signala na zbir sinusoida zove se Furijeov red. Takođe, svaki periodični signal se može aproksimirati sabiranjem sinusoida određenih frekvencija, amplituda i početnih faza. Da bi se primenila Furijeova prezentacija periodičnog signala $g(t)$, perioda T_0 , na zbir sinusoida, dovoljni, ali ne i striktno potrebni uslovi, poznati i kao Dirihleovi uslovi (*Dirichlet conditions*) su [1]

1. Periodični signal $g(t)$ mora imati konačan broj ekstrema, tj. konačan broj maksimuma i minimuma, na intervalu jednog perioda T_0 ;
2. Periodični signal $g(t)$ mora imati konačan broj diskontinuiteta na intervalu jednog perioda T_0 ;
3. Signal $g(t)$ mora biti apsolutno integrabilan na periodu T_0 :

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |g(t)| dt < \infty. \quad (2.40)$$

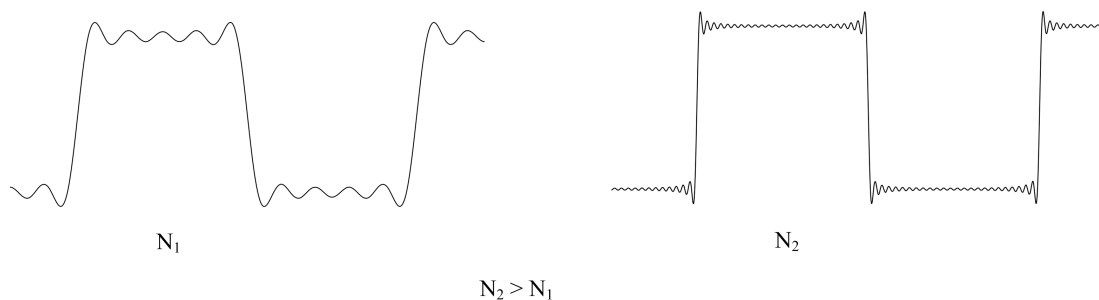
Mala digresija na ovom mestu, a vezano za iskaz da se svaki periodični signal može aproksimirati sabiranjem sinusoida određenih frekvencija, amplituda i početnih faza. Od ovoga pravila

delimično odstupaju periodični signali kod kojih postoje diskontinuiteti, kada aproksimacija odstupa od originalnog periodičnog signala $g(t)$, jer se javlja tzv. Gibsov (*Gibbs*) efekat. U tom slučaju, Furijeovi redovi u tački diskontinuiteta konvergiraju srednjoj vrednosti leve i desne strane originalnog signala (aritmetička sredina vrednosti signala sa obe strane diskontinuiteta). Takođe, sa svake strane diskontinuiteta Furijeovi redovi imaju oscilacije, tzv. oscilatorni premašaj. Period tih oscilacija iznosi $\frac{T_0}{2N}$ (T_0 je period signala $g(t)$), dok N predstavlja broj sinusoida (harmonika) u Furijeovom redu, kojim se aproksimira periodični signal $g(t)$. Maksimalna amplituda ovih oscilacija iznosi oko 9% amplitude diskontinuiteta, i ne zavisi od broja harmonika N , slika 2.10 [1].



Slika 2.10: Gibsov efekat.

Obzirom da su svi realni signali kontinualni, Gibsov fenomen se ne javlja, pa možemo smatrati da je predstava preko Furijeovog reda identična periodičnom signalu. Ipak, neki matematički signali, kao što je periodična povorka pravougaonih impulsa, ima diskontinuitete, i tu je bitno naglasiti postojanje Gibsovog fenomena, slika 2.11.



Slika 2.11: Gibsov efekat, povorka pravougaonih impulsa.

Vratimo se sada na Furijeov iskaz sa početka ovog poglavlja a to je da se svaki periodičan signal (koji ispunjava Dirihleove uslove) može predstaviti preko zbira sinusoida određenih amplituda, učestanosti i faza. Dakle, ako je $f(x)$ periodičan signal koji ispunjava Dirihleove uslove, on se može predstaviti preko Furijeovog reda

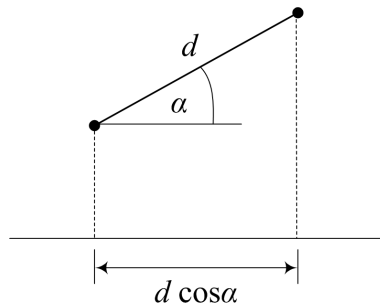
$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \quad (2.41)$$

Ova forma Furijeovog reda zove se Furijeov red u trigonometrijskom obliku.

Dakle, zaključak je da se periodičan signal $f(x)$ može predstaviti zbirom sinusoida ali ostaje pitanje kakvih sinusoida? Preciznije, kako odrediti a_0 , a_k i b_k koji odgovaraju baš našem periodičnom signalu $f(x)$?

2.3 Ortogonalnost funkcija

Pojam ortogonalnosti poznat je iz geometrije. Podsećanja radi, u primeru sa slike 2.12 dat je prikaz projektovanja duži d na ravan. Mera projekcije duži na ravan u datom primeru iznosi $d \cos \alpha$. Ukoliko mera projekcije duži na ravan iznosi 0, što se dobija za slučaj kada je $\alpha = 90^\circ$, tada kažemo da se duž projektuje u nulu, odnosno da su duž i ravan ortogonalne.



Slika 2.12: Ortogonalnost kao mera projekcije.

A šta predstavlja ortogonalnost kada su funkcije u pitanju? O kakvoj meri projekcije se tada radi? Kada su funkcije međusobno ortogonalne?

Primer 1. Neka su date funkcije:

$$f_0 = 1$$

$$f_{1c} = \cos x.$$

Mera projekcije u slučaju dve funkcije definiše se kao:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0 f_{1c} dx. \quad (2.42)$$

Ukoliko ovaj integral iznosi nula, za dve funkcije f_0 i f_{1c} kažemo da su međusobno ortogonalne [6]. Dakle, u slučaju funkcija, integral je mera ortogonalnosti.

U konkretnom slučaju,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos x dx = 0 \quad (2.43)$$

pa kažemo da su funkcije $f_0 = 1$ i $f_{1c} = \cos x$ međusobno ortogonalne.

Primer 2. Neka su date funkcije:

$$f_0 = 1$$

$$f_{1s} = \sin x.$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin x dx = 0 \quad (2.44)$$

zaključuje se da su i $f_0 = 1$ i $f_{1s} = \sin x$ međusobno ortogonalne.

Primer 3. Neka su date funkcije:

$$f_0 = 1$$

$$f_{kc} = \cos(kx), k \in N.$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(kx) dx = 0 \quad (2.45)$$

zaključuje se da su i $f_0 = 1$ i $f_{kc} = \cos(kx)$ međusobno ortogonalne.

Primer 4. Neka su date funkcije:

$$f_0 = 1$$

$$f_{ks} = \sin(kx), k \in N.$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx = 0 \quad (2.46)$$

zaključuje se da su i $f_0 = 1$ i $f_{ks} = \sin(kx)$ međusobno ortogonalne.

Primer 5. Ispitati da li je funkcija $f_0 = 1$ ortogonalna sama sa sobom:

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi \quad (2.47)$$

zaključuje se da funkcija $f_0 = 1$ nije ortogonalna sama sa sobom.

Primer 6. Ispitati da li je funkcija $f_{kc} = \cos(kx)$ ortogonalna sama sa sobom:

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) dx = \pi \quad (2.48)$$

zaključuje se da funkcija $f_{kc} = \cos(kx)$ nije ortogonalna sama sa sobom.

Primer 7. Ispitati da li je funkcija $f_{ks} = \sin(kx)$ ortogonalna sama sa sobom:

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(kx) dx = \pi \quad (2.49)$$

zaključuje se da funkcija $f_{ks} = \sin(kx)$ nije ortogonalna sama sa sobom.

Primer 8. Ispitati da li su funkcije međusobno ortogonalne ($k, m \in N$):

$$\begin{aligned} f_{kc} &= \cos(kx) \\ f_{mc} &= \cos(mx) \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq m \\ \pi, & \text{za } k = m \end{cases} \quad (2.50)$$

zaključuje se da su funkcije $f_{kc} = \cos(kx)$ i $f_{mc} = \cos(mx)$ međusobno ortogonalne samo za slučaj kada je $k \neq m$.

Primer 9. Ispitati da li su funkcije međusobno ortogonalne ($k, m \in N$):

$$\begin{aligned} f_{ks} &= \sin(kx) \\ f_{ms} &= \sin(mx) \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \neq m \\ \pi, & \text{za } k = m \end{cases} \quad (2.51)$$

zaključuje se da su funkcije $f_{ks} = \sin(kx)$ i $f_{ms} = \sin(mx)$ međusobno ortogonalne samo za slučaj kada je $k \neq m$.

Primer 10

Ispitati da li su funkcije međusobno ortogonalne ($k, m \in N$):

$$\begin{aligned} f_{kc} &= \cos(kx) \\ f_{ms} &= \sin(mx) \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(mx) dx = 0 \quad (2.52)$$

zaključuje se da su funkcije $f_{kc} = \cos(kx)$ i $f_{ms} = \sin(mx)$ uvek međusobno ortogonalne.

Dakle, na kraju možemo formirati bazu ortogonalnih funkcija:

1
 $\cos x$
 $\sin x$
 $\cos(2x)$
 $\sin(2x)$
 \cdot
 \cdot
 \cdot
 $\cos(kx)$
 $\sin(kx)$

koje su međusobno ortogonalne, ali ne i sa samom sobom.

Vratimo se sada na početak našeg problema, a to je kako pronaći nepoznate parametre sinusoida pri razvoju periodičnog signala u Furijeov red, jednačina (2.41), tj. kako odrediti nepoznate parametre a_0 , a_k i b_k ?

Da bismo dobili odgovor na ovo pitanje, posmatrajmo čemu je jednak integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x) dx \quad (2.53)$$

pri čemu je $f(x)$ razvoj periodičnog signala u Furijeov red, tj. jednačina (2.41).

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx = 2\pi a_0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

što proizilazi na osnovu osobine ortogonalnosti, konkretno jednačina (2.45) i (2.46). Na osnovu (2.54) najzad proizilazi i čemu je jednaka vrednost parametra a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (2.55)$$

Parametar a_k se određuje tražeći vrednost integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx \quad (2.56)$$

i koristeći osobine ortogonalnosti funkcija, konkretno jednačina (2.45), (2.50) i (2.52), na osnovu čega se dobija

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(mx) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(mx) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(mx) dx = \pi a_m \end{aligned} \quad (2.57)$$

i postoji samo u slučaju kada je $m = k$. Dakle, vrednost parametra a_k iznosi

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx. \quad (2.58)$$

Parametar b_k se određuje na sličan način, tražeći vrednost integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad (2.59)$$

i koristeći osobine ortogonalnosti funkcija, konkretno jednačina (2.46), (2.51) i (2.52), na osnovu čega se dobija

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (2.60)$$

Kako u telekomunikacijama signale najčešće posmatramo u vremenu, pogodno je preći na druge promenljive. Umesto promenljive x posmatramo vreme t , pa je signal periodičan na

intervalu T_0 umesto 2π . Na taj način konverzija Furijeovih redova u zapis pogodan za primenu u telekomunikacijama ide preko transformacija:

$$x \longrightarrow t$$

$$(-\pi, \pi) \longrightarrow \left(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$$

pa je $\frac{t}{x} = \frac{T_0}{2\pi}$, odnosno, $x = \frac{2\pi}{T_0}t = \omega_0 t$.

Najzad, transformacija promenljivih ima oblik:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2\pi}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt. \quad (2.61)$$

Konačno, razvoj periodičnog signala u Furijeov red ima oblik:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (2.62)$$

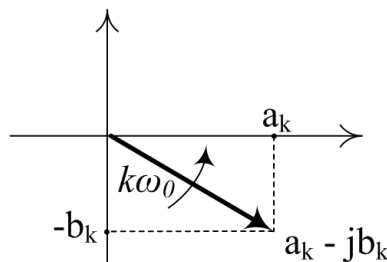
gde su

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \quad (2.63)$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (2.64)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt. \quad (2.65)$$

Naglasimo još i vezu između fazora i Furijeovog reda u trigonometrijskom obliku (2.62). Ako posmatramo samo jednu frekventijsku komponentu razvoja (jedno k), primetićemo da je ona oblika (2.6), na osnovu čega zaključujemo da je jedan harmonik u razvoju Furijeovog reda ustvari jedan fazor $a_k - jb_k$ koji se obrće sa $k\omega_0$, slika 2.13.



Slika 2.13: Veza Furijeovog reda i fazora.

2.4 Polarni oblik Furijeovog reda (jednostrani spektar)

Jedan od popularnih zapisa razvoja periodičnog signala u Furijeov red je i tzv. polarni oblik Furijeovog reda.

Posmatrajmo jedan, k -ti harmonik Furijeovog reda u Dekartovom sistemu, tj. (2.41)

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \quad (2.66)$$

Pitanje glasi možemo li (2.66) pisati u polarnom sistemu, tj.

$$r_k \cos(kx + \varphi_k) \quad (2.67)$$

tj. koja je veza između parametara a_k , b_k , r_k i φ_k ?

Jednostavnim izjednačavanjem (2.66) i (2.67) dobija se

$$a_k = r_k \cos \varphi_k \quad (2.68)$$

i

$$b_k = -r_k \sin \varphi_k \quad (2.69)$$

iz čega sledi

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2.70)$$

$$r_0 = a_0$$

i

$$\varphi_k = \text{atan2}(-b_k, a_k). \quad (2.71)$$

Dakle, Furijeov red u polarnom obliku je

$$f(x) = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k \cos(kx + \varphi_k) \quad (2.72)$$

ili u telekomunikacionom obliku

$$f(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \quad (2.73)$$

Naglasimo i to da se u polarnom obliku Furijeovog reda parametar r_k zove amplitudski spektar (jednostrani), dok se φ_k zove fazni spektar (jednostrani).

2.5 Furijeov red u kompleksnom obliku (dvostrani spektar)

Predstava Furijeovog reda u kompleksnom obliku daje kompaktniji zapis a često i olakšava račun. Kompleksni brojevi povezuju dva realna broja u jedan entitet. Ako pogledamo zapis Furijeovog reda, (2.62), vidimo da svaki harmonik ima realne komponente, a_k i b_k što ga već na prvi pogled čini pogodnim za pakovanje u kompleksan broj.

Na osnovu Ojlerove (*Euler*) formule važi

$$\cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) \quad (2.74)$$

i

$$\sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}). \quad (2.75)$$

Ako u (2.62) zamenimo (2.74) i (2.75), dobija se

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) + \frac{b_k}{2j} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) \quad (2.76)$$

koja se sređivanjem i zapisom parametra a_0 kao $a_0 = a_0 e^{j0\omega_0 t}$ svodi na

$$f(t) = a_0 e^{j0\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} \right). \quad (2.77)$$

Ako skratimo zapis i uvedemo oznake $C_0 = a_0$ i kompleksni koeficijent $\underline{C}_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$, (2.77) postaje

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}. \quad (2.78)$$

Ako uvedemo proširenje na skup celih brojeva, tj. $m = -k$, dobija se da je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{a_{-m} + jb_{-m}}{2} e^{jm\omega_0 t}. \quad (2.79)$$

Najzad, uvođenjem oznake $\underline{C}_m = \frac{a_{-m} + jb_{-m}}{2}$ konačno se dobija Furijeov red u kompleksnom obliku:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.80)$$

gde je

$$\underline{C}_k = \begin{cases} a_0, & k = 0 \\ \frac{a_k - jb_k}{2}, & k > 0 \\ \frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2}, & k < 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Kompleksni koeficijenti \underline{C}_k se mogu izračunati zamenom proračunatih parametara a_k (2.64) i b_k (2.65) u (2.81). Za slučaj $k > 0$ dobije se

$$\begin{aligned} \underline{C}_k = \frac{1}{2} (a_k - jb_k) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) (\cos(k\omega_0 t) - j \sin(k\omega_0 t)) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Na sličan način se dobija ista forma kompleksnih koeficijenata \underline{C}_k i za slučaj kada je $k < 0$, koristeći činjenicu da je $f(x) = \sin x$ neparna funkcija, dok se zamenom $k = 0$ dobija da je $C_0 = a_0$.

Najzad, Furijeov transformacioni par u kompleksnom obliku je

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} \\ \underline{C}_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

U kompleksnom obliku Furijeovog reda, \underline{C}_k se još naziva i dvostrani spektar, jer obuhvata i pozitivne i negativne frekvencijske komponente. Kako je

$$\underline{C}_k = |\underline{C}_k| e^{j\theta_k} \quad (2.84)$$

deo $|\underline{C}_k|$ se zove amplitudski spektar (dvostrani), a θ_k se zove fazni spektar (dvostrani).

