

Универзитет у Београду - Електротехнички факултет

КОВИЉКА СТАНКОВИЋ

**ЛАБОРАТОРИЈСКЕ ВЕЖБЕ
ИЗ ФИЗИКЕ**

Филозофски факултет
Београд, 2019

Ковиљка Станковић

ЛАБОРАТОРИЈСКЕ ВЕЖБЕ ИЗ ФИЗИКЕ

Издавач:

Академска мисао

Рецензенти:

Проф. др Јасна Црњански

Доц. др Марко Барјактаровић

Штампа: Висока техничка школа струковних студија Чачак

Тираж: 500 примерака

Одлуком Наставно-научног већа Електротехничког факултета Универзитета у Београду број 1042/5 од 26.9.2019. године овај уџбеник је одобрен као наставни материјал на Електротехничком факултету.

ISBN 978-86-7466-801-6

ISBN 978-86-7466-803-0 (e-book)

Фотокопирање или умножавање на било који начин или поновно објављивање ове књиге у целини или у деловима није дозвољено без изричите сагласности и писменог одобрења издавача.

Предговор

Уџбеник „Лабораторијске вежбе из физике“ намењен је студентима прве године основних академских студија Електротехничког факултета Универзитета у Београду. Градиво приказано у овом уџбенику у потпуности одговара плану и програму предмета Лабораторијске вежбе из физике.

Књига је подељена у две целине. Првих пет поглавља представља теоријски део, који се односи на статистичку обраду резултата мерења, исказивање мерне несигурности и графичко приказивање резултата мерења. Као такав, представља увод у наредни део књиге, који се односи на експериментални рад у лабораторији, приказан у поглављима од шестог до петнаестог. Приликом припремања текста, аутор је користио све претходне уџбенике за лабораторијске вежбе из физике који су били у употреби на Електротехничком факултету.

Потреба да се припреми овај уџбеник јавила се из два разлога. Као прво, аутор је пратио и прикупљао, последњих пет година, коментаре, сугестије, примедбе и критике студената добијених, у највећој мери, на основу резултата обавезних анкета које студенти попуњавају непосредно пред упис наредне школске године, а након полагања овог испита. Наиме, на основу свих конструктивних сугестија, које су узете у обзир приликом припремања текста, аутор очекује да ће овај уџбеник студентима олакшати савладавање градива. Такође, уз овај уџбеник, аутор је припремио и Практикум за лабораторијске вежбе из физике, који до сада није постојао. Практикум има функцију дневника студентских извештаја о урађеним вежбама у лабораторији, а његово коришћење ће у значајној мери скратити време припреме извештаја неопходних студентима за одбрану вежби.

Други разлог за писање овог текста јесте последња ревизија дефиниција основних јединица SI система. Наиме, у новембру 2018. године усвојене су ревидиране дефиниције килограма, ампера, келвина и мола. Овом ревизијом нестаје и последња дефиниција заснована на материјалном артефакту, тј. еталону килограма, који одлази у историју. Нови облик међународног система SI јединица почео је да се примењује 20. маја 2019. године, на датум када се обележава Светски дан метрологије.

Аутор изражава захвалност свим својим досадашњим студентима који су дали корисне коментаре, својим колегама са Катедре за микроелектронику и техничку физику и колегама из Завода за физику техничких факултета Универзитета у Београду који учествују у извођењу наставе на предмету Лабораторијске вежбе из физике, као и коауторима претходног уџбеника за лабораторијске вежбе из физике.

Коментаре и сугестије аутор очекује, пре свега, од студената Електротехничког факултета, којима је књига намењена, али такође и од колега који реализују наставу из овог предмета. То би помогло да у наредном издању књиге буду отклоњени недостаци, а такође и да буду унети нови корисни садржаји.

У Београду, септембра 2019. године

Аутор

САДРЖАЈ

1. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА	1
1.1 Средња вредност и стандардно одступање популације	2
1.2 Средња вредност и стандардно одступање узорка	3
1.3 Стандардно одступање средње вредности	4
1.4 Тачност, поновљивост и репродуктивност резултата мерења.....	5
1.5 Графичко приказивање расподеле резултата мерења - хистограм.....	6
1.6 Функција расподеле	8
1.7 Гаусова расподела	10
1.8 Гаусова стандардизована расподела	10
1.9 Униформна (равномерна) расподела	13
1.10 Троугаона функција расподеле	14
1.11 Стандардно одступање индиректно мерених величина	16
2. ИЗРАЖАВАЊЕ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ.....	21
2.1 Мерна несигурност тип А	22
2.2 Мерна несигурност тип Б.....	23
2.3 Утицај избора функције расподеле на изражавање мерне несигурности.....	24
2.4 Комбинована мерна несигурност	27
3. ПРАВИЛА И УПУТСТВА ЗА ИСКАЗИВАЊЕ НУМЕРИЧКИХ ВРЕДНОСТИ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА.....	31
4. ОПТИМАЛНА ПРАВА	37
4.1 Оптимална права која пролази кроз координатни почетак.....	40
4.2 Коефицијент корелације	41
5. ОСНОВНЕ ЈЕДИНИЦЕ SI СИСТЕМА	43

ВЕЖБА 1

6. МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ ТЕЧНИХ И ЧВРСТИХ СУПСТАНЦИ.....	49
6.1 Мерење густине течности помоћу пикнометра	49
6.2 Мерење густине супстанце у зрнастом облику помоћу пикнометра	53
6.3 Мерење густине течности хидрометром	54
6.4 Мерење густине чврстих тела хидростатичком вагом	56

ВЕЖБА 2

7. МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ПОМОЋУ КЛАТНА	59
7.1 Физичке основе	59
7.2 Експериментално одређивање убрзања земљине теже помоћу клатна	64

ВЕЖБА 3

8. МЕРЕЊЕ МОДУЛА ЕЛАСТИЧНОСТИ ЖИЦЕ	69
8.1 Физичке основе.....	69
8.2 Експериментално одређивање модула еластичности жице	72
9. МЕРЕЊЕ МОДУЛА ТОРЗИЈЕ (СМИЦАЊА) ЖИЦЕ	79
9.1 Физичке основе.....	79
9.2 Експериментално одређивање модула торзије жице	83
10. МЕРЕЊЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА ПОМОЋУ ТОРЗИОНОГ КЛАТНА	87
10.1 Физичке основе.....	87
10.3 Експериментално одређивање момента инерције неправилног тела	91

ВЕЖБА 4

11. МЕРЕЊЕ БРЗИНЕ ЗВУКА ПОМОЋУ КУНТОВЕ ЦЕВИ.....	93
11.1 Физичке основе.....	93
11.2 Експериментално одређивање брзине звука	102
12. МЕРЕЊЕ ОДНОСА СПЕЦИФИЧНИХ ТОПЛОТА c_p/c_v ЗА ВАЗДУХ.....	105
12.1 Физичке основе.....	105
12.2 Експериментално одређивање односа c_p/c_v за ваздух	109

ВЕЖБА 5

13. МЕРЕЊЕ СПЕЦИФИЧНЕ ТОПЛОТЕ ЧВРСТИХ ТЕЛА	115
13.1 Физичке основе.....	115
13.2 Експериментално одређивање специфичне топлоте чврсте супстанце у зрнастом облику	119

ВЕЖБА 6

14. МЕРЕЊЕ ЗАВИСНОСТИ ТАЧКЕ КЉУЧАЊА ВОДЕ ОД ПРИТИСКА	123
14.1 Физичке основе.....	124
14.2 Експериментално одређивање зависности тачке кључања воде од притиска .	125
15. МЕРЕЊЕ ТОПЛОТЕ ИСПАРАВАЊА ВОДЕ.....	129
15.1 Физичке основе.....	129
15.2 Експериментално одређивање топлоте испаравања воде.....	131

ВЕЖБА 7

16. МЕРЕЊЕ ЖИЖНЕ ДАЉИНЕ СОЧИВА ИЗ РАСТОЈАЊА	
ПРЕДМЕТА И ЛИКА	135
16.1 Физичке основе.....	136
16.2 Експериментално одређивање жижне даљине сочива из растојања предмета и лика	142
 ПРИЛОЗИ.....	 147
 ЛИТЕРАТУРА	 159

1. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

Експериментална искуства показују да понављање мерног поступка даје резултате вишег квалитета и веће поузданости него појединачно мерење. Понављањем неког експеримента, у сличним или у променљивим условима окружења, стиче се боље сазнање о природи мерене величине, као и о квалитету и карактеристикама мерне опреме. Серијом поновљених мерења добија се већи број података. Међутим, по правилу, **резултати мерења** се дају у виду само **једног или два бројна податка**. До крајњег резултата долази се применом статистичке анализе добијених резултата.

У пракси се често врше контроле исправности паковања производа. На пример, контролише се узорак од 20 - 30 производа једнаке називне масе. Помоћу ваге високе тачности, установиће се, по правилу, да су масе свих производа међусобно различите. Иако је мерењем добијен већи број података, од контроле се очекују само два податка: а) средња вредност масе, којом се приказују масе свих производа и б) податак који ће изразити величине одступања маса од средње вредности.

Слична је ситуација при снимању неке зависности, на пример истезања опруге од силе или промена отпорности неког отпорног сензора од температуре. Претпоставимо да испитивану зависност желимо да прикажемо графички (нпр. линеарном једначином). Статистичком обрадом података добићемо три бројне вредности: а) коефицијент нагиба праве, б) слободни члан и в) број којим се карактеришу одступања тачака од резултантне праве.

Искуство и теоријска статистика показују да се начин груписања случајних мерних резултата око неке вредности може изразити математичком релацијом. Реч је о тзв. функцији расподеле. Она не даје сигуран податак колика ће износити нека конкретна вредност мерног резултата. Међутим, функција расподеле даје могућност добре процене вероватноће са којом ће се неки од појединих резултата налазити у датом интервалу. Такође се може проценити колики ће део резултата бити у неком унапред задатом интервалу. Постоји правило да примена функције расподеле даје утолико поузданије резултате, уколико је већи број резултата мерења.

Из горњег излагања следи закључак, да је примена статистичких метода обраде резултата предуслов доброг коришћења података мерења.

1.1 СРЕДЊА ВРЕДНОСТ И СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ ПОПУЛАЦИЈЕ

Ако се под истим условима врше поновљена мерења неке величине, на пример константне струје или сталне отпорности неког отпорника, уз претпоставку да уређај има врло велику резолуцију, (тј. да је у стању да „разликује“ веома мале промене излазног нивоа), добијени резултати ће по правилу имати мање или веће разлике. Ово је последица утицаја разних ометајућих величина које се не могу нити уклонити нити у потпуности објаснити. На пример, код електричних инструмената са покретном казаљком, механички потреси и вибрације, затим микроскопски ситне честице прашине које доспевају у лежиште покретног система и друге утицајне величине, проузрокују различите отклоне и при истоветној јачини струје инструмента. Код електронских мерних инструмената узроци различитих показивања при константном улазу могу бити шумови који настају у пасивним и активним компонентама, или они који се преносе из окружења електромагнетским сметњама.

Ако је извршен веома велики број (теоријски бескрајно велики број) од N поновљених мерења једне исте физичке величине помоћу инструмента високе резолуције, резултати мерења

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N \quad (1.1)$$

се називају **популација**. **Средња вредност популације** μ се израчунава као аритметичка средина резултата мерења:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (1.2)$$

Помоћу средње вредности популације μ дефинишу се **одступања** a_i као разлике појединих резултата од средње вредности

$$a_i = x_i - \mu . \quad (1.3)$$

По правилу, број одступања са позитивним знаком близак је броју одступања са негативним знаком.

Одступања поновљених мерења, добијена разним инструментима, могу се знатно разликовати по величини. Док код грубљих уређаја модуо одступања може износити неколико процената од средње вредности, код квалитетнијих инструмената одступања износе далеко испод 1%. Ради изражавања величине одступања користи се **стандардно одступање популације** σ . Стандардно одступање дефинише се као величина чији квадрат помножен са бројем мерења N има вредност једнаку збиру квадрата одступања:

$$N\sigma^2 = \sum_1^N a_i^2 = \sum_1^N (x_i - \mu)^2 ,$$

тј.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} . \quad (1.4)$$

Релативно стандардно одступање дефинише се изразом:

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{\mu} , \quad (1.5)$$

а користи се за изражавање **поновљивости** мерења. Што је σ_r мање, поновљивост је боља, и обрнуто.

У статистици се често користи и квадрат стандардног одступања σ^2 који се назива **варијанса** или дисперзија.

1.2 СРЕДЊА ВРЕДНОСТ И СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ УЗОРКА

Појам популације везан је за огроман (теоријски бескрајно велики) број мерења. Сви елементи популације се **не могу** сазнати у пракси, па популација има углавном теоријски значај. У реалним експериментима мерења се понављају **ограничен број** пута, на пример десетак или неколико десетина пута. Ако се ради о једнаким индустријским производима, практично се тестира мањи број, n , делова, тј. мерењем се добија скуп резултата:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n .$$

Овакав мањи скуп резултата се назива **узорак**. Сваки узорак се може сматрати подскупом одговарајуће популације. На пример, узорак од 20 производа сматра се делом популације производа произведених у некој фабрици.

Један од основних задатака статистичке обраде резултата је да се на основу узорка добије што боља апроксимација, односно оцена карактеристика популације - пре свега средње вредности μ и стандардног одступања σ . Најбољом апроксимацијом средње вредности популације сматра се **средња вредност узорка**:

$$x_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (1.6)$$

Може се показати да средња вредност има својство да сума квадрата одступања $(x_i - x_s)$ има најмању могућу вредност:

$$\sum (x_i - x_s)^2 = \min. \quad (1.7)$$

Изједначавањем првог извода израза (1.7) по x_s са нулом, добија се $-2\sum (x_i - x_s) = 0$, одакле следи (1.6). Пошто је други извод израза (1.7) позитиван, сума квадрата одступања има заиста минимум.

Одступање i -тог резултата од средње вредности узорка је $b_i = x_i - x_s$. Уз помоћ (1.6) лако се доказује да је збир свих одступања b_i једнак нули:

$$\sum_1^n b_i = 0. \quad (1.8)$$

Стандардно одступање узорка од n чланова означава се словом s , а добија се помоћу израза:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_s)^2}{n - 1}}. \quad (1.9)$$

Стандардно одступање узорка сматра се најбољом апроксимацијом (или проценом) стандардног одступања популације σ . Извођење формуле (1.9) је овде изостављено, али се може наћи у литератури.

1.3 СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ СРЕДЊЕ ВРЕДНОСТИ

Свака физичка величина случајног карактера има своје стандардно одступање. Средња вредност се добија на основу елемената узорка x_i чија је природа случајна, па с тога и средња вредност мерења представља **случајну статистичку величину**. То значи да средња вредност x_s има своје стандардно одступање које се означава са s_{x_s} . **Стандардно одступање средње вредности** мерења дато је изразом:

$$s_{x_s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x_s)^2}{n(n - 1)}}. \quad (1.10)$$

Извођење формуле (1.10) дато је у оквиру примера 1.2, на крају овог поглавља. Из израза (1.10) види се да је стандардно одступање средње вредности мерења мање $\sqrt{n}$ пута од стандардног одступања појединих резултата s . Другим речима, средња вредност x_s као мерни податак је

поузданија него појединачни резултати x_i , што оправдава потребу вишеструког понављања неког експеримента.

1.4 ТАЧНОСТ, ПОНОВЉИВОСТ И РЕПРОДУКТИВНОСТ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

Као крајњи резултат неког поновљеног мерења сматра се средња вредност узорка x_s . **Грешка мерења** се одређује као разлика измереног и условно тачног резултата, ако се до њега може доћи. Условно тачном вредношћу може се сматрати она вредност која се добија еталонским инструментом. У држави, то би била вредност која се добија у одговарајућој лабораторији националног метролошког института¹.

Апсолутно одступање (**апсолутна грешка**) мерења од условно тачне вредности износи:

$$\varepsilon_a = |x_s - x_t|, \quad (1.11)$$

где је x_t условно тачна вредност мерене величине.

Релативно одступање (**релативна грешка**) мерења од условно тачне вредности износи:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{x_t} = \frac{x_s - x_t}{x_t}. \quad (1.12)$$

Тачност мерења представља блискост слагања резултата мерења и праве (условно тачне) вредности мерене величине (према публикацији Међународни речник основних и општих термина у метрологији). Тачност је утолико боља уколико је релативна грешка мерења мања.

У Речнику постоје следеће и напомене:

1. Тачност је квалитативан појам.

2. Термин **прецизност** не треба да се користи за тачност.

У Речнику се дефинишу појмови **поновљивост** и **репродуктивност** мерења. Поновљивост се односи на серију мерења извршених при истим условима. Исти услови мерења значе истоветност мерног поступка, посматрача, мерила као и то да је понављање извршено у кратком временском периоду. Поновљивост инструмента је утолико боља уколико је релативно стандардно одступање мање

¹ У Србији, национална метролошка институција је Дирекција за мере и драгоцене метале, Београд (www.dmdm.rs).

$$s_r = \frac{s}{x_s}. \quad (1.13)$$

У ранијој литератури се уместо термина поновљивост користио термин **прецизност**, чија се употреба више **не препоручује**.

Репродуктивност резултата се такође изражава релативним стандардним одступањем, али под условом да је серија поновљених мерења обављена у **променљивим условима**. Променљиви услови мерења претпостављају различите поступке мерења, различитост мерила, референтних еталона, места, као и да је серија обављена у дужем интервалу времена.

1.5 ГРАФИЧКО ПРИКАЗИВАЊЕ РАСПОДЕЛЕ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА - ХИСТОГРАМ

Експериментално искуство показује да се при понављању неког мерења резултати на неки начин групишу око средње вредности. Ово груписање се сликовито, графички приказује хистограмом који се добија на следећи начин. Полази се од n резултата неког поновљеног мерења, тј. од узорка $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Резултати мерења се поређају по величини и наносе на хоризонталну осу почев од минималног резултата $x_{\min}$ до максималног $x_{\max}$. Укупни распон у коме постоје резултати $x_{\max} - x_{\min}$ дели се на m једнаких интервала ширине:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}. \quad (1.14)$$

У сваком од интервала постоји неколико мерних резултата чији се број означава са n_{x_i} , а назива **учестаност** датог интервала. Сваком интервалу такође одговара **релативна учестаност** дата изразом $P_i = n_{x_i} / n$, где је n укупан број мерних резултата. За сваки интервал потребно је одредити такође **густину релативне учестаности** p_i према изразу:

$$p_i = \frac{P_i}{\Delta x} = \frac{n_{x_i}}{n \cdot \Delta x} \quad (1.15)$$

Број m интервала хистограма треба одабрати на одговарајући начин. Наиме, ако је број интервала сувише мали, хистограм приказује расподелу резултата грубо и без потребног разлагања. Уколико је пак број интервала m сувише велик, неки од интервала остају празни, тј. јављају се прекиди у приказивању

расподеле. Препоручљиво је да број интервала има целобројну вредност блиску са $m \approx \sqrt{n}$ или $m = \text{Int}(\sqrt{n} + 1)$.

Целокупна површина свих m правоугаоника ширине Δx и висине p_i износи:

$$\sum_1^m (p_i \cdot \Delta x) = \sum_1^m \frac{n_{xi}}{n \Delta x} \cdot \Delta x = \frac{1}{n} \sum_1^m n_{xi} = 1.$$

То изражава логичну чињеницу да се сви резултати налазе у интервалу од $x_{\min}$ до $x_{\max}$.

Пример 1.1: Нацртати хистограм за случај мерења отпорности 20 отпорника називне отпорности од 100Ω . Резултати мерења приказани су у табели 1.1.

Табела 1.1 Резултати мерења отпорности узорка од 20 отпорника.

Редни број	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Отпорност (Ω)	98,4	99,0	99,5	99,8	100,0	100,2	100,3	100,3	100,6	101,0

Редни број	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Отпорност (Ω)	101,2	101,3	101,4	101,6	102,1	102,2	102,4	102,6	103,9	104,2

Решење: У датом случају број елемената у узорку износи $n = 20$. Може се усвојити да број сегмената хистограма износи $m = \text{Int}(\sqrt{n} + 1) = 5$. Ширина сегмената је:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m} = 1,16 \Omega.$$

Границе појединих сегмената износе редом:

98,4 Ω	99,56 Ω	100,72 Ω	101,88 Ω	103,04 Ω	104,20 Ω
---------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

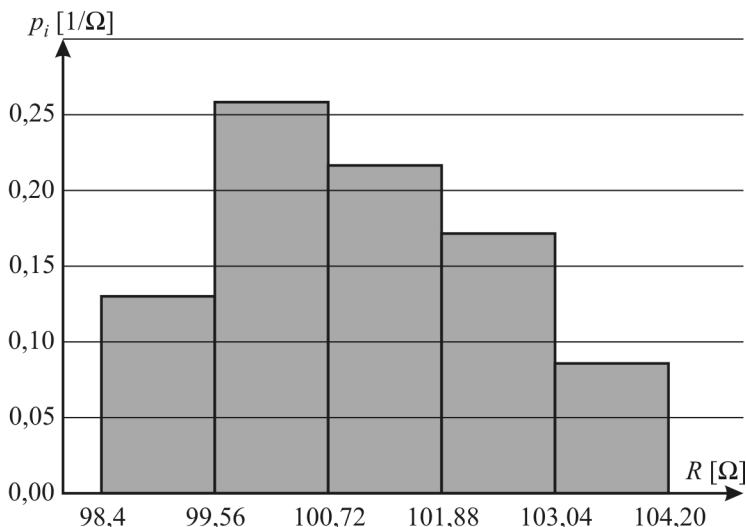
Учестаности по интервалима n_{x_i} износе:

n_{x_1}	n_{x_2}	n_{x_3}	n_{x_4}	n_{x_5}
3	6	5	4	2

Одговарајуће густине релативне учестаности p_i су :

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
0,1293	0,2586	0,2155	0,1724	0,0862

Нацртан хистограм приказан је на слици 1.1. Он се састоји од скупа правоугаоника ширине Δx и висине p_i .



Слика 1.1 Хистограм резултата мерења на узорку од 20 отпорника (према подацима из табеле 1.1).

Укупна површина хистограма износи:

$$\sum_{i=1}^5 p_i \cdot \Delta x = 0,99992 \approx 1,$$

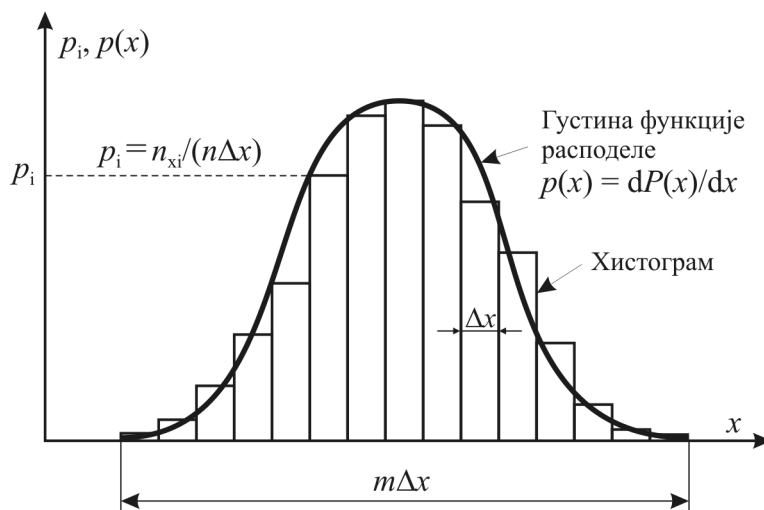
тј. испуњен је **услов нормираности вероватноће**. Другим речима, вероватноћа да се сви резултати налазе између минималног и максималног резултата једнака је јединици.

1.6 ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Посматрајмо хистограм неког великог узорка резултата добијених инструментом врло високе резолуције, слика 1.2. У граничном случају, када број резултата n тежи бесконачности, узорак прелази у популацију, а резултати се практично континуално расподељују по x оси. При томе настају следећи гранични процеси. Број сегмената хистограма се бесконачно повећава, $m \rightarrow \infty$, док ширина сегмената постаје инфинитезимала, $\Delta x \rightarrow dx$. Релативна учестаност постаје инфинитезимала, $P_i \rightarrow dP(x)$, а густина релативне учестаности прелази у континуалну функцију $p_i \rightarrow p(x)$. То значи да обвојница хистограма формира континуалну функцију

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx}, \quad (1.16)$$

Израз $p(x)$ се назива **функција густине расподеле** датог мерења.