Najzad, na osnovu (2.70), (2.71) i (2.81) se može izračunati i veza jednostranog i dvostranog amplitudskog i faznog spektra:

$$|\underline{C}_k| = \begin{cases} a_0 = r_0, & k = 0 \\ \frac{|a_k - jb_k|}{2} = \frac{r_k}{2}, & k > 0 \\ \frac{|a_{-k} + jb_{-k}|}{2} = \frac{r_k}{2}, & k < 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

i

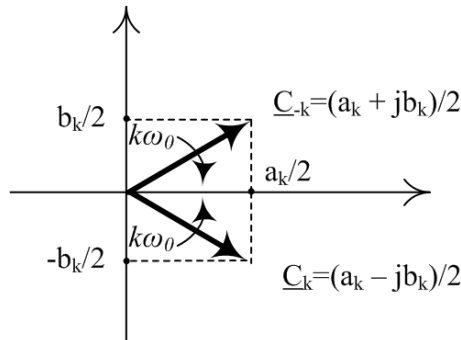
$$\theta_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \text{atan2}(-b_k, a_k) = \varphi_k, & k > 0 \\ \text{atan2}(b_{-k}, a_{-k}) = -\varphi_k, & k < 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

iz čega se zaključuje da je dvostrani amplitudski spektar parna funkcija učestanosti, a dvostrani fazni spektar neparna funkcija učestanosti, tj.

$$|\underline{C}_k| = |\underline{C}_{-k}| \quad (2.87)$$

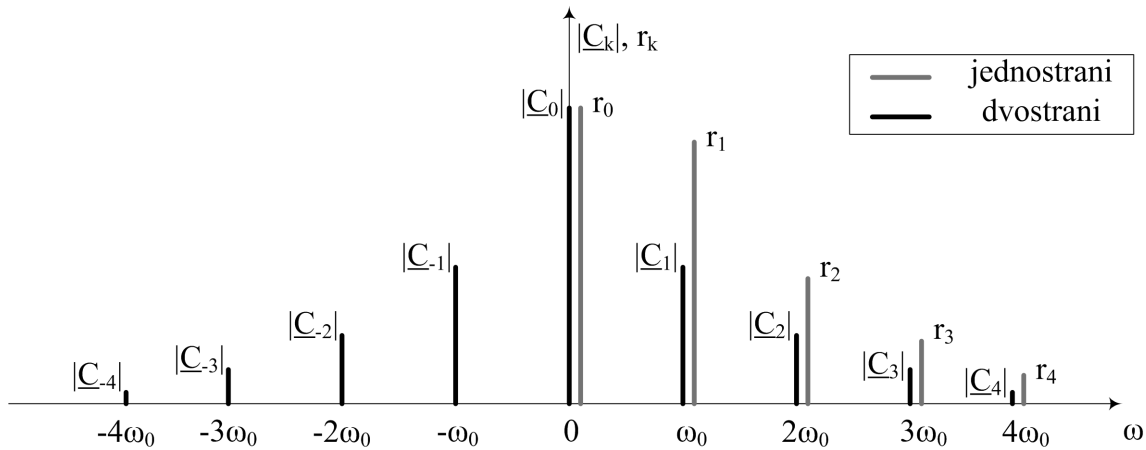
$$\arg \underline{C}_{-k} = -\arg \underline{C}_k = -\theta_k. \quad (2.88)$$

Kao i u slučaju jednostranog spektra, moguće je uspostaviti vezu između fazora i Furijeovog reda u kompleksnom obliku, tj. dvostranog spektra (2.83). Za razliku od jednostranog spektra, a na osnovu veze koeficijenata jednostranog i dvostranog spektra (2.85), u slučaju dvostranog spektra za jednu frekvencijsku komponentu razvoja (jedno k), imamo dva duplo manja fazora nego u slučaju jednostranog spektra, slika 2.13, koji se obrću sa istom $k\omega_0$, ali u suprotnim smerovima. Geometrijska interpretacija Furijeovog reda u kompleksnom obliku, odnosno dvostranog spektra, i fazora, prikazana je na slici 2.14.

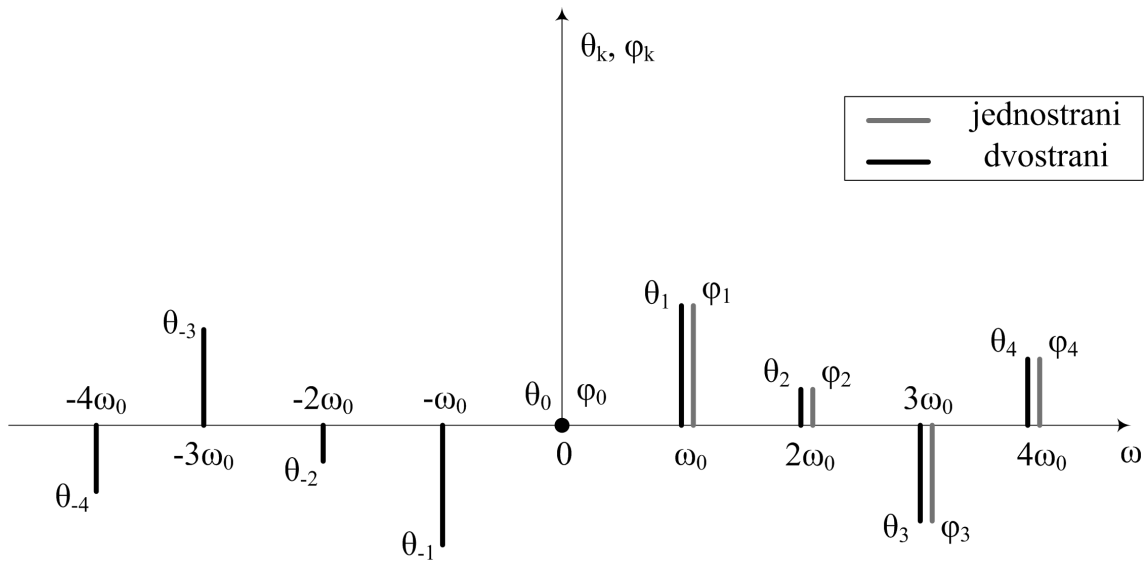


Slika 2.14: Veza Furijeovog reda (dvostrani spektar) i fazora.

Konačno, u zaključku na temu spektra periodičnih signala, može se reći da su spektri periodičnih signala diskretni, što znači da spektralne komponente ne postoje na svim učestanostima već samo na umnošcima osnovne učestanosti ω_0 , tj. na $k\omega_0$, koji se nazivaju harmonici. Spektri periodičnih signala iz ovog razloga se često nazivaju i linijski spektri. Na slici 2.15 dat je primer amplitudskog spektra za jednostrani i dvostrani spektar, dok je na slici 2.16 dat prikaz faznog spektra za jednostrani i dvostrani spektar. Očigledno je da je amplitudski spektar parna funkcija učestanosti, a fazni spektar neparna funkcija učestanosti.



Slika 2.15: Amplitudski spektar.



Slika 2.16: Fazni spektar.

2.6 Osobine Furijeovih redova

U okviru ovog poglavlja biće prikazane neke osobine Furijeovih redova, one koje se najčešće primenjuju.

2.6.1 Linearnost

Osobina linearnosti Furijeovih redova sledi iz osobine linearnosti operatora sume i integrala. Kao što je već rečeno, linearnost se zasniva na osobinama homogenosti i aditivnosti. U konkretnom slučaju, posmatrajmo dva periodična signala $f(t)$ i $g(t)$, čiji su kompleksni Furijeovi koeficijenti \underline{C}_k i \underline{G}_k , respektivno, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{C}_k$$

$$g(t) \longrightarrow \underline{G}_k.$$

Tada važi

$$\text{homogenost: } af(t) \longrightarrow a\underline{C}_k$$

$$\text{aditivnost: } f(t) + g(t) \longrightarrow \underline{C}_k + \underline{G}_k.$$

2.6.2 Simetrije

Osobina simetrije odnosi se na to da su neki članovi razvoja Furijeovog reda jednaki nuli, u zavistosti od toga da li je periodična funkcija $f(t)$ čiji razvoj računamo parna ili neparna.

U slučaju kada je $f(t)$ parna funkcija, tj. $f(-t) = f(t)$, koeficijenti b_k u razvoju (2.62) su jednaki nuli, $b_k = 0$, pa se razvoj Furijeovog reda svodi na

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t). \quad (2.89)$$

U razvoju Furijeovog reda u kompleksnom obliku, (2.80), a na osnovu (2.81), kompleksni koeficijenti \underline{C}_k imaju samo realni deo ($\Im(\underline{C}_k) = 0$) i postaju

$$\underline{C}_k = \frac{a_k}{2}, \quad \forall k \quad (2.90)$$

dok fazni spektar postaje

$$\theta_k = 0, \pm\pi, \quad \forall k. \quad (2.91)$$

U slučaju kada je $f(t)$ neparna funkcija, tj. $f(-t) = -f(t)$, koeficijenti a_k i a_0 u razvoju 2.62 su jednaki nuli, $a_k = 0, a_0 = 0$, pa se razvoj Furijeovog reda svodi na

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t). \quad (2.92)$$

U razvoju Furijeovog reda u kompleksnom obliku, (2.80), a na osnovu (2.81), kompleksni koeficijenti \underline{C}_k u slučaju kada je $f(t)$ neparna funkcija imaju samo imaginarni deo ($\Re(\underline{C}_k) = 0$) i postaju

$$\underline{C}_k = \begin{cases} -j\frac{b_k}{2}, & \text{za } k > 0 \\ j\frac{b_k}{2}, & \text{za } k < 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

dok fazni spektar postaje

$$\theta_k = \pm\frac{\pi}{2}. \quad (2.94)$$

2.6.3 Kašnjenje u vremenskom domenu

Osobina kašnjenja u vremenskom domenu daje odgovor na pitanje: ako su kompleksni koeficijenti \underline{C}_k razvoja Furijeovog reda periodične funkcije $f(t)$, koji su koeficijenti razvoja u Furijeov red periodične funkcije zakašnjenje u vremenu, tj. $f(t - \Delta t)$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{C}_k$$

$$f(t - \Delta t) \longrightarrow ?$$

Na osnovu (2.83), nepoznati koeficijenti računaju se kao

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t - \Delta t) e^{-jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2} + \Delta t}^{\frac{T_0}{2} + \Delta t} f(t - \Delta t) e^{-jk\omega_0(t - \Delta t)} e^{-jk\omega_0 \Delta t} d(t - \Delta t) = \\ &= e^{-jk\omega_0 \Delta t} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \underline{C}_k e^{-jk\omega_0 \Delta t} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Dakle, kašnjenje u vremenskom domenu za vremenski interval Δt dovodi do toga da koeficijenti razvoja u Furijeov red postaju

$$f(t - \Delta t) \longrightarrow \underline{C}_k e^{-jk\omega_0 \Delta t}.$$

2.6.4 Inverzija vremenske ose

Osobina inverzije vremenske ose daje vezu između razvoja u Furijeov red periodične funkcije $f(t)$ i periodične funkcije $f(-t)$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{C}_k$$

$$f(-t) \longrightarrow ?$$

Na osnovu (2.83), nepoznati koeficijenti računaju se kao

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.96)$$

što uz smenu $-t = \tau$ postaje

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(\tau) e^{jk\omega_0 \tau} d\tau = \underline{C}_k^* \quad (2.97)$$

odnosno predstavlja konjugovano kompleksnu vrednost koeficijenata \underline{C}_k periodične funkcije $f(t)$. Dakle, važi da je

$$f(-t) \longrightarrow \underline{C}_k^*.$$

2.6.5 Diferenciranje

Osobina diferenciranja daje vezu između razvoja u Furijeov red periodične funkcije $f(t)$ i izvoda te funkcije $\frac{df}{dt}$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{C}_k$$

$$\frac{df(t)}{dt} \longrightarrow ?$$

Na osnovu (2.83), periodična funkcija $f(t)$ dobija se kao

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.98)$$

Nalaženjem izvoda leve i desne strane, dobija se

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} jk\omega_0 \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.99)$$

na osnovu čega se izvodi zaključak da se diferenciranje periodične funkcije $f(t)$ odrazilo na koeficijente razvoja u Furijeov red tako što su oni pomnoženi faktorom $jk\omega_0$, tj. važi da je

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow jk\omega_0 \underline{C}_k.$$

2.6.6 Integraljenje

Osobina integraljenja daje vezu između razvoja u Furijeov red periodične funkcije $f(t)$ i integrala te funkcije $\int f(t)dt$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{C}_k$$

$$\int f(t)dt \longrightarrow ?$$

Na osnovu (2.83), periodična funkcija $f(x)$ dobija se kao

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.100)$$

Nalaženjem integrala leve i desne strane, dobija se

$$\int f(t)dt = \int \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k \int e^{jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\underline{C}_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \quad (2.101)$$

na osnovu čega se vidi da se integraljenje periodične funkcije $f(t)$ odrazilo na koeficijente razvoja u Furijeov red tako što su oni podeljeni faktorom $jk\omega_0$, tj. važi da je

$$\int f(t)dt \longrightarrow \frac{\underline{C}_k}{jk\omega_0}$$

za $k \neq 0$, $\underline{C}_0 = 0$.

2.7 Parsevalova teorema

Pre samog iskaza Parsevalove teoreme (*Parseval's theorem*), definisamo dva bitna parametra periodičnog signala $f(t)$:

- (1) srednja vrednost, f_{mean}
- (2) srednja kvadratna vrednost (efektivna vrednost), f_{RMS} .

Srednja vrednost signala $f(t)$ periodičnog na intervalu T_0 se definiše kao

$$f_{mean} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt. \quad (2.102)$$

Srednja kvadratna vrednost (efektivna vrednost) signala $f(t)$ periodičnog na intervalu T_0 se definiše kao

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt}. \quad (2.103)$$

Sušтина Parsevalove teoreme jeste da se srednja snaga periodičnog signala može dobiti i iz njegovog spektra sabiranjem kvadrata njegovih harmonika.

Formalno, Parsevalova teorema glasi: kvadrat efektivne vrednosti periodičnog signala $f(t)$ jednak je zbiru kvadrata efektivnih vrednosti njegovih harmonijskih komponenata. Fizički smisao Parsevalove teoreme dobijamo ako signal $f(t)$ posmatramo kao napon ili struju na jediničnoj otpornosti, jer tada kvadrat efektivne vrednosti signala predstavlja srednju snagu tog signala. Otuda i tvrdnja da je srednja snaga signala $f(t)$ jednaka zbiru kvadrata njegovih harmonika, tj.

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underline{C}_k|^2. \quad (2.104)$$

Dokaz Parsevalove teoreme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} dt = \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{jk\omega_0 t} dt &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k \underline{C}_k^* = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underline{C}_k|^2. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Parsevalova teorema ima oblik (2.104) za slučaj dvostranog spektra. Za trigonometrijski oblik Furijeovog reda (2.62) Parsevalova teorema se dobija imajući u vidu da je

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underline{C}_k|^2 &= \underline{C}_0^2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |\underline{C}_k|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} |\underline{C}_k|^2 = \\ \underline{C}_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k - jb_k|^2}{4} &= \underline{C}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned} \quad (2.106)$$

na osnovu čega sledi

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2). \quad (2.107)$$

Najzad, imajući u vidu vezu (2.70), sledi i oblik Parsevalove teoreme za slučaj polarnog zapisa Furijeovog reda, odnosno, jednostranog spektra

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt = r_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} r_k^2. \quad (2.108)$$

2.8 Korelacija periodičnih signala

Korelacija periodičnih signala je integralna mera sličnosti dva periodična signala (iste periode T), koja pokazuje stepen poklapanja ovih signala kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraaj τ , tj.

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t + \tau) dt \quad (2.109)$$

gde je $R_{xy}(\tau)$ autokorelacija periodičnih signala $x(t)$ i $y(t)$. Da bismo pronašli Furijeov transformacioni par za korelaciju, pođimo od razvoja u Furijeov red signala $y(t + \tau)$ u formuli (2.109), koristeći i osobinu kašnjenja u vremenskom domenu (2.95) i osobinu inverzije vremenske ose (2.97), tj.

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} e^{jk\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_k^* \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Dakle, Furijeov transformacioni par čine

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_k^* \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} \\ \underline{X}_k^* \underline{Y}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{xy}(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.111)$$

pri čemu važi $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$.

2.8.1 Autokorelacija periodičnih signala

Autokorelacija periodičnih signala definiše se identično kao i korelacija periodičnih signala, samo je autokorelacija integralna mera sličnosti signala sa samim sobom, tj.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt. \quad (2.112)$$

Na osnovu izraza (2.110) proizilazi da je

$$R_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_k^* \underline{X}_k e^{jk\omega_0\tau} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underline{X}_k|^2 e^{jk\omega_0\tau}. \quad (2.113)$$

Veličina $|\underline{X}_k|^2$ se naziva i spektar snage signala $x(t)$ i često se označava sa $S_{xx}(j\omega)$.

Dakle, Furijeov transformacioni par čine autokorelacija i spektar snage signala $x(t)$

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\underline{X}_k|^2 e^{jk\omega_0\tau} \\ S_{xx}(j\omega) &= |\underline{X}_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_{xx}(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.114)$$

pri čemu važi $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$.

2.9 Konvolucija periodičnih signala

Konvolucija periodičnih signala $x(t)$ i $y(t)$ (oba iste periode T) predstavlja još jednu integralnu meru sličnosti ovih signala. Ostaje pitanje za kakvu tačno integralnu meru sličnosti kažemo da je konvolucija?

Da bismo dobili odgovor na ovo pitanje, pođimo od korelacije signala $x(t)$ i $y(t)$ i njenog transformacionog para, tj. izraza (2.111). Vidimo da je spektar korelacije dva signala jednak proizvodu spektra jednog signala i konjugovano kompleksnog spektra drugog signala. Pokušajmo sada da pronađemo veličinu u vremenskom domenu koja povezuje periodične signale $x(t)$ i $y(t)$ a čiji je spektar jednak proizvodu spektara ovih signala,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_k \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} = \\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \underline{Y}_k e^{jk\omega_0(\tau-t)} dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}_k e^{jk\omega_0(\tau-t)} dt = \\ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} e^{-jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y(\tau-t) dt. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Dakle, dobijena veza u vremenskom domenu signala $x(t)$ i $y(t)$ čiji je spektar jednak proizvodu pojedinačnih spektara ovih signala ima oblik

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y(\tau-t) dt = \rho_{xy}(\tau) \quad (2.116)$$

i naziva se konvolucija, u oznaci $\rho_{xy}(\tau)$. Zaključak je da konvolucija dva signala u vremenskom domenu ima spektar koji je jednak proizvodu spektara pojedinačnih signala u frekvencijskom domenu.

Dakle, Furijeov transformacioni par čine

$$\rho_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{X}_k \underline{Y}_k e^{jk\omega_0\tau} \quad (2.117)$$

$$\underline{X}_k \underline{Y}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \rho_{xy}(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau$$

pri čemu važi $\rho_{xy}(\tau) = \rho_{yx}(\tau)$.

2.10 Primeri

Primer 1. Odrediti i nacrtati jednostrani i dvostrani spektar signala

$$f(t) = 10 \cos \omega_0 t. \quad (2.118)$$

Rešenje. Imajući u vidu razvoj periodičnog signala u Furijeov red u trigonometrijskom obliku, izraz (2.62), očigledno je da je u datom primeru $a_0 = 0$, $a_k = a_1 = 10$ i $b_k = 0$. Na osnovu toga je jednostrani amplitudski spektar

$$r_k = r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = a_1 = 10 \quad (2.119)$$

a jednostrani fazni spektar

$$\varphi_k = \varphi_1 = \text{atan2}(-b_1, a_1) = \text{atan2}(0, 10) = 0. \quad (2.120)$$

Dvostrani spektar se dobija primenom izraza za vezu jednostranog i dvostranog amplitudskog spektra (2.85) i izraza za vezu jednostranog i dvostranog faznog spektra (2.86), tj.

$$\underline{C}_k = \begin{cases} \underline{C}_1 = \frac{|a_1 - jb_1|}{2} = \frac{r_1}{2} = 5, & k > 0 \\ \underline{C}_{-1} = \frac{|a_{-1} + jb_{-1}|}{2} = \frac{r_1}{2} = 5, & k < 0 \end{cases} \quad (2.121)$$

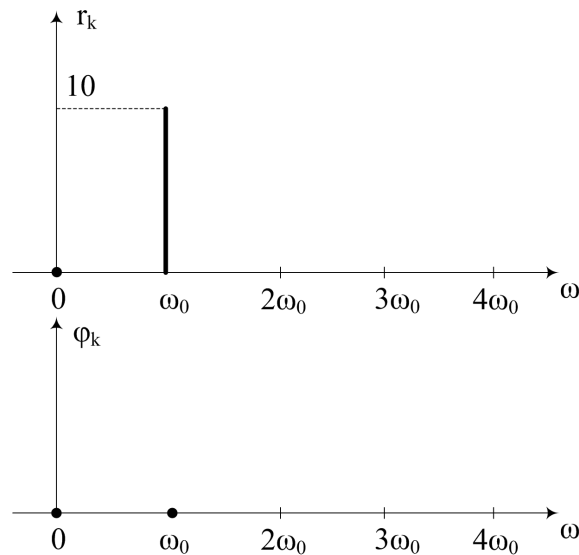
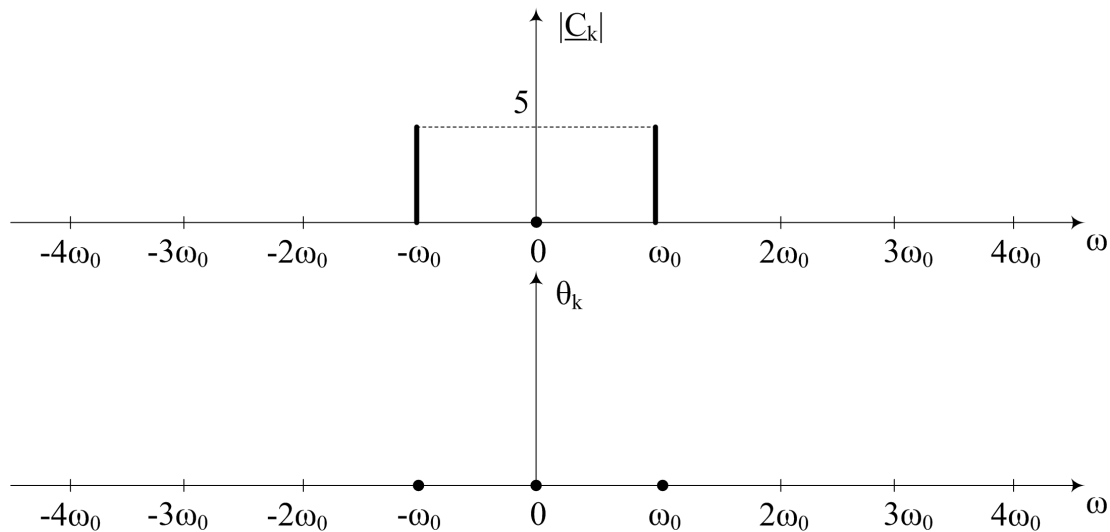
$$\theta_k = \begin{cases} \varphi_1 = 0 & k > 0 \\ \varphi_{-1} = 0 & k < 0. \end{cases} \quad (2.122)$$

Koeficijenti dvostranog spektra se mogu dobiti i zapisom (2.118) u obliku

$$f(t) = 10 \cos \omega_0 t = 5 e^{-j\omega_0 t} + 5 e^{j\omega_0 t} \quad (2.123)$$

gde je očigledno da je $\underline{C}_1 = \underline{C}_{-1} = 5$.

Jednostrani amplitudski i fazni spektar prikazani su na slici 2.17, a dvostrani amplitudski i fazni spektar prikazani na slici 2.18.

Slika 2.17: Jednostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.Slika 2.18: Dvostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.

Primer 2. Odrediti i nacrtati jednostrani i dvostrani spektar signala

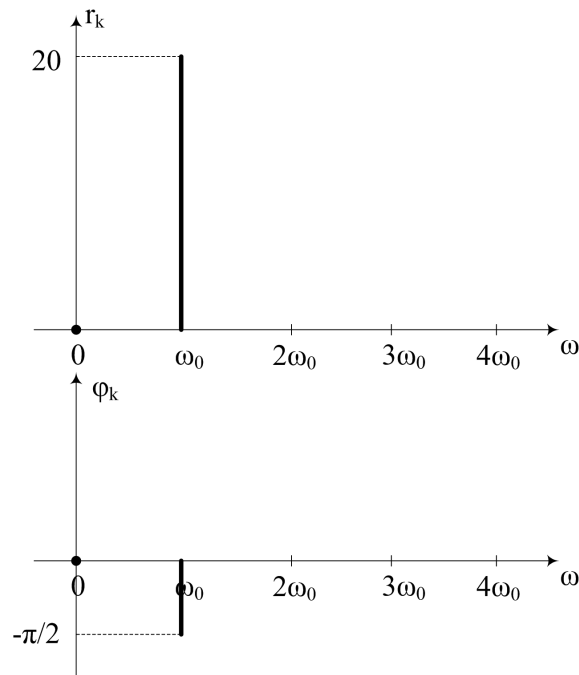
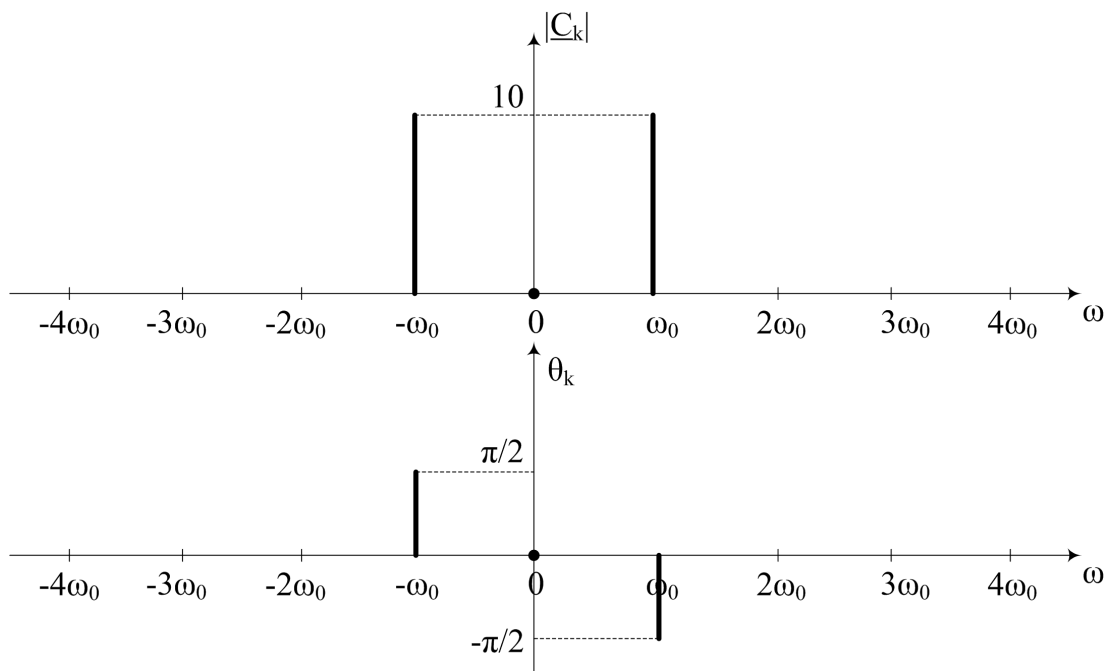
$$f(t) = 20 \sin \omega_0 t. \quad (2.124)$$

Rešenje. Kao i u prethodnom primeru, signal $f(t)$ se može pisati u obliku

$$f(t) = 20 \sin \omega_0 t = 10j e^{-j\omega_0 t} - 10j e^{j\omega_0 t} \quad (2.125)$$

odakle sledi da je: $r_k = r_1 = 20$, $\varphi_k = \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $|\underline{C}_k| = |\underline{C}_{-k}| = |\underline{C}_1| = 10$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_{-1} = \frac{\pi}{2}$. Jednostrani amplitudski i fazni spektar prikazani su na slici 2.19, a dvostrani amplitudski i fazni spektar prikazani na slici 2.20.

Primer 3. Odrediti i nacrtati jednostrani i dvostrani spektar signala

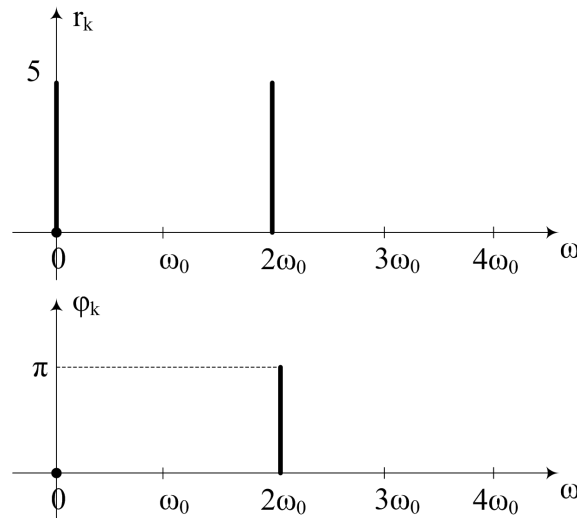
Slika 2.19: Jednostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.Slika 2.20: Dvostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.

$$f(t) = 10 \sin^2 \omega_0 t. \quad (2.126)$$

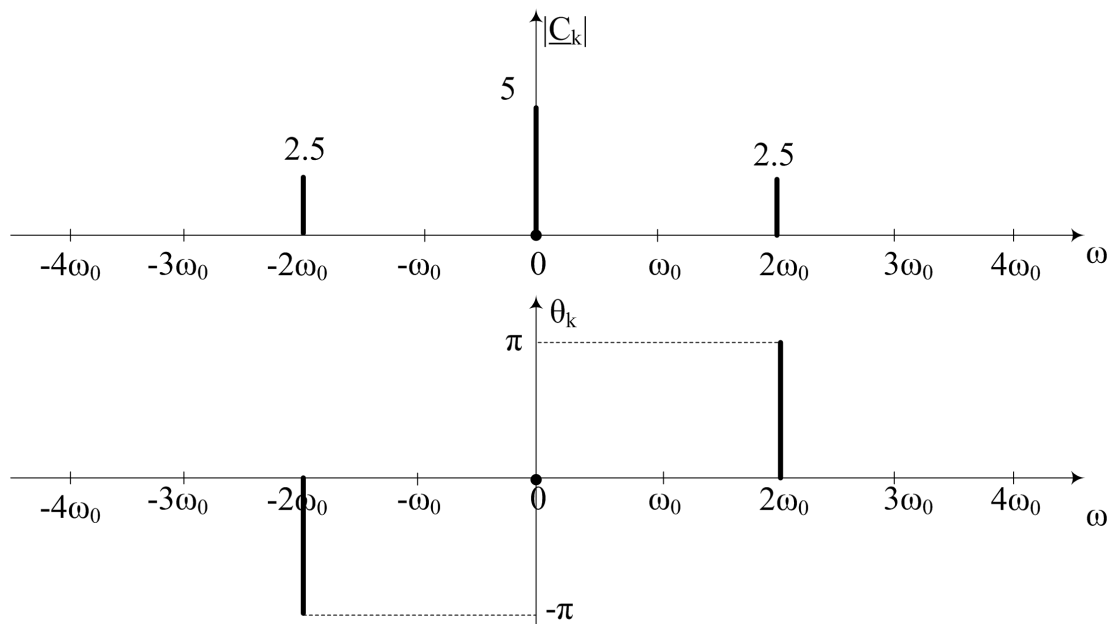
Rešenje. Kao i u prethodnom primeru, signal $f(t)$ se može pisati u obliku

$$f(t) = 10 \sin^2 \omega_0 t = 5 - 5 \cos 2\omega_0 t = 5 - 2.5e^{-j2\omega_0 t} - 2.5e^{j2\omega_0 t} \quad (2.127)$$

odakle sledi da je: $r_0 = 5$, $r_k = r_2 = 5$, $\varphi_k = \varphi_2 = \pi$, $|\underline{C}_k| = |\underline{C}_{-k}| = |\underline{C}_2| = 2.5$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_{-2} = -\pi$. Jednostrani amplitudski i fazni spektar prikazani su na slici 2.21, a dvostrani amplitudski i fazni spektar prikazani na slici 2.22.



Slika 2.21: Jednostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.

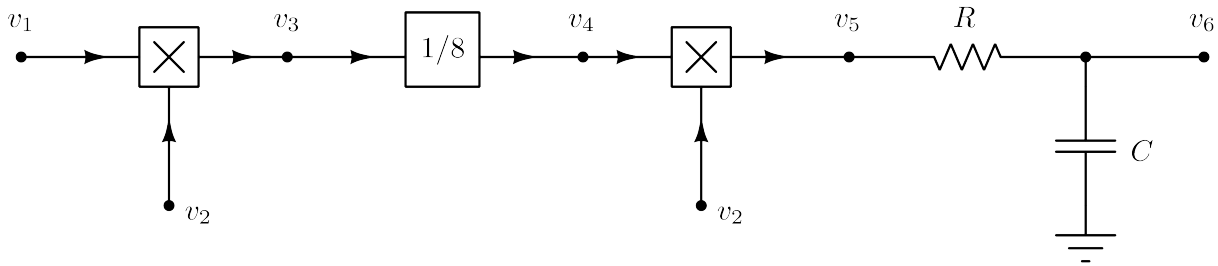


Slika 2.22: Dvostrani amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$.

Primer 4.

U cilju prenosa informacije o jednosmernom naponu $v_1(t) = 2V$, predajni signal se množi signalom (nosiocem) $v_2(t) = 4V \cos(\omega_0 t)$ čime se dobija signal $v_3(t) = \frac{1}{1V} v_1(t) v_2(t)$ koji se potom prenosi kanalom do prijemnika (slika 2.23). Tokom prenosa, signal u kanalu oslabi 8 puta, pa je njegova vrednost na ulazu u prijemnik $v_4(t) = \frac{1}{8} v_3(t)$. U prijemniku se signal $v_4(t)$ opet množi signalom $v_2(t)$ čime se dobija signal $v_5(t) = \frac{1}{1V} v_4(t) v_2(t) = \frac{1}{8V^2} v_1(t) v_2^2(t)$. Na kraju se signal $v_5(t)$ dovodi na filter sa slike kod koga je $R = 15.915k\Omega$ i $C = 1nF$ i na njegovom izlazu se dobija signal $v_6(t)$.

Odrediti izraze za signale $v_3(t)$, $v_4(t)$, $v_5(t)$ i $v_6(t)$ u vremenskom domenu i njihove razvoje u dvostrani Furijeov red (odrediti Furijeove koeficijente koji su različiti od nule). Smatrati da je $1 \ll 200$, kao i da je $\omega_0 = 2\pi 1\text{MHz}$.



Slika 2.23: Sistem za prenos.

Rešenje. Imajući u vidu sistem za prenos prikazan na slici 2.23 može se pisati:

$$v_3(t) = \frac{1}{1\text{V}} v_1(t) v_2(t) = \frac{1}{1\text{V}} 2\text{V} \cdot 4\text{V} \cos(\omega_0 t) = 8\text{V} \cos(\omega_0 t) = 4\text{V} e^{-j\omega_0 t} + 4\text{V} e^{j\omega_0 t} \quad (2.128)$$

odakle se može videti da je $C_1 = C_{-1} = 4\text{V}$.

$$v_4(t) = \frac{1}{8} 8\text{V} \cos(\omega_0 t) = 1\text{V} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\text{V} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}\text{V} e^{j\omega_0 t} \quad (2.129)$$

odakle se može videti da je $C_1 = C_{-1} = 0.5\text{V}$.

$$v_5(t) = \frac{1}{8\text{V}^2} 2\text{V} \cdot 16\text{V}^2 \cos^2(\omega_0 t) = 4\text{V} \cos^2(\omega_0 t) = 2\text{V} + 2\text{V} \cos(2\omega_0 t) = 2\text{V} + 1\text{V} e^{-j2\omega_0 t} + 1\text{V} e^{j2\omega_0 t} \quad (2.130)$$

odakle se može videti da je $C_0 = 2\text{V}$, $C_2 = C_{-2} = 1\text{V}$.

Da bi se odredili i koeficijenti signala $v_6(t)$, zbog jednostavnosti rešavanja pogodno bi bilo preći na fazore, pa se može pisati

$$\underline{V}_6 = \frac{\frac{1}{j2\omega_0 C}}{\frac{1}{j2\omega_0 C} + R} \underline{V}_5 = \frac{1}{1 + j2\omega_0 C R} \underline{V}_5 = \frac{1}{1 + j200} \underline{V}_5 \approx \frac{1}{j200} \underline{V}_5 = -j \frac{1}{200} \underline{V}_5 = -j0.01 \quad (2.131)$$

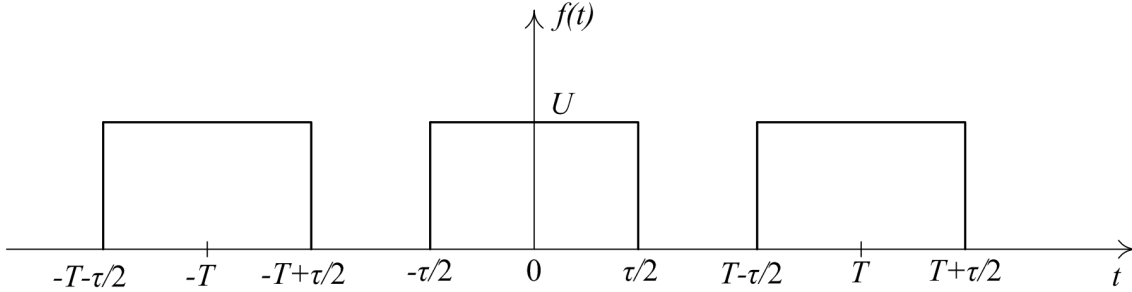
obzirom da je $\underline{V}_5 = 2\text{V}$. Najzad, preko fazorske transformacije, poglavlje 2.1.1, dobija se signal $v_6(t)$

$$v_6(t) = 2\text{V} + 0.01 \sin(2\omega_0 t) = 2\text{V} + 0.005j e^{-j2\omega_0 t} - 0.005j e^{j2\omega_0 t} \quad (2.132)$$

odakle se može videti da je $C_0 = 2\text{V}$, $C_2 = -0.005j$, $C_{-2} = 0.005j$.