Слика 1.2 Графички приказ коначног броја мерних резултата хистограмом; функција расподеле при бесконачном броју резултата (континуална линија).

Ако је позната функција густине расподеле, вероватноћа налажења неког резултата у малом интервалу $(x, x+dx)$ дата је изразом:

$$dP(x) = p(x) \cdot dx, \quad (1.17)$$

док је вероватноћа за коначни интервал $[x_1, x_2]$ дата интегралом:

$$P_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx. \quad (1.18)$$

Свака функција расподеле је нормирана, као што је то случај и са хистограмом. То значи да је укупна површина испод криве једнака јединици:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (1.19)$$

Ако је функција расподеле позната, средња вредност и стандардно одступање могу се одредити следећим формулама:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \quad (1.20)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (1.21)$$

При обради мерних резултата користе се функције расподеле. На овом месту биће размотрене следеће симетричне расподеле: а) Гаусова, б) Гаусова стандардизована, в) униформна и г) троугаона расподела.

1.7 ГАУСОВА РАСПОДЕЛА

На бази експерименталног искуства и теоријских разматрања Гаус² је почетком XIX века извео расподелу којом се успешно приказују резултати мерења праћени случајним грешкама. Ова расподела, названа Гаусовом или нормалном, има облик функције густине расподеле:

$$p_G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.22)$$

Графички приказ густине функције Гаусове расподеле дат је на слици 1.3а. Параметри Гаусове расподеле су μ - средња вредност и σ - стандардно одступање. За $x = \mu$, функција $p_G(x)$ има максимум $p_G(\mu) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Крива $p_G(x)$ је симетрична око средње вредности, што је у складу са експериментално утврђеном чињеницом да су позитивна и негативна одступања резултата око средње вредности подједнако вероватна.

1.8 ГАУСОВА СТАНДАРДИЗОВАНА РАСПОДЕЛА

Вероватноћа да се неки резултат нађе у интервалу (x_1, x_2) одређена је интегралом:

$$P_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \quad (1.23)$$

Уводећи нову променљиву z , која је **бездимензионална** величина:

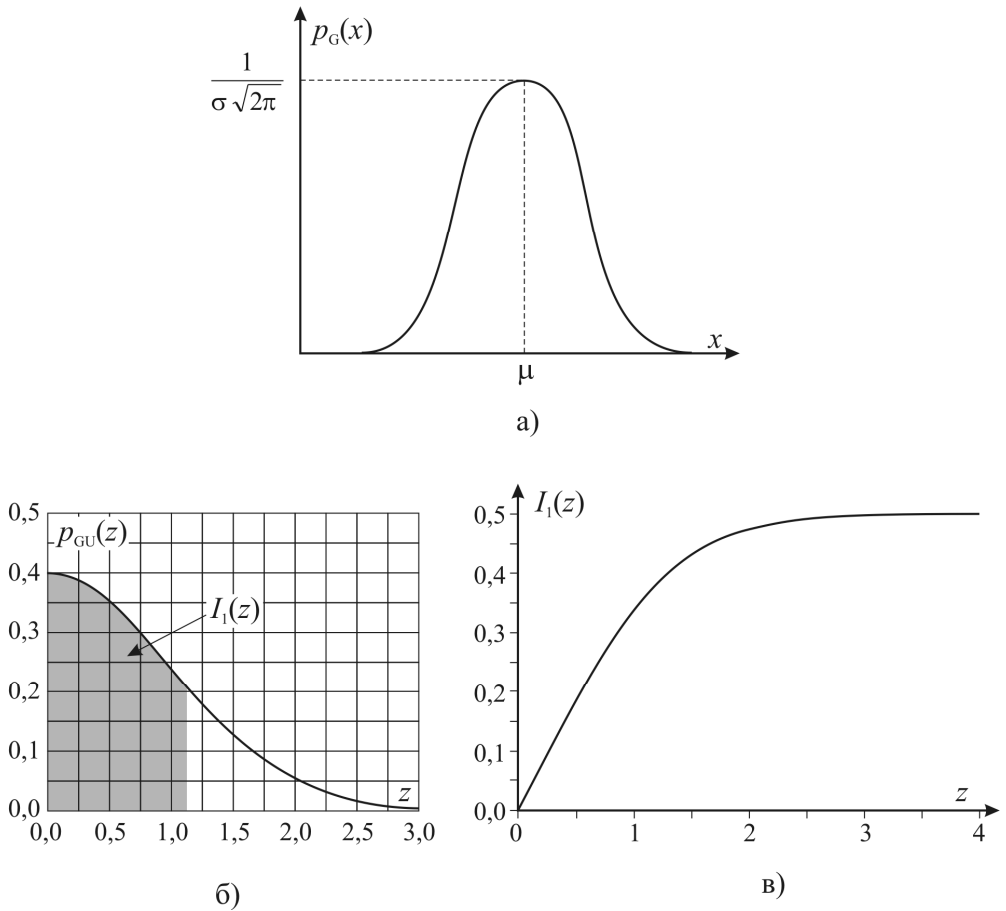
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad (1.24)$$

и сменом $dx = \sigma \cdot dz$, (1.23) постаје:

² Johann Carl Fiedrich Gauss (1777 -1855), један од највећих математичара свих времена и велики физичар.

$$P_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \quad (1.25)$$

где су границе z_1 и z_2 одређене са (1.24). Изразом (1.25) дефинисана је стандардизована (или уопштена) Гаусова расподела.



Слика 1.3 а) Гаусове расподеле са параметрима μ и σ ; б) стандардизована Гаусова расподела p_{GU} (десна половина криве), в) интеграл $I_I(z)$.

Функција густине стандардизоване Гаусове расподеле дата је изразом:

$$p_{GU} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (1.26)$$

Код уопштене Гаусове расподеле (за разлику од природне Гаусове) променљива z је **бездимензионална величина са средњом вредношћу нула**.

Насупрот томе, x представља димензиону променљиву, која може имати било коју средњу вредност и стандардно одступање. **Стандардно одступање уопштене расподеле износи 1** и такође нема димензију. То значи да се све Гаусове расподеле без обзира на μ и σ , сменом (1.24), пресликавају у **јединствену** расподелу p_{GU} . Расподела p_{GU} , сл.1.3б, (приказана је само десна половина) има максимум при $z = 0$ који износи $1/\sqrt{2\pi}$. Ради израчунавања вероватноће према Гаусовој расподели довољно је располагати једино табелом интеграла расподеле p_{GU} . Сменом (1.24) табела се може применити на произвољну природну Гаусову расподелу.

Интеграл (1.25) није аналитички решив, него се даје у виду дијаграма или таблично. Обично се даје табела са вредностима интеграла $I_1(z) = \int_0^z p_{GU}(z)dz$, као што је приказано у Табели 1.2.

Табела 1.2 Вредности интеграла I_1 уопштене Гаусове расподеле

z	$I_1(z)$	z	$I_1(z)$	z	$I_1(z)$
0,00	0,0000	1,10	0,3643	2,20	0,4861
0,10	0,0398	1,20	0,3849	2,30	0,4893
0,20	0,0792	1,30	0,4032	2,40	0,4918
0,30	0,1179	1,40	0,4192	2,50	0,4938
0,40	0,1554	1,50	0,4332	2,60	0,4953
0,50	0,1914	1,60	0,4452	2,70	0,4961
0,60	0,2257	1,70	0,4554	2,80	0,4974
0,70	0,2580	1,80	0,4640	2,90	0,4981
0,80	0,2881	1,90	0,4713	3,00	0,4986
0,90	0,3158	2,00	0,4772	3,20	0,49965
1,00	0,3413	2,10	0,4821	4,00	0,49997

Код практичног рачунања вероватноће налажења резултата у интервалу (x_1, x_2) , односно (z_1, z_2) , помоћу табеле 1.2 треба имати у виду следеће особине интеграла $I_1(z)$, које су последица симетричности функције:

$$P(-|z_1|, |z_2|) = I_1(z_1) + I_1(z_2); \quad P(|z_1|, |z_2|) = I_1(z_2) - I_1(z_1).$$

Вероватноћа $P_{1,2}$ назива се такође и статистичка сигурност налажења резултата у неком одређеном интервалу.

Статистичка сигурност која одговара опсегу $(\mu \pm \sigma)$ израчунава се тако што се одреде бездимензионалне границе z_1 и z_2 које према (1.24) износе $z_{1,2} = \pm 1$. Из табеле 1.2. добија се $P(\mu \pm \sigma) = 2I_1(1) = 0,683$.

Дакле, у интервалу (средња вредност $\pm$ стандардно одступање) налази се око 68% резултата. Ово се може исказати и другим речима - статистичкој сигурности од 68% одговара интервал резултата $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$. Важи и следеће правило: сваки појединачни резултат има вероватноћу од 68% да се нађе у интервалу $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

На сличан начин се показује да интервалу $(\mu \pm 2\sigma)$ одговара статистичка сигурност од 95,4%. У интервалу $(\mu \pm 3\sigma)$ налази се 99,7%, тј. у том интервалу су практично сви мерни резултати. Интервал $(\mu \pm 3\sigma)$ се назива опсег максималног одступања. Ако је у неком мерењу познато стандардно одступање σ , онда се резултати који одступају за више од $\pm 3\sigma$ обично одбацују, јер највероватније потичу од неке грубе грешке настале током мерног поступка.

1.9 УНИФОРМНА (РАВНОМЕРНА) РАСПОДЕЛА

Дијаграм густине униформне (равномерне) расподеле приказан је на слици 1.4. Расподела је одређена средњом вредношћу μ и полуширином интервала a . Вредности случајне променљиве x могу да се налазе у интервалу $[\mu - a, \mu + a]$, при чему је **свака вредност унутар интервала $[\mu - a, \mu + a]$ подједнако вероватна**. Свака расподела мора да испуњава услов нормираности, што значи да површина испод криве расподеле износи 1. Математички је овај

услов изражен изразом $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$, где је $p(x)$ функција густине расподеле.

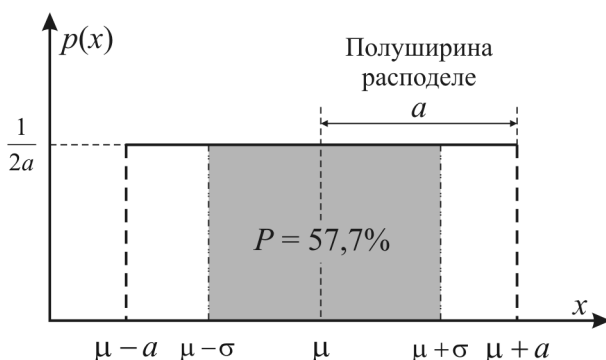
Из услова нормираности добија се:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in [\mu - a, \mu + a] \\ 0, & x \notin [\mu - a, \mu + a] \end{cases} \quad (1.27)$$

Заменом (1.27) у (1.21) израчунава се следећа вредност стандардног одступања униформне расподеле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2a} \int_{\mu-a}^{\mu+a} (x - \mu)^2 dx} = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (1.28)$$

Интервал полуширине од једног стандардног одступања са центром у средњој вредности приказан је осенченом површином на сл.1.4. Ова површина која представља вероватноћу налажења резултата у интервалу полуширине од једног стандардног одступања око средње вредности ($\mu \pm \sigma$) износи $1/\sqrt{3} = 57,7\%$.



Слика 1.4. Функција густине униформне расподеле.

Униформна расподела се најчешће примењује када се располаже са мало информација о неком инструменту, а користи се при одређивању несигурности у случајевима међу којима су и следећи:

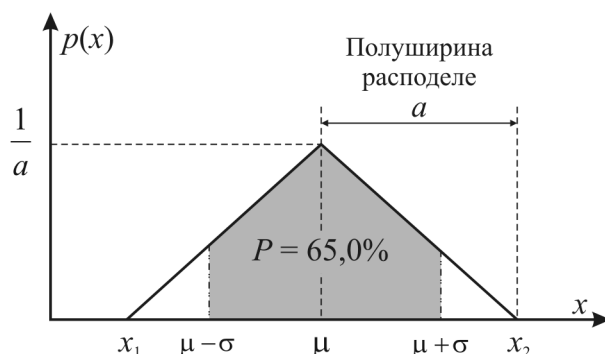
- Генерисање случајних бројева.
- При читавању на скали дигиталног индикатора (тада проширена несигурност износи половину дигита).
- Када се располаже са табличним подацима о вредностима параметра материјала (специфична отпорност, густина, модуло еластичности и сл.) које се налазе се у опсегу ($x_{\min}$, $x_{\max}$). За средњу вредност се тада усваја $\mu = (x_{\min} + x_{\max})/2$, па је полуширина расподеле $a = x_{\max} - \mu = \mu - x_{\min}$.

1.10 ТРОУГАОНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Функција густине троугаоне расподеле приказана је на слици 1.5. Троугаона и униформна расподела имају заједничку особину да им је интервал у којем се налазе резултати **ограничен**. Са слике 1.5 види се да се сви резултати налазе у ограниченом интервалу полуширине a симетрично распоређени око средње вредности μ . Основна карактеристика троугаоне расподеле је **сконцентрисаност** резултата око средње вредности. То значи да су мања одступања резултата од средње вредност вероватнија од већих одступања. Укупна површина троугла на слици 1.5 мора бити 1, што представља услов нормираности, одакле се добија да максимум расподеле износи $p(\mu) = 1/a$,

што је два пута више него код униформне расподеле исте ширине. Густина функције троугаоне расподеле дефинисана је на следећи начин:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{a^2}, & x \in [\mu - a, \mu], \quad x_1 = \mu - a \\ \frac{x_2 - x}{a^2}, & x \in [\mu, \mu + a], \quad x_2 = \mu + a \\ 0, & x \notin [\mu - a, \mu + a] \end{cases} \quad (1.30)$$



Слика 1.5 Функција густине симетричне троугаоне расподеле са полуширином a .

Стандардно одступање код троугаоне расподеле, израчунава се заменом израза (1.30) у (1.21), чиме се добија:

$$\sigma = a / \sqrt{6}. \quad (1.31)$$

На слици 1.6 осенчена је површина у интервалу $(\mu \pm \sigma)$. Ова површина износи 0,65. Другим речима интервалу $(\mu \pm \sigma)$ одговара статистичка сигурност од 65%. Поредиши ову вредност са статистичком сигурношћу интервала $(\mu \pm \sigma)$ код правоугаоне расподеле (57%) види се да троугаона расподела, услед сконцентрисаности, има већу сигурност.

Троугаона расподела се примењује у случају када се из искуства зна да постоји јасно груписање мерних резултата око средње вредности. При томе услови Централне граничне теореме³ нису потпуно задовољени, што значи да расподела највероватније није Гаусова.

³ Видети Прилог 1.

1.11 СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ ИНДИРЕКТНО МЕРЕНИХ ВЕЛИЧИНА

Многа мерења се врше индиректним путем, тако што се помоћу претходно измерених података $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, тражена величина у израчуна помоћу одговарајуће функције

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad (1.32)$$

На пример, ако се код тела облика квадра измере маса m , дужина x_1 , ширина x_2 и висина x_3 , онда је средња густина ρ дата изразом $\rho = \frac{m}{x_1 x_2 x_3}$.

Ако величине x_i имају стандардна одступања s_{x_i} , поставља се питање колико износи стандардно одступање индиректно мерене величине s_y . У циљу решења овог проблема одредићемо тотални диференцијал функције у који гласи:

$$dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \quad (1.33)$$

Диференцијалне величине dy и dx_i могу се заменити коначним променама Δy и Δx_i под условом да су оне релативно мале. На тај начин се добија:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (1.34)$$

Величина $\Delta y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i$ је **парцијална промена** величине у проузроковане променом Δx_i . Дакле, промена индиректно мерене величине у једнака је збиру парцијалних промена проузрокованих променама појединих величина:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta y_{x_i}, \quad \text{где је } \Delta y_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i. \quad (1.35)$$

Квадрирањем израза (1.35) добија се:

$$(\Delta y)^2 = \sum_{i=1}^n (\Delta y_{x_i})^2 + 2 \cdot \sum_{i=1, j=i+1}^{i=n-1, j=n} (\Delta y_{x_i})(\Delta y_{x_j}). \quad (1.36)$$

Парцијалне промене у другом члану (1.36) са подједнаком вероватноћом имају позитивне и негативне вредности. Ако је број чланова суме велик, други члан у (1.36) има занемарљиво малу вредност, тако да се добија:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta y_{x_i})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2} . \quad (1.37)$$

Ако се у (1.37) промене Δx_i замене одговарајућим стандардним одступањима s_{x_i} , за стандардно и релативно одступање одступање индиректно мерене величине се добија:

$$s_y = \sqrt{\sum \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_{x_i}^2 \right]},$$

$$s_{ry} = \frac{s_y}{y} = \frac{1}{y} \sqrt{\sum \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s_{x_i}^2 \right]} . \quad (1.38)$$

Пример 1.1. Величина у одређује се као збир вредности измерених величина $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Одредити:

- а) промену Δy , ако постоји висока корелација између промена утицајних величина Δx_i ;
- б) стандардно одступање, ако су промене утицајних величина Δx_i међусобно некорелисане.

Решење: Тражена величина је

$$y = \sum_{i=1}^n x_i . \quad (1.39)$$

Парцијални изводи у изразу (1.34) износе

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 1 \quad (1.40)$$

- а) При потпуној корелисаности⁴ промена Δx_i помоћу (1.40) и (1.34) добија се

$$\Delta y = \sum \Delta x_i . \quad (1.41)$$

Ако се у (1.41) промене Δy и Δx_i замене стандардним одступањем добија се

$$s_y = \sum s_{x_i} \quad (1.42)$$

- б) Ако су промене Δx_i некорелисане, из (1.40) и (1.37) добија се:

⁴ Видети поглавље 2.3.

$$\Delta y = \sqrt{\sum (\Delta x_i)^2} . \quad (1.43)$$

Заменом одступања Δx_i замене одговарајућим стандардним одступањима s_{x_i} , добија се стандардно одступање средње вредности

$$s_y = \sqrt{\sum s_{x_i}^2} . \quad (1.44)$$

Пример 1.2 Величина y одређује се као средња вредност узорка $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$. Одредити:

- а) промену Δy , ако постоји висока корелација између промена утицајних величина Δx_i ;
- б) стандардно одступање, ако су промене утицајних величина Δx_i међусобно некорелисане.

Решење: Тражена величина је

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (1.45)$$

Парцијални изводи су:

$$\partial y / \partial x_i = 1 / n \quad (1.46)$$

- а) При потпуној корелисаности промена Δx_i заменом (1.46) у (1.34) добија се

$$\Delta y = \frac{1}{n} \sum \Delta x_i . \quad (1.47)$$

Одговарајуће стандардно одступање је

$$s_y = \frac{1}{n} \sum s_{x_i} . \quad (1.48)$$

- б) У случају некорелисаних промена Δx_i , помоћу (1.46) и (1.37) добија се

$$\Delta y = \frac{1}{n} \sqrt{\sum (\Delta x_i)^2} \quad (1.49)$$

Ако се у (1.49) одступања Δx_i замене одговарајућим стандардним одступањима s_{x_i} , добија се стандардно одступање средње вредности:

$$s_y = \frac{1}{n} \sqrt{\sum s_{x_i}^2} . \quad (1.50)$$

У узорку све величине x_i имају иста стандардна одступања, $s_{x_i} = s_x$ па (1.50) постаје:

$$s_y = \frac{1}{n} \sqrt{n \cdot s_x^2} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (1.51)$$

Тиме је изведен претходно коришћени израз (1.10) за стандардно одступање средње вредности мерења.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

Johann Carl Fiedrich Gauss (1777 -1855), један од највећих математичара свих времена и велики физичар. Гаус је дао велики број доприноса, фундаменталног значаја, у више математичких дисциплина, међу којима су геометрија, диференцијална геометрија, алгебра, теорија бројева, теорија редова, статистичка математика и др. За даљи развој науке и мерне технике посебно велики значај имало је откриће принципа најмањег збира квадрата и нормалне или Гаусове расподеле. На бази њих је вршена обрада мерних резултата и вршена њихова апроксимација аналитичким изразима. Многи математички резултати који по мишљењу Гауса нису били обрађени до савршенства нису ни били публиковани. Међу њима и откриће неевклидске геометрије коју је неколико деценија касније открио Лобачевски.

Гаус је дао доприносе који су унапредили теоријску и практичну геодезију, а сматра се творцем тзв. више геодезије. Био је директор астрономске опсерваторије у Гетингену и дао доприносе у математичкој и практичној астрономији. Проучавао је и магнетизам Земље и доказао да на Земљи постоји само један јужни и северни магнетски пол. Заједно са Вебером основао је мрежу геомагнетских мерних станица и створио геомагнетски атлас Земље. Лоцирао је место јужног магнетског пола. Јединица магнетске индукције у CGS систему назива се гаус. Изумео је први електромагнетски телеграф са дометом од 5 километара.

2. ИЗРАЖАВАЊЕ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ

Резултат сваког реалног мерења садржи у себи одређену несигурност, што значи да се идеално тачна вредност мерене величине не може сазнати. Узроци мерне несигурности могу бити веома бројни и по правилу се не могу сви узети у обзир. Да би се постигла једнообразност у изражавању мерних резултата водеће институције међународног **метролошког**¹ система, године 1993. публиковале су Упутство за изражавање мерне несигурности². До тада за обраду и изражавање резултата била је примењивана класична математичка дисциплина, тзв. **теорија грешака**. Начини обраде резултата нису били уједначени па је било тешко поређење истих мерења извршених у различитим институцијама.

Обрадом мерних резултата на начин описан у Упутству добија се мерни резултат, затим мерна несигурност и статистичка сигурност са којом важе добијени подаци. Појам **грешка мерења** односи се искључиво на разлику добијеног резултата и одговарајуће вредности добијене помоћу еталонског мерног инструмента. Концепт изражавања мерне несигурности изнесен у Упутству има као теоријску подлогу исти математички апарат који се користи код теорије грешака. Међутим, метод изражавања мерне несигурности је **практично оријентисан** и може се добро применити у свим експерименталним мерењима. Насупрот томе, полазне величине теорије грешака су **случајне и систематске грешке** које као идеализовани појмови **не постоје** у пракси. Наиме, систематске грешке, по класичној теорији, потичу од физичких величина које изазивају промену увек исте величине и знака. Овакве претпоставке нису испуњене у стварним мерењима. Насупрот томе случајне грешке су проузроковане величинама које проузрокују искључиво случајне (стохастичке) промене мерене величине.

Наиме, често једна иста физичка величина изазива како случајне тако и систематске ефекте. На пример, брзе флукуације температуре имају за последицу ефекте који одговарају случајним грешкама. Међутим спорије температурске промене могу стварати промене које одговарају систематским грешкама. Сличан пример, где једна величина изазива и брзе и споре промене, је напон напајања појачавача и мерних мостова. Напон напајања добијен из мрежног исправљача има брзе флукуације (тзв. таласност) а такође и лагане промене које зависне од температуре околине и нестабилности мрежног

¹ Метрологија је наука о мерењима и обради мерних резултата.

² Guide to Expression of Uncertainty in Measurement.

напона. Отуда, напон напајања истовремено проузрокује и случајне и систематске ефекте.

Насупрот теорији грешака приступ у изражавању мерне несигурности дат у Упутству је практично оријентисан па га је могуће применити у анализи експерименталних резултата.

При изражавању мерне несигурности користе се сви термини и целокупни математички апарат класичне статистичке теорије. Међутим, јављају се и неки појмови уведени за област изражавања мерне несигурности. Усвојено је да се мерна несигурност (МН) означава словом u , (енгл. *uncertainty* - несигурност). Основни принцип је да се сваком податку о несигурности придружи одговарајућа функција расподеле, као и вероватноћа, односно статистичка сигурност. Користе се и следећи појмови.

Стандардна мерна несигурност, u , по дефиницији једнака је стандардном одступању $u = s$. Статистичка сигурност која одговара стандардној мерној несигурности зависи од расподеле која се приписује датом мерењу. На пример у случају Гаусове расподеле, интервалу ширине једног стандардног одступања, око средње вредности, одговара сигурност од 68,2 %.

Проширена мерна несигурност, U , представља умножак стандардне мерне несигурности и **коэффициента проширења**, k , тј. $U = ku$. Коэффициент k може имати вредности у интервалу од $\sqrt{3}$ до 3, у зависности од расподеле (Табела 2.1). Проширеној мерној несигурности одговара висока вредност статистичке сигурности, реда величине 99 %. То значи да се мерена величина са великом сигурношћу налази у интервалу $(x_s \pm U)$.