Primer 5. Odrediti amplitudski i fazni spektar periodičnog signala prikazanog na slici 2.24 i definisanom na intervalu jedne periode T kao

$$f(t) = \begin{cases} U, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.133)$$



Slika 2.24: Periodična povorka pravougaonih impulsa.

Rešenje. Kako se radi o periodičnom signalu, primenjuje se izraz za računanje koeficijenata Furijeovog reda, izraz (2.83)

$$\begin{aligned} \underline{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U e^{-jk\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{U}{T} \frac{1}{jk\omega_0} \int_{-jk\omega_0 \frac{\tau}{2}}^{jk\omega_0 \frac{\tau}{2}} e^x dx = \frac{U}{T} \frac{1}{jk\omega_0} (e^{jk\omega_0 \frac{\tau}{2}} - e^{-jk\omega_0 \frac{\tau}{2}}) = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2})}{k\omega_0 \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

gde je x privremena promenljiva prilikom uvođenja smene $x = -jk\omega_0 t$.

Spektar signala $f(t)$ je $\underline{C}_k = |\underline{C}_k| e^{j\theta_k}$ pri čemu je amplitudski spektar

$$|\underline{C}_k| = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2})}{k\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| \quad (2.135)$$

a fazni

$$\theta_k = \begin{cases} 0, & \sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2}) > 0 \\ \pm\pi, & \sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2}) < 0. \end{cases} \quad (2.136)$$

Dakle, spektri periodičnih signala nemaju komponente na svim učestanostima, već samo na umnošcima osnovne učestanosti signala, tj. na $k\omega_0$, pa se zato ovi spektri nazivaju i linijskim spektrima.

Radi lakšeg sagledavanja linijskih spektara, često se uvodi tzv. anelopa amplitudskog spektra $C(\omega)$, koja se dobija iz amplitudskog spektra $|\underline{C}_k|$ zamenom diskretnih vrednosti učestanosti $k\omega_0$ kontinualnom promenljivom ω , tj.

$$C(\omega) = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}} \right|. \quad (2.137)$$

Na isti način se može uvesti i anvelopa faznog spektra

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \sin(\omega\frac{\tau}{2}) > 0 \\ \pm\pi, & \sin(\omega\frac{\tau}{2}) < 0. \end{cases} \quad (2.138)$$

Maksimalna vrednost anvelope amplitudskog spektra javlja se na učestanosti $\omega = 0$ i iznosi

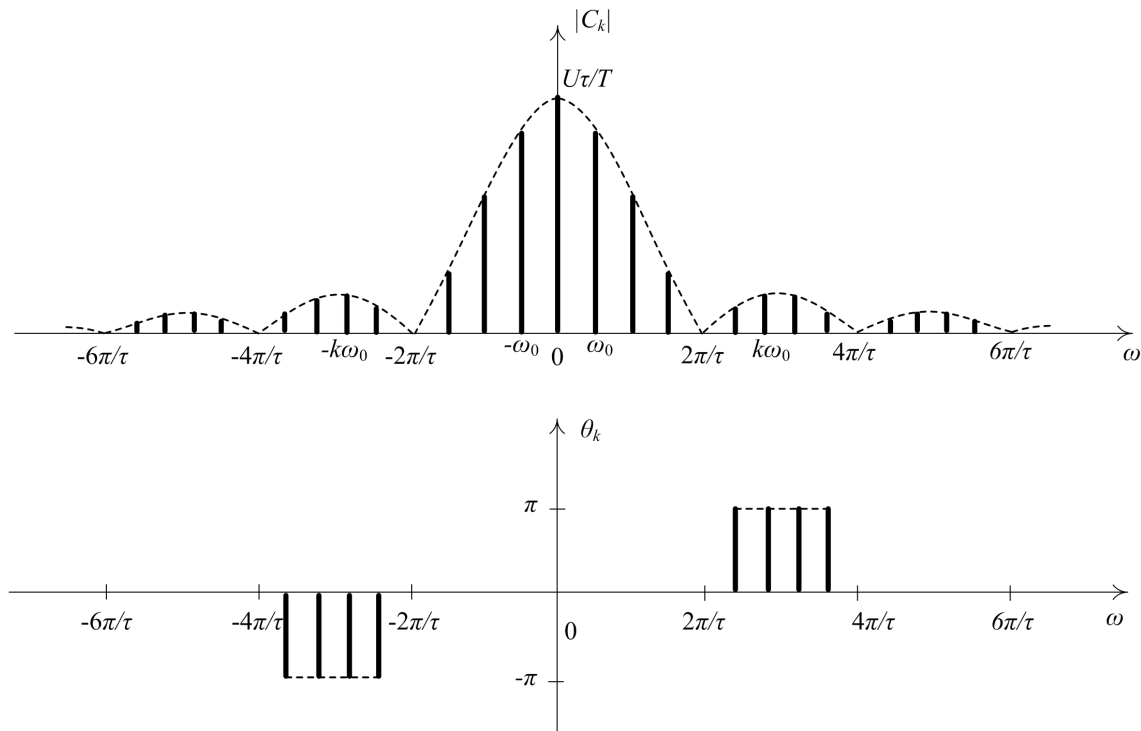
$$C_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} |C(\omega)| = \frac{U\tau}{T}. \quad (2.139)$$

Nule anvelope amplitudskog spektra javljaju se na učestanostima na kojima je ispunjen uslov $\sin(\omega\frac{\tau}{2}) = 0$, tj. na

$$\omega = \frac{2k\pi}{\tau} \quad (2.140)$$

gde je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Aplitudski i fazni spektar signala $f(t)$ prikazani su na slici 2.25.



Slika 2.25: Amplitudski i fazni spektar periodične povorke pravougaonih impulsa.

Na osnovu prethodne analize moguće je izvesti nekoliko zaključaka:

1. Spektar periodične povorke pravougaonih impulsa je beskonačno širok, diskretan je (linijski) sa komponentama na umnošcima osnovne učestanosti $k\omega_0$, koji se nazivaju harmonici.

2. Amplitudski spektar je parna funkcija učestanosti, a fazni spektar neparna funkcija učestanosti.

3. Nule anvelope amplitudskog spektra nalaze se na $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$ i mogu se ali i ne moraju poklapati sa učestanostima harmonika.

4. Maksimum anvelope amplitudskog spektra iznosi $\frac{U\tau}{T}$. Može se zaključiti da što je signal prisutniji u periodu ($\tau \nearrow$), to je spektar izraženiji u nuli (raste maksimalna vrednost anvelope).

5. Kada perioda signala raste, $T \nearrow$ razmak između harmonika se smanjuje, a spektar se zgušnjava, tj. $T \nearrow \Rightarrow \omega_0 \searrow$ jer je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. U graničnom slučaju kada $T \rightarrow \infty$, spektar postaje kontinualan, a signal aperiodičan. Sa druge strane, promena perioda T ne utiče na poziciju nula anvelope.

6. Kada se trajanje impulsa smanjuje $\tau \searrow$, nule anvelope spektra se pomeraju ka višim učestanostima, spektar se širi, tj. $\tau \searrow \Rightarrow \frac{2\pi}{\tau} \nearrow$. U graničnom slučaju, kada $\tau \rightarrow 0$, anvelopa spektra postaje ravna. Sa druge strane, promena trajanja impulsa τ ne utiče na razmak između harmonika.

7. U slučaju kada $\tau \rightarrow 0$, $U \rightarrow \infty$, $U\tau = 1$, povorka pravougaonih impulsa postaje povorka Dirakovih impulsa

$$f_\delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.141)$$

konstantne anvelope amplitudskog spektra $\frac{1}{T}$, i faznog spektra jednakim nuli na svim harmonicima, slika 2.26.

Alternativno, zadatak se može rešavati i primenom razvoja Furijeovog reda u trigonometrijskom obliku ili polarnom obliku (jednostrani spektar). Primenom razvoja u trigonometrijskom obliku, izraz (2.62), dobija se

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t). \quad (2.142)$$

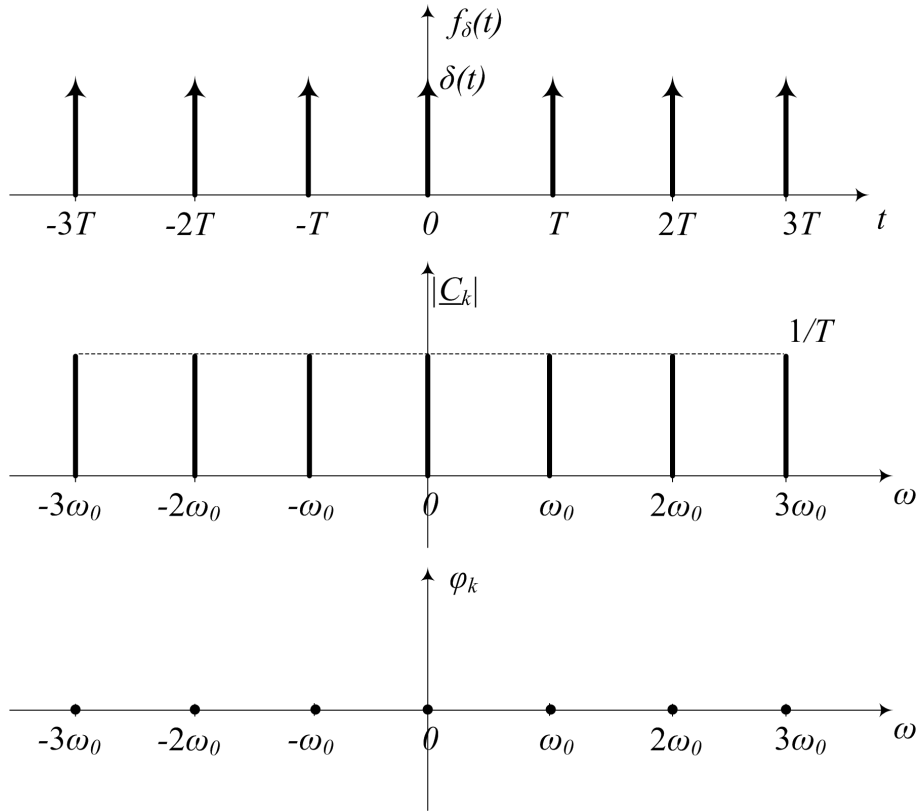
Kako je signal iz primera parna funkcija učestanosti, iz osobine Furijeovih redova simetrije zaključujemo da su koeficijenti $b_k = 0$. Koeficijenti a_0 i a_k su

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U dt = \frac{U\tau}{T} \quad (2.143)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2U\tau}{T} \frac{\sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2})}{k\omega_0 \frac{\tau}{2}} \quad (2.144)$$

a razvoj u trigonometrijskom obliku

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t). \quad (2.145)$$



Slika 2.26: Povorka Dirakovih impulsa u vremenu, amplitudski i fazni spektar.

Parametri jednostranog spektra su

$$r_0 = a_0 = \frac{U\tau}{T} \quad (2.146)$$

$$r_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |a_k| = \frac{2U\tau}{T} \left| \frac{\sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2})}{k\omega_0 \frac{\tau}{2}} \right| \quad (2.147)$$

$$\varphi_k = \text{atan2}(-b_k, a_k) = \text{atan2}(0, a_k) = \begin{cases} \pi, & a_k < 0 \\ 0, & a_k > 0 \end{cases} \quad (2.148)$$

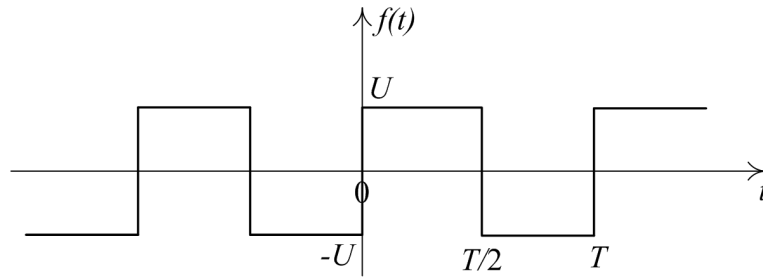
a razvoj u polarnom obliku

$$f(t) = r_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} r_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \quad (2.149)$$

Primer 6. Odrediti razvoj u Furijeov red u trigonometrijskom obliku periodičnog signala prikazanog na slici 2.27.

Rešenje. Furijeov red u trigonometrijskom obliku dat je preko

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t). \quad (2.150)$$



Slika 2.27: Povorka pravougaonih impulsa.

Kako je signal iz primera neparna funkcija učestanosti, iz osobine Furijeovih redova simetrije zaključujemo da su koeficijenti $a_0 = 0$, $a_k = 0$. Koeficijenti b_k se računaju kao

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \quad (2.151)$$

$$\frac{4U}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{2U}{k\pi} (1 - \cos \frac{k\omega_0 T}{2}) = \frac{2U}{k\pi} (1 - \cos k\pi)$$

odakle se može zaključiti

$$b_k = \frac{2U}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} 0, & k \text{ parno} \\ \frac{4U}{k\pi}, & k \text{ neparno.} \end{cases} \quad (2.152)$$

Konačno, razvoj signala $f(t)$ je oblika

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4U}{k\pi} \sin(k\omega_0 t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega_0 t) \quad (2.153)$$

i ima komponente samo na neparnim harmonicima, tj.

$$f(t) = \frac{4U}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega_0 t) = \frac{4U}{\pi} (\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots) \quad (2.154)$$

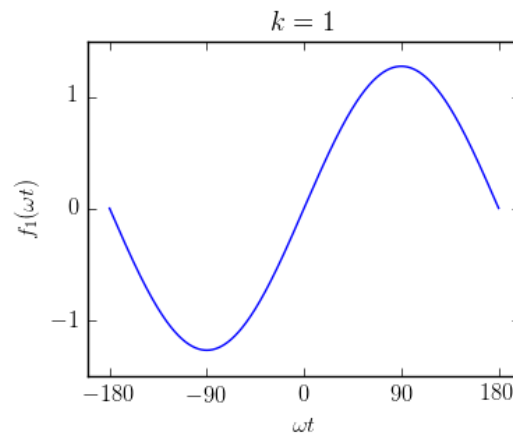
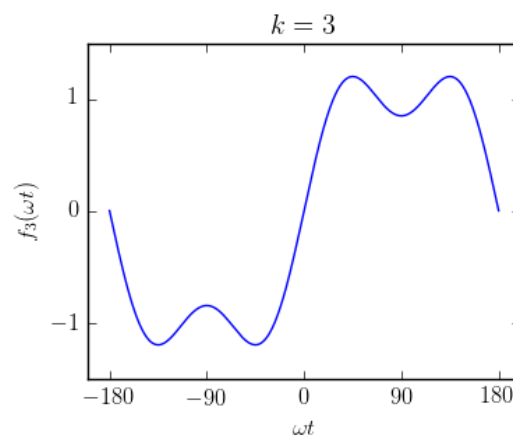
Na slikama 2.28 - 2.32 prikazan je značaj broja spektralnih komponentata u predstavi pravougaonog impulsa $f(t)$ sa slike 2.27.

Povorka pravougaonih impulsa za $k = 1$:

$$f_1(t) = f(t) \frac{\pi}{4U} = \sin \omega_0 t. \quad (2.155)$$

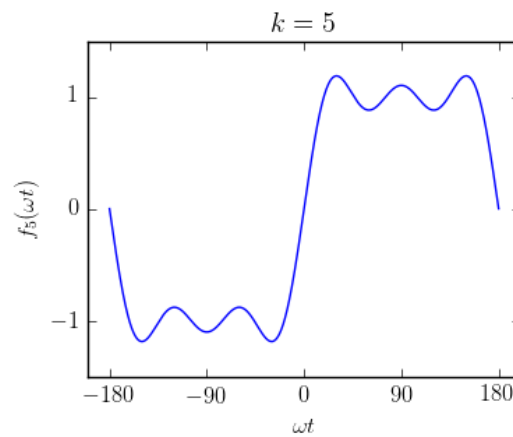
Povorka pravougaonih impulsa za $k = 3$:

$$f_3(t) = f(t) \frac{\pi}{4U} = \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t. \quad (2.156)$$

Slika 2.28: Povorka pravougaonih impulsa, $k = 1$.Slika 2.29: Povorka pravougaonih impulsa, $k = 3$.

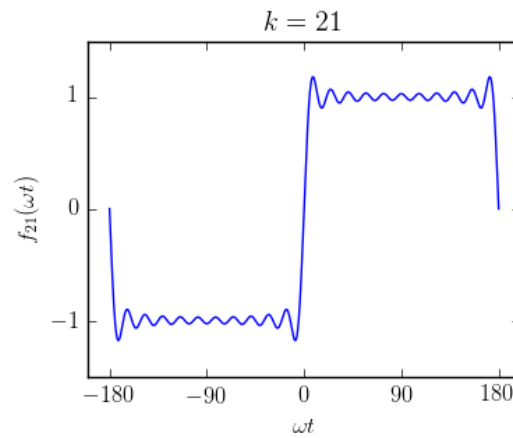
Povorka pravougaonih impulsa za $k = 5$:

$$f_5(t) = f(t) \frac{\pi}{4U} = \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t. \quad (2.157)$$

Slika 2.30: Povorka pravougaonih impulsa, $k = 5$.

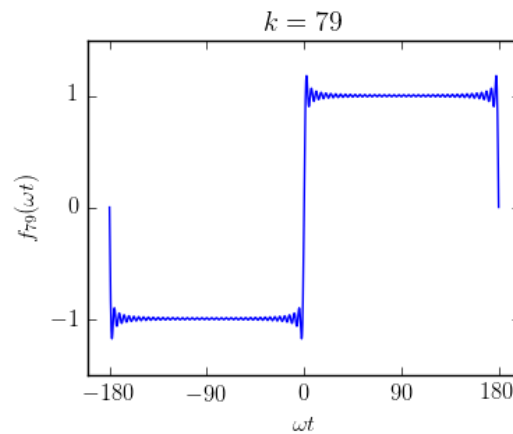
Povorka pravougaonih impulsa za $k = 21$:

$$f_{21}(t) = f(t) \frac{\pi}{4U} = \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots, + \frac{1}{21} \sin 21\omega_0 t. \quad (2.158)$$

Slika 2.31: Povorka pravougaonih impulsa, $k = 21$.

Povorka pravougaonih impulsa za $k = 79$:

$$f_{79}(t) = f(t) \frac{\pi}{4U} = \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots, + \frac{1}{79} \sin 79\omega_0 t. \quad (2.159)$$

Slika 2.32: Povorka pravougaonih impulsa, $k = 79$.

Glava 3

Furijeova transformacija

3.1 Uvod

Iz prethodne Glave 2 videli smo da se Furijeovi redovi koriste za prikaz frekvencijskih komponenata periodičnih signala. Ipak, u najvećem broju slučajeva, signali nisu periodični. Pitanje koje se logično nameće je da li i u slučaju signala koji nisu periodični postoji način da steknemo uvid u njihov spektralni sadržaj, odnosno, postoji li način prikaza frekvencijskih komponenata i signala koji nisu periodični? Upravo je ovo bila motivacija za nastanak Furijeove transformacije koja nam omogućava prikaz frekvencijskih komponenata aperiodičnih determinističkih signala, tj. signala koji nisu periodični ali se mogu predstaviti nekom matematičkom funkcijom.

Kao i u slučaju Furijevih redova, da bi se odredio spektar determinističkog aperiodičnog signala $f(t)$, dovoljni, ali ne i striktno potrebni uslovi, poznati i kao Dirihleovi uslovi, su [1]:

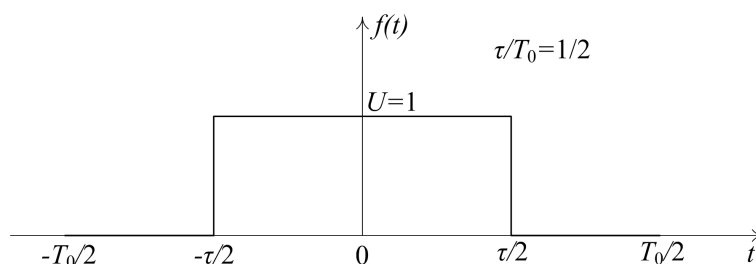
1. Signal $f(t)$ mora imati konačan broj maksimuma i minimuma i konačan broj diskontinuiteta u bilo kojem konačnom vremenskom intervalu;
2. Signal $f(t)$ mora biti apsolutno integrabilan u vremenu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (3.1)$$

3.2 Furijev transformacioni par

U literaturi se pri izvođenju Furijeove transformacije često polazi od periodičnog signala $f(t)$ i Furijevog reda, uz uslov da perioda tog signala $T_0 \rightarrow \infty$, čime signal postaje aperiodičan, a Furijev red bi trebalo da se svede na Furijeovu transformaciju.

Na slici 3.1 je prikazana jedna perioda periodičnog signala $f(t)$ koji predstavlja povorku pravougaonih impulsa.



Slika 3.1: Pravougaoni impuls.

Na osnovu (2.83), kompleksni koeficijenti dvostranog spektra za slučaj prikazan na slici 3.1

su:

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{U\tau \sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2})}{T_0 k\omega_0 \frac{\tau}{2}} = \frac{1}{k\pi} \sin(k\omega_0 \frac{\tau}{2}). \quad (3.2)$$

Jednostavnom analizom za slučaj kada signal $f(t)$ postaje aperiodičan, dobili bismo:

$$T_0 \rightarrow \infty$$

$$\omega_0 \rightarrow 0$$

$$k\omega_0 \rightarrow \omega$$

$$k \rightarrow \infty$$

gde bi na osnovu (3.2) sledilo

$$\underline{C}_k \rightarrow 0, \text{ za } k \neq 0.$$

Za slučaj $k = 0$, dobija se

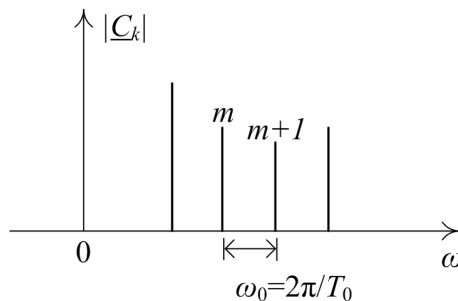
$$\underline{C}_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt = \underline{C}_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U dt = \frac{\tau}{T_0} \quad (3.3)$$

na osnovu čega sledi i

$$\underline{C}_0 \rightarrow 0, \text{ za } k = 0.$$

Dakle, u cilju izvođenja Furijeove transformacije, a polazeći od Furijeovog reda za slučaj kada je signal $f(t)$ aperiodičan, tj. puštajući da $T_0 \rightarrow \infty$, harmonici \underline{C}_k nestaju, a isto važi i za DC komponentnu, tj. \underline{C}_0 , pa ceo spektar nestaje, tj. "uranja u nulu". Stoga, izvođenje Furijeove transformacije zahteva malo pažljiviji pristup.

Podimo zato od razvoja periodičnog signala $f(t)$ u Furijeov red (2.83), i detaljnije razmotrimo slučaj kada ovaj signal postaje aperiodičan, tj. njegov period biva $T_0 \rightarrow \infty$. U ovom slučaju, povećanjem periode signala, njegovi harmonici postaju sve gušći, slika 3.2.



Slika 3.2: Zgušnjavanje spektra pri porastu periode signala.

U skladu sa tim, dobija se:

$$T_0 \rightarrow \infty$$

$$k\omega_0 \rightarrow \omega$$

$$\omega_0 \rightarrow d\omega$$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{k=-\infty}^{+\infty}$, na osnovu čega se može pisati

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right) e^{jk\omega_0 t} = \\ & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right) e^{jk\omega_0 t} \frac{\omega_0}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Deo konačnog izraza (3.4) unutar malih zagrada predstavlja Furijeovu transformaciju $\underline{F}(j\omega)$ aperiodičnog signala $f(t)$, tj.

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.5)$$

Najzad, Furijeov transformacioni par, Furijeova transformacija i inverzna Furijeova transformacija, je:

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Treba primetiti i suštinsku razliku između Furijeovih redova i Furijeove transformacije. Naime, kod Furijeove transformacije, aperiodični signal $f(t)$ se preslikava u funkciju od učestanosti, tj. $\underline{F}(j\omega)$. Preciznije,

u slučaju Furijeovih redova: $f(t)$ u $[V] \rightarrow \underline{C}_k$ u $[V]$,

u slučaju Furijeove transformacije: $f(t)$ u $[V] \rightarrow \underline{F}(j\omega)$ u $[\frac{V}{Hz}]$ (dakle, ovo je spektralna gustina amplituda, preciznije, fazora, jer osim amplitude ima i fazu).

Naglasimo i to da se $\underline{F}(j\omega)$ može pisati u obliku

$$\underline{F}(j\omega) = |\underline{F}(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (3.7)$$

gde je $|\underline{F}(j\omega)|$ amplitudski spektar, a $\theta(\omega)$ fazni spektar. Slično kao što se u slučaju Furijeovih redova definiše spektar snage signala (2.114), kod Furijeove transformacije se definiše spektralna gustina energije

$$S(j\omega) = |\underline{F}(j\omega)|^2. \quad (3.8)$$

Primetimo da je u slučaju Furijeove transformacije spektar kontinualan, za razliku od Furijeovog reda kada je diskretan. Takođe, kao i u slučaju Furijeovih redova, amplitudski spektar je parna funkcija učestanosti, a fazni neparna, tj.

$$\begin{aligned} |\underline{F}(-j\omega)| &= |\underline{F}(j\omega)| \\ \theta(-\omega) &= -\theta(\omega). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 Osobine Furijeove transformacije

Kao i u slučaju Furijeovih redova, u ovom poglavlju biće prikazane neke osobine Furijeove transformacije koje se najčešće koriste.

3.3.1 Linearost

Osobina linearosti se zasniva na osobinama homogenosti i aditivnosti. Ako su $f(t)$ i $g(t)$ dva aperiodična deterministička signala, čije su Furijeove transformacije $\underline{F}(j\omega)$ i $\underline{G}(j\omega)$, respektivno, tada važi:

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$g(t) \longrightarrow \underline{G}(j\omega)$$

$$\text{homogenost: } af(t) \longrightarrow a\underline{F}(j\omega)$$

$$\text{aditivnost: } f(t) + g(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega) + \underline{G}(j\omega).$$

3.3.2 Pomeranje u vremenskom domenu

Osobina pomeranja (kašnjenja) u vremenskom domenu daje odgovor na pitanje: ako je $\underline{F}(j\omega)$ Furijeova transformacija aperiodičnog signala $f(t)$, šta je Furijeova transformacija aperiodičnog signala pomerenog u vremenu, tj. $f(t - \Delta t)$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(t - \Delta t) \longrightarrow ?$$

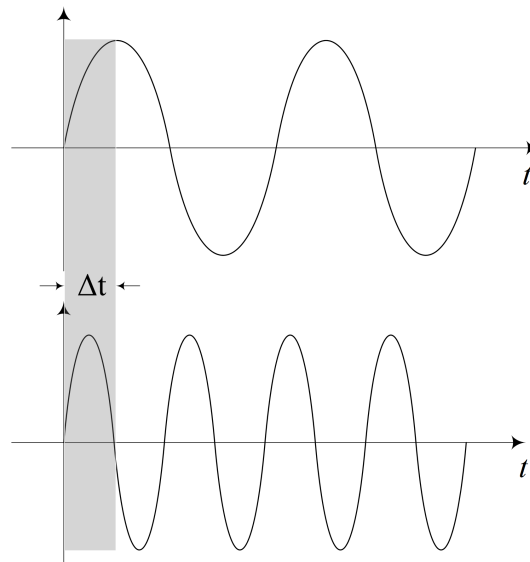
Na osnovu (3.6), Furijeova transformacija vremenski pomerenog signala se računa kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \Delta t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \Delta t) e^{-j\omega(t - \Delta t)} e^{-j\omega\Delta t} d(t - \Delta t) = \underline{F}(j\omega) e^{-j\omega\Delta t}. \quad (3.10)$$

Dakle, pomeranje u vremenskom domenu za vremenski interval Δt dovodi do toga da Furijeova transformacija tada postaje

$$f(t - \Delta t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega) e^{-j\omega\Delta t}.$$

Iz osobine Furijeove transformacije pomeranja u vremenskom domenu, (3.10), možemo primetiti da ako je signal pomeren u vremenu, njegov amplitudski spektar ostaje isti, ali dolazi do pomeranja faze za linearni faktor proporcionalan vremenskom pomeraju Δt . Očigledno je i da je taj fazni pomeraj izraženiji na višim učestanostima, slika 3.3 [7].



Slika 3.3: Osobina Furijeove transformacije - pomeraj u vremenu.

3.3.3 Diferenciranje

Kao i u slučaju Furijeovih redova, osobina diferenciranja daje vezu između Furijeove transformacije aperiodične funkcije $f(t)$ i Furijeove transformacije izvoda te funkcije $\frac{df}{dt}$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow ?$$

Na osnovu (3.6) može se pisati

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (\underline{F}(j\omega) e^{j\omega t}) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

iz čega se vidi da se diferenciranje aperiodične funkcije $f(t)$ odrazilo na Furijeovu transformaciju tako što je ona pomnožena faktorom $j\omega$, tj. važi da je

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow j\omega \underline{F}(j\omega).$$

3.3.4 Integraljenje

Osobina integraljenja daje vezu između Furijeove transformacije aperiodične funkcije $f(t)$ i Furijeove transformacije integrala te funkcije $\int f(t)dt$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$\int f(t)dt \longrightarrow ?$$

Na osnovu (3.6) može se pisati

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int (\underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.12)$$

iz čega se vidi da se integraljenje aperioidične funkcije $f(t)$ odrazilo na Furijeovu transformaciju tako što je ona pomnožena faktorom $\frac{1}{j\omega}$ uz dodatak člana $\pi \underline{F}(0) \delta(\omega)$ [8], koji reflektuje DC komponentu, tj. važi da je

$$\int f(t) dt \longrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{F}(j\omega) + \pi \underline{F}(0) \delta(\omega)$$

gde je $\delta(\omega)$ Dirakov impuls.

3.3.5 Skaliranje u vremenu

Skaliranje u vremenu je osobina Furijeove transformacije koja povezuje spektar $\underline{F}(j\omega)$ aperioidičnog signala $f(t)$ i spektar vremenski skaliranog aperioidičnog signala $f(at)$, tj. $f(at)$, gde je a realna konstanta. Dakle,

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(at) \longrightarrow ?$$

Spektar tj. Furijeova transformacija signala $f(at)$ ($a > 0$) se računa polazeći od (3.6), i uvodeći smenu $at = \tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\frac{\tau}{a})} d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j(\frac{\omega}{a})\tau} d\tau = \frac{1}{a} \underline{F}(j\frac{\omega}{a}). \quad (3.13)$$

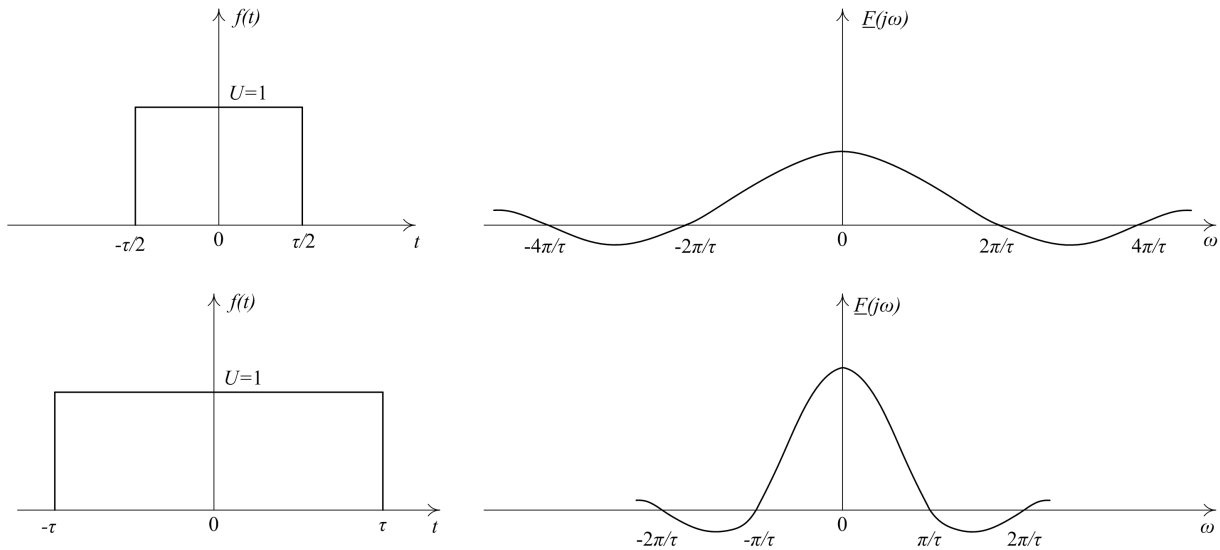
Za slučaj kada je $a < 0$, na isti način se dobija da Furijeova transformacija vremenski skaliranog signala $f(at)$ ima oblik $-\frac{1}{a} \underline{F}(j\frac{\omega}{a})$.

Konačno, može se pisati

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|} \underline{F}(j\frac{\omega}{a}).$$

Osobina Furijeove transformacije skaliranja u vremenskom domenu nam donosi više informacija nego što se to možda čini na prvi pogled, obzirom da dodatno pojašnjava veze vremenskog i frekvencijskog, tj. spektralnog domena. Ova osobina nam kaže da kompresija u jednom domenu znači ekspanziju u drugom domenu. Drugim rečima, kompresija signala u vremenskom domenu za neki faktor, ekvivalentna je širenju tog signala u frekvencijskom domenu za isti taj faktor. Znači, ako je signal kraći u vremenu, frekvencijski sadržaj takvog signala se povećava. Ova osobina dakle daje vrlo koristan uvid u vezu vremenskog trajanja signala i njegovog frekvencijskog opsega, koji su inverzno proporcionalni: vremenski uži signal ima širi spektar, i obratno, slika 3.4.



Slika 3.4: Osobina Furijeove transformacije - skaliranje u vremenu.

3.3.6 Inverzija vremenske ose

Inverzija vremenske ose daje odgovor na pitanje na koji način se inverzija vremenske ose aperiodičnog determinističkog signala odražava na njegov spekter, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(-t) \longrightarrow ?$$

Ovu osobinu nećemo posebno izvoditi, obzirom da je ona specifičan slučaj osobine skaliranja u vremenu, za slučaj kada je $a = -1$. Dakle, na osnovu izraza (3.13) proizilazi

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(-t) \longrightarrow \underline{F}(-j\omega).$$

3.3.7 Pomeranje u frekvencijskom domenu

Pomeranje u frekvencijskom domenu je osobina Furijeove transformacije koja daje odgovor na pitanje kakve promene u vremenskom domenu aperiodičnog determinističkog signala dovode do pomeranja njegovog spektra u frekvencijskom domenu, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$? \longrightarrow \underline{F}(j(\omega - \omega_0)).$$

Izvođenje ove osobine polazi od izraza (3.6) za slučaj pomerenog spektra za vrednost ω_0 , tj.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j(\omega - \omega_0)) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j(\omega - \omega_0)) e^{j(\omega - \omega_0)t} e^{j\omega_0 t} d(\omega - \omega_0) = \\ &= e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j(\lambda)) e^{j\lambda t} d\lambda = e^{j\omega_0 t} f(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

gde je $\lambda = \omega - \omega_0$.