Постоје два основна типа несигурности: **мерна несигурност тип А** и **мерна несигурност тип Б**. Ова подела је заснована искључиво **на основу метода** којима се несигурности одређују. Уз ова два типа мерне несигурности користи се и тзв. **комбинована мерна несигурност**.

2.1. МЕРНА НЕСИГУРНОСТ ТИП А

Мерна несигурност тип А одређује се **искључиво методом статистичке обраде резултата**. Из овог следи да МН тип А постоји само ако се ради о мерењу које је **поновљено више пута**. Ако су резултати поновљених мерења представљени узорком $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, помоћу (1.6) може се израчунати средња вредност x_s која, по правилу представља јединствену крајњу вредност мерења. Стандардно одступање појединих резултата дато је изразом (1.9), а стандардно одступање средње вредности резултата мерења, изразом

(1.10), што представља **стандардну мерну несигурност тип А** мерног резултата:

$$u_A = s_{x_s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_s)^2}{n(n-1)}}. \quad (2.1)$$

Средња вредност мерења код довољно великих узорка испуњава услове Централне граничне теореме што значи да јој се по правилу придружује **Гаусова расподела** (независно од расподеле којој припадају елементи узорка).

2.2 МЕРНА НЕСИГУРНОСТ ТИП Б

Мерна несигурност тип Б одређује се **свим осталим методама, изузев статистичке анализе**. МН тип Б може се одредити и код појединачног мерења, када МН тип А не постоји. Ваљано одређивање МН тип Б претпоставља употребу свих расположивих података и сазнања о коришћеној мерној опреми, о утицају параметара окружења на мерење, о разним врстама сметњи и др. При томе се пожељно да је експериментатор искусан, да има што боља теоријска знања и да познаје утицај окружења на мерни процес.

Стандардна мерна несигурност тип Б u_B , представља стандардно одступање добијено анализом различитих утицаја на мерни резултат. При томе је неопходно придружити адекватну функцију расподеле овој несигурности. Код МН тип Б могу се јавити разне расподеле. Насупрот томе, код МН тип А увек је реч о Гаусовој расподели. Проблем одређивања расподеле биће дискутован кроз више примера у предстојећем тексту.

Један од најважнијих извора података за одређивање МН тип Б су каталози и приручници које произвођачи дају уз свој инструмент. Обично су дати подаци о несигурности мерења у зависности од мерног опсега, и при одређеним вредностима параметара околине (опсег температуре, релативна влажност и др).

Сви инструменти у јавној употреби, по закону, треба да буду претходно прегледани на прописани начин помоћу опреме вишег нивоа тачности. Подаци у сертификату добијеном након прегледа инструмента, заједно са евентуалним додатним обавештењима стручњака који су извршили преглед, представљају корисне изворе у одређивању МН тип Б.

Анализом експеримента треба установити да ли добијени резултат заиста представља ваљану бројну вредност физичке величине која треба да се измери. На пример, при мерењу температуре неког објекта треба установити да ли је термички контакт термометра и објекта добар, тј. установити да ли термометар заиста мери тражену температуру.

При мерењу отпорности неког отпорника, поред осталог, треба установити да ли снага која се развија у отпорнику изазива знатан пораст температуре, па тиме и измену отпорности. Треба такође водити рачуна о утицају температуре околине, влажности и атмосферског притиска, ако се ради о мерењима високе тачности.

Познато је да већина лабораторијских мерења има статички карактер, јо јест читавање се обавља тек након успостављања стационарног стања. Међутим, потпуна устаљеност физичких величина није остварива у пракси. Током прикупљања података мерена величина и параметри околине имају одређену брзину промене, па се јављају одређене динамичке грешке мерења. Инструменти услед старења или примене у тешким радним условима могу променити своје карактеристике. Треба водити рачуна о утицају заокруживања бројева при рачунским операцијама током израчунавању резултата. Неопходно је анализирати ваљаности алгоритама коришћених у обради резултата и др.

2.3 УТИЦАЈ ИЗБОРА ФУНКЦИЈЕ РАСПОДЕЛЕ НА ИЗРАЖАВАЊЕ МЕРНЕ НЕСИГУРНОСТИ

Једна од основних поставки у концепту мерне несигурности је да се сваком таквом систематском ефекту **придружи нека функција расподеле**. Самим тим може се одредити и **вероватноћа** која одговара том податку. У погледу придруживања расподеле постоји јасна разлика концепта МН у поређењу са класичном теоријом грешака. У класичној теорији, функција расподеле се придружује **само** случајним грешкама. Систематске грешке се у тој теорији посматрају као детерминистичке величине, тј. као величине које немају случајни карактер него имају константну вредност у посматраном мерењу. Поставке у Упутству заснивају се на становишту да **све врсте несигурности имају случајни карактер** (природу вероватноће), па им се обавезно придружује одговарајућа функцију расподеле.

МН тип А се одређује када се располаже низом од n међусобно различитих резултата поновљених мерења. Ако је број n довољно велик, средња вредност и њено стандардно одступање испуњавају услове Централне граничне

теореме. Отуда следи да **МН тип А има по правилу Гаусову расподелу**. При томе расподела полазних резултата не мора бити Гаусова.

Несигурности тип Б проузроковане су систематским ефектима које **није могуће** у потпуности отклонити. Пре употребе инструмента неопходно је да сви систематски ефекти који утичу на резултат мерења буду потиснути до минимума. То се врши поступком калибрације. Након калибрације увек постоје преостали систематски ефекти чије потискивање није било могуће. Ови преостали ефекти понашају се као случајне величине и самим тим имају своју функцију расподеле. Одговарајући пример је отклањање систематског ефекта код волтметра услед поремећаја „нуле“, тзв. нуловање инструмента. Дакле, заостали систематски ефекти након корекције (калибрације) **имају случајни карактер**, па им је с тога потребно придружити неку од одговарајућих функција расподеле.

Случајни карактер МН тип Б може се илустровати следећим примером.

Пример 2.1: Одредити мерну несигурност тип Б дигиталног инструмента насталу услед резолуције инструмента.

Решење: На скали инструмента читава се вредност мерене величине приказана бројем од N дигита. Стварна вредност мерене величине, при томе, има неку **аналогну вредност** која се са **подједнаком вероватноћом** може налазити у интервалу између $N - 1/2$ до $N + 1/2$ дигита. У овом случају сама **резолуција** дигиталног инструмента од једног дигита, уноси проширену несигурност од $a = 0,5$ дигита. Свака вредност унутар горњег интервала је **подједнако вероватна**. Отуда се несигурности услед резолуције дигиталних инструмената придружује **униформна расподела**, чије је стандардно одступање $\sigma = a / \sqrt{3}$, па стандардна несигурност тип Б износи $u_B = \sigma = 0,5 / \sqrt{3} = 0,29$ дигита.

У првом поглављу описане су важније расподеле које се користе у анализи резултата мерења и то Гаусова, униформна и троугаона расподела. Ради лакшег поређења ових расподела, у табели 2.1 систематизовани су неки већ изнесени подаци. Из табеле 2.1 могу се констатовати следеће чињенице.

Униформна расподела има најмању статистичку сигурност у интервалу $(\mu \pm \sigma)$ и најмањи коефицијент проширења. Код Гаусове расподеле, двома блиским статистичким сигурностима (99% и 99,7%) одговара осетна разлика одговарајућих коефицијената проширења, 2,58 односно 3, респективно.

Пример 2.2: У таблицама карактеристика неког метала постоји податак да његов модуо еластичности E_Y има вредност у опсегу $(2,0 \cdot 10^{11} \text{ до } 2,2 \cdot 10^{11}) \text{ N/m}^2$. Одредити стандардну несигурност овог податка.

Решење: Биће узете у обзир три горе поменуте симетричне расподеле. Средња вредност (код све три расподеле) износи $\mu = (E_{Y \min} + E_{Y \max}) / 2 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, а полуширина расподеле $a = (E_{Y \max} - E_{Y \min}) / 2 = 0,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, што истовремено представља и **проширену несигурност**.

а) Униформна расподела се усваја када нема сазнања да су вредности око средине интервала вероватније од оних у близини граница интервала. Стандардна несигурност једнака је стандардном одступању, израз (1.28), и износи $u = s = a / \sqrt{3} = 0,577 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

б) Троугаона расподела се може усвојити ако аутори таблица или сопствена искуства упућују да су вредности око средине интервала нешто вероватније од вредности ближих крајевима. Стандардна несигурност у овом случају дата је изразом (1.31), $u = s = a / \sqrt{6} = 0,408 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

в) Гаусова расподела се користи ако претходна детаљнија статистичка испитивања на то указују. Ако се усвоји да еквивалентна “полуширина” расподеле одговара сигурности од 99 %, стандардна несигурност, према табели (2.1), има вредност $u = a / 2,58 = 0,388 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Под претпоставком да “полуширина” одговара сигурности од 99,7 %, стандардна несигурност износи $u = a / 3 = 0,333 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Табела 2.1 Статистичка сигурност и коефицијент проширења за униформну, троугаону и Гаусову расподелу.

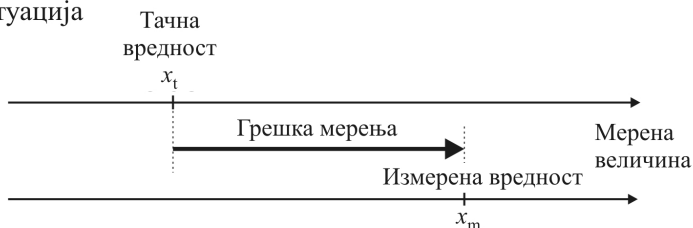
Расподела	Статистичка сигурност унутар интервала ($\mu \pm \sigma$)	Коефицијент проширења k
Униформна	57,7 %	$k = \sqrt{3} = 1,73$ ($P = 100\%$)
Троугаона	65,0 %	$k = \sqrt{6} = 2,45$ ($P = 100\%$)
Гаусова	68,2 %	$k = 2$ ($P = 95\%$)
		$k = 2,58$ ($P = 99\%$)
		$k = 3$ ($P = 99,7\%$)

2.4 КОМБИНОВАНА МЕРНА НЕСИГУРНОСТ

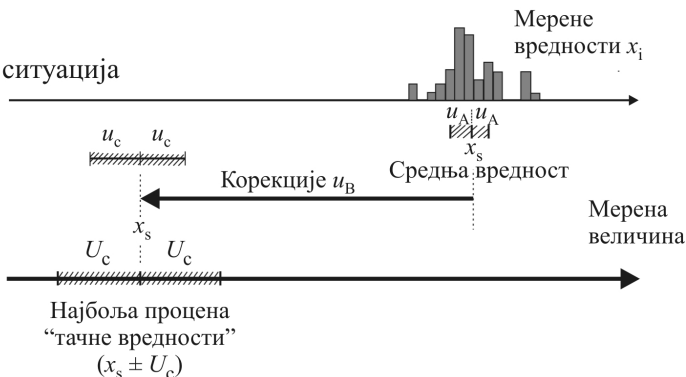
Изражавање стандардне комбиноване мерне несигурности u_c и проширене комбиноване мерне несигурности U_c по правилу представља **крајњи циљ** обраде мерних података.

На овом месту је згодно илустративно појаснити суштинску разлику између концепта мерне несигурности и концепта теорије грешака. Наиме, као што је објашњено у првом поглављу, грешка мерења представља одступање мерене вредности неке физичке величине од њене тачне вредности. Овај случај је приказан на слици 2.1 као идеална ситуација у којој имамо сазнања о тачној вредности мерене величине. Међутим, у пракси често то није случај. Овде треба нагласити да у природи постоје физичке величине које немају тачну вредност, тј. величине чија је природа статистичка, и називају се стохастичке величине. Такав пример је радиоактивност изотопа хемијских елемената. Статистичка природа физичких величина је један од разлога зашто је у праксу уведен концепт мерне несигурности. Он је заснован на практичном приступу (ситуација Б на слици 2.1) којим се не узима у обзир постојање тачне вредности. У концепту мерне несигурности користи се мерна процедура да би се изразила најбоља процена „тачне вредности“.

А: Идеална ситуација



Б: Практична ситуација



Слика 2.1 Разлика између концепта теорије грешака и концепта мерне несигурности.

Комбинована мерна несигурност се користи у следећим случајевима:

- Поступак понављања мерења за који се изражава МН тип А и истовремено постоји МН тип Б.
- Једанпут извршена мерења (не постоји МН тип А); при томе на крајњи резултат утичу несигурности две или више утицајних величина. Као пример узима се одређивање снаге у отпорнику $P = V \cdot I$. За мерење се користе два инструмента, волтметар и амперметар од који сваки уноси своју несигурност u_{BV} и u_{BI} . Комбинована несигурност је резултанта ове две несигурности.

Компоненте мерне несигурности које утичу на крајњи резултат мерења могу међусобно бити некорелисане (статистички независне) или корелисане. Овде се, пре свега, мисли на компоненте мерне несигурности тип Б. У зависности од степена корелисаности, разликоваће се и методе изражавања стандардне комбиноване мерне несигурности.

Проширеној комбинованој мерној несигурности потребно је придружити адекватну функцију расподеле. Теоријски, избор адекватне функције расподеле врши се конволуцијом функција густине расподеле утицајних компонената мерне несигурности или Монте Карло симулацијом. У пракси је најчешће случај да се **комбинованој мерној несигурности придружује Гаусова расподела**, па се резултат, у облику $(x_s \pm U_c)$, исказује на високом нивоу статистичке сигурности од 95% или 99,7%.

КОМБИНОВАНА МЕРНА НЕСИГУРНОСТ У СЛУЧАЈУ НЕКОРЕЛИСАНИХ ВЕЛИЧИНА

Две величине су некорелисане (или статистички независне) онда, када промене једне од њих, не изазивају предвидљиве промене друге величине. У поглављу 1.11 разматра се проблем стандардног одступања индиректно мерених величина $y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, где су промене утицајних величина x_i међусобно некорелисане величине. Заменом стандардних одступања s_{x_i} са одговарајућим несигурностима у (1.38), добија се мерна несигурност индиректно мерене величине:

$$u_y = \sqrt{\sum \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u_{x_i}^2 \right]}, \quad (2.2)$$

где је u_{x_i} МН тип Б утицајне величине x_i .

Мерне несигурности тип А и тип Б код неке серије поновљених мерења добијају се потпуно различитим методама. То значи да су ове две врсте несигурности **увек некорелисане** случајне величине. Када се одреде стандардне несигурности u_A и u_B , комбинована стандардна несигурност добија се „сабирањем“ двеју несигурности. Код збира више величина $y = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n = \sum x_i$ важи:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 1$$

и (2.2) постаје $u_y = \sqrt{\sum u_{x_i}^2}$. Стандардна комбинована несигурност, када постоје несигурности u_A и u_B , износи:

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}, \quad (2.3)$$

Пример 2.3: Одредити мерну несигурност средње вредности неког узорка.

Решење: Елементи узорка сматрају се некорелисаним величинама. Средња вредност

$$y = x_s = \sum \frac{x_i}{n} \quad (2.4)$$

може се сматрати индиректно мереном величином. Парцијални изводи износе

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial x_s}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \quad (2.5)$$

Пошто су резултати свих n мерења добијени при истим условима, све несигурности су једнаке, $u_{x_i} = u_x$. Заменом ових вредности у (1.10) добија се несигурност средње вредности:

$$u_{x_s} = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum u_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} n u_x^2} = \frac{u_x}{\sqrt{n}} \quad (2.6)$$

Пример 2.4: Посматра се величина y дата производом n величина: $y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_i \cdot \dots \cdot x_n$. Одредити релативно стандардно одступање величине y .

Решење: Релативна вредност тоталног диференцијала функције y гласи:

$$\frac{\partial y}{y} = \sum \frac{\partial x_i}{x_i} \quad (2.7)$$

Ако су величине x_i међусобно статистички независне, релативно стандардно одступање s_{ry} величине y дато је изразом (1.38). Заменом релативних стандардних одступања одговарајућим релативним стандардним несигурностима добија се:

$$u_{ry} = \sqrt{\sum u_{rx_i}^2} \quad (2.8)$$

КОМБИНОВАНА МЕРНА НЕСИГУРНОСТ У СЛУЧАЈУ КОРЕЛИСАНИХ ВЕЛИЧИНА

У класичној теорији грешака разматрају се систематске грешке индиректно мерених величина које се могу изразити у облику $y = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$. Промена величине y дата је изразом (1.34). Када су промене утицајних величине x_i у потпуности корелисане све промене се **сабирају**. Ако се промене Δy и Δx_i замене својим стандардним несигурностима u_y и u_{x_i} , респективно, добија се

$$u_y = \left| \sum \frac{\partial y}{\partial x_i} u_{x_i} \right|. \quad (2.9)$$

У специјалном случају када је $|\partial y / \partial x_i| = 1$ (функција y представља збир или разлику величина x_i), несигурност је дата збиром несигурности мерених величина

$$u_y = \sum u_{x_i} \quad (2.10)$$

Треба имати у виду да несигурности и грешке (случајне или систематске) представљају различите величине. Док одступања y у (1.34) могу бити различитог знака, дотле несигурност u_y као и несигурности утицајних величина u_{x_i} увек су **позитивне величине**.

3. ПРАВИЛА И УПУТСТВА ЗА ИСКАЗИВАЊЕ НУМЕРИЧКИХ ВРЕДНОСТИ РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА

У циљу исказивања крајњег резултата мерења, неопходно је проценити проширену комбиновану мерну несигурност U_c експерименталног поступка (што је објашњено у претходном поглављу), а затим резултат мерење величине x исказати у облику $(x_s \pm U_c)$. Да би се резултати мерења на исти начин приказивали у међународним оквирима и у тим оквирима били упоредиви, у праксу је имплементиран низ стандарда и упутстава од којих су најзначајнији *ISO GUM*, *ISO 17025*, *EA-4/02*. Према овим стандардима, у даљем тексту дата су упутства за обраду нумеричких резултата добијених на основу експерименталних и рачунских података.

У табели 3.1 дата су правила за одређивање броја значајних цифара, које дају информацију о нивоу тачности резултата мерења.

Правила за одређивање броја значајних цифара резултата основних рачунских операција приказана су у табели 3.2.

Заокруживање нумеричких резултата на одговарајући број значајних цифара врши се на основу правила приказаних у табели 3.3.

При заокруживању међурезултата треба задржати већи број значајних цифара од броја значајних цифара крајњег резултата.

При исказивању крајњег резултата мерења треба поштовати следеће кораке, редом:

1. Израчуната проширена комбинована мерна несигурност U_c експерименталног поступка се увек заокружује на једну или две значајне цифре. При заокруживању несигурности треба разликовати два случаја:

а) када је одбачени део бројне вредности већи од $5,0 \times 10^{-(x+1)}$ или тачно $5,0 \times 10^{-(x+1)}$ и последња децимала на коју се број заокружује непаран број, где је x је број децималних места заокруженог броја, тада се заокруживање врши на основу правила датих у табели 5.3, тј. последња децимала на коју се број заокружује увећава се за 1;

б) када је одбачени део бројне вредности мањи од $5,0 \times 10^{-(x+1)}$ или тачно $5,0 \times 10^{-(x+1)}$ и последња децимала на коју се број заокружује паран број или нула, где је x је број децималних места заокруженог броја, заокруживање се врши према правилу „5%“ које је приказано у табели 3.4. Ово правило се користи због могућег умањења бројне вредности мерне несигурности при заокруживању које је веће од $0,05 \cdot U_c$. Према овом правилу, последња

децимала на коју се несигурност заокружује увећава се за 1, под условом да је одбачени део броја већи од $0,05 \cdot U_c$, а у супротном задржава вредност.

При заокруживању бројне вредности несигурности треба водити рачуна да несигурност буде истог реда мерних SI јединица као и резултат мерење величине (редови, тј. префикси мерних SI јединица дати су у Прилогу 2, док су правила писања физичких величина и јединица дати у Прилогу 3).

2. Резултат мерење величине x заокружује се према правилима из Табеле 3.3 тако да бројна вредност резултата има исти број децималних места као и заокружена вредност несигурности U_c .

3. Крајњи резултат мерења, односно најбоља процена тачне вредности мерење величине, у облику $(x_s \pm U_c)$ исказује се тако да бројне вредности x_s и U_c увек имају **исти број децималних места** на истом реду мерних SI јединица.

Табела 3.1. Правила за одређивање броја значајних цифара

Бр.	Формулација правила	Објашњење правила	
		Вредност резултата	Број значајних цифара
1	Све цифре различите од нуле су значајне (1 до 9).	415	3
		1,516	4
		35,1785	6
2	Нуле су значајне цифре када се налазе између две цифре различите од нуле.	5,07	3
		0,408	3
		3,4002	5
3	Нуле су значајне цифре када се налазе на крају децималног броја.	359,0	4
		3,590	4
		0,35900	5
4	Нуле које се налазе десно од последње ненулта цифре целог броја често нису значајне, али могу бити значајне.	56000	2, 3, 4, 5
		30070	4, 5
		5800	2, 3, 4
5	Нуле које се налазе лево од прве децималне ненулта цифре нису значајне цифре (за бројеве мање од 1).	0,0567	3
		0,000044	2
		0,0500	3
6	Цели бројеви написани у научној нотацији дају једнозначну везу са правилом бр. 4.	$250=2,50 \times 10^2$	3
		$250=2,5 \times 10^2$	2
		$41300=4,13 \times 10^4$	3

Табела 3.1. Правила за одређивање броја значајних цифара (наставак)

Бр.	Формулација правила	Објашњење правила	
		Вредност резултата	Број значајних цифара
7	Тачни и дефинисани бројеви имају бесконачан број значајних цифара.	299792458 m/s (брзина светлости у вакууму)	∞
		25,4 (фактор конверзије једног инча у милиметре)	∞

Табела 3.2. Значајне цифре резултата основних рачунских операција

1	Формулација правила	Резултат сабирања и одузимања има исти број децимала као и операнд са најмањим бројем децималних места, без обзира на број значајних цифара.
Објашњење правила		
Израз са резултатом	Број децимала у заокруженом резултату	Број значајних цифара у заокруженом резултату
98,112+2,3= =100,412 Заокружује се на: 100,4	1	4
2	Формулација правила	Резултат множења и дељења има исти број значајних цифара као и операнд са најмањим бројем значајних цифара.
Објашњење правила		
Израз са резултатом	Број децимала у заокруженом резултату	Број значајних цифара у заокруженом резултату
3,5×22,3=78,05 Заокружује се на: 78	0	2
6,2 / 833 = =0,00744297 Заокружује се на: 0,0074	4	2

Табела 3.3. Правила заокруживања нумеричких вредности резултата

Бр.	Формулација правила	Пример	
		Незаокружене вредности	Заокружене вредности на две значајне цифре
1	Ако је одбачени део броја мањи од $5,0 \times 10^{-(x+1)}$, последња децимала на коју се број заокружује остаје иста (x је број децималних места заокруженог броја).	$2,542$ ($x = 1$) $0,042 = 4,2 \times 10^{-2}$ је одбачени део броја при заокруживању на једну децималу	2,5
2	Ако је одбачени део броја већи од $5,0 \times 10^{-(x+1)}$, последња децимала на коју се број заокружује повећава се за 1 (x је број децималних места заокруженог броја).	$2,453$ ($x = 1$) $0,053 = 5,3 \times 10^{-2}$ је одбачени део броја при заокруживању на једну децималу	2,5
3	Ако одбачени део броја износи тачно $5,0 \times 10^{-(x+1)}$ треба разликовати два случаја:		
	а) Када је последња децимала на коју се број заокружује паран број или нула, та цифра се задржава;	$3,450$ ($x = 1$) $0,050 = 5,0 \times 10^{-2}$	3,4
	б) Када је последња децимала на коју се број заокружује непаран број, та цифра се увећава за 1.	$3,550$ ($x = 1$) $0,050 = 5,0 \times 10^{-2}$	3,6

Табела 3.4. Заокруживање вредности проширене комбиноване мерне несигурности (Правило „5%“)

Бр.	Израчуната вредност U_c	5% од U_c ($0,05 \cdot U_c$)	Број значајних цифара на који се U_c заокружује	Део U_c који се одбацује заокруживањем	Заокружена вредност U_c
1	10,47	0,5235	2	$0,47 < 0,5235$	10
2	9,48	0,474	1	$0,48 > 0,474$	10
3	1,051	0,05255	1	$0,051 < 0,05255$	1
4	1,053	0,05265	1	$0,053 > 0,05265$	2
5	41,2002	2,06001	2	$0,2002 < 2,06001$	41
6	0,422	0,02110	1	$0,022 > 0,02110$	0,5

Пример 3.1: Након извршеног експерименталног поступка мерења масе, израчунате су вредности: $m = 1,3578 \text{ mg}$ и $U_c = 0,422 \text{ mg}$. Поступак изражавања крајњег резултата је следећи:

1. Несигурност U_c заокружује се на једну значајну цифру. Према правилу „5%“ одбачени део броја 0,022 је већи од $0,05 \cdot U_c = 0,02110$, па се последња (овде и једина) значајна цифра мора увећати за 1. На тај начин се добија заокружена вредност несигурности $U_c = 0,5 \text{ mg}$.
2. Израчунати резултат масе $m = 1,3578 \text{ mg}$ заокружује се (према табели 3.3) на исти број децимала као што је U_c , тако да заокружена вредност масе износи 1,4 mg.
3. Крајњи резултат изражава се у облику: $m \pm U_c = (1,4 \pm 0,5) \text{ mg}$.