Dakle, konačno se dobija

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \underline{F}(j(\omega - \omega_0)).$$

Osobina Furijeove transformacije pomeranje u frekvencijskom domenu ima široku primenu u telekomunikacijama. Da bismo ilustrovali o kakvoj se primeni radi, pođimo od aperiodičnog signala $f(t)$, čiji je spektar $\underline{F}(j\omega)$ i odredimo kakav spektar ima signal $f(t) \cos \omega_0 t$. Da ne bismo izvodili Furijeovu transformaciju ovog signala, primenićemo već izvedenu osobinu Furijeove transformacije pomeranje u frekvencijskom domenu, tako što ćemo prethodno signal $f(t) \cos \omega_0 t$ napisati u formi

$$f(t) \cos \omega_0 t = f(t) \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t}. \quad (3.15)$$

Na osnovu osobine pomeranja u frekvencijskom domenu, spektar ovog signala je

$$\frac{1}{2}\underline{F}(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}\underline{F}(j(\omega + \omega_0)) \quad (3.16)$$

pa se može pisati

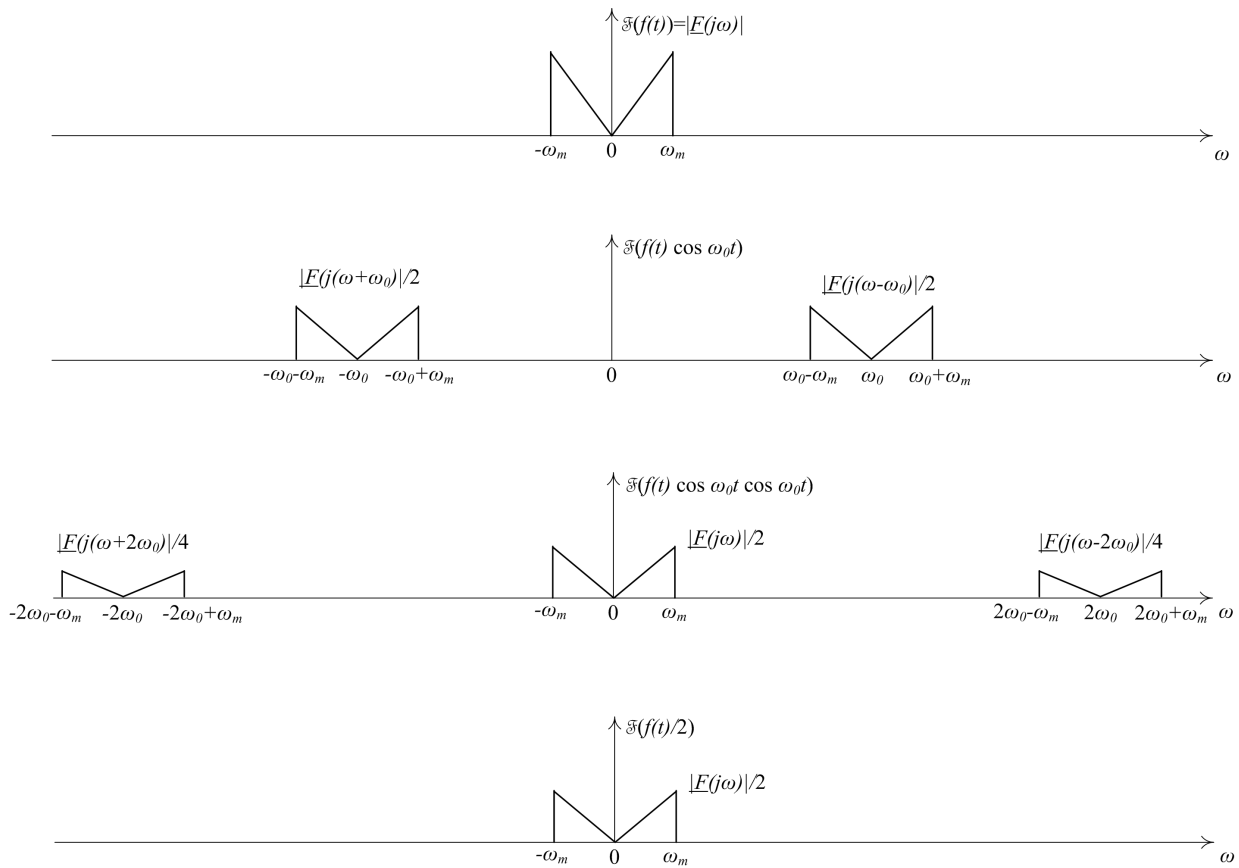
$$f(t) \cos \omega_0 t \longrightarrow \frac{1}{2}\underline{F}(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}\underline{F}(j(\omega + \omega_0)).$$

To znači da se spektar signala $f(t)$ iz osnovnog opsega može pomerati na neku drugu, željenu učestanost ω_0 , na kojoj bi npr. prenos takvog signala bio pogodniji i prilagođeniji kanalu. Ovaj postupak je jedan od najpoznatijih i najvažnijih postupaka u telekomunikacijama i zove se modulacija. U konkretnom primeru, spektar originalnog signala $\underline{F}(j\omega)$ ne doživljava promene već se samo translira na željenu učestanost ω_0 , pa je ovde reč o linearnim modulacijama, kakva je na primer amplitudska modulacija, AM (*Amplitude Modulation*). U telekomunikacionoj terminologiji, u zapisu $f(t) \cos \omega_0 t$, $f(t)$ se naziva modulišući signal (informacija), $\cos \omega_0 t$ nosilac, dok se $f(t) \cos \omega_0 t$ naziva modulisani signal, konkretno, AM signal.

Na osnovu iste osobine moguće je zaključiti i kako se vrši demodulacije AM signala, odnosno, vraćanje informacije tj. signala $f(t)$ u svoj prirodni, osnovni opseg. Na ulaz prijemnika za demodulaciju AM signala dolazi nam signal $f(t) \cos \omega_0 t$. Pomnožimo ovaj signal još jednom nosiocem, i ponovo primenimo osobinu pomeranja u frekvencijskom domenu, tj.

$$f(t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t = f(t) \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}f(t) \cos 2\omega_0 t. \quad (3.17)$$

Zaključujemo da posle demodulacije dobijamo spektar signala u osnovnom opsegu $\underline{F}(j\omega)$ što nam je i bio cilj. Takođe, iz izraza (3.17) vidimo da se osim spektra originalnog signala u osnovnom opsegu pojavljuju i translirane kopije spektra na učestanosti koja je duplo veća od učestanosti nosioca, $\underline{F}(j(\omega + 2\omega_0))$ i $\underline{F}(j(\omega - 2\omega_0))$. Kako ove komponente nisu potrebne, odstranjuju se filtrom propusnikom niskih učestanosti. Kompletna slika modulacije/demodulacije u spektralnom domenu dobijena primenom osobine Furijeove transformacije pomeranja u frekvencijskom domenu prikazana je na slici 3.5.



Slika 3.5: Amplitudska modulacija u frekvencijskom domenu.

3.3.8 Dualnost

Dualnost je osobina koja pokazuje da između vremenskog i frekvencijskog domena signala postoji simetrija i da je, uz određeni nivo opreza, ova dva domena moguće međusobno zameniti. Stoga, osobina dualnosti daje odgovor na pitanje ako je poznata Furijeova transformacija $\underline{F}(j\omega)$ signala $f(t)$, čemu je jednaka Furijeova transformacija signala koji u vremenu ima oblik kao Furijeova transformacija signala $f(t)$, tj.

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$F(t) \longrightarrow ?$$

Izvođenje polazi od izraza (3.6), koji se piše u obliku

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ 2\pi f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

gde se zatim invertuje vreme $t \rightarrow -t$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (3.19)$$

a zatim izvrši zamena vremenskog u frekvencijski domen $t \rightarrow \omega$, čime se dobija

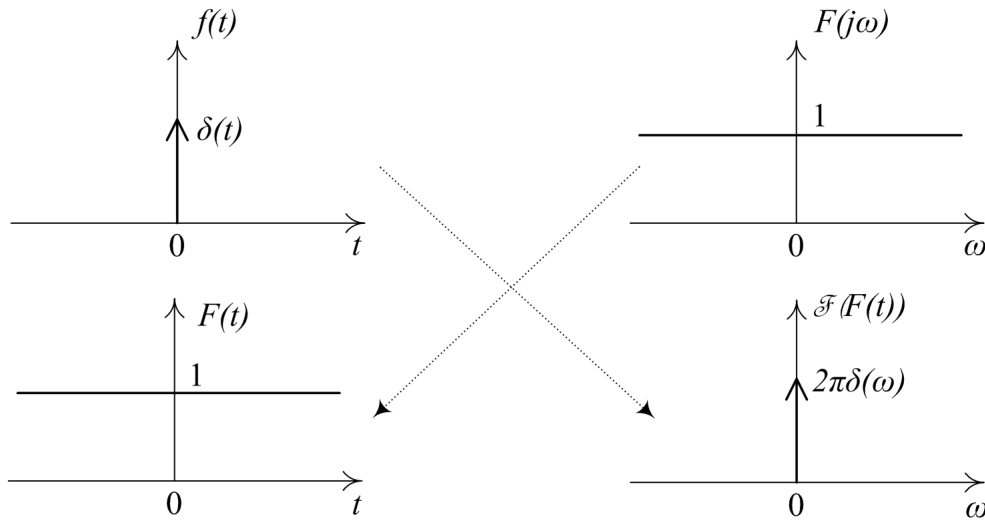
$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.20)$$

što predstavlja Furijeovu transformaciju od $F(t)$, što smo i tražili. Najzad, rezultat osobine dualnosti je

$$f(t) \longrightarrow \underline{F}(j\omega)$$

$$F(t) \longrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

Dakle, zahvaljujući osobini dualnosti, za svaki izračunati transformacioni par $[f(t), F(j\omega)]$, bez računanja dobija se još jedan transformacioni par $[F(t), 2\pi f(-\omega)]$, slika 3.6.



Slika 3.6: Osobina Furijeove transformacije - dualnost.

3.3.9 Korelacija aperiodičnih signala

Kao i u slučaju Furijeovih redova, korelacija aperiodičnih signala je integralna mera sličnosti dva aperiodična signala koja pokazuje stepen poklapanja ovih signala kada je jedan od njih zakašnjen za proizvoljni pomeraj τ , tj.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt. \quad (3.21)$$

Spektar korelacije aperiodičnih signala izvodi se razvojem vremenski pomerenog signala $y(t)$ u formuli za korelaciju aperiodičnih signala (3.21), tj.

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{Y}(j\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{Y}(j\omega) e^{j\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{Y}(j\omega) e^{j\omega\tau} \underline{X}(-j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{Y}(j\omega) \underline{X}^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (3.22)$$

obzirom da u slučaju kada je $x(t)$ realan signal važi $\underline{X}(-j\omega) = \underline{X}^*(j\omega)$.

Dakle, Furijeov transformacioni par čine

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}^*(j\omega) \underline{Y}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ \underline{X}^*(j\omega) \underline{Y}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.3.10 Autokorelacija aperiodičnih signala

Autokorelacija aperiodičnih signala predstavlja slučaj korelacije aperiodičnih signala koja pokazuje stepen poklapanja signala sa samim sobom. Definiše se kao

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt. \quad (3.24)$$

Na osnovu (3.23) sledi da je

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}^*(j\omega) \underline{X}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.25)$$

pa je Furijeov transformacioni par za slučaj autokorelacije aperiodičnog signala $x(t)$

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \\ |\underline{X}(j\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dakle, Furijeov transformacioni par čine autokorelacija aperiodičnog signala $x(t)$, $R_{xx}(\tau)$, i spektralna gustina energije tog signala $|\underline{X}(j\omega)|^2 = S(j\omega)$, što proizilazi iz jednačine (3.8).

3.3.11 Rejljeva teorema o energiji

Rejljeva teorema o energiji (*Rayleigh's energy theorem*) predstavlja ekvivalent Parsevalove teoreme koja važi za periodične signale, pa je alternativni naziv Rejljeve teoreme i Parsevalova teorema za aperiodične signale.

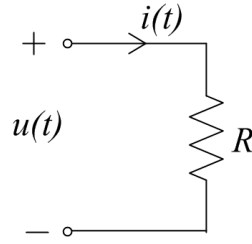
Suštinski, Rejljeva teorema o energiji kaže da se energija signala može odrediti i iz njegovog spektra, integraljenjem spektralne gustine energije po svim učestanostima.

Izvođenje Rejljeve teoreme o energiji polazi od autokorelacije aperiodičnih signala (3.26), za slučaj $\tau = 0$, čime se dobija energija signala $R_{xx}(0)$ u vremenu, a zatim i frekvencijskom domenu, tj.

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{X}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(jf) df \quad (3.27)$$

Primer 1. Odrediti energiju signala na otporniku sa slike 3.7.

Snaga signala na otporniku R je



Slika 3.7: Rejljeva teorema o energiji - primer.

$$p(t) = u(t) i(t) = \frac{u^2(t)}{R}. \quad (3.28)$$

Energija signala u vremenskom domenu dobija se kao

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad (3.29)$$

a na osnovu Rejljeve teoreme energija signala se može odrediti i iz njegovog spektra na način

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{U}(jf)|^2 df. \quad (3.30)$$

3.3.12 Konvolucija aperiodičnih signala

Konvolucija aperiodičnih signala definiše se na sličan način kao i kod periodičnih signala, sa razlikom što su sada signali $x(t)$ i $y(t)$ aperiodični

$$\rho_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(\tau - t) dt = x(t) * y(t). \quad (3.31)$$

gde je $*$ operator kojim se često označava operacija konvolucije.

Na osnovu (3.6) spektar konvolucije aperiodičnih signala se dobija kao

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(\tau - t) dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau - t) e^{-j\omega(\tau-t)} e^{-j\omega t} d(\tau - t) dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(\tau - t) e^{-j\omega(\tau-t)} d(\tau - t) \right) dt &= \underline{X}(j\omega) \underline{Y}(j\omega). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dakle, Furijeov transformacioni par čine

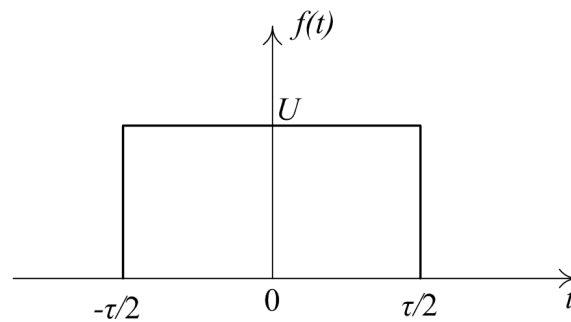
$$\begin{aligned} \rho_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(j\omega) \underline{Y}(j\omega) d\omega \\ \underline{X}(j\omega) \underline{Y}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zaključujemo da konvolucija dva aperiodična signala u vremenskom domenu ima spektar koji je jednak proizvodu pojedinačnih spektara ovih signala u frekvencijskom domenu. Zahvaljujući ovome, odziv LTI sistema se, umesto često složenog rešavanja konvolucionog integrala (1.3) u vremenskom domenu, može jednostavno rešiti u frekvencijskom domenu proizvodom Furijeove transformacije ulaznog signala i funkcije prenosa, izraz (1.4), a zatim odrediti i traženi odziv u vremenu, primenom inverzne Furijeove transformacije, (3.6).

3.4 Primeri

Primer 1. Odrediti amplitudski i fazni spektar usamljenog pravougaonog impulsa prikazanog na slici 3.8 i definisanog na sledeći način

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\frac{\tau}{2} \\ U, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad (3.34)$$



Slika 3.8: Aperiodični signal - usamljeni pravougaoni impuls.

Rešenje. Da bi se odredio amplitudski i fazni spektar signala $f(t)$, polazi se od formule za Furijeovu transformaciju, izraz (3.6)

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ue^{-j\omega t} dt = -\frac{U}{j\omega} \int_{j\omega\frac{\tau}{2}}^{-j\omega\frac{\tau}{2}} e^x dx = \\ &= \frac{U}{j\omega} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) = \frac{2U}{\omega} \sin \omega\frac{\tau}{2} = U\tau \frac{\sin \omega\frac{\tau}{2}}{\omega\frac{\tau}{2}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

gde je x privremena promenljiva prilikom uvođenja smene $x = -j\omega t$.

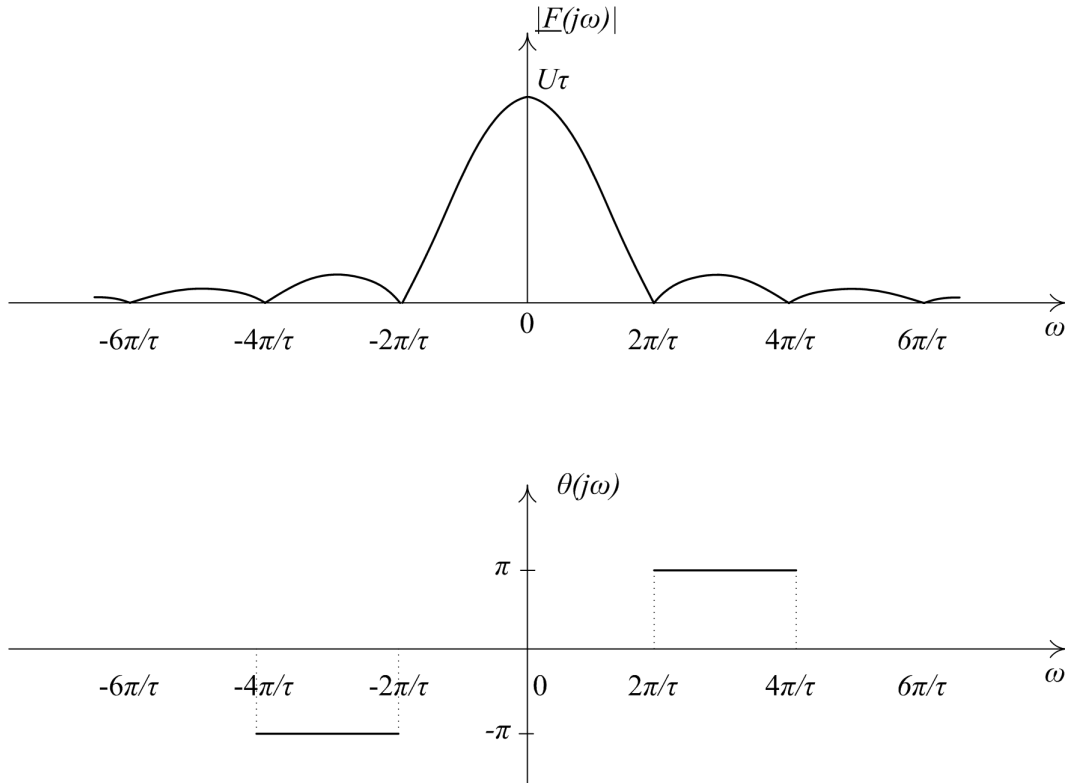
Amplitudski spektar signala $f(t)$ je:

$$|\underline{F}(j\omega)| = U\tau \left| \frac{\sin \omega\frac{\tau}{2}}{\omega\frac{\tau}{2}} \right| \quad (3.36)$$

a fazni spektar signala $f(t)$ je:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} > 0 \\ \pm\pi, & \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} < 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Amplitudski i fazni spektar prikazani su na slici 3.9.



Slika 3.9: Amplitudski i fazni spektar usamljenog pravougaonog impulsa.