Пример 3.2: Након извршеног експерименталног поступка мерења масе, израчунате су вредности: $m = 85,67 \text{ g}$ и $U_c = 333,4875 \text{ mg}$. Поступак изражавања крајњег резултата је следећи:

1. Несигурност U_c најпре треба изразити на истом реду мерних SI јединица на ком је изражен резултат мерене величине: $U_c = 0,3334875 \text{ g}$, а затим је заокружити на једну значајну цифру. Према правилу „5%“ одбачени део броја 0,0334875 је већи од $0,05 \cdot U_c = 0,0166744$, па се последња значајна цифра мора увећати за 1. На тај начин се добија заокружена вредност несигурности $U_c = 0,4 \text{ g}$.
2. Израчунати резултат масе $m = 85,67 \text{ g}$ заокружује се (према табели 3.3) на исти број децимала као што је U_c , тако да заокружена вредност масе износи 85,7 g.
3. Крајњи резултат изражава се у облику: $m \pm U_c = (85,7 \pm 0,4) \text{ g}$.

Пример 3.3: Након извршеног експерименталног поступка мерења масе, израчунате су вредности: $m = 67,25 \text{ g}$ и $U_c = 461 \text{ mg}$. Поступак изражавања крајњег резултата је следећи:

1. Несигурност U_c најпре треба изразити на истом реду мерних SI јединица на ком је изражен резултат мерене величине: $U_c = 0,461 \text{ g}$, а затим је заокружити на једну значајну цифру. Пошто ће одбачени део броја бити већи од $5,0 \times 10^{-2}$, заокруживање се врши према правилима из табеле 3.3, па је $U_c = 0,5 \text{ g}$.
2. Израчунати резултат масе $m = 67,25 \text{ g}$ заокружује се (према табели 3.3) на исти број децимала као што је U_c , тако да заокружена вредност масе износи 67,2 g.
3. Крајњи резултат изражава се у облику: $m \pm U_c = (67,2 \pm 0,5) \text{ g}$.

Пример 3.4: Након извршеног експерименталног поступка мерења масе, израчунате су вредности: $m = 200,8 \text{ g}$ и $U_c = 27,34 \text{ g}$. Поступак изражавања крајњег резултата може се извести на два начина:

а) несигурност U_c заокружује се на две значајне цифре.

1. Према правилу „5%“ одбачени део броја 0,34 је мањи од $0,05 \cdot U_c = 1,365$, па последња значајна цифра задржава вредност. На тај начин се добија заокружена вредност несигурности $U_c = 27 \text{ g}$.
2. Израчунати резултат масе $m = 200,8 \text{ g}$ заокружује се (према табели 3.3) на исти број децимала као што је U_c , тако да заокружена вредност масе износи 201 g.
3. Крајњи резултат изражава се у облику: $m \pm U_c = (201 \pm 27) \text{ g}$.

б) несигурност U_c заокружује се на једну значајну цифру.

1. У овом случају једина значајна цифра несигурности биће цифра десетица, па је према томе $U_c = 30 \text{ g}$.
2. Пошто је једина значајна цифра несигурности на месту десетица, то се и резултат масе заокружује на десетице (према табели 3.3), па је $m = 200 \text{ g}$.
3. Крајњи резултат изражава се у облику: $m \pm U_c = (200 \pm 30) \text{ g}$.

Сугестија за одлучивање о броју значајних цифара несигурности U_c .

Када се несигурност изрази на истом реду мерних SI јединица као и резултат мерене величине, тада су могућа четири случаја:

1. $U_c < 1$: број значајних цифара је 1,
2. $1 \leq U_c < 10$: број значајних цифара је 1,
3. $10 \leq U_c < 100$: број значајних цифара је 2, ако се посебно не захтева једна значајна цифра,
4. $100 \leq U_c < 1000$: у овом случају је резултат мерене величине са великом вероватноћом на вишем реду мерних SI јединица, тако да се превођењем несигурности на виши ред мерних јединица овај проблем своди на случај под бројем 1; чак и да је резултат мерене величине на истом реду мерних јединица, препоручује се изражавање и резултата и несигурности на вишем реду, чиме се опет овај проблем своди на случај под бројем 1.

4. ОПТИМАЛНА ПРАВА

У мерној техници се често зависност излазне величине x_i од улазне величине x_u представља графички. Када се парови података (x_{u_k}, x_{i_k}) нацртају као тачке у Декартовом (x, y) координатном систему, поставља се питање којом линијом треба спојити тачке, тј. треба одлучити о аналитичком облику зависности излазне величине x_i од улазне x_u .

Права линија се користи у следећим случајевима:

- када теоријска анализа предвиђа линеарну или приближно линеарну зависност;
- када је у питању нелинеарна зависност, али је потребно да се снимљени подаци апроксимирају најбољим линеарним дијаграмом;
- када зависност излазне величине није позната, али снимљене тачке очигледно добро „належу“ на праву линију.

Потпуно линеарне карактеристике су ретке у мерној техници. По правилу, свака реална зависност излазне од улазне величине је мање или више нелинеарна. Нелинеарност је утолико већа, уколико је већа промена улазне величине. Неке нелинеарности могу се добро изразити помоћу полинома. У пракси се срећу нелинеарности експоненцијалног облика, као и многе друге. У великом броју случајева оптимална апроксимација може се добити применом **метода најмањег збира квадрата одступања**.

Пре одређивања оптималне праве потребно је установити која се од двеју величина, x_u , или x_i мери са већом релативном несигурношћу. При томе се разматрају следећа два случаја: а) излазна величина x_i мери се са знатно већом несигурношћу од улазне величине; б) Улазна величина x_u мери се са знатно већом несигурношћу од излазне величине.

На слици 4.1 уцртано је n експериментално добијених тачака и одговарајућа оптимална линеарна карактеристика. Ако усвојимо да је несигурност излазне величине знатно већа (случај под а), одступања тачака од оптималне праве представимо **вертикалним растојањима тачака** од праве. Једначина праве гласи:

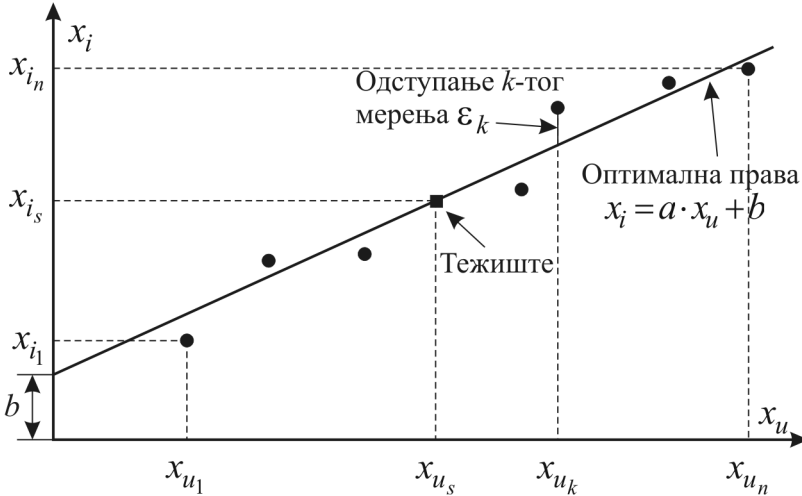
$x_i = ax_u + b, \quad (4.1)$

при чему треба одредити вредности коефицијената a и b . Одступање k -те снимљене тачке од оптималне праве износи:

$$\varepsilon_k = x_{ik} - ax_{uk} - b. \quad (4.2)$$

Према Гаусовој теорији, права ће бити оптимална онда када сума **квадрата** одступања ε_k има најмању могућу вредност, тј. када је испуњен услов:

$$\sum \varepsilon_k^2 = \sum (x_{ik} - ax_{uk} - b)^2 = \min. \quad (4.3)$$



Слика 4.1 Оптимална права када је несигурност мерења излазне величине x_u знатно већа него код улазне величине x_u .

Услов минимума је да парцијални изводи израза (4.3) по a и b буду једнаки нули

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum \varepsilon_k^2 = 2 \sum (x_{ik} - ax_{uk} - b)(-x_{uk}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum \varepsilon_k^2 = 2 \sum (x_{ik} - ax_{uk} - b) = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) долази се до система од две линеарне једначине са две непознате,

$$a \sum x_{uk}^2 + b \sum x_{uk} = \sum (x_{uk} x_{ik}), \quad (4.6)$$

$$a \sum x_{uk} + bn = \sum x_{ik}. \quad (4.7)$$

Решавајући систем једначина (4.6) и (4.7) добијају се следеће вредности:

$$a = \frac{n \sum (x_{uk} x_{ik}) - \sum x_{uk} \sum x_{ik}}{n \sum x_{uk}^2 - (\sum x_{uk})^2} \quad (4.8)$$

$$b = \frac{\sum (x_{ik}) \sum (x_{uk}^2) - \sum (x_{uk}) \sum (x_{uk} x_{ik})}{n \sum x_{uk}^2 - (\sum x_{uk})^2}. \quad (4.9)$$

Дељењем једначине (4.7) са n добија се $x_{is} = ax_{us} + b$, где су x_{is} и x_{us} **средње вредности** улазне и излазне величине. Дакле, оптимална права одређена параметрима a и b , пролази кроз тачку са координатама (x_{us}, x_{is}) . Ова тачка се назива **тежиштем посматраних n тачака**, сл.4.1.

Уз помоћ параметара a и b и коришћењем израза (4.2) израчунавају се одступања ε_k сваке снимљене тачке од оптималне праве.

Параметри оптималне праве a и b представљају случајне величине, јер су израчунати на основу мерних података (x_{uk}, x_{ik}) који имају случајни карактер. Отуда се несигурност параметара може изразити одговарајућим стандардним одступањима која постоје у литератури.

Оптималну праву има смисла одређивати ако постоји минимално **три пара** мерних података (улазне и излазне величине). Параметри оптималне праве, a и b имају своје физичко значење јер могу представљати параметре сензора или мерног кола, које су на овај начин одређене.

Помоћу параметара a и b и израза (4.8) и (4.9), могу се израчунати грешке појединачних мерења ε_k . Стандардно одступање излазне величине је тада:

$$s_{xi} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - a \cdot x_{uk} - b)^2}{n_{sl}}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - a \cdot x_{uk} - b)^2}{n - 2}} \quad (4.10)$$

где је n_{sl} број степени слободе. У овом случају је $n_{sl} = n - 2$ јер је права одређена са два параметра. Са друге стране, стандардно одступање улазне величине је:

$$s_{xu} = \sqrt{\frac{\sum \left[x_{uk} - \left(\frac{x_{ik} - b}{a} \right) \right]^2}{n - 2}} = \frac{s_{xi}}{a}. \quad (4.11)$$

Оптималне вредности параметара a и b дате су такође са одређеном несигурношћу. При поновљеном мерном поступку помоћу нових n тачака, неће се добити истоветне вредности параметара a и b као претходног пута. Стандардна одступања параметара праве дата су изразима:

$$s_a = s_{xi} \sqrt{\frac{n}{\Delta}}, \quad s_b = s_{xi} \sqrt{\frac{\sum_k x_{ik}^2}{\Delta}}, \quad (4.12)$$

где је $\Delta = n \sum_k x_{ik}^2 - \left(\sum_k x_{ik} \right)^2$. Сходно Гаусовој теорији, статистички смисао одступања (4.12) је у томе да се вредности коефицијената a и b налазе у опсезима $(a \pm s_a)$ и $(b \pm s_b)$ са вероватноћом 68,3%.

Ако се улазна величина x_u мери са знатно већом несигурношћу од излазне величине x_i (случај под б), оптимална права се одређује на тај начин што се минимизира сума квадрата **хоризонталних одступања** тачака од оптималне праве. Поступак одређивања коефицијената ове праве може бити истоветан као и поступак описан у случају а). Параметри оптималне праве у случају б) се разликују од истих параметара у случају а). При томе је у случају б) нагиб праве **већи**.

Изрази (4.8) и (4.9) могу бити употребљени и у случају б) под условом да се линеарна једначина напише у облику

$$x_u = \frac{x_i}{a} - \frac{b}{a} \quad (4.13)$$

или

$$x_u = a_1 x_i + b_1, \quad (4.14)$$

где је $a_1 = 1/a$ и $b_1 = b/a$. На овај начин добијена је једначина аналогна са (4.1) јер се на левој страни налази величина са већом, а на десној са мањом несигурношћу.

Метода најмање суме квадрата одступања може се применити и за налажење оптималног полинома којим се апроксимира скуп експериментално снимљених мерних резултата чија међусобна зависност није линеарна. Поступак одређивања облика зависности излазне величине x_i од улазне x_u у техници је познат под називом „**фитовање**“ (или прилагођавање).

4.1 ОПТИМАЛНА ПРАВА КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК

Код неких мерења, при нулој вредности улазне величине, излазна величина има са великом **сигурношћу** такође нулту вредност. За одређивање оптималне

праве која са сигурношћу пролази кроз координатни почетак, полази се од једначине:

$$x_i = a x_u . \quad (4.15)$$

Збир квадрата одступања експерименталних резултата (x_{uk}, x_{ik}) од оптималне праве треба да има најмању могућну вредност

$$\sum (x_{ik} - ax_{uk})^2 = \min . \quad (4.16)$$

Ако се први извод израза (4.16) по a изједначи са нулом добија се једначина $-2\sum[(x_{ik} - ax_{uk}) \cdot x_{uk}] = 0$. Решавањем ове једначине, за коефицијент правца оптималне праве се добија:

$$a = \frac{\sum (x_{ik} x_{uk})}{\sum x_{uk}^2} , \quad (4.17)$$

док је стандардно одступање коефицијента правца:

$$s_a = s_{xi} \sqrt{\frac{n}{\Delta}}, \text{ где је } \quad (4.18)$$

$$s_{xi} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - a \cdot x_{uk})^2}{n-1}} \text{ и } \Delta = n \sum_{k=1}^n x_{uk}^2 .$$

Даљим сређивањем израза (4.18) за стандардно одступање коефицијента правца добија се:

$$s_a = \frac{s_{xi}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_{uk}^2}} . \quad (4.19)$$

4.2 КОЕФИЦИЈЕНТ КОРЕЛАЦИЈЕ

У теорији случајних сигнала познато је да се међусобна зависност случајних сигнала x и y изражава коефицијентом корелације r дефинисаним са:

$$r = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} , \quad (4.20)$$

где је C_{xy} коваријанса, а σ_x и σ_y стандардна одступања сигнала x и y . Ако се ради о дискретним случајним величинама, као што је скуп измерених улазних и излазних величина $\{x_{uk}\}$ и $\{x_{ik}\}$ коваријанса се дефинише формулом:

$$C_{x_u x_i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{uk} - x_{us})(x_{ik} - x_{is}), \quad (4.21)$$

где су x_{us} и x_{is} средње вредности улазне и излазне величине. Стандардна одступања су

$$\sigma_{x_u} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_{uk} - x_{us})^2} \quad \sigma_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_{ik} - x_{is})^2} \quad (4.22)$$

па се за коефицијент корелације добија:

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{uk} - x_{us})(x_{ik} - x_{is})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_{uk} - x_{us})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_{ik} - x_{is})^2}}. \quad (4.23)$$

Преуређивањем (4.23) постаје:

$$r = \frac{n \sum x_{uk} x_{ik} - \sum x_{uk} \sum x_{ik}}{\sqrt{[n \sum x_{uk}^2 - (\sum x_{uk})^2][n \sum x_{ik}^2 - (\sum x_{ik})^2]}}. \quad (4.24)$$

Коефицијент корелације може имати вредност која се налази у интервалу $-1 \leq r \leq 1$. Вредности $r > 0$ добијају се код правих са позитивним нагибом, а $r < 0$ код правих са негативним нагибом. Ако је $|r| \approx 1$ случајне величине стоје у чврстој корелацији, тј. линеарна функција добро приказује међусобну зависност улазне и излазне величине и тачке леже врло блиско оптималној правој. Што је вредност $|r|$ мања, одступања тачака од праве су већа. Мале вредности r означавају „лошу“ линеарну апроксимацију, тј. велику просечну удаљеност тачака од праве. Ово се може догодити у следећим случајевима: а) када је зависност линеарна, али су грешке мерења велике; б) када инструмент има нелинеарну карактеристику.

Вредност коефицијента корелације $|r|=1$ односи се на случај када тачке идеално леже на правој линији. Овај случај се скоро никада не добија у пракси.

5. ОСНОВНЕ ЈЕДИНИЦЕ SI СИСТЕМА

Историја развоја SI система (енгл. *System Internationale*) почиње у време Француске револуције када се приступило стварању система јединица заснованог на природним појавама што је систему дало универзални карактер. Први интернационални праetalони килограма и метра усвојени су 1889. на првом заседању Генералне конференције за тегове и мере. Тада је прокламован систем заснован на три јединице: килограм, метар и секунда. Касније су у систем уврштене три додатне основне јединице и то: јединица јачине струје ампер, јединица температуре келвин и јединица јачине светлости кандела за област светлосних величина. Назив SI систем усвојен је 1960. године. Садашњи облик SI систем је добио 1971. године када је као седма основна јединица уврштен мол као јединица количине супстанције.

Након званичног усвајања, од стране Генералне конференције за тегове и мере 1960. године, SI систем је неколико пута био редефинисан. Важећа дефиниција за **секунд** усвојена је 1967. године, дефиниција за **метар** усвојена је 1983. године, а дефиниција за **канделу** 1979. године. Последња ревизија SI система извршена је у новембру 2018. године, када су ревидиране дефиниције за **килограм**, **ампер**, **келвин** и **мол**. Нове дефиниције почеле су да се примењују 20. маја 2019. године, на датум када се обележава Светски дан метрологије.

Циљ последње ревизије SI система био је да се дефиниције свих седам основних јединица униформно изражавају кроз експлицитне формулације помоћу седам физичких константи. Вредности ових константи познате су са апсолутном тачношћу, односно са мерном несигурношћу једнаком нули. Преглед физичких константи на којима се заснива SI систем дат је у табели 5.1.

Коришћење природних физичких константи за дефинисање SI система нам омогућава да резултате мерења прикажемо са већом сигурношћу у широком опсегу мерења почев од најнижих до највиших вредности. На тај начин повезују се кључна мерења на атомској (квантној) скали са мерењима која се спроводе на макроскопском нивоу. Као што је редефиниција секунде омогућила *GPS* навигацију, очекује се да последње редефиниције SI јединица, током времена, омогуће увођење нових технологија које још не можемо ни да замислимо.

Резултат ове ревизије је једноставнија и фундаменталнија дефиниција целог међународног система SI јединица, тако да се све основне јединице могу

практично реализовати. То значи да нестане и последња дефиниција заснована на материјалном артефакту, тј. еталону килограма, који одлази у историју.

Табела 5.1 Фундаменталне природне физичке константе које представљају основу дефинисања основних SI јединица.

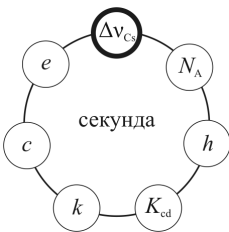
Фреквенција прелаза између два непертурбована хиперфина нивоа основног стања атома изотопа цезијума-133:	$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9192631770 \text{ Hz}$
Брзина светлости у вакууму:	$c = 299792458 \text{ m/s}$
Планкова константа:	$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}$
Елементарно наелектрисање:	$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Болцманова константа:	$k = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Авогадрова константа:	$N_{\text{A}} = 6,02214076 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Светлосна ефикасност монохроматског зрачења фреквенције $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$:	$K_{\text{cd}} = 683 \text{ lm/W}$

У наставку су дате важеће дефиниције седам основних јединица SI система¹.

СЕКУНДА [s]

Секунда је SI јединица времена. Дефинисана је преко фиксне нумеричке вредности фреквенције $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ прелаза између два непертурбована хиперфина нивоа основног стања атома изотопа цезијума-133, што износи 9192631770 када се исказе у јединици Hz, односно s^{-1} .

Конверзија: $1 \text{ s} = \frac{9192631770}{\Delta\nu_{\text{Cs}}}$

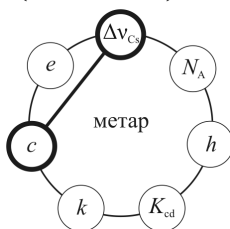


¹ Изворне дефиниције, конверзије и дијаграми налазе се на интернет страници Генералне конференције за тегове и мере: www.bimp.org.

МЕТАР [m]

Метар је SI јединица дужине. Дефинисана је преко фиксне нумеричке вредности брзине светлости у вакууму, где c износи 299792458 када се изрази у јединици m/s у којој је секунда дефинисана преко фреквенције прелаза цезијума $\Delta\nu_{Cs}$.

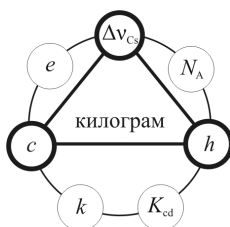
$$\text{Конверзија: } 1 \text{ m} = \left(\frac{c}{299792458} \right) \text{ s} = 30,663318... \cdot \frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}$$



КИЛОГРАМ [kg]

Килограм је SI јединица масе. Дефинисан је преко фиксне нумеричке вредности Планкове константе h која износи $6,62607015 \cdot 10^{-34}$ изражена у јединицама J/s, односно kgm^2/s где су метар и секунда дефинисани појмовима c и $\Delta\nu_{Cs}$.

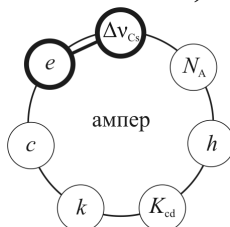
$$\text{Конверзија: } 1 \text{ kg} = \left(\frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34}} \right) \frac{\text{s}}{\text{m}^2} = 1,475521... \cdot 10^{40} \cdot \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c}$$



АМПЕР [A]

Ампер је SI јединица електричне струје. Дефинисан је преко фиксне нумеричке вредности елементарног наелектрисања e која износи $1,602176634 \cdot 10^{-19}$ израженог у јединици C, односно A/s, где се секунда дефинише помоћу $\Delta\nu_{Cs}$.

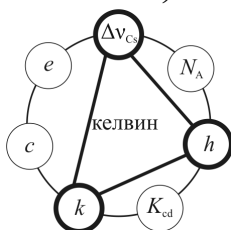
$$\text{Конверзија: } 1 \text{ A} = \left(\frac{e}{1,602176634 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ s} = 6,789686 \dots \cdot 10^8 \cdot \frac{\Delta v_{\text{Cs}}}{e}$$



КЕЛВИН [K]

Келвин је SI јединица термодинамичке температуре. Дефинисан је преко фиксне нумеричке вредности Болцманове константе k која износи $1,380649 \cdot 10^{-23}$ изражене у јединици J/K, односно $\text{kgm}^2/(\text{s}^2\text{K})$, где су килограм, метар и секунда дефинисани помоћу појмова h , c и Δv_{Cs} .

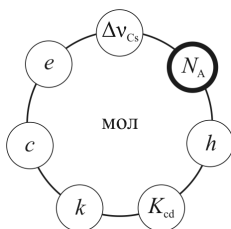
$$\text{Конверзија: } 1 \text{ K} = \left(\frac{1,380649 \cdot 10^{-23}}{k} \right) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 2,266665 \dots \cdot \frac{\Delta v_{\text{Cs}} h}{k}$$



МОЛ [mol]

Мол је SI јединица за количину супстанце. Један мол садржи тачно $6,02214076 \cdot 10^{23}$ честица. Овај број је фиксна нумеричка вредност Авогадрове константе N_A која се изражава у јединици mol^{-1} и назива се Авогадров број. Количина супстанце система, симбол n , је мера одређеног броја атома или молекула. Уместо броја атома, честица може бити јон, електрон или било која друга честица или одређена група честица.

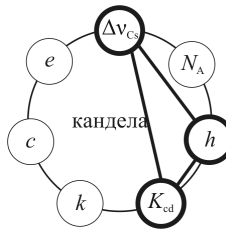
$$\text{Конверзија: } 1 \text{ mol} = \frac{6,02214076 \cdot 10^{23}}{N_A}$$



КАНДЕЛА [cd]

Кандела је SI јединица светлосног интензитета у задатом правцу. Дефинисана је преко фиксне нумеричке вредности светлосне ефикасности монохроматског зрачења фреквенције $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd} која износи 683 lm/W, што је једнако cdsrad/W или $\text{cd srad kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^3$, где су килограм, метар и секунда дефинисани помоћу појмова h , c и $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

$$\text{Конверзија: } 1 \text{ cd} = \left(\frac{K_{\text{cd}}}{683} \right) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3 \text{srad}} = 2,614830... \cdot 10^{10} \cdot \frac{(\Delta\nu_{\text{Cs}})^2 h}{K_{\text{cd}}}$$



ВЕЖБА 1

6. МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ ТЕЧНИХ И ЧВРСТИХ СУПСТАНЦИ

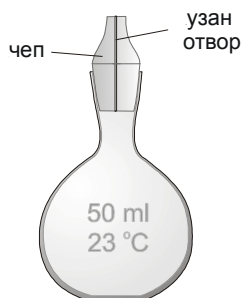
ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Прва правилно протумачена појава у историји физике, уопште, исказана је Архимедовим законом, којим се квантитативно одређује сила потиска течности на потопљено тело¹. По легенди, откриће тог закона Архимед је пропратио ускликом „хеурека!“ (пронашао сам!), што је кроз векове остао симбол радости при научном открићу.
- ❖ По легенди, Архимед је измерио проценат злата у круни на бази мерења тежине у ваздуху и привидне тежине круне потопљене у води.
- ❖ Код течности које се не мешају, течност мање густине плива изнад течности веће густине - пример су нафтне мрље на води.
- ❖ С порастом температуре запремина течности се повећава, што значи да се густина смањује. На мору или језеру, током летњег периода, топлија вода је на површини, а хладнија при дну.
- ❖ Зими, на температурама испод 4°C долази до инверзије, јер се при хлађењу густина воде смањује. На дну океана температура воде је око 4°C, тј. на дну је вода највеће могуће густине.
- ❖ Човек лакше плива у мору него у реци, јер растворена со повећава густину воде. Мртво море, које представља **засићени раствор** соли, има густину око 25% већу од речне воде. У Мртво море није могуће заронити, а човек пливајући на леђима, може да чита новине.
- ❖ Газ брода при преласку из мора у реку постаје дубљи.
- ❖ Највећу густину има елемент осмијум ($22,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$), а најмању водоник ($0,0893 \text{ kg/m}^3$).

6.1 МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ ТЕЧНОСТИ ПОМОЋУ ПИКНОМЕТРА

¹ Архимед је такође ушао у историју физике још једним својим славним открићем - законом полуге.

Пикнометар је стаклена посуда намењена за мерење густине течности и чврстих супстанци у зрнастом облику, слика 6.1. Запремина пикнометра је тачно дефинисана; уобичајене називне вредности износе 25 ml, 50 ml или 100 ml . Пикнометар има уско грло које се тесно затвара стакленим чепом. Чеп има по средини узак канал кроз који, при затварању, истиче сувишна течност. На тај начин, запремина течности у напуњеном пикнометру је тачно одређена, јер на њу **нема утицаја** површински напон течности. Познато је, пак, да запремина широке посуде (на пример чаша напуњена водом) није тачно одређена, због заобљености горње површине течности услед површинског напона.



Слика 6.1 Пикнометар.

Запремина пикнометра се повећава са температуром, иако у малој мери, услед температурског ширења стакла. Због тога се на спољашњој површини обично уписује температура при којој пикнометар има своју називну вредност запремине.

Дестилована вода је супстанца са добро познатом густином на различитим температурама. Отуда се густина воде користи као референтни параметар при одређивању густине непознатих течности. При томе се као основни инструмент користи електронска лабораторијска вага.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА састоји се из следећих корака:

- Пикнометар се добро обрише и осуши.
- Вагом се измери маса празног пикнометра m_1 .
- Пикнометар се напуни водом и измери маса m_2 .
- Пикнометар се испразни, осуши и напуни течношћу непознате густине ρ_x . Мерењем се добија маса m_3 .

Маса воде у пикнометру износи $m_0 = m_2 - m_1$.

Запремина пикнометра једнака је запремини воде која је дата изразом $V = \frac{m_2 - m_1}{\rho_0}$, где је ρ_0 густина воде на датој температури². За густину воде на собној температури уобичајено је да се усваја вредност $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$, иако је стварна густина нешто мало нижа од те вредности. Маса испитиване течности износи $m = m_3 - m_1$, па је непозната густина дата изразом:

$$\rho_x = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}. \quad (6.1)$$

При мерењима потребно је обратити пажњу да се одстрани евентуални заостали мехурићи ваздуха у пикнометру.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Густина течности се одређује **индиректно** уз помоћ 4 величине: ρ_0 , m_1 , m_2 и m_3 . У овом случају потребно је одредити **мерну несигурност индиректно мерене величине ρ_x** .

Тотални диференцијал функције (6.1) гласи

$$d\rho_x = \frac{\partial \rho_x}{\partial \rho_0} d\rho_0 + \frac{\partial \rho_x}{\partial m_1} dm_1 + \frac{\partial \rho_x}{\partial m_2} dm_2 + \frac{\partial \rho_x}{\partial m_3} dm_3 \quad (6.2)$$

Вредности појединих парцијалних извода функције (6.1) гласе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_x}{\partial \rho_0} &= \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}; \\ \frac{\partial \rho_x}{\partial m_1} &= \rho_0 \frac{m_3 - m_2}{(m_2 - m_1)^2}; \\ \frac{\partial \rho_x}{\partial m_2} &= -\rho_0 \frac{m_3 - m_1}{(m_2 - m_1)^2}; \\ \frac{\partial \rho_x}{\partial m_3} &= \rho_0 \frac{1}{m_2 - m_1}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

У циљу добијања стандардне комбиноване несигурности, чланове из израза (6.2) $d\rho_0$, dm_1 , dm_2 и dm_3 треба заменити њиховим стандардним несигурностима u_{ρ_0} , u_{m_1} , u_{m_2} , u_{m_3} , редом. Ове несигурности могу се сматрати међусобно некорелисаним. Применом израза (2.2) за стандардну несигурност добија се:

² Ако се захтева већа тачност, узимају се вредности густине у зависности од температуре дате у Прилогу 4.

$$u_{\rho_x}^2 = \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial \rho_0} \right)^2 u_{\rho_0}^2 + \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial m_1} \right)^2 u_{m_1}^2 + \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial m_2} \right)^2 u_{m_2}^2 + \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial m_3} \right)^2 u_{m_3}^2. \quad (6.4)$$

Уводе се следеће претпоставке:

- Ако је температуре воде добро позната, за несигурност густине воде може се сматрати да је занемарљиво мала, па се први члан на десној страни једначине (6.4) занемарује.
- Пошто су све масе релативно блиске вредности, сматра се да су **све несигурности маса једнаке**, $u_{m_1} = u_{m_2} = u_{m_3} = u_m$.
- Несигурност u_m одређена је резолуцијом ваге (резолуција означава најмањи подеок на инструменту). Ради једноставности, уводи се **униформна расподела** са полуширином a (a = половина најмањег подеока на инструменту), па је стандардна несигурност тип Б свих измерених маса $u_m = a/\sqrt{3}$.
- На датом нивоу тачности, утицај потиска ваздуха на мерење масе се занемарује.

Уз горње претпоставке, из формула (6.3) и (6.4) добија се:

$$u_{\rho_B} = \frac{\rho_0 u_m}{m_2 - m_1} \sqrt{1 + \left(\frac{m_3 - m_2}{m_2 - m_1} \right)^2 + \left(\frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1} \right)^2} \quad (6.5)$$

Након изражавања стандардне мерне несигурности, потребно је изразити и проширену мерну несигурност. Пошто мерења нису понављана током мерног поступка, тј. свако мерење је извршено само једном, онда несигурност u_{ρ_B} истовремено представља и стандардну комбиновану мерну несигурност u_{ρ_c} .

Усвојићемо претпоставку да величина u_{ρ_c} прати Гаусову расподелу. Ако се за ниво статистичке сигурности усвоји интервал $(\mu \pm 2\sigma)$, тј. $P = 95\%$, коефицијент проширења износи $k = 2$. Дакле, добијена вредност густине ρ_x има проширену комбиновану мерну несигурност $U_c = 2u_{\rho_c}$, где се u_{ρ_c} добија помоћу израза (6.5). Коначни резултат мерења густине непознате течности изражава се у облику $(\rho_x \pm U_c)$.

У прилогу 5 дати су подаци о густинама неких течности. На основу тих података одредити која је течност испитивана у оквиру вежбе.

6.2 МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ СУПСТАНЦЕ У ЗРНАСТОМ ОБЛИКУ ПОМОЋУ ПИКНОМЕТРА

Помоћу пикнометра могуће је мерење густине оних чврстих супстанци које нису порозне нити су растворљиве у води. То су, на пример, стакло, олово, гвожђе и други метали.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА се састоји из следећих корака:

- Измери се маса супстанце у зрнастом облику m .
- На вагу се постави пикнометар напуњен дестилованом водом и **поред њега** зрнаста супстанца. Одговарајућа **збирна** маса је m_1 .
- У пикнометар се стави зрнаста супстанца, па се затим допуни дестилованом водом. Одговарајућа измерена маса је m_2 .

Из другог и трећег мерења могуће је одредити запремину зрнасте супстанце V . У односу на друго мерење, при трећем мерењу у пикнометру постоји мање воде. Недостаје вода запремине једнаке запремини V насуте зрнасте супстанце у пикнометар. Разлика маса $\Delta m = m_1 - m_2$ представља масу воде **запремине** V једнаком запремини зрнасте супстанце. Отуда следи $V = (m_1 - m_2) / \rho_0$. Густина чврсте супстанце израчунава се из израза:

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_0 \frac{m}{m_1 - m_2} \quad (6.6)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Полазећи од израза (6.6), применом истог математичког поступка као у поглављу 6.1, за стандардну несигурност густине чврсте супстанце добија се:

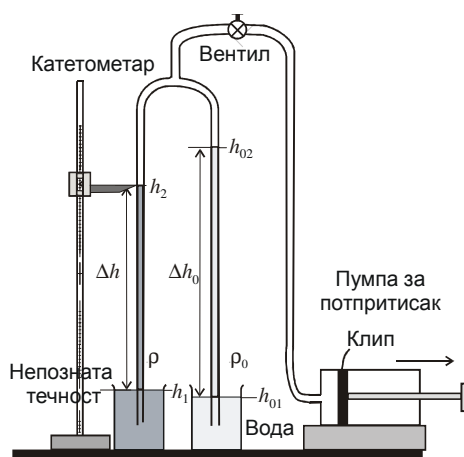
$$u_{\rho_B} = \frac{\rho_0 u_m}{m_2 - m_3} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{m_1}{m_2 - m_3} \right)^2} \quad (6.7)$$

Уз образложење као у претходном случају, за проширену несигурност густине зрнасте супстанце (олова) добија се $U_c = 2u_{\rho_c}$, чему одговара вероватноћа од 95%. Коначни резултат мерења густине зрнасте супстанце изражава се у облику $(\rho_x \pm U_c)$.

Пошто се ради о олову, чија је густина позната (видети табелу у Прилогу 6) потребно је упоредити добијени резултат са табличним податком за густину, а затим изразити релативну грешку мерења.

6.3 МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ ТЕЧНОСТИ ХИДРОМЕТРОМ

Хидрометар је релативно мерило које се користи за **упоређивање густина** двеју течности. Ако је једна од њих дестилована вода познате густине ρ_0 , онда се хидрометром одређује густина ρ друге течности. Хидрометар се састоји од две паралелне вертикалне стаклене цеви спојене на горњем крају у једну цев. Она је прикључена на ваздушну пумпу којом се може истовремено створити потпритисак у обе цеви, слика 6.2. Доњи крајеви цеви постављене су у две стаклене посуде. У једној посуди је вода, а у другој непозната течност чију густину ρ треба измерити.



Слика 6.2 Хидрометар

Помоћу пумпе се снизи притисак ваздуха, што доводи до **подизања нивоа** течности у обе цеви. Затим треба брзо затворити ваздушни вентил и сачекати краће време ради термичке стабилизације. Стуб воде има висину Δh_0 , а непознате течности Δh . Висине стубова мере се почев **од нивоа течности у свакој од посуда** па до врха течности у цеви $\Delta h_0 = h_{02} - h_{01}$ и $\Delta h = h_2 - h_1$, где се индекс 1 односи на доњи, а 2 на горњи ниво стубова течности. На дну оба стуба течности влада атмосферски притисак. На врху оба течна стуба влада **исти потпритисак**. Из тога следи закључак да су хидростатички притисци које стварају течни стубови $\rho_0 g \Delta h_0$ и $\rho g \Delta h$ такође једнаки. Изједначавањем израза за хидростатичке притиске, добија се непозната густина:

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta h_0}{\Delta h} = \rho_0 \frac{h_{02} - h_{01}}{h_2 - h_1}. \quad (6.8)$$

Мерење висина врши се вертикалним лењиром, катетометром. При читавању нивоа хоризонтални показивач треба поставити наспрам нивоа у центру цеви. То је донекле отежано закривљеношћу површине течности у близини зидова цеви услед познатог дејства адхезије на граници стакло - вода.

Познато је да је релативна несигурност мерења дужине мања ако је мерено растојање веће. Због тога треба настојати да висине стубова течности буду веће, а то значи да буду блиске максималној дужини стаклених цеви. **Мерење треба поновити за пет различитих нивоа** и на основу добијених података треба одредити средњу вредност непознате густине ρ .

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Пошто је извршено више мерења густине, потребно је одредити стандардну несигурност тип А u_{ρ_A} . На пример, ако је извршено 5 мерења, према изразу (6.8) израчунавају се вредности $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ и ρ_5 . Након одређивања средње вредности добијеног резултата ρ_s , према изразу (2.1) добија се стандардна мерна несигурност тип А, $u_{\rho_A}^3$.

Да бисмо изразили мерну несигурност тип Б индиректно мерене величине, полазимо од тоталног диференцијала функције (6.8) који гласи:

$$d\rho = \frac{h_{02} - h_{01}}{h_2 - h_1} d\rho_0 + \rho_0 \left(\frac{dh_{02}}{h_2 - h_1} - \frac{dh_{01}}{h_2 - h_1} - \frac{(h_{02} - h_{01})}{(h_2 - h_1)^2} dh_2 + \frac{(h_{02} - h_{01})}{(h_2 - h_1)^2} dh_1 \right). \quad (6.9)$$

Од тоталног диференцијала (6.9), прелази се на стандардну несигурност заменом диференцијала одговарајућим несигурностима, и применом правила збира квадрата појединих чланова које важи код некорелисаних несигурности. Занемарујући први члан у изразу (6.9), за стандардну несигурност тип Б, добија се:

$$u_{\rho_B}^2 = \rho_0^2 \left(\frac{u_{h_{01}}^2}{(h_2 - h_1)^2} + \frac{u_{h_{02}}^2}{(h_2 - h_1)^2} + \frac{(h_{02} - h_{01})^2 u_{h_2}^2}{(h_2 - h_1)^4} + \frac{(h_{02} - h_{01})^2 u_{h_1}^2}{(h_2 - h_1)^4} \right). \quad (6.10)$$

Усвајајући да су несигурности читавања свих висина једнаке, из (6.10) следи:

$$u_{\rho_B}^2 = \frac{2\rho_0^2 u_h^2}{(\Delta h)^2} \left(1 + \frac{(\Delta h_0)^2}{(\Delta h)^2} \right). \quad (6.11)$$

Претпостављајући да за несигурност читавања висине важи униформна расподела, стандардна несигурност катетометра је $u_h = a/\sqrt{3}$, где је a полуширина расподеле, одн. половина најмањег подеока на катетометру. При

³ Ради једноставности, у свим вежбама где изражавамо мерну несигурност тип А, користимо Гаусову расподелу. Међутим, у случају малих узорака, где је број мерења мањи од 30, исправно је користити Студентову расподелу. Објашњење погледати у Прилогу 7.

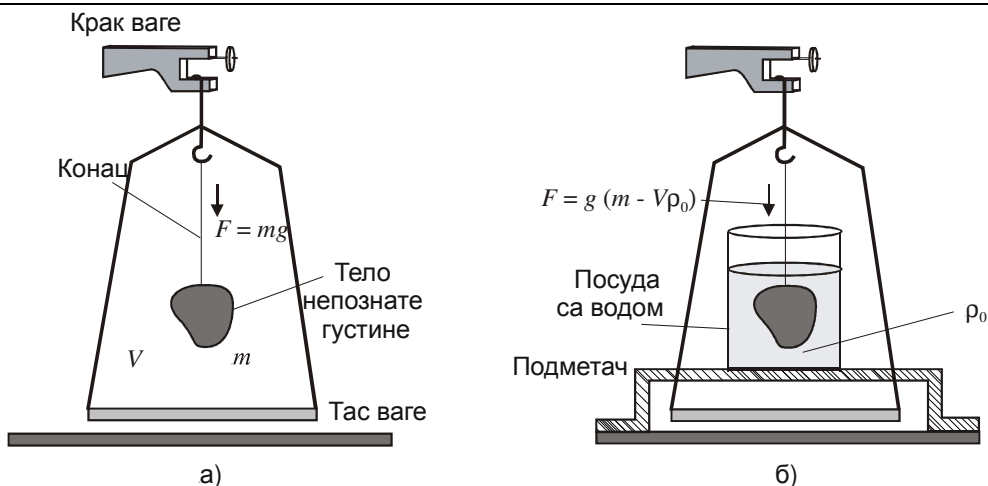
изражавању несигурности $u_{\rho B}$ искористити однос $(\Delta h_0 / \Delta h)_i$ за које ρ_i највише одступа од средње вредности ρ_s .

Стандардна комбинована мерна несигурност израчунава се према изразу $u_{\rho c} = \sqrt{u_{\rho A}^2 + u_{\rho B}^2}$. Ако се усвоји да комбинована мерна несигурност прати Гаусову расподелу, онда на интервалу статистичке сигурности $P = 95\%$ проширена мерна несигурност износи $U_c = 2 u_{\rho c}$. Коначни резултат мерења густине непознате течности изражава се у облику $(\rho_x \pm U_c)$.

6.4 МЕРЕЊЕ ГУСТИНЕ ЧВРСТИХ ТЕЛА ХИДРОСТАТИЧКОМ ВАГОМ

Хидростатичка вага је равнокрака вага прилагођена за мерење густине чврстих тела на основу два вагања. Код првог вагања тело се налази у ваздуху, слика 6.3 а. Уравнотежење ваге постиже се када се на дуги тас стави тег масе m . Ако се занемари потисак ваздуха на тело и тегове, тада m представља масу тела. Код другог мерења, тело се потапа у посуду са дестилованом водом, слика 6.3б. У овом случају привидна тежина тела се **смањује за силу потиска** $F_p = V \rho_0 g$. Равнотежа се постиже када се на другом тасу ваге ставе тегови масе $m_1 = m - V \rho_0$, одакле се за запремину тела добија $V = (m - m_1) / \rho_0$. Непозната густина тела дата је изразом:

$$\rho_x = \rho_0 \frac{m}{m - m_1}. \quad (6.12)$$



Слика 6.3 Хидростатичка вага: а) мерење масе тела, б) мерење привидне тежине тела потопљеног у воду.

У анализи којом је изведен израз (6.12), потисак којим ваздух делује на тегове (при оба вагања) и на тело (при првом вагању) је занемарен. Ако се потисак ваздуха узме у обзир, за густину се добија знатно сложенији израз у коме се појављују чланови са односом густина ваздуха и тегова, као и ваздуха и воде.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Налажењем тоталног диференцијала функције (6.12), и применом претходно објашњеног поступка, добија се стандардна несигурност густине, тип Б:

$$u_{\rho_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\rho_0 m}{(m - m_1)^2} \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{m^2}}, \quad (6.13)$$

где је a полуширина усвојене униформне расподеле несигурности ваге чија је резолуција 10 mg. Пошто мерења нису понављана током мерног поступка, тј. свако мерење је извршено само једном, онда несигурност u_{ρ_B} истовремено представља и стандардну комбиновану мерну несигурност u_{ρ_c} . Усвојићемо претпоставку да величина u_{ρ_c} прати Гаусову расподелу. Ако се за ниво статистичке сигурности усвоји интервал $(\mu \pm 2\sigma)$, тј. $P = 95\%$, коефицијент проширења износи $k = 2$. Дакле, добијена вредност густине ρ има проширену комбиновану мерну несигурност $U_c = 2u_{\rho_c}$, где се u_{ρ_c} добија помоћу израза (6.13). Коначни резултат мерења густине изражава се у облику $(\rho_x \pm U_c)$.

ВЕЖБА 2

7. МЕРЕЊЕ УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ПОМОЋУ КЛАТНА

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Аристотел и други филозофи старе Грчке нису добро разумели појаве слободног падања и тежине тела. Сматрали су да тежа тела падају већом брзином од лакших.
- ❖ У техничким музејима се демонстрирају експерименти да метални предмет и птичије перо, у вакуумираној комори, падају једнаким брзинама.
- ❖ Убрзање Земљине теже је у историји најчешће мерено методом клатна.
- ❖ Данас се најтачнија мерења гравитационог убрзања обављају интерферометарском методом на основу слободног пада у вакууму.
- ❖ Физичко клатно својим осцилацијама даје такт импулсе за рад зидних и других јавних часовника старије конструкције. Први часовник са клатном конструисао је Хајгенс 1659. године у Паризу. После неколико месеци Роберт Хук је завршио своју конструкцију часовника у Лондону.
- ❖ Тачност кварцног часовника резултат је врло стабилне фреквенције електромеханичких осцилација кварцног кристала.
- ❖ Атомски часовник, најтачнији еталон времена и фреквенције, користи осцилације које настају преласком електрона између два одређена енергетска нивоа атома цезијума.

7.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

На слици 7.1 приказан је осцилаторни систем који се састоји од инерцијалног елемента масе m и линеарне опруге која при истезању $x(t)$ делује силом:

$F(t) = -k x(t) .$	(7.1)
--------------------	-------

где је k [N/m] коефицијент крутости опруге. Када се опруга изведе из равнотеже, систем започиње осцилаторно кретање по хоризонталној подлози. При анализи овог система уводе се следеће идеализоване претпоставке:

- При кретању инерцијалног елемента на њега не делују никакве силе трења ни са подлогом ни са околним ваздухом.
- Опруга се истеже без унутрашњих губитака и без утицаја сила трења. Маса опруге се сматра једнаком нули.

При кретању постоје две силе и то **инерцијална сила** $-m\ddot{x}(t)$, и еластична сила $-kx(t)$. По трећем Њутновом закону збир ових сила у сваком тренутку је једнак нули:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (7.2)$$

Кретање материјалне тачке добија се као решење линеарне диференцијалне једначине (7.2). Ако је растојање материјалне тачке од равнотежног положаја, у почетном тренутку износило $x(0) = x_{\max}$ и ако је почетна брзина била нула, $\dot{x}(0) = 0$, решење једначине гласи:

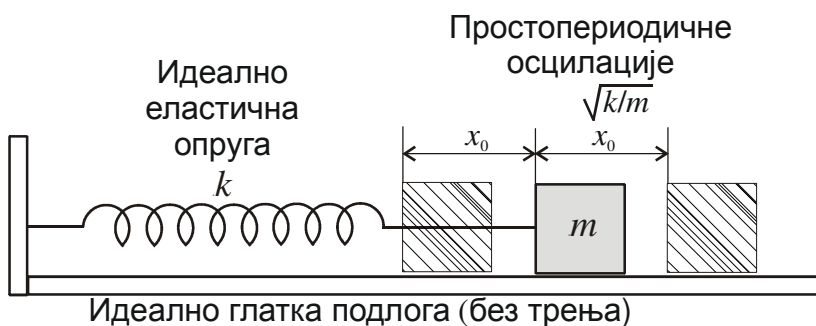
$$x(t) = x_{\max} \cos \omega t \quad (7.3)$$

где је $x_{\max}$ [m] амплитуда, а:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad/s]} \quad (7.4)$$

кружна учестаност. Периода осциловања је:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.5)$$



Слика 10.1 Модел идеалног хармонијског осцилатора.