Na osnovu izraza (3.36), nule amplitudskog spektra su na $\sin \omega \frac{\tau}{2} = 0$, tj. $\omega = \frac{2k\pi}{\tau}$, dok se maksimalna vrednost amplitudskog spektra dobija za $\omega = 0$, i iznosi $U\tau$. Takođe, može se izvesti i nekoliko zaključaka:

1. Spektar aperiodičnog signala je beskonačno širok i kontinualan je, tj. sadrži komponente na svim učestanostima.

2. Amplitudski spektar je parna funkcija učestanosti, a fazni spektar neparna funkcija učestanosti.

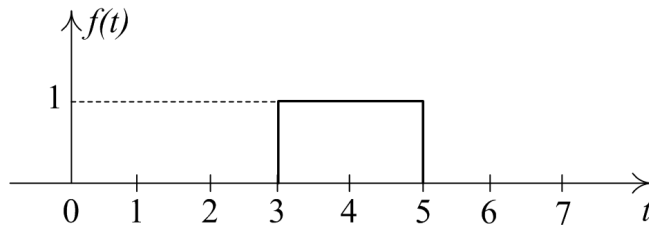
3. Kada se trajanje impulsa povećava $\tau \nearrow$, nule spektra se pomeraju ka nižim učestanostima, tj. spektar se skuplja. U graničnom slučaju, kada $\tau \rightarrow \infty$, spektar se svodi na Dirakov impuls.

4. Kada se trajanje impulsa smanjuje $\tau \searrow$, nule spektra se pomeraju ka višim učestanostima, tj. spektar se širi. U graničnom slučaju, kada $\tau \rightarrow 0$, spektar postaje ravan.

5. U slučaju kada $\tau \rightarrow 0$, $U \rightarrow \infty$, $U\tau = 1$, pravougaoni impuls u vremenu postaje Dirakov impuls, a spektar ima konstantnu jediničnu vrednost.

Primer 2. Odrediti spektar signala sa slike 3.10 definisanog na sledeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 3 \\ U, & 3 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5. \end{cases} \quad (3.38)$$



Slika 3.10: Vremenski pomeren pravougaoni impuls.

Rešenje. Furijeova transformacija usamljenog pravougaonog impulsa, slika 3.8, izračunata u primeru 1, iznosi:

$$\underline{F}(j\omega) = U\tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}. \quad (3.39)$$

U konkretnom slučaju, $U = 1$, $\tau = 2$, pa spektar postaje

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega. \quad (3.40)$$

Koristeći osobinu Furijeove transformacije pomeranje u vremenskom domenu, izraz (3.10) za pomerač $\Delta t = 4$, dobija se konačan oblik spektra za signal definisan kao (3.38)

$$\underline{F}(j\omega) = e^{-4j\omega} \frac{2}{\omega} \sin \omega. \quad (3.41)$$

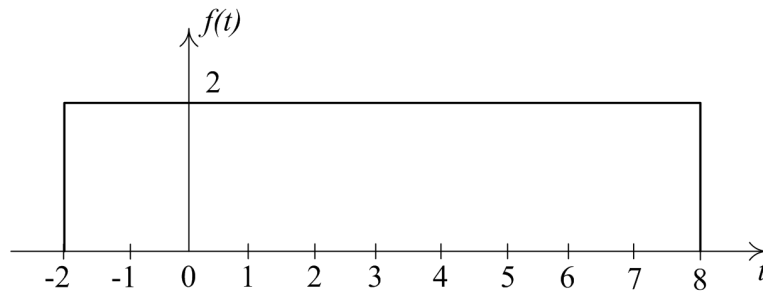
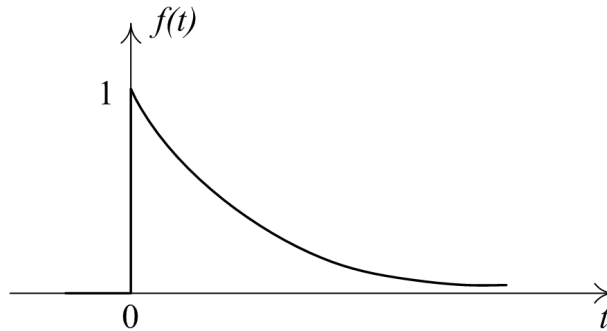
Primer 3. Odrediti inverznu Furijeovu transformaciju od

$$\underline{F}(j\omega) = 20 \frac{\sin 5\omega}{5\omega} e^{-3j\omega}. \quad (3.42)$$

Rešenje. Na osnovu Furijeovog para iz primera 1, (3.34) i (3.36), možemo zaključiti da se radi o pravougaonom impulsu čije je trajanje $\frac{\tau}{2} = 5$, tj. $\tau = 10$, a amplituda $U = 2$, obzirom da je $U\tau = 20$. Takođe, na osnovu osobine Furijeove transformacije pomeranje u vremenskom domenu, zaključujemo da je ovaj pravougaoni impuls pomeren za $-j\omega\Delta t = -3j\omega$, tj. $\Delta t = 3$. Konačno, izraz (3.42) predstavlja Furijeovu transformaciju signala sa slike 3.11.

Primer 4. Odrediti spektar signala sa slike 3.12 definisanog na sledeći način

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0, a > 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Slika 3.11: Vremenski pomeren pravougaoni impuls datog spektra $F(j\omega)$.Slika 3.12: Vremenski oblik signala $f(t) = e^{-at}$.

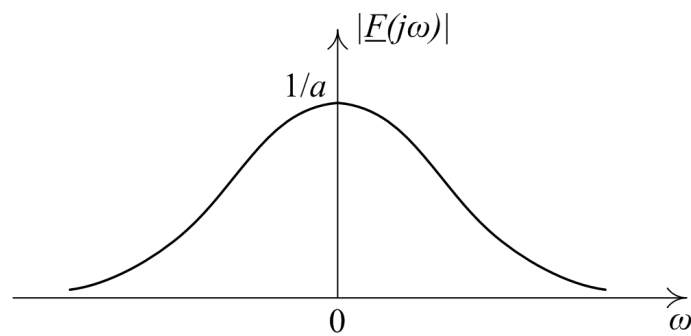
Rešenje. Furijeova transformacija signala $f(t)$ izvodi se kao:

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a + j\omega}. \quad (3.44)$$

Amplitudski spektar tada je

$$|\underline{F}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad (3.45)$$

i prikazan je na slici 3.13.

Slika 3.13: Amplitudski spektar signala $f(t) = e^{-at}$.

Primer 5. Odrediti spektar Hevisajdove (*Heaviside*) funkcije $f_H(t)$.

Rešenje. Hevisajdova funkcija se može posmatrati kao signal $f(t) = e^{-at}$ iz primera 4, za slučaj kada je

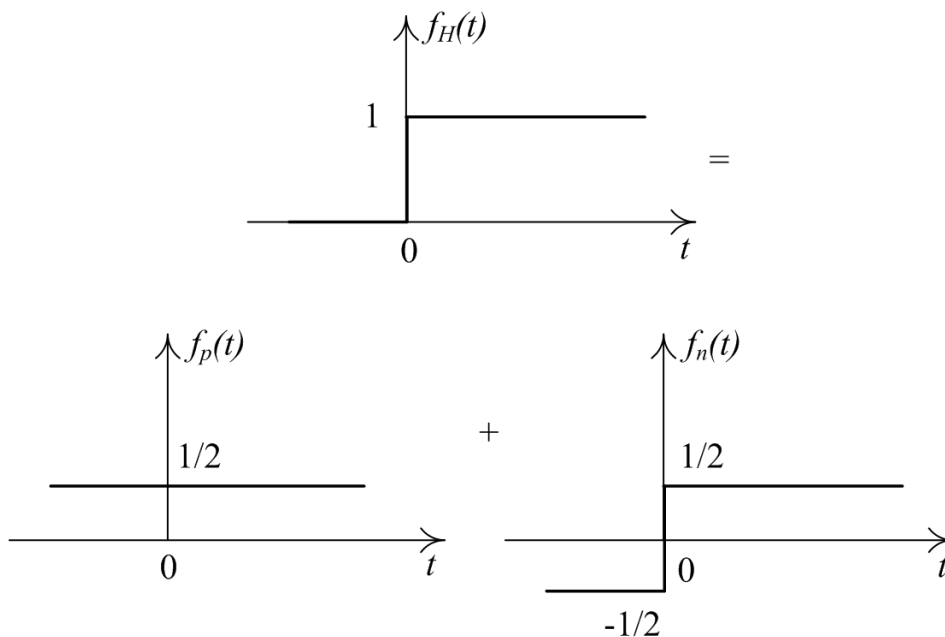
$$f_H(t) = \lim_{a \rightarrow 0} f(t). \quad (3.46)$$

Spektar Hevisajdove funkcije se tada dobija iz spektra (3.44) kao

$$\underline{F}_H(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \underline{F}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (3.47)$$

koji važi za $\omega \neq 0$.

Ostaje pitanje kakav je spektar Hevisajdove funkcije za slučaj kada je $\omega = 0$? Da bi se dobio odgovor na ovo pitanje iskoristiće se osobina linearnosti (preciznije, aditivnosti) Furijeove transformacije, kao i činjenica da se Hevisajdova funkcija može prikazati kao zbir parne funkcije $f_p(t)$ i neparne funkcije $f_n(t)$, definisanih na način prikazan na slici 3.14.



Slika 3.14: Hevisajdova funkcija $f_H(t)$, aditivnost u vremenskom domenu.

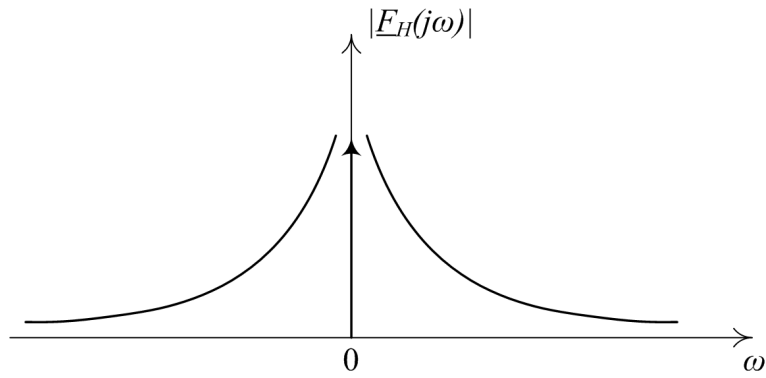
Za spektar Hevisajdove funkcije $\underline{F}_H(j\omega)$ na osnovu aditivnosti važi

$$\underline{F}_H(j\omega) = \underline{F}_p(j\omega) + \underline{F}_n(j\omega) \quad (3.48)$$

gde su $\underline{F}_p(j\omega)$ i $\underline{F}_n(j\omega)$ spektri signala $f_p(t)$ i $f_n(t)$, respektivno.

Kako je $f_n(t)$ neparna funkcija, to je vrednost njenog spektra za $\omega = 0$ jednaka nuli, tj. $\underline{F}_n(j\omega) = 0$. Spektar parne funkcije $f_p(t)$ koja ima konstantnu vrednost $f_p(t) = \frac{1}{2}$, na osnovu dualnosti ima vrednost $\underline{F}_p(j\omega) = \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)$, pa se konačno dobija traženi spektar Hevisajdove funkcije

$$\underline{F}_H(j\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega), & \omega \neq 0 \\ \frac{1}{j\omega}, & \omega = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$



Slika 3.15: Spektar Hevisajdove funkcije.

spektar Hevisajdove funkcije prikazan je na slici 3.15.

Primer 6. Odrediti inverznu Furijeovu transformaciju od

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{2}{1 + 2j(\omega - 1)}. \quad (3.50)$$

Rešenje. Furijeova transformacija (3.50) ukazuje na dva zaključka: prvi da svojim oblikom ukazuje na spektar signala iz primera 4, izraz (3.44), a drugi da usled faktora $(\omega - 1)$ postoji pomeraj u frekvencijskom domenu. Napišimo je u obliku

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{2}{1 + 2j(\omega - 1)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + j(\omega - 1)} \quad (3.51)$$

na osnovu čega možemo zaključiti da se radi o signalu koji u vremenskom domenu ima oblik $f(t) = e^{-at}$, gde je $a = \frac{1}{2}$. Dodatno, na osnovu osobine Furijeove transformacije pomeraja u frekvencijskom domenu, izraz (3.14), možemo ustanoviti i frekvencijski pomeraj od $\omega_0 = 1$. Najzad, tražena inverzna Furijeova transformacija ima oblik

$$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} e^{jt}. \quad (3.52)$$

Primer 7. Imajući u vidu da signal $f(t)$ i $\underline{F}(j\omega)$

$$f(t) = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{-2t}, & t > 0 \\ e^{2t}, & t < 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{4}{4 + \omega^2} \quad (3.54)$$

čine Furijeov transformacioni par, odrediti Furijeovu transformaciju signala [9]:

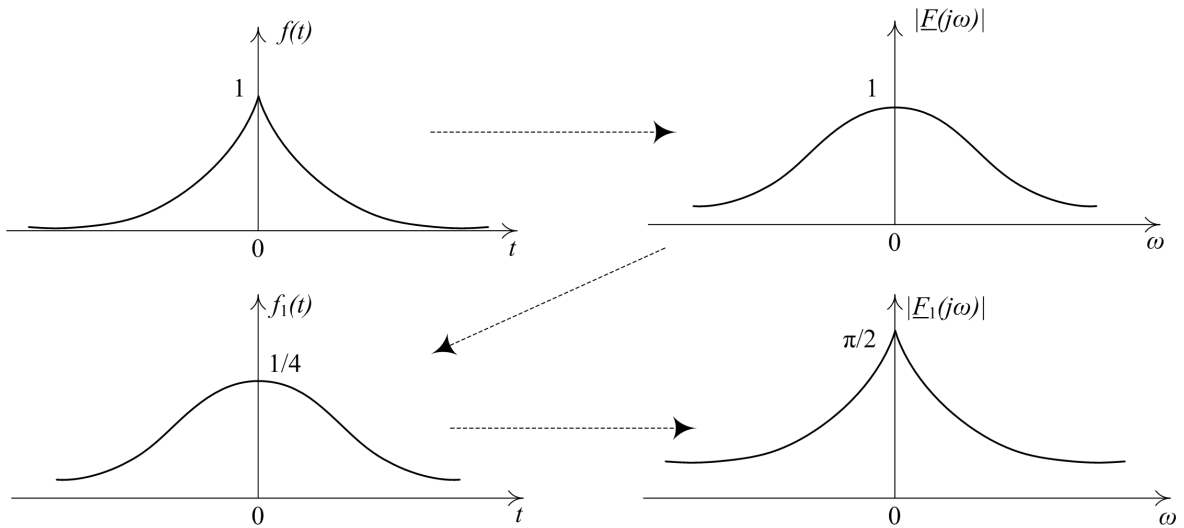
a) $f_1(t) = \frac{1}{4+t^2}$

$$b) f_2(t) = \frac{1}{4+t^2} \cos 2t.$$

Rešenje a). Na osnovu osobine linearnosti, preciznije homogenosti, možemo zaključiti da je $\frac{1}{4+\omega^2}$ Furijeova transformacija signala $\frac{1}{4}e^{-2|t|}$. Koristeći osobinu dualnosti možemo zaključiti da je Furijeova transformacija signala $f_1(t)$

$$\underline{E}_1(j\omega) = 2\pi \frac{1}{4} e^{-2|\omega|} = \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}. \quad (3.55)$$

Spektar $\underline{E}_1(j\omega)$ kao i metodologija dolaska do rešenja prikazana je na slici 3.16.

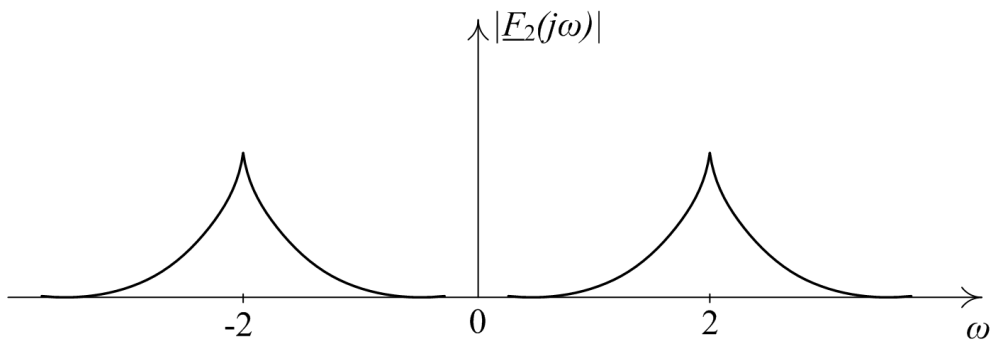


Slika 3.16: Spektar signala $f_1(t)$.

Rešenje b). Na osnovu linearnosti, dualnosti i pomeranja u frekvencijskom domenu, $\omega_0 = 2$, možemo zaključiti da je Furijeova transformacija signala $f_2(t)$

$$\underline{E}_2(j\omega) = \frac{\pi}{4} (e^{-2|\omega-2|} + e^{-2|\omega+2|}). \quad (3.56)$$

Spektar $\underline{E}_2(j\omega)$ prikazan je na slici 3.17.



Slika 3.17: Spektar signala $f_2(t)$.

Glava 4

Diskretna Furijeova transformacija

4.1 Uvod

Kao što se moglo videti iz prethodnih poglavlja, za uvid u frekventijski sadržaj, odnosno spektar, periodičnih signala koriste se Furijeovi redovi, dok se za uvid u frekventijski sadržaj aperiodičnih determinističkih signala koristi Furijeova transformacija. Logično pitanje koje se nameće je da li postoji mogućnost uvida u spektar signala koji nisu ni periodični, ni aperiodični a ni deterministički, dakle, ne mogu se opisati nekom matematičkom funkcijom? Očigledno, ovakav postupak ne bi mogao da se sprovede analitički već numerički. Jedini način bi bio da se takav signal najpre vremenski ograniči, a zatim vremenski diskretizuje, odnosno, da se izvrši odabiranje takvog signala, čime bi se na ograničenom vremenskom intervalu dobio konačan broj vremenskih odbiraka tog signala. Najzad, potrebno bi bilo naći neku transformaciju koja bi nam omogućila da od raspoloživih vremenskih odbiraka signala dobijemo njegov spektar. Takva transformacija se zove diskretna Furijeova transformacija, DFT (*Discrete Fourier Transform*) [10].