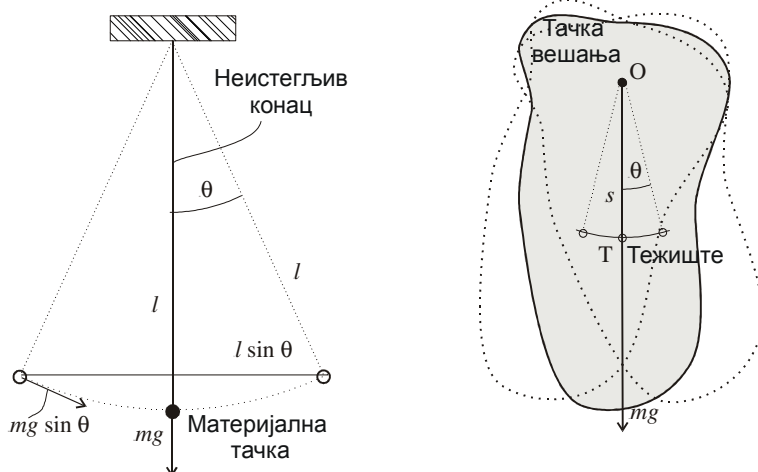
Из искуства је познато да хармонијски осцилатор приказан на слици 10.1 није практично остварљив. Наиме, утицај механичких трења је значајан и систем би се, после само неколико осцилација, зауставио. Механички осцилатори

који дају велики број осцилација и који се по својим карактеристикама приближавају хармонијском осцилатору реализују се у облику клатна.

МАТЕМАТИЧКО И ФИЗИЧКО КЛАТНО КАО ОСЦИЛАТОРНИ СИСТЕМИ.

Математичко клатно је такође један **идеализовани** осцилаторни систем који се састоји од инерцијалног елемента масе m који је окачен концем дужине l за непомичну тачку, слика 10.2а. За разлику од транслаторног система на слици 10.1, математичко клатно врши **ротационо кретање** око тачке вешања. У овом случају уводе се следеће идеализоване претпоставке:

- Линеарне димензије (пречник) инерцијалног елемента су занемарљиво мале, тј. у питању је материјална тачка.
- Конац има занемарљиву масу. У исто време конац се сматра неистегљивим.
- На инерцијални елемент и на конац не делују никакве силе трења. Овај услов се може приближно испунити када се клатно налази у вакууму.



Слика 10.2 а) Математичко клатно, б) физичко клатно.

Када је материјална тачка изведена из равнотежног положаја за угао $\theta_{\max}$, и пуштена, клатно започиње са осцилацијама. Када конац захвата угао $\theta(t)$, гравитациона сила mg се може разложити на силу затезања конца $F_z = mg \cos \theta(t)$ и на тангенцијалну компоненту $F_t = mg \sin \theta(t)$. Тангенцијална сила делује моментом:

$$M = l F_t = lmg \sin \theta(t) \quad (7.6)$$

који тежи да врати инерцијални елемент у равнотежно стање. Када материјална тачка убрзаним ротационим кретањем описује угао $\theta(t)$ јавља се инерцијални момент:

$$M_I = I \cdot \ddot{\theta}(t) \quad (7.7)$$

где је $I = ml^2$ - **момент инерције материјалне тачке** у референтном систему везаном за материјалну тачку. Збир активног момента M и инерцијалног момента M_I мора бити једнак нули, из чега следи једначина:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (7.8)$$

Решавање нелинеарне диференцијалне једначине (7.8) је тежак математички проблем. Решење за функцију $\theta(t)$ **не може** бити изражено у коначном облику помоћу елементарних функција¹. Може се показати да $\theta(t)$ представља периодичну функцију. Периода се може изразити бесконачним редом, чија прва три члана гласе:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_{\max}}{2} \dots \right) \quad (7.9)$$

Из (7.9) види се да периода има најмању вредност која износи:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.10)$$

а добија се при малим вредностима угла, $\theta_{\max} \approx 0$, са порастом почетног угла, (односно амплитуде), периода постаје већа. На пример, при $\theta \approx 1^\circ$, периода постаје већа за око 0,002 %, што се у овом случају може сматрати занемарљивим повећањем, а примена апроксимативног израза (7.10) оправданим. Ако, би пак почетни угао износио $\theta_{\max} = 10^\circ$, повећање периоде постаје око 0,2 % што представља значајнију промену.

До вредности за периоду (7.10) може се доћи **линеаризацијом** једначине (7.8). Познато је из математике да при малим вредностима углова важи израз $\sin \theta \approx \theta$ (на пример, ако је $\theta = 1^\circ = 0,0174533 \text{ rad}$, добија се $\sin \theta = 0,0174524$, тј. угао изражен у радијанима се врло мало разликује од синуса тог угла). Применом ове апроксимације једначина, добија се:

¹ Препоручује се да студенти склони математици покушају да нађу решење једначине (7.8) помоћу неког од софтверских математичких програмских пакета који решавају задатке у аналитичком облику. Такви програми су, на пример, **Matlab**, **Maple** и **Mathematica**.

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0, \quad (7.11)$$

тј. једначина клатна постаје једнака једначини хармонијског осцилатора (7.2). Ако је у тренутку $t = 0$ клатно пуштено са почетним улом $\theta_{\max}$, без почетне угаоне брзине, решење једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos \omega t. \quad (7.12)$$

Физичко клатно се састоји од крутог тела масе m које има могућност да осцилује око непомичне тачке ослонца, слика 7.2 б. У равнотежном стању тежиште се налази испод тачке ослонца. Трење у додирној тачки треба да буде мало, па се контакт остварује помоћу оштрице и лежишта, слично као код ваге. Растојање осе и тежишта износи s . Када се тело, изведено из равнотеже за угао $\theta_{\max}$, пусти, оно почиње да осцилује. При углу $\theta(t)$ постоји момент услед тежине који износи:

$$M = mgs \sin \theta(t) \quad (7.13)$$

Услед неравномерног угаоног кретања, делује инерцијални момент $M_I = I \cdot \ddot{\theta}(t)$, где је I момент инерције² клатна у односу на осу ротације. Збир два момента мора бити једнак нули из чега следи диференцијална једначина кретања клатна:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgs}{I} \sin \theta(t) = 0. \quad (7.14)$$

Облик једначине је исти као и једначине математичког клатна (7.8), па се могу директно применити исти закључци и апроксимације. При довољно малим угловима важи $\sin \theta \approx \theta$, па нелинеарна једначина (7.14) прелази у линеарну диференцијалну једначину другог реда:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mgs}{I} \theta(t) = 0. \quad (7.15)$$

На основу претходних израза види се да физичко клатно, при малим амплитудама, има периоду дату изразом:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgs}}. \quad (7.16)$$

Овај израз се може користити под условом да клатно има **мало пригушење**, тј. да постоји веома велики број осцилација, чија амплитуда споро опада са временом.

² О моменту инерције и о аналогијама ротационог и транслаторног кретања видети поглавља 9 и 10.

7.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ УБРЗАЊА ЗЕМЉИНЕ ТЕЖЕ ПОМОЋУ КЛАТНА

Клатно које се користи у експерименту састоји се од металне куглице пречника од око 1 cm које виси на танком најлонском концу чија се дужина l може мењати, слика 7.3 а. Дужина конца и пречник куглице мере се помоћу лењира – катетометра. Активна дужина конца рачуна се почев од оштрог ослонца преко кога конач прелази. Ово клатно представља једну врсту физичког клатна, које такође подсећа и на математичко клатно.

Када је амплитуда осцилација мала (такође и амплитуда отклона), периода осциловања дата је изразом (7.16). Дакле потребно је одредити момент инерције система I као и растојање тежишта система од тачке ослонца.

Момент инерције система. Систем се састоји од куглице чији је центар удаљен од тачке ослонца за растојање $x = l + r$. Према Штајнеровој³ теореме момент инерције лопте у односу на тачку вешања износи

$$I_l = I_{l0} + m(l + r)^2, \quad (7.17)$$

где је $I_{l0} = 2mr^2 / 5$ момент инерције лопте у односу на централну осу (оса која пролази кроз центар масе куглице). Конац чија је маса m_k има облик танког штапа, чији момент инерције, у односу на осу која је нормална на штап и пролази кроз његов крај, износи $I_k = m_k l^2 / 3$. Укупни момент инерције система је:

$$I_u = I_l + I_k = 0,4mr^2 + m(l + r)^2 + m_k l^2 / 3. \quad (7.18)$$

Растојање тежишта система у односу на тачку вешања, дато је изразом:

$$s = \frac{m(l + r) + m_k l / 2}{m + m_k}. \quad (7.19)$$

Заменом (7.18) и (7.19) у (7.16) добија се сложен израз у коме се појављују сви поменути параметри система.

Израз за периоду клатна може се знатно поједноставити, без већег утицаја на грешку, ако се усвоје следеће две претпоставке:

- Маса конца је много мања од масе куглице, $m_k \ll m$.
- Полупречник куглице r је знатно мањи од дужине конца, па важи апроксимација $r^2 \ll l^2$.

Под овим претпоставкама изрази (7.18) и (7.19) имају приближну вредност:

³ Jakob Steiner, (1796 – 1863), професор математике у Берлину.

$$I_u = ml(l + 2r), \quad (7.20)$$

$$s = l + r. \quad (7.21)$$

Заменом горњих израза у (7.16) добија се:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l(l + 2r)}{g(l + r)}}. \quad (7.22)$$

Под наведеним условима, израз (7.22) може се апроксимацијом довести на облик⁴:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(l + r)}{g}}. \quad (7.23)$$

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Мерна опрема, приказана на слици 7.3а састоји се од прецизног лењира за мерење дужине - катетометра и ручног хронометра - штоперице. Дужина конца о који је обешена метална куглица може да се мења, намотавањем или одмотавањем калема. Тачком вешања клатна сматра се оштрица преко које прелази конац. Почетна дужина клатна треба да износи око 1 m. Дужина се одређује из два мерења и то:

- мерењем растојања l_1 од тачке вешања, до доње тангенте лопте;
- мерењем растојања l_2 од тачке вешања до горње тангенте лопте.

Дужином клатна се сматра средња вредност $l_s = \frac{l_1 + l_2}{2}$. Заменом $l_s = l + r$ у (7.23) за убрзање земљине теже се добија:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_s}{T^2}. \quad (7.24)$$

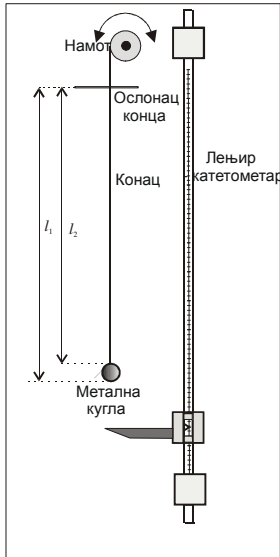
Клатно се изведе из равнотежног положаја за око 1 cm⁵ и пажљиво пусти (без почетне брзине), чиме започиње осциловање. У тренутку једног проласка конца преко вертикалног зареза пушта се у рад хронометар и броје осцилације. Након n осцилација хронометар се искључује и очита укупно време t_u . Средње трајање периоде се добија количником:

$$T = \frac{t_u}{n}. \quad (7.25)$$

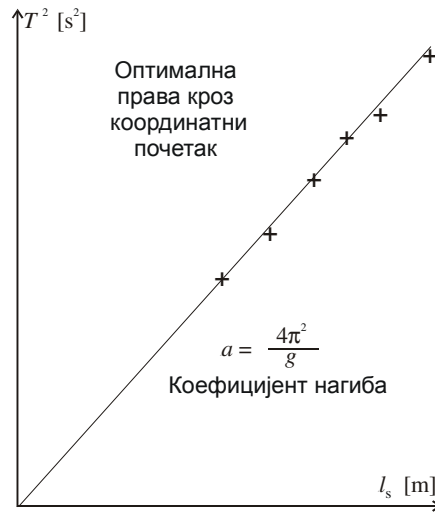
⁴ Препоручује се да студенти, користећи нумеричке вредности из експеримента, провере тачност наведених апроксимација.

⁵ При дужини клатна од око 1 m овом отклону одговара угао од око 0,6°.

Предуслов добре тачности одређивања периоде је **што већи** број осцилација n . Наиме, несигурност тренутка ручног укључивања и искључивања хронометра износи око $0,2\text{ s}$. Што је број осцилација већи, то се укупна несигурност расподељује на већи број осцилација и има мањи утицај на тачност мерења. Препоручљиво је да број осцилација буде између 50 и 100.



а)



б)

Слика 7.3 а) Експериментално клатно за мерење гравитационог убрзања, б) оптимална права из чијег се нагиба одређује гравитационо убрзање.

Мерни поступак се понавља за неколико различитих вредности дужине клатна. При томе дужина клатна треба да буде знатно већа од димензија куглице, да би важиле примењене апроксимативне формуле. Дужина конца треба да се мења у распону од $0,6\text{ m}$ до око 1 m .

Једначина (7.24) може се написати у облику:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l_s. \quad (7.26)$$

Дијаграм зависности $T^2 = f(l_s)$ има облик праве са слободним чланом **једнаким нули**, слика 10.3б. Коефицијент нагиба праве износи $a = 4\pi^2 / g$.

Применом израза (4.17), за коефицијент правца оптималне праве, која пролази кроз координатни почетак добија се:

$$a = \frac{\sum T_i^2 \cdot l_{si}}{\sum (l_{si})^2} \quad (7.27)$$

Након израчунавања коефицијента нагиба праве, гравитационо убрзање се израчунава из израза:

$$g = 4\pi^2 / a . \quad (7.28)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Користећи израз (4.19), за стандардну несигурност коефицијента правца оптималне праве u_a добија се:

$$u_a = \frac{s_{T^2}}{\sum_{i=1}^n l_{si}^2}, \quad \text{где је} \quad s_{T^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i^2 - a \cdot l_{si})^2}{n-1}} \quad (7.29)$$

па је стандардна мерна несигурност гравитационог убрзања, према изразу (2.3) једнака

$$u_g = \frac{4\pi^2}{a^2} u_a . \quad (7.30)$$

Усвајајући Гаусову расподелу на интервалу статистичке сигурности од 95%, проширена мерна несигурност гравитационог убрзања износи $U_c = 2u_g$. Коначан резултат изражава се у облику $(g \pm U_c)$.

Релативна грешка мерења гравитационог убрзања. За Београд, гравитационо убрзање је познато са великом тачношћу и оно износи⁶ $g_{Bg} = 9,8060226 \text{ m/s}^2$. Са израчунавом вредношћу треба одредити релативно одступање:

$$\varepsilon_r = \frac{g - g_{Bg}}{g_{Bg}} \cdot 100 \% . \quad (7.31)$$

Коментари. Сила отпора ваздуха на куглицу и конач сразмерна је брзини кретања. То је тзв. вискозна сила која пригушује кретање осцилаторног система. Анализом се показује да систем са пригушењем осцилује периодом која је нешто **већа** него када би пригушење било једнако нули. У случају клатна, коефицијент пригушења се може одредити бројањем осцилација и мерењем времена за које се амплитуда смањи за одређени износ, на пример, опадне на половину почетне вредности. Код оваквог клатна може се показати да је пригушење ствара релативно повећање периоде од око 10^{-6} што се на овом нивоу тачности може занемарити. Експерименти са клатном на вишем нивоу тачности изводе се у вакууму.

⁶ Видети спомен пирамиду испред зграде Српске академије наука и уметности, у улици Кнеза Михаила.

Реверзибилно клатно⁷ је једна врста физичког клатна које је у историји највише коришћено за тачна мерења гравитационог убрзања. Осциловање клатна се врши услед истовременог утицаја две силе: инерцијалне и гравитационе (тежине). То значи да у исто време долази до изражаја и инерцијална и гравитациона маса. На основу експеримената са клатном, Њутн је доказао да су ове две „врсте“ масе једнаке до нивоа несигурности од 1%. Каснијим мерењима је доказана једнакост ових маса са несигурношћу од 10^{-10} . Као једну од полазних аксиома у својим теоријама, Ајнштајн је усвојио да су инерцијална и гравитациона маса међусобно идентичне.

⁷ За додатне информације видети на Интернету одредницу Reversible Pendulum.

ВЕЖБА 3

Део 1/3

8. МЕРЕЊЕ МОДУЛА ЕЛАСТИЧНОСТИ ЖИЦЕ

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Свако мерило силе, као свој основни део има један еластични елемент - опругу, која силу претвара у пропорционално померање (деформацију). Померање се затим читава на некој линеарној скали која може бити калибрисана у јединицама силе или масе.
- ❖ Еластична деформација се, такође, мери сензорима који дају електрични сигнал сразмеран сили.
- ❖ Опруге се по правилу израђују од метала. Као пример могу се узети динамометри, опруге механичких часовника, моторних возила, ватреног оружја и др.
- ❖ Еластичне деформације челичних и других металних конструкција у грађевинарству и машинству, иако невидљиве оком, могу се измерити осетљивим сензорима деформације и померања.
- ❖ Аморфни материјали, као што су гума, пластика, дрво и други, имају лошије еластичне особине од метала који имају кристалну структуру.
- ❖ Еластичност имају такође гасови затворени у посудама са покретним зидовима као што су балони. Савремени аутомобили и аутобуси користе опруге пуњене ваздухом.
- ❖ Еластична својства су предуслов који мора поседовати нека средина да би могла да преноси звучне таласе.

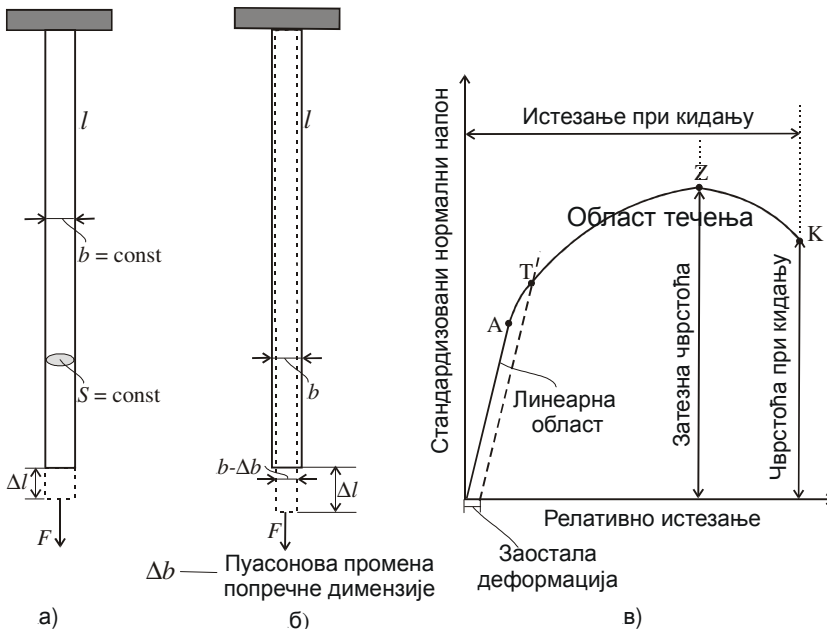
8.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

Природна особина свих материјала у чврстом стању је да под дејством силе мењају своје линеарне димензије, а такође површину и запремину. Промене димензија се називају еластичним уколико се, након престанка силе, деформисано тело у потпуности врати у првобитни облик. Добре еластичне особине метала објашњавају се њиховом кристалном структуром.

Темеље науци о еластичности поставио је енглески научник Роберт Хук¹. До закона који носи његово име, Хук је дошао анализирајући истезање разних еластичних елемената. Међутим, касније се овај закон углавном интерпретирао на примеру једноставног облика еластичног елемента - **металне жице**. На тај начин је могуће **раздвојити** утицај геометријских параметара и параметара материјала. При томе се уместо истезања посматра **релативно истезање**, а уместо силе **нормални напон**. Жица која се истезе има дужину l и попречни пресек S . Једним крајем жица је учвршћена за непомичну подлогу. На други крај делује подужна сила F која изазива истезање жице, слика 8.1 а. Количник подужне силе и попречног пресека назива се **нормални напон**, $\sigma = F / S$. Под дејством силе, односно нормалног напона, дужина жице се повећава за износ Δl . Ако је нормални напон унутар одређених граница, **релативно истезање жице** $\varepsilon = \Delta l / l$ је линеарно сразмерно нормалном напону:

$$\frac{F}{S} = E_Y \frac{\Delta l}{l} \text{ или } \sigma = E_Y \varepsilon, \quad (8.1)$$

где је E_Y [N/m²] тзв. Јангов² моду еластичности.



Слика 8.1 а) Уз објашњење Хуковог закона; б) реални приказ истезања жице, са назначеном „пуасоновском“ деформацијом, в) типичан дијаграм нормалног напона у зависности од истезања.

¹ Robert Hooke (1635 – 1703), универзални научни геније, енглески научник.

² Thomas Young (1773 – 1829) знаменити енглески научник.

На слици 8.1б дат је реалнији приказ еластичног истезања жице који узима у обзир **промене њеног пречника**. Посматра се жица или шипка дужине l , чија попречна димензија (пречник ваљка, односно ширина призматичног штапа) износи b . Ако се дејством подужне силе изазове релативно **повећање** дужине $\Delta l / l$, истовремено ће се јавити **релативно смањење** попречне димензије $\Delta b / b$. Пуасон³ је установио да су ове две промене пропорционалне:

$$\frac{\Delta l}{l} = -\mu \frac{\Delta b}{b}, \quad (11.2)$$

где је μ позитиван број који се назива Пуасонов коефицијент. Могуће је показати да вредност Пуасоновог коефицијента мора бити у интервалу $0 < \mu < 0,5$. Типична вредност Пуасоновог коефицијента за челик се креће у опсегу од 0,28 до 0,33. Вредност Пуасоновог коефицијента говори о **живавости** (односно кртости) материјала. Што је вредност коефицијента већа, материјал је живавији и истегљивији (на пример гума има Пуасонов коефицијент близак 0,5). Са друге стране, материјали са малом вредношћу μ су крти и лако пуцају. Одговарајући пример су разни типови керамичких материјала код којих се Пуасонов однос креће у опсегу од 0,21 до 0,23.

У новијој литератури се наводи да су произведени неки вештачки материјали са **негативном вредношћу** Пуасоновог коефицијента. То су **композитни материјали** пенасте структура од полимера. Узорак од таквог материјала при издужењу **постаје шири**⁴ што значи да му се истезањем запремина значајно увећава (?!). Оваква особина није примећена код материјала у природи.

На слици 8.1а није приказана промена попречне димензије жице (шипке), што значи да би у таквом случају одговарала вредност $\mu = 0$. Очигледно је да истезање приказано на слици 8.1б ближе реалном експерименту.

ЗАВИСНОСТ НОРМАЛНОГ НАПОНА ОД РЕЛАТИВНОГ ИСТЕЗАЊА.

Еластичне карактеристике конструктивних материјала при једноосном напрезању приказују се дијаграмом датим на сл.8.1в. На апсцису се наноси релативно истезање ε , а на ординату **стандардизовани нормални напон** σ_s добијен тако што се сила дели са попречним пресеком S који жица има у **ненапрегнутом стању**⁵. У почетном делу дијаграма постоји одлична линеарност карактеристике. Другим речима, линеарни део дијаграма у

³ Simeon Denis Poisson (1781 – 1840), знаменити француски математичар и физичар.

⁴ Анимирани приказ овог необичног начина деформације може се видети на Интернету; (тражити под одредницом negative Poisson ratio).

⁵ То значи да се при цртању овог дијаграма не узима у обзир појава смањења попречног пресека при истезању.

потпуности одговара Хуковом закону. Почев од тачке А при даљем повећању истезања дијаграм постаје нелинеаран, али је истезање и даље еластично. Међутим почев од тачке Т, тзв. **границе течења** улази се у област пластичних деформација. Код челика граници течења одговарају релативна истезања од око 0,1 % до 0,2 %. По престанку деловања силе, жица чије је напрезање било у области течења, остаје **трајно издужена**. При смањењу силе контракција жице се врши по правој која је паралелна са почетном карактеристиком. Када се у области течења настави са повећавањем издужења, дијаграм достиже тачку максимума **Z**. Напрезање у овој тачки се назива **затезна чврстоћа**. То је **највеће напрезање** које неки материјал може да поднесе током ограниченог времена. Када напрезање прекорачи вредност затезне чврстоће, долази до брзог пластичног истезања праћеног смањењем попречног пресека. Свођењем на стандардизовани напон, овај део криве има **негативни нагиб**. У тачки К настаје кидање материјала. Појава нелинеарних истезања се објашњава раскидањем веза унутар кристалне решетке. У области течења, тј. пластичних деформација истезање постаје функција времена. Ту се метал понаша слично материјалима аморфне структуре, као што је угрејано стакло, гит и др. Кидање жице обично започиње на неком слабијем месту, које почиње да се несразмерно много издужује, а попречни пресек нагло смањује, што убрзава кидање.

При нормалном коришћењу метала у грађевинским и машинским конструкцијама напрезања, односно истезања **морају припадати линеарном опсегу** дијаграма на сл.8.1в.

8.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ МОДУЛА ЕЛАСТИЧНОСТИ ЖИЦЕ

У овој вежби, еластичне деформације жице добијају се под дејством нормалног напона који се ствара деловањем тежине тегова $F = mg$. На основу (8.1) за моду еластичности се добија:

$$E_Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{mg}{S} \frac{l}{\Delta l} = \frac{4gl}{\pi d^2} \frac{m}{\Delta l} \quad (8.3)$$

где је d пречник жице. Истежање Δl мери се помоћу механичког мерила померања са нонијусом. Познато је да су мерења истезања утолико тачнија уколико је истезање веће. При датој сили, истезање је веће уколико је мањи коефицијент крутости еластичног елемента (опруге), видети (7.1). На основу израза (7.1) и (8.1) добија се да еквивалентна крутост жице износи:

$$\frac{F}{\Delta l} = \frac{E_Y S}{l}. \quad (8.4)$$

Крутост је директно сразмерна попречном пресеку S , а обрнуто сразмерна дужини l . Ради добијања већих истезања, употребљена је тања жица (пречника око 1 mm) и веће дужине (између 3 и 4 метра). Наиме, максимална дужина жице је ограничена висином саме просторије. Горњи крај жице учвршћен је близу плафона за чврсти челични носач.

Скала на којој се читава истезање спојена је за крај помоћне жице окачене за **исти носач**. Други крај мерила са нонијусом, спојен је за крај жице која се истезе. Обе жице, мерна и помоћна, имају **исту дужину** и од **истог су** челика. Жице су на малом растојању, што значи да су им **температуре једнаке**. Отуда промене температуре просторије стварају **једнаке промене** дужине обе жице, па **не утичу** на показивање мерила. Угиб носача под дејством терета, заједнички је за обе жице, па такође не утиче на мерило. Издужења која се читавају на нонијусном мерилу, изазвана су **искључиво** еластичним деформацијама испитиване жице под дејством тегова познате тежине.

У почетном стању, обе жице морају бити **потпуно исправљене**. Због тога су на обе жице постављени тегови за предоптерећење чиме се уклањају набори који постоје код незатегнутих жица. Дејство предоптерећења се **не узима** у обзир, јер се током експеримента не мења.

При оптерећивању не сме се прећи у домен пластичних деформација, што би довело до трајних оштећења жице. Модуло еластичности челика износи око $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. Почетак области пластичних деформација настаје када релативно истезање челика пређе границу од 0,1% до 0,2%. У датом случају пречник жице износи око 1 mm па се из Хуковог закона (8.1) израчунава да би се граница пластичних деформација достигла при маси тегова већој од 16 kg.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Изглед апаратуре за одређивање модула еластичности приказан је на слици 8.2а. На почетку мерења потребно је измерити димензије жице чији се материјал испитује. Пречник жице се мери помоћу микрометра на више места и у разним правцима. На основу n измерених пречника d_i одређује се средња вредност $d_s = (\sum d_i) / n$. Попречни пресек жице добија се помоћу израза $S = d_s^2 \pi / 4$. При истезању жице долази до смањења пречника (Пуасонов закон), па самим тим и до смањења попречног пресека. Међутим у датом случају, промене пресека се **не узимају у обзир** као мале величине. Почетна дужина жице l добија се помоћу метарске траке учвршћене на конзоли.

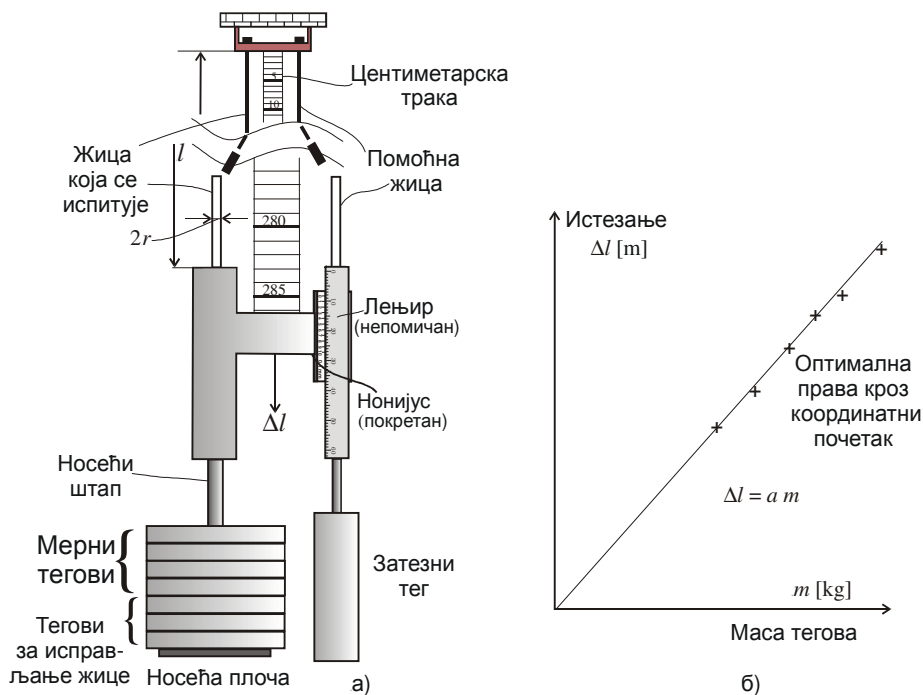
На доњем крају учвршћен је кружни плочасти носач на који се ређају тегови називне масе $m = 1 \text{ kg}$ или 2 kg , један преко другог. Тегови, имају облик

диска са прорезом дуж полупречника. При ређању, прорези тегова треба да се укрштају, да се носач не би искривио, а тегови спали.

На почетку експеримента постави се довољан број предтегова којима се жица у потпуности исправља. Када се поставе предтегови, записује се показивање мерила истезања померања, које се касније узима за нулти положај, $\Delta l = 0$.

Тегови се поступно постављају на носач и сваки пут пажљиво очита истезање. На тај начин се повећавањем терета добијају парови података m_i [kg] и Δl_i [m].

Карактеристика истезања у функцији масе тегова је линеарна функција, слика 8.2б. Вредности издужења не би требало да зависе од тога да ли се сила повећава или смањује. Међутим у пракси, вредности добијене при повећавању терета могу да се мало разликују од одговарајућих вредности при смањивању терета. Ове разлике потичу од несигурности очитавања малих истезања на скали, које при промени силе за 9,81 N износе, зависно од дужине жице, приближно 0,2 mm.



Слика 8.2 а) Апаратура за мерење модула еластичности челичне жице,
б) дијаграм зависности релативног истезања жице од нормалног напона добијен методом оптималне праве која пролази кроз координатни почетак.

По природи овог мерења дијаграм издужења и масе треба да пролази кроз координатни почетак, $\Delta l = a m$, јер при нултој маси и m истезање Δl мора бити нула. На основу израза (4.17) за коефицијент правца a добија се израз:

$$a = \frac{\sum m_i \Delta l_i}{\sum m_i^2}. \quad (8.5)$$

Модуо еластичности израчунава се из израза:

$$E_Y = \frac{4l g}{\pi d_s^2} \frac{1}{a}. \quad (8.6)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Применом израза (2.3) на (8.6), за релативну стандардну комбиновану мерну несигурност модула еластичности добија се:

$$\frac{u_{E_Y}}{E_Y} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{u_d}{d_s}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2} \quad (8.7)$$

при чему u_l, u_d и u_a представљају стандардне несигурности дужине жице, средње вредности пречника и нагиба праве. У овом случају занемарена је несигурност гравитационог убрзања g .

- Претпостављајући униформну расподелу за несигурност дужине жице, стандардна несигурност износи $u_l = a / \sqrt{3}$, где је a половина најмањег подеока на нонијусној скали.
- Мерење пречника жице је поновљено неколико пута. Отуда се могу одредити две стандардне несигурности: тип А, u_{dA} , и тип Б, u_{dB} , а на основу њих комбинована несигурност u_{dc} . На основу поновљених мерења пречника $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, одређује се средња вредност d_s и стандардна

несигурност средње вредности $u_{dA} = \sqrt{\frac{\sum (d_i - d_s)^2}{n(n-1)}}$. За мерење пречника

користи се микрометар чија резолуција износи 0,01 mm (ако је коришћен инструмент другачије резолуције применити резолуцију коришћеног инструмента). Претпостављајући униформну расподелу, стандардна несигурност износи $u_{dB} = 0,01 \text{ mm} / (2\sqrt{3}) = 0,0029 \text{ mm}$. Несигурности тип А и тип Б су некорелисане, па се комбинована несигурност добија на основу израза $u_{dc} = \sqrt{u_{dA}^2 + u_{dB}^2}$.

Користећи израз (4.19), за стандардну несигурност коефицијента правца оптималне праве u_a добија се:

$$u_a = s_a = \frac{s_{\Delta l}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n m_i^2}}, \text{ где је } s_{\Delta l} = \sqrt{\frac{\sum (\Delta l_i - a \cdot m_i)^2}{n-1}}. \quad (8.8)$$

Заменом појединих компоненти несигурности у (8.7) долази се до стандардне несигурности модула еластичности. Ако се претпостави важење Гаусове расподеле и усвоји статистичка сигурност од 95%, проширена комбинована мерна несигурност износи $U_c = 2 \cdot \left(\frac{u_{E_Y}}{E_Y} \right) \cdot E_Y$. Коначни резултат мерења модула еластичности изражава се у облику $(E_Y \pm U_c)$.

Релативна грешка мерења. Испитивана жица је од челика. На крају вежбе треба одредити релативно одступање добијене вредности модула еластичности од вредности дате у Прилогу 6. Установити да ли се таблична вредност налази у интервалу $(E_Y \pm U_c)$ или не, и по потреби дати коментар.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

Robert Hooke (1635 – 1703) је био један од највећих и најсвестранијих научника свих времена.

Пронашао је закон еластичности који носи његово име. Својим законом еластичности инспирисао је Роберта Бојла да испита „еластичне“ особине гасова (Бојлов закон). Бојл је доказао закон користећи пумпу за компримовање и разређивање ваздуха коју је конструисао Хук.

Боје код танких филмова објашњавао је као последицу таласне природе светлости.

Конструисао први микроскоп са свим уобичајеним саставним деловима.

Творац микроскопске биологије. Издао чувену књигу Микрографија у којој су први пут приказани детаљни цртежи пчелиње жаоке, буве и других ситних животиња и њихових органа.

Увео у биологију важан термин **ћелија**. Посматрајући на микроскопу порозну структуру попречног пресека плуте, уочио је облике које су га потсетиле на затворске собице - ћелије.

Први је истраживач који је схватио да фосилни остаци потичу од некадашњих биљака и животиња. Микроскопом је посматрао угљенисане биљке и уочио сличност са структуром живих биљки.

Први је правилно објаснио процес горења.

Као архитекта радио је на обнови Лондона после пожара 1666. године. Пронашао облик грађевинског лука највеће могуће носивости. Решење за облик тог лука Хук је објавио у форми загонетке (анаграма). Решење анаграма нађено је тек после Хукове смрти, јер нико није успео да реши проблем.

Имао проналаске из области конструкције часовника, и возила, механизма и др.

Направио прве метеоролошке инструменте, мерило брзине ветра и хигрометар мерило релативне влажности ваздуха.

Конструисао рефрактометар – мерило индекса преламања.

Пре Њутна је заступао схватање да планете имају елиптичне путање.

Открио познату црвену пегу на Јупитеру (која представља огромну циклонску олују), и гледајући њу, установио да се Јупитер окреће око своје осовине.

Хук је имао и друга бројна открића које његови савременици нису били у стању да прихвате нити разумеју. Та открића су била заборављена па су много касније поново „откривена“. Ту спадају, на пример, Брауново кретање, планета Уран, периода Халејеве комете, гњурачко звоно и др.

Био је савременик Њутна с којим је водио борбу у вези приоритета у неким открићима. Њутн се трудио да уз помоћ свог огромног научног и друштвеног ауторитета умањи значај Хукових открића и његовог угледа. Није сачувана ни једна слика Роберта Хука.

Изворни облик свога закона Роберт Хук је публиковао 1679. године у форми загонетке – анаграма који је гласио: “**ceiinosstuv**”. Било је потребно правилно распоредити наведена слова и добити значење. Две године **нико није решио** анаграм. Коначно је Хук објавио решење које је гласило “*Ut tensio, sic vis*”, или у преводу са латинског **Какво истезање, таква и сила**. Хук је вероватно имао у виду општи случај еластичног елемента – опруге код које је истезање Δx сразмерно сили F , тј. $\Delta x = cF$, где је c [m/N] коефицијент еластичности опруге. Хуково име носе по један кратер на Месецу и на Марсу.

Simeon Denis Poisson (1781 – 1840), знаменити француски математичар и физичар. Открио важан тип расподеле случајних бројева која носи његово име. Проширио и унапредио математичке методе у анализи савремених и претходних физичких експеримената из механике и електромагнетизма. Увео у математичку статистику појам велики бројеви. Заслужан за откриће Пуасонове диференцијалне једначине и математичког оператора Пуасонове заграде. Један кратер на Месецу носи његово име.

ВЕЖБА 3

Део 2/3

9. МЕРЕЊЕ МОДУЛА ТОРЗИЈЕ (СМИЦАЊА) ЖИЦЕ

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Торзија, или увијање, као вид напрезања материјала, врло се често среће у техници, а такође и у свакодневном животу. Од огромног броја примера, наводе се следећи: окретање водоводне славине, окретање кључа у брави, померање кваке, и сл.
- ❖ Торзионо напрезање се јавља у бургији при бушењу отвора или у осовини која покреће точак аутомобила, и сл.
- ❖ Увијањем се могу сломити разни предмети, а њиме се такође ручно цеди рубље.
- ❖ Торзиона напрезања су чест узрок повреде код човека (екстремитети, кичмени стуб и др).
- ❖ Грађевински материјали и објекти су много осетљивији на смичуће него на компресионо напрезање (хоризонтални удари земљотреса лако изазивају рушења).
- ❖ Нека биолошка ткива и органи су много осетљивији на смицање него на компресију; на пример зуби подносе огромна нормална напрезања, али бивају оштећени од малих смичућих напрезања.

9.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

Први и други Њутнов закон говоре да узрок промене брзине неког тела представља сила која делује на то тело. Хуков закон указује да при статичком напрезању сила изазива еластичне деформације материјала. Њутнови закони, а такође и Хуков закон се у потпуности примењују на ротационо кретање тела, као и на појаву торзионих деформација. Између физичких појава и физичких величина при translацији и ротацији постоје одређене аналогije од којих су неке приказане у табели 9.1.

Ротација неког објекта може се изазвати деловањем момента спрега за чији је пренос потребна нека осовина. Ако се деловањем момента спрега M [$\text{N} \cdot \text{m}$]

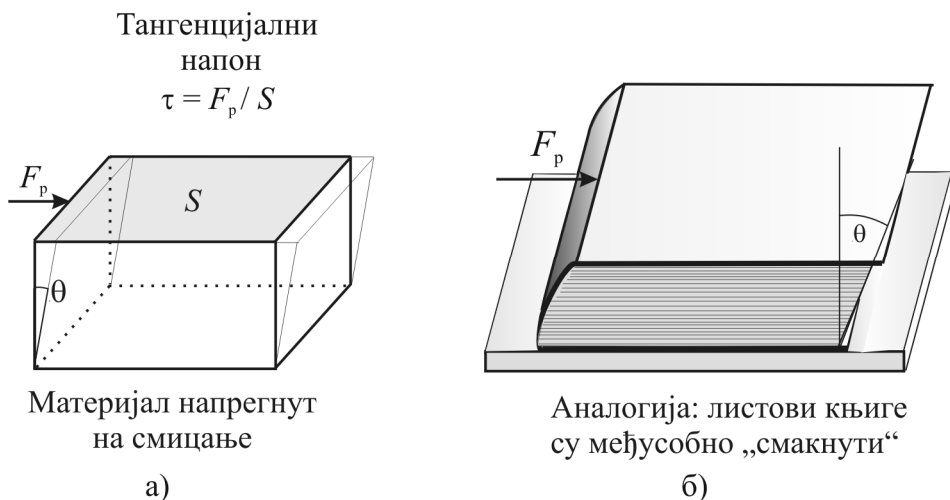
изазива ротација објекта угаоном брзином $\omega[\text{rad/s}]$, објекту се преноси механичка снага $P = M \cdot \omega[\text{W}]$. Осовина мора бити тако пројектована да без трајних деформација пренесе момент и у најтежим условима рада механизма. При преносу момента, долази до еластичног увијања осовине. То су торзиона (смичућа) напрезања, односно деформације. Торзионо и њој сродно, смичуће напрезање, јављају се такође и при статичким условима.

Табела 9.1 Аналогне величине при translацији и ротацији.

Транслација			Ротација		
Величина	Ознака	Јед.	Величина	Ознака	Јед.
Померање, дужина, деформација	l Δx	m	Угао, угаоно померање, угао увијања	θ, φ	rad
Брзина	v	m/s	Угаона брзина	ω	rad/s
Убрзање	a	m/s ²	Угаоно убрзање	α	rad/s ²
Маса	m	kg	Момент инерције	I	kg m ²
Сила	$F=ma$	N	Момент силе, спрег	$M = I\alpha$ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	N m
Снага	$P = F \cdot v$	W	Снага	$P = M \cdot \omega$	W
Рад	$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$	J	Рад	$A = \vec{M} \cdot \vec{\theta}$	J
Крутост опруге	$k = F / \Delta x$	N/m	Торзиона константа	$c = M / \varphi$	Nm/rad
Нормални напон	$\sigma = F / S$	N/m ²	Напон смицања	$\tau = F_p / S$	N/m ²
Модуло еластичности	E_Y	N/m ²	Модуло смицања (торзије)	E_s	N/m ²
Угаона учестаност осцилација	$\omega = \sqrt{k / m}$	rad/s	Угаона учестаност осцилација	$\omega = \sqrt{c / I}$	rad/s

Посматраћемо, најпре, тело облика коцке постављено на хоризонталну подлогу. Ако на горњи базис, површине S делује сила F_p паралелна са

подлогом, тело ће се деформисати на начин приказан на слици 9.1a. Ради јаснијег утиска, деформације су приказане у пренаглашеном облику. Аналогне деформације настају када се на књигу делује силом паралелном са корицама, слици 9.1б. У случају књиге, очигледно је да су се суседни листови померили, тако што се горњи лист „смакао“, тј. проклизао преко доњег. Бојна ивица која је била у почетку вертикална, закоси се за угао θ .



Слика 9.1 а) Еластична деформација чврстог тела под дејством смичућег (тангенцијалног) напона; б) аналогна смичућа деформација код књиге.

Деформација еластичног тела на слици 9.1a објашњава се на аналоган начин. Наиме, тело се може посматрати као да се састоји од великог броја паралелних хоризонталних слојева. Напон (напрезање) τ који се ствара дејством силе F_p назива се смичући или **тангенцијални напон**. Он је дефинисан изразом $\tau = F_p / S$. Тангенцијални напон τ доводи до линеарно сразмерне деформације тела за угао θ према изразу:

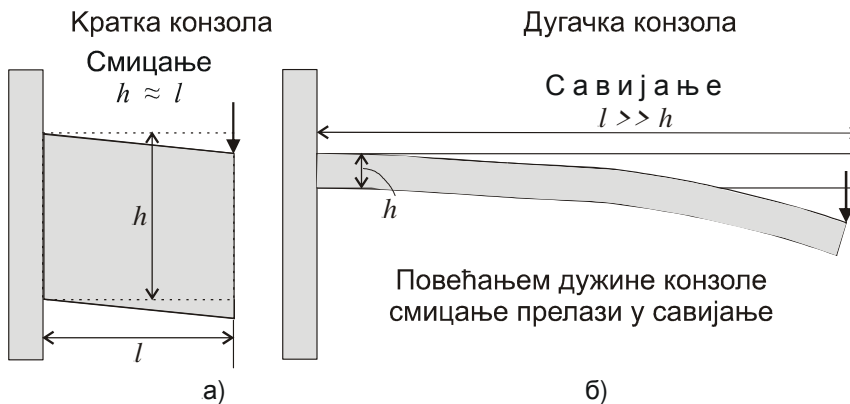
$$\tau = \frac{F_p}{S} = E_s \cdot \theta. \quad (9.1)$$

Константа пропорционалности E_s [N/m²] назива се **модуо смицања** или **модуо торзије**. Угао θ , који представља меру деформације тела изложеног смичућем напрезању, представља аналогну величину релативном истезању $\varepsilon = \Delta l / l$ при дејству нормалног напона.

Потребно је уочити разлику нормалног и смичућег напрезања. Нормални напон ствара сила **управна** на површину, а тангенцијални напон сила **паралелна** са површином. Модуо торзије E_s и модуо еластичности E_y имају

исту димензију. Међутим, бројне вредности ова два параметра материјала нису једнаке. Модуло смицања има код већине материјала два до три пута мању вредност од модула еластичности.

Тангенцијална сила изазива смичућу деформацију, под условом када је висина (дужина) објекта мала, тј. блиска осталим димензијама, као што је случај код коцке. У случају када висина постане пет и више пута већа од ширине, смичућа деформација прелази у **савијање**. Такав еластични објект се назива конзола. На слици 9.2а приказано је смицање, а на слици 9.2б савијање материјала.



Слика 9.2 Уз објашњење преласка смичуће деформације у деформацију савијања:
а) нормална сила код релативно кратке конзоле изазива смицање, а б) код релативно дугачке конзоле савијање.

Сада ћемо посматрати хомогени цилиндар дужине l и полупречника r који је на једном свом крају учвршћен, као што је приказано на слици 9.3. На слободном крају цилиндра делује момент спрега $M = 2r \cdot F$ који увија цилиндар око своје осе за угао φ . Тачка на обиму круга слободног базиса се помери за растојање $s = r \cdot \varphi$. Изводница цилиндра, која је у почетку била хоризонтална, искоси се за угао $\theta \approx \tan \theta = r\varphi/l$. Анализом смичуће еластичне деформације цилиндра за угао θ добија се израз:

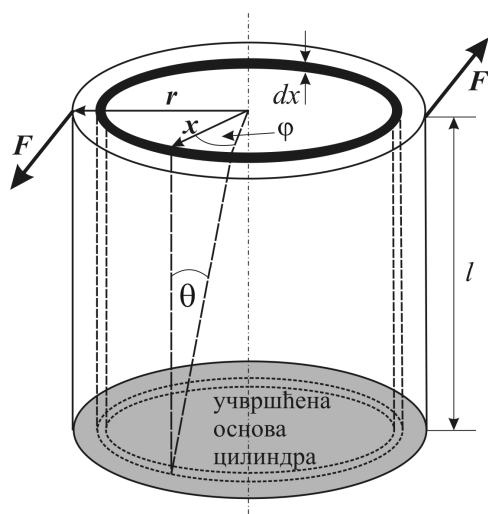
$$\theta = \frac{r\varphi}{l} = \frac{2M}{\pi r^3 E_s} . \quad (9.2)$$

Коефицијент крутости торзионе опруге c дефинисан је као количник момента и одговарајућег угла увијања краја жице:

$$c = \frac{M}{\varphi} . \quad (9.3)$$

Из израза (9.2) и (9.3) добија се:

$$c = \frac{\pi r^4 E_s}{2l}. \quad (9.4)$$



Слика 9.3 Уз објашњење еластичног увијања затегнуте жице (или ваљка) под дејством спрега силе.