4.2 Furijeov transformacioni par

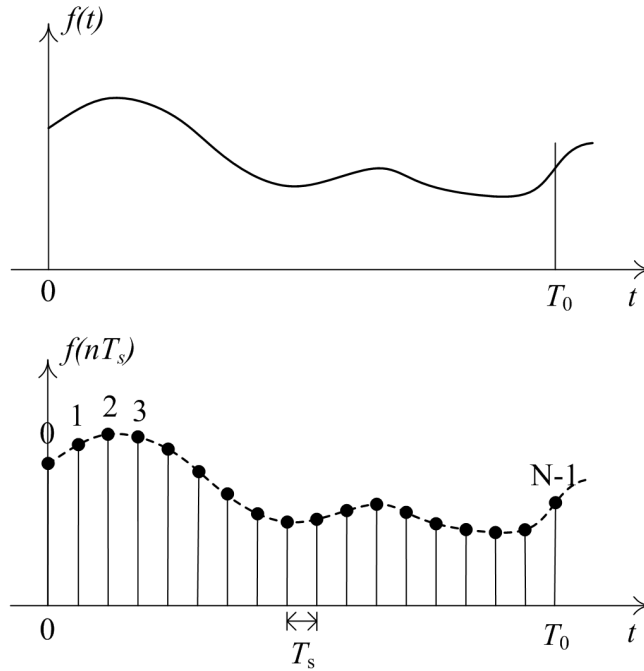
Na slici 4.1 prikazan je primer signala $f(t)$ za koji želimo da odredimo spektar. Prikazan je njegov oblik kontinualan u vremenu $f(t)$ kao i njegov vremenski diskretizovan oblik $f(nT_s)$. Signal je najpre vremenski ograničen na interval trajanja T_0 , u okviru kojeg je izvršeno odabiranje signala i dobijeno N vremenskih odbiraka. Period odabiranja iznosi T_s i dobija se kao

$$T_s = \frac{T_0}{N}. \quad (4.1)$$

Sada je potrebno pronaći vezu između dobijenih vremenskih odbiraka i frekventijskih komponentata, tj. spektra. Kao što smo rekli, za to se primenjuje diskretna Furijeova transformacija. Iako se zove transformacija, DFT ustvari predstavlja aproksimaciju Furijeovih redova, pa se pri likom izvođenja i polazi od Furijeovih koeficijenata, \underline{C}_k , izraz (2.83),

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (4.2)$$

Međutim, kako mi nemamo $f(t)$ jer signal nije deterministički, već imamo vrednosti signala $f(t)$ samo u trenucima odabiranja, izraz (4.2) postaje



Slika 4.1: Signal u kontinualnom i vremenski diskretizovanom obliku.

$$\underline{C}_k \approx \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-jk\omega_0 nT_s} T_s = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} n \frac{T_0}{N}} \frac{T_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (4.3)$$

što predstavlja diskretnu Furijeovu transformaciju. Dakle, DFT se definiše i češće označava kao

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (4.4)$$

Inverzna diskretna Furijeova transformacija (*Inverse Discrete Fourier Transform*), odnosno ponovno vraćanje u vremenski domen, preciznije, transformacija pomoću koje na osnovu poznatih frekvencijskih odbiraka računaju vremenski odbirci ima oblik

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}. \quad (4.5)$$

Kako je ustaljena praksa da faktor $\frac{1}{N}$ stoji u formuli za $f(n)$, izraz (4.5), Furijeov transformacioni par, diskretna Furijeova transformacija i inverzna diskretna Furijeova transformacija, dobija finalni oblik

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (4.6)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}$$

gde je k redni broj harmonika (frekvencijski domen), n redni broj odbirka (vremenski domen), a N ukupan broj odbiraka (vremenski domen).

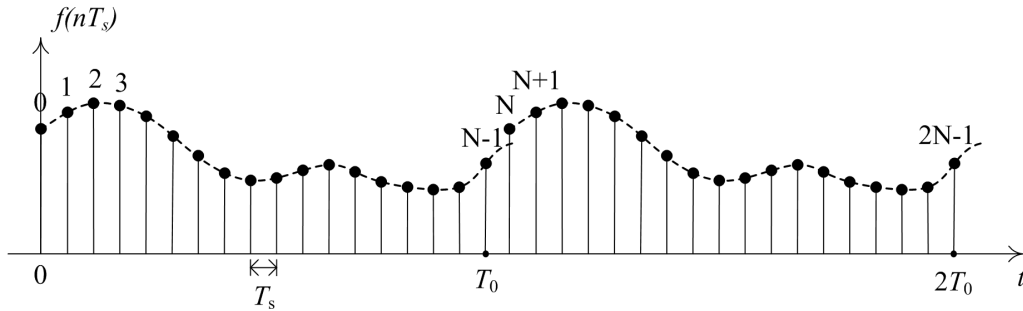
Često se u opisu i prikazu DFT uvodi oznaka $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, pa se Furijeov transformacioni par (4.6) može pisati i u obliku

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W^{nk} \\ f(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)W^{-nk}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dakle, DFT tretira signal $f(t)$ kao periodičan signal (4.2), perioda T_0 , tj.

$$f(0), \dots, f(N-1) = f(N), \dots, f(2N-1) = \dots \quad (4.8)$$

odnosno, $f(n+N) = f(n)$. To znači da u spektru imamo osnovnu učestanost $\frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{NT_s}$ i komponente na učestanostima harmonika $k \frac{2\pi}{NT_s}$.



Slika 4.2: DFT implicitna periodičnost.

Logično pitanje koje se nameće je do kojeg k ima smisla ići tj. koliko harmonika ima smisla računati? Da bi se dobio odgovor na ovo pitanje posmatrajmo slučaj sa k_1 harmonika i slučaj sa $k_2 = k_1 + N$ harmonika, kada težinske funkcije postaju $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1}$ i

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k_1+N)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1} e^{-j2\pi n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_1} \quad (4.9)$$

što je isto kao i za slučaj k_1 harmonika. To zapravo znači da je i spektar dobijen preko DFT periodičan, sa periodom N , koji je jednak ukupnom broju vremenskih odbiraka, tj.

$$F(0), \dots, F(N-1) = F(N), \dots, F(2N-1) = \dots \quad (4.10)$$

odnosno, $F(k+N) = F(k)$.

Još jedna osobina DFT je da je spektar, osim što je periodičan, i simetričan oko $\frac{N}{2}$. Na osnovu IDFT, doprinos $F(k)$ i $F(N-k)$ je:

$$f(n) = \frac{1}{N} (F(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} + (F(N-k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(N-k)}). \quad (4.11)$$

A kako je

$$F(N - k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} n(N-k)} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (4.12)$$

dobija se da je

$$F(N - k) = F^*(k). \quad (4.13)$$

Zamenom u (4.11) dobija se

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{N} (F(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} + F^*(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}) = \\ \frac{2}{N} (\Re(F(k)) \cos \frac{2\pi}{N} nk - \Im(F(k)) \sin \frac{2\pi}{N} nk) &= \frac{2}{N} |F(k)| \cos(\frac{2\pi}{N} nk + \arg F(k)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

tj. semplovana sinusoida na $\frac{2\pi}{NT_s} k [Hz]$, amplitude $\frac{2}{N} |F(k)|$. Za slučaj $k = 0$, $F(0) = \sum f(n)$ (zbir svih odbiraka), a doprinos $F(0)$ u $f(n)$ je $f_0(n) = \frac{1}{N} F(0)$, tj. srednja vrednost $f(n) = DC$ komponenta.

Napomenimo i to da se DFT može prikazati i u matričnom obliku [6]

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^{0 \cdot 0} & W^{0 \cdot 1} & \dots & W^{0 \cdot (N-1)} \\ W^{1 \cdot 0} & W^{1 \cdot 1} & \dots & W^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ W^{(N-1) \cdot 0} & W^{(N-1) \cdot 1} & \dots & W^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & \dots & W^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & \dots & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Broj N se često zove i dužina DFT, pa se u tom slučaju radi o DFT u N tačaka. Naglasimo i to da je red složenosti matričnog množenja u DFT $O(N^2)$, što je bio povod da se šezdesetih godina prošlog veka razvije efikasniji algoritam za brzo računanje DFT, poznat kao brza Furijeova transformacija, FFT (*Fast Fourier Transform*) [11], čime je red složenosti algoritma smanjen na $O(\frac{N}{2} \log_2 N)$.

4.3 Primeri

Za kontinualni signal $f(t)$ izračunati diskretnu Furijeovu transformaciju. Učestanost odabiranja datog signala je $f_s = 4\text{Hz}$ [12].

$$f(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - 90^\circ) + 3 \cos 4\pi t. \quad (4.17)$$

Kako je u primeru učestanost odabiranja $f_s = 4\text{Hz}$, period odabiranja iznosi $T_s = \frac{1}{4}\text{s}$, pa se odbirci uzimaju u trenucima $t = nT_s = \frac{n}{4}$, tj. $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$,

$$f(n) = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 90^\circ\right) + 3 \cos \pi n. \quad (4.18)$$

Očigledno je da je $N = 4$, a vremenski odbirci signala $f(t)$ na osnovu (4.18) su:

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \\ f(1) &= 4 \\ f(2) &= 8 \\ f(3) &= 0. \end{aligned}$$

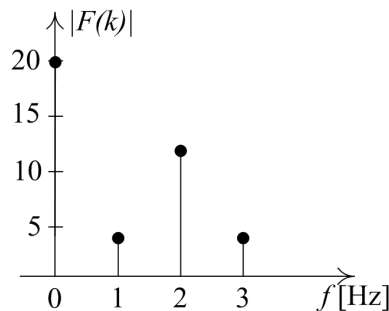
DFT, tj. frekvencijske komponente, signala $f(n)$ se računaju primenom izraza (4.6)

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^3 f(n)e^{-j\frac{\pi}{2}nk} = \sum_{n=0}^3 f(n)(-j)^{nk}. \quad (4.19)$$

DFT matrica za dati slučaj ima oblik

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -j4 \\ 12 \\ j4 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Grafički prikaz DFT signala $f(t)$ dat je na slici 4.3.



Slika 4.3: Primer: DFT dužine 4.

Interpretacija datog primera može se izvršiti u skladu sa (4.14):

1. $F(0) = 20$ implicira DC komponentu čija je vrednost $\frac{1}{N}F(0) = \frac{20}{4} = 5$, što i jeste, izraz (4.18);
2. $F(1) = -j4 = F^*(3)$ implicira komponentu na osnovnoj učestanosti, amplitude $\frac{2}{N}|F(1)| = \frac{2}{4} \cdot 4 = 2$, faze date argumentom $F(1) = -90^\circ$, tj.

$$\frac{2}{N}|F(k)| \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk + \arg F(k)\right) = \frac{2}{4}|F(1)| \cos\left(\frac{2\pi}{4}n + \arg F(1)\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 90^\circ\right) \quad (4.21)$$

što i jeste, izraz (4.18);

3. $F(2) = 12$ implicira komponentu na centralnoj učestanosti ($k = \frac{N}{2} = 2$), tj.

$$\frac{1}{N}F(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{4}F(2) e^{j\frac{2\pi}{4}2n} = 3e^{j\pi n} = 3 \cos \pi n \quad (4.22)$$

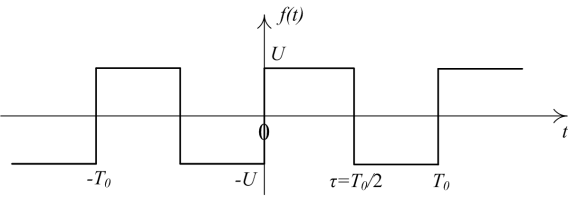
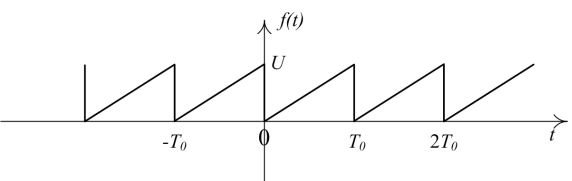
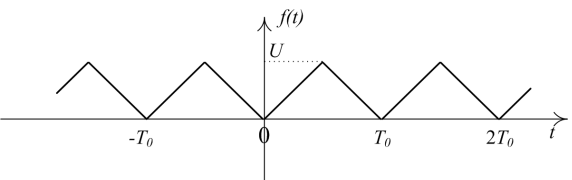
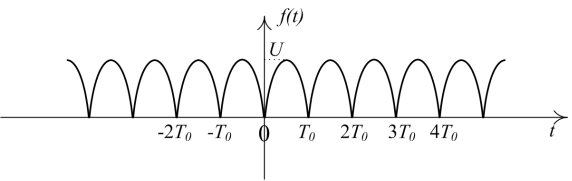
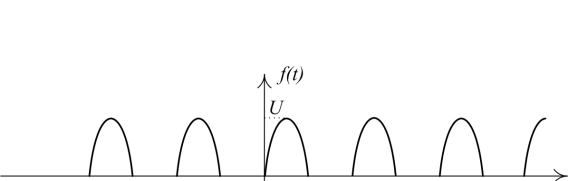
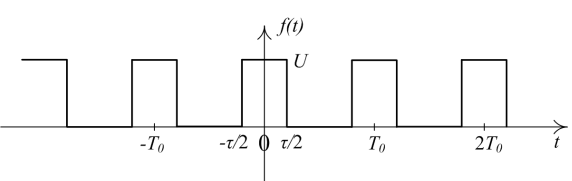
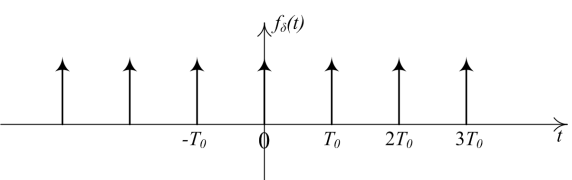
što i jeste, izraz (4.18).

Prilog A

Furijeovi redovi nekih signala

Koeficijenti razvoja nekih signala u Furijev red u kompleksnom obliku (dvostrani spektar) dati su u tabeli A.1 [13].

Tabela A.1: Koeficijenti Furijeovog reda u kompleksnom obliku.

Signal	\underline{C}_0	$\underline{C}_k, k \neq 0$	Komentar
	0	$-j \frac{2U}{k\pi}$	$\underline{C}_k = 0, k$ parno
	$\frac{U}{2}$	$j \frac{U}{2k\pi}$	
	$\frac{U}{2}$	$-\frac{2U}{k\pi^2}$	$\underline{C}_k = 0, k$ parno
	$\frac{2U}{\pi}$	$-\frac{2U}{(4k^2-1)\pi}$	
	$\frac{U}{\pi}$	$-\frac{U}{(k^2-1)\pi}$	$\underline{C}_k = 0, k$ neparno osim za $\underline{C}_{-1} = j \frac{U}{4}$ i $\underline{C}_1 = -j \frac{U}{4}$
	$\frac{U\tau}{T_0}$	$\frac{U\tau}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 \frac{\tau}{2}}{k\omega_0 \frac{\tau}{2}}$	
	$\frac{1}{T_0}$	$\frac{1}{T_0}$	

Prilog B

Furijeove transformacije nekih signala

Furijeove transformacije nekih poznatijih signala date su u tabeli B.1 [14].

Tabela B.1: Furijeove transformacije nekih signala.

$f(t)$	$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
$\delta(t)$ Dirakova funkcija	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$H(t) = 1$ za $t > 0$ $H(t) = 0$ za $t < 0$ Hevisajdova funkcija	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$e^{-at}H(t) = e^{-at}$ za $t > 0$ $e^{-at}H(t) = 0$ za $t < 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$ ($a > 0$)
$\frac{1}{2a}e^{-a t }$	$\frac{1}{\omega^2+a^2}$ ($a > 0$)
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a \omega }$
$H(t+a) - H(t-a) = 1$ za $ t < a$ $H(t+a) - H(t-a) = 0$ za $ t > a$	$\frac{2\sin a\omega}{\omega}$
e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$
$\frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$	$e^{-a\omega^2}$ ($a > 0$)

Literatura

- [1] A. Grami: *Introduction to Digital Communications*, Elsevier, 2016.
- [2] G. Strang: *Differential Equations and Linear Algebra*, Massachusetts Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 2014.
- [3] Neso Academy: *Signal and System: Standard Differential Equation for Linear Time-Invariant (LTI) Systems*, <http://www.nesoacademy.org/>, 2017.
- [4] C. P. Steinmetz: *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*, Electrical World and Engineer, New York, 1900.
- [5] P. Pejović: *Fazorska transformacija*, <http://doi.org/10.5281/zenodo.2604337>, Zenodo, 2019.
- [6] G. Strang: *Computational Science and Engineering*, Massachusetts Institute of Technology, Wellesley-Cambridge Press, 2007.
- [7] P. Cheung: *Properties of Fourier Transform*, Imperial College London, 2011.
- [8] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku: *Fundamentals of Electric Circuits*, McGraw-Hill Education, New York, 2017.
- [9] HELM: *Workbook 24: Fourier Transforms*, Loughborough University, 2015.
- [10] D. Sundararajan: *The Discrete Fourier Transform - Theory, Algorithms and Applications*, World Scientific Publishing, 2001.
- [11] K. R. Rao, D. N. Kim, J. J. Hwang: *Fast Fourier Transform: Algorithms and Applications*, Springer, 2010.
- [12] L. Huazhou: *The Discrete Fourier Transform*, School Of Aeronautic Science And Engineering, Beihang University.
- [13] S. W. Smith: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing, San Diego, California, 1999.
- [14] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, G. Musiol, H. Milig: *Matematički priručnik*, SOHO Graph, Beograd, 2004.

CIP - Каталогизација у публикацији - Народна библиотека Србије, Београд

621.391(075.8)(0.034.2)

517.44(075.8)(0.034.2)

СИМИЋ-Пејовић, Мирјана, 1973-

Primena Furijeove analize u telekomunikacijama [Elektronski izvor] :
[elektronski udžbenik] / Mirjana Simić-Pejović. - Beograd : Elektrotehnički
fakultet Univerziteta, 2021 (Beograd : M. Simic-Pejovic). - 1 elektronski
optički disk (DVD) ; 12 cm

Sistemski zahtevi: Nisu navedeni. - Nasl. sa naslovne strane dokumenta. -
Tiraž 50. - Sadrži bibliografiju.

ISBN 978-86-7225-079-4

а) Теорија сигнала б) Интегралне трансформације

COBISS.SR-ID 31812361