Модуо торзије је повезан са друга два параметра која описују еластичне карактеристике материјала, а то су Јангов модуо еластичности E_Y и Пуасонов коефицијент¹ μ . У уџбеничкој литератури се може видети извођење следећег израза:

$$E_s = \frac{E_Y}{2(1 + \mu)}. \quad (9.5)$$

Помоћу (9.5) могуће је одредити једну од величина, E_Y , E_s или μ , ако су две од њих познате.

9.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ МОДУЛА ТОРЗИЈЕ ЖИЦЕ

Мерна апаратура приказана је на слици 9.4. Жица чији се модуо торзије мери, виси на металној конструкцији. Жица је учвршћена за центар диска са кружном угаоном скалом, који се може окретати руком. Угао окретања се

¹ Видети поглавље 8.

очитава у односу на непомичан диск са реперним зарезом. На доњем крају жице учвршћен је масивни метални цилиндар са казаљком. Цилиндар има улогу да затегне жицу, али такође и да се преко њега формира момент спрега који се може подешавати помоћу два једнака тега. Тежина се преноси на цилиндар преко два лака котура са малим трењем у лежиштима.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА састоји се из следећих корака:

- Пречник жице d измери се микрометром на неколико места и у неколико праваца и израчуна се средња вредност пречника.
- Дужина жице l измери се лењиром, односно катетометром.
- Пречник D доњег цилиндра се измери на неколико места помоћу кљунастог помичног мерила са нонијусом и израчуна средња вредност.
- На доњи цилиндар је намотан конац, чији крајеви прелазе преко два котура. На крајевима конца обешени су тасови на које се стављају тегови **једнаких** маса m . Тежине тегова стварају момент спрега $M = mgD$.
- Када су тасови празни, финим померањем горњег диска, казаљка на цилиндру се поставља наспрам непокретног, реперног врха.
- Стављањем два једнака теге масе m на жицу се преноси момент спрега $M = mgD$, који изазива увијање жице. Стога се покретна казаљка закрене у односу на непокретну казаљку.
- Пажљивим окретањем горњег диска за угао φ , казаљка на цилиндру се поново постави тачно наспрам реперног врха. Угао φ је једнак углу увијања жице.
- Поступак се понавља повећавајући масу тегова и читавајући одговарајући угао увијања жице.

Овом методом добија се добра тачност мерења угла увијања жице. Угао закретања казаљке се не мери непосредно; окретањем горње скале са угломером, ствара се супротан момент којим се **поништава** дејство спрега услед тегова. Када се обртањем диска казаљка на цилиндру поново врати у почетни положај, (наспрам реперне казаљке), угао на скали угломера једнак је углу увијања жице.

На основу података црта се дијаграм зависности угла увијања у функцији момента:

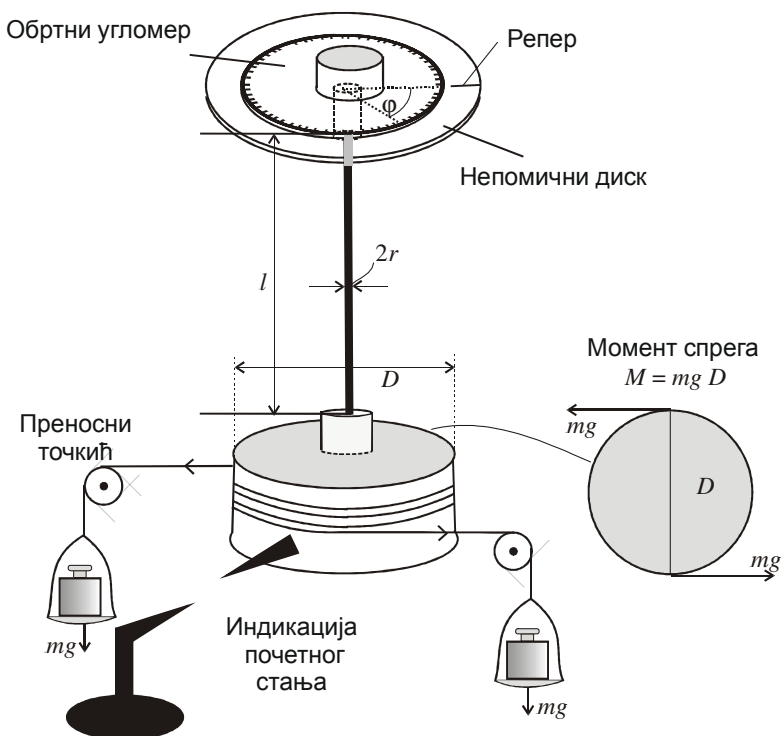
$$\varphi = \frac{1}{c} \cdot M, \quad (9.6)$$

који представља праву линију која **пролази кроз координатни почетак**. Нагиб ове врсте оптималне праве дат је изразом (4.17), односно:

$$a = \frac{1}{c} = \frac{\sum (M_i \varphi_i)}{\sum M_i^2} \quad (9.7)$$

Са израчунатом вредношћу торзионе константе c жице, модулу смицања се одређује из формуле:

$$E_s = \frac{2lc}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4} \quad (9.8)$$



Слика 9.4 Апаратура за одређивање модула торзије жице.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Применом израза (2.2) на (9.8), за релативну стандардну комбиновану мерну несигурност модула еластичности добија се:

$$\frac{u_{E_s}}{E_s} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(4\frac{u_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{u_c}{c}\right)^2} \quad (9.9)$$

при чему u_l , u_d и u_c представљају стандардне несигурности дужине жице, средње вредности пречника и торзионе константе.

За несигурност мерења дужине u_l усваја се правоугаона расподела.

Мерење пречника жице је поновљено неколико пута. Отуда се могу одредити две стандардне несигурности - тип А, u_{dA} , и - тип Б, u_{dB} (за који усвајамо униформну расподелу). Несигурности тип А и тип Б су некорелисане, па се на основу израза (2.3) добија комбинована несигурност u_d .

Користећи израз (4.19), за стандардну несигурност коефицијената правца оптималне праве добија се:

$$u_a = s_a = \frac{s_\varphi}{\sqrt{\sum_{i=1}^n M_i^2}}, \text{ где је } s_\varphi = \sqrt{\frac{\sum (\varphi_i - a \cdot M_i)^2}{n-1}}. \quad (9.10)$$

Пошто је коефицијент правца $a = 1/c$, несигурност u_c добија се као несигурност индиректно мерене величине према изразу (2.2), тј. $u_c = c^2 \cdot u_a$, па израз (9.9) постаје:

$$\frac{u_{E_s}}{E_s} = \sqrt{\left(\frac{u_l}{l}\right)^2 + \left(4 \frac{u_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{u_a}{a}\right)^2}. \quad (9.11)$$

Заменом појединих компоненти несигурности у (9.11) долази се до стандардне несигурности модула торзије. Ако се претпостави важење Гаусове расподеле и усвоји статистичка сигурност од 95%, проширена комбинована несигурност износи $U_c = 2 \cdot \left(\frac{u_{E_s}}{E_s}\right) \cdot E_s$. Коначни резултат мерења модула торзије изражава се у облику $(E_s \pm U_c)$.

Релативна грешка мерења. Испитивана жица је од челика. На крају вежбе треба одредити одступање добијене вредности модула смицања од вредности дате у Прилогу 6. Установити да ли се таблична вредност налази у интервалу $(E_s \pm U_c)$ или не, и по потреби дати коментар.

ВЕЖБА 3

Део 3/3

10. МЕРЕЊЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА ПОМОЋУ ТОРЗИОНОГ КЛАТНА

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Клизач на леду или балетска играчица повећавају брзину ротације у тренутку када раширене руке скупе уз тело.
- ❖ При скоку у воду са даске, брзина ротације се нагло мења при исправљању или савијању тела око појаса.
- ❖ Механички ручни часовник ради на основу правилних осцилација клатна са спиралном (торзионом) опругом. Часовник са спиралном опругом први је конструисао велики холандски физичар 17. века Хајгенс.
- ❖ Тело које виси окачено о увијену нит, периодично ће се окретати у два смера. Одговарајући примери су оловни тег на риболовном најлонском концу или гимнастичар који виси на конопцу за пењање.
- ❖ Торзиону вагу као веома осетљиво мерило момента и силе пронашао је и анализирао Кулон што му је омогућило да докаже свој чувени закон из електростатике.

10.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

У претходном поглављу, у табели 9.1, наведене су аналогije између физичких величина при транслаторном и ротационом кретању. Из ових аналогija проистичу аналогije између механичких транслационих и ротационих система. Осцилаторни системи се код оба типа кретања састоје од еластичног и инерцијалног елемента. Транслаторни осцилаторни систем састоји се од опруге и инерцијалног елемента (масе). Аналогно, хармонијски **ротациони** осцилатор се добија комбинацијом еластичног елемента - **торзионе опруге** и инерцијалног елемента који поседује **момент инерције**. Ротациони осцилатор врши лучне осцилације у **хоризонталној** равни. При томе је неопходно да губици енергије буду занемарљиво мали. Када се опруга увије за угао θ у

односу на равнотежни положај, она делује моментом спрега $M(t)[N \cdot m]$, који је сразмеран углу:

$$M(t) = -c\theta(t) \quad (10.1)$$

где је $c[N \cdot m/rad]$ константа торзионе опруге. По Њутновом закону, момент спрега услед неравномерног угаоног кретања износи $M_I(t) = -I\ddot{\theta}(t)$, где је $I[kg \cdot m^2]$ момент инерције тела у односу на осу ротације. Збир момената $M(t)$ и $M_I(t)$ је једнак нули, па једначина кретања има облик:

$$I\ddot{\theta}(t) + c\theta(t) = 0. \quad (10.2)$$

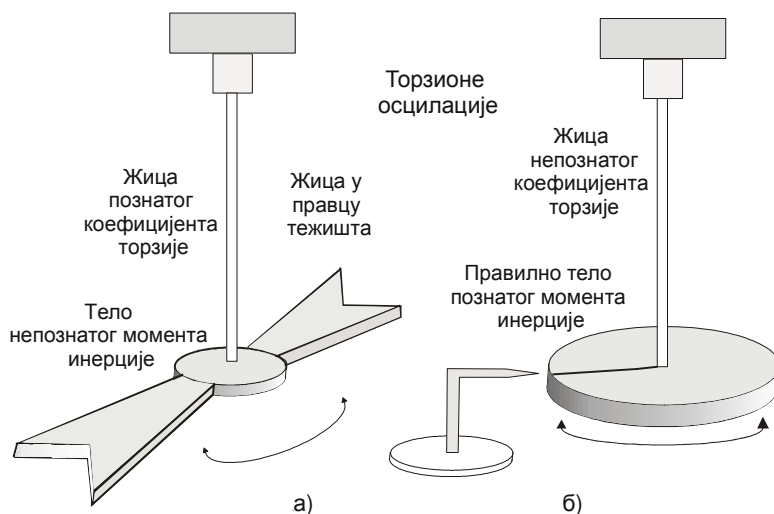
Решење ове хомогене линеарне диференцијалне једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin \omega t. \quad (10.3)$$

при чему је период осциловања:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}. \quad (10.4)$$

Једноставни облик торзионе опруге представља затегнута жица или штап округлог пресека. Осцилаторни систем на слици 10.1а, састоји се од жице учвршћене горњим крајем на непомићну тачку. На доњем крају жице учвршћено је тело неправилног облика. Правац жице пролази кроз тежиште тела.



Слика 10.1 а) Одређивање момента инерције неправилног тела на бази периоде торзионих осцилација (торзиона константе жице c је позната), б) динамички метод одређивања торзионе константе жице на бази периоде осцилација тела познатог момента инерције.

Из израза (10.4) за момент инерције тела у односу на његову тежишну осу добија се:

$$I = \frac{T^2 c}{4\pi^2}. \quad (10.5)$$

МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ. На слици 10.2а, приказана је материјална тачка која се креће брзином v . Брзина је управна на праву a . Тренутно растојање тачке од праве износи l . Кретање тачке се може истовремено посматрати и као **ротација** око праве, која представља тренутну осу ротације. Угаона брзина такве ротације је $\omega = v/l$. Посматрајући кретање као транслацију, кинетичка енергија материјалне тачке масе m износи $E_k = mv^2/2$. Заменом $v = \omega \cdot l$, израз за кинетичку енергију добија облик $E_k = ml^2\omega^2/2$. Упоредивањем два израза за енергију, види се да су аналогне величине брзина v и угаона брзина ω , а такође и маса m и производ ml^2 , који се назива **момент инерције материјалне тачке**.

Полазећи од израза за момент инерције материјалне тачке, може се, у принципу, одредити **момент инерције** било ког **неправилног тела**, слика 10.2б. Поступак одређивања момента инерције је следећи. Тело се подели на већи број делића са масама Δm_i који се могу сматрати материјалним тачкама. Растојања делића од осе ротације износе r_i . Пошто је момент инерције сваког од делића износи $\Delta I_i = r_i^2 \Delta m_i$, укупни момент инерције тела добије се сумирањем $I = \sum \Delta I_i = \sum r_i^2 \Delta m_i$.

Момент инерције тела правилног облика се може одредити мерењем димензија тела и применом математичког поступка.

Танки шупљи цилиндар. На сл.10.2в приказан шупљи цилиндар масе m и полупречника r . Дебљина зида је много мања од полупречника. Цилиндар може да ротира око своје централне осе. У овом случају целокупна маса цилиндра налази се на удаљености r од осе, што значи да момент инерције износи:

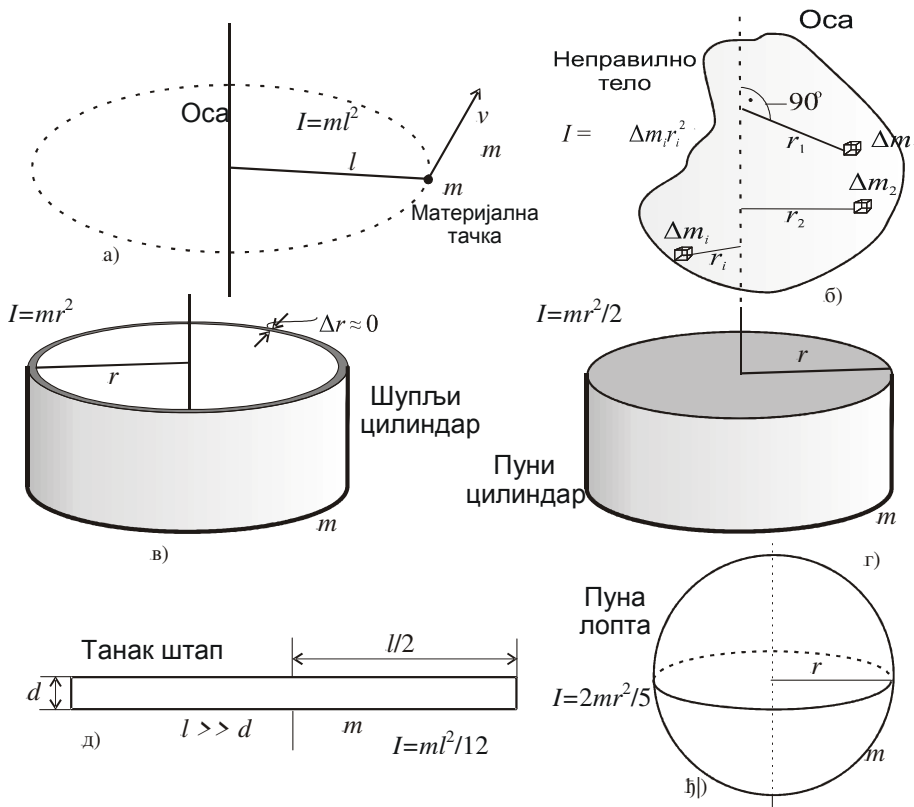
$$I = mr^2 \quad (10.6)$$

тј. важи израз исти као и у случају материјалне тачке.

Хомоген ваљак. На слици 10.2г, приказан је пун, хомоген ваљак полупречника r , висине h и густине ρ . Ваљак се може посматрати као да је подељен на танке шупље цилиндри полупречника x , дебљине dx и висине h . Момент инерције сваког од ових цилиндара износи $dI = dm \cdot x^2$, где је $m = x^2 \pi \cdot h \cdot \rho$, па је $dI = 2\pi h \rho dx \cdot x^2$. Укупни момент инерције ваљка добија се интегралом добијеног израза у границама $0 < x \leq r$. На тај начин се за момент инерције добија:

$$I = \frac{mr^2}{2} \quad (10.7)$$

где је $m = r^2 \pi \cdot h \cdot \rho$ маса цилиндра.



Слика 10.2 Момент инерције: а) материјалне тачке, б) неправилног тела, в) шупљег цилиндра са танким зидом, г) хомогеног ваљка или диска, д) хомогеног танког штапа, за тежишну управну осу, ж) лопте.

Хомогени штап који ротира око управне осе, која пролази кроз тачку на једном од крајева приказан је на слици 10.2д. Ова оса није тежишна; за

добиање момента инерције може се искористити Штајнерова¹ теорема. Према овој теорему, момент инерције $I(x)$ за паралелну осу, на удаљености x од тежишне осе, износи $I(x) = I_0 + mx^2$. У овом случају је $x = l/2$, па се за момент инерције за осу на крају штапа добија:

$$I = \frac{ml^2}{3} \quad (10.9)$$

који је четири пута већи од централног момента I_0 .

Лопта. Момент инерције хомогене лопте масе m и полупречника r , у односу на централну осу, слика 10.2ђ, дат је изразом:

$$I_0 = \frac{2}{5}mr^2. \quad (10.10)$$

10.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИЈЕ НЕПРАВИЛНОГ ТЕЛА

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Тело неправилног облика, слика 10.1а, причвршћује се завртњем за вертикалну жицу чија је торзиона константа c измерена помоћу статичке методе, описане у поглављу 9. Правац жице пролази кроз тежиште тела, тј. жица се поклапа са тежишном осом. Тело се заокрене за неки мањи угао и препусти слободним торзионим осцилацијама. Уз помоћ хронометра измери се укупно трајање T_u већег броја, n , пуних торзионих осцилација тела. Трајање једне осцилације T добија се дељењем, $T = T_u / n$. У израз (10.5) се замењује добијена вредност трајања једне пуне осцилације T и вредности торзионе константе одређена у поглављу 9. Тиме се добија момент инерције неправилног тела за тежишну осу.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Полазећи од изрази (10.5), за релативну стандардну комбиновану несигурност момента инерције добија се:

$$\frac{u_I}{I} = \sqrt{\left(2\frac{u_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{u_c}{c}\right)^2}. \quad (10.11)$$

Временски интервал једне осцилације добија се изразом:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{n} \quad (10.12)$$

¹ Jakob Steiner, (1796 – 1863), велики немачки математичар, професор Берлинског универзитета.

где су T_2 и T_1 почетни и крајњи тренутак мерења, а n број пуних осцилација.

Хронометар се (условно) сматра потпуно тачним. Несигурност уносе првенствено несигурности тренутака укључења T_1 и искључења T_2 хронометра. Код увежбаног експериментатора процењује се да максимална несигурност реакције износи $U_{T_1} = U_{T_2} \approx 0,2 \text{ s}$. Усвајајући да овим несигурностима одговара Гаусова расподела, на нивоу статистичке сигурности од 95%, стандардне несигурности износе $u_{T_1} = U_{T_1} / 2 \approx 0,1 \text{ s}$. Ако се несигурности укључења и искључења посматрају као некорелисани догађаји, тада важи $u_T^2 = \frac{1}{n^2} (u_{T_1}^2 + u_{T_2}^2)$.

Вредност стандардне несигурности торзионе константе жице u_c треба узети из резултата добијених у поглављу 9.

Заменом појединих компоненти несигурности у (10.11) долази се до стандардне несигурности момента инерције. Ако се претпостави важење Гаусове расподеле и усвоји статистичка сигурност од 95%, проширена комбинована несигурност износи $U_c = 2 \cdot \left(\frac{u_I}{I} \right) \cdot I$. Коначни резултат мерења модула торзије изражава се у облику $(I \pm U_c)$.

ВЕЖБА 4

Део 1/2

11. МЕРЕЊЕ БРЗИНЕ ЗВУКА ПОМОЋУ КУНТОВЕ ЦЕВИ

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Код жичаних инструмената, као што је на пример харфа, кратке жице производе високе тонове, а дуге жице ниске тонове.
- ❖ Све жице гитаре или виолине имају исту дужину, али им се дебљина разликује; тање жице производе више тонове.
- ❖ Скраћењем жице виолине или гитаре притиском прста, тон постаје виши.
- ❖ Затезањем жице фреквенција тона постаје виша (штимовање инструмената).
- ❖ Дувањем при врху цеви (епрувета, боца и сл.) могуће је произвести тон. Висина произведеног тона може се нагло променити при промени јачине дувања услед промене редног броја хармоника. .
- ❖ Кратка флаута (пиколо) производи висок продоран тон, а дужа флаута даје тонове ниже фреквенције.
- ❖ Притискањем вентила на труби и другим дувачким инструментима мења се дужина ваздушног стуба који осцилује, а тиме и висина произведеног тона. Код тромбона, то се постиже ручним извлачењем и увлачењем цеви.
- ❖ Плоче и мембране које вибрирају такође могу да производе тон или да га као резонатори појачају или измене. Као пример је ударачки инструмент - тимпан или дрвено тело гитаре, виолине и др.

11.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

У механичке таласе спадају звук и ултразвук, таласи на површини воде, таласи на затегнутој жици и сл. Предуслов за постојање механичких таласа је **еластична средина** у којој се таласи простиру и **таласни извор**. У еластичне средине спадају:

- гасови (ваздух),

- метали и друга чврста тела у виду блокова, шипки, затегнутих жица плоча и др,
- затегнуте нити од гуме, синтетике, конца и др,
- плоче од дрвета
- затегнуте мембране од коже и др.

Извори таласа могу бити механички осцилаторни системи¹ или пак импулсни (ударни) побудни системи.

- Примери осцилаторних извора звука су крила инсеката у лету која стварају зујање, гласне жице, жице инструмената, мембране ударачких инструмената и др.
- За пример импулсне побуде може се узети камен који својим падом у воду изазива површинске таласе или ударац палице у мембрану добоша.

Оваква подела извора звука није потпуно коректна и заслужује додатни коментар. На пример код клавира, жица се побуђује ударцем чекића; жица затим осцилује и представља извор звучних таласа у околном ваздуху. Међутим на жици која осцилује је при томе већ успостављен стојећи талас, тј. извор звучног прогресивног таласа је стојећи талас на жици. Код виолине, гудало прелази преко жице тако што „скакуће“, са фреквенцијом која је усклађена са резонантном фреквенцијом жице. Ударац у мембрану тимпана ствара стојећи талас на мембрани, која затим емитује звучни талас у околину.

Код таласног кретања треба разликовати следеће две врсте брзина:

- брзину простирања таласа у еластичној средини, и
- брзину осциловања материјалних честица еластичне средине око свог равнотежног положаја.

Зависно од правца ових двеју брзина, таласи се деле на **трансверзалне** и **лонгитудиналне**.

Код трансверзалних таласа, брзина простирања и брзина осциловања честица су међусобно **управне**. Одговарајући пример представљају мали таласи на површини воде; чамац на таласима осцилује вертикално, док се таласи простиру у хоризонталном правцу.

Код лонгитудиналних таласа, брзина простирања и брзина осциловања честица имају **исти правац**. Пример лонгитудиналних таласа је **звук**. Код гасова **не постоје** еластичне силе међу молекулима; отуда у гасовима могу да постоје **једино** лонгитудинални таласи.

¹ Видети поглавља 7 и 10.

Унутар течности могу такође да постоје само лонгитудинални таласи; међутим на површини течности јављају се трансверзални таласи.

У чврстим телима могу да се простиру и лонгитудинални и трансверзални таласи. Лонгитудинални таласи су последица **нормалних напрезања** међу суседним слојевима. Насупрот томе, код трансверзалних таласа, у чврстом телу се јављају **смичућа напрезања**.

Брзина простирања механичких таласа. У општем случају, брзина звука c у некој средини може се изразити следећом описном формулом:

$$c = \sqrt{\frac{\text{ЕЛАСТИЧНА КАРАКТЕРИСТИКА СРЕДИНЕ}}{\text{ИНЕРЦИЈАЛНА КАРАКТЕРИСТИКА СРЕДИНЕ}}} \quad (11.1)$$

Инерцијална карактеристика је обично **густина средине**; у том случају еластична карактеристика има димензију притиска.

Код гасова еластичне карактеристике су одређене производом притиска и односа специфичних топлота² $\kappa = c_p / c_v$. Израз за брзину звука у гасовима је:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}. \quad (11.2)$$

На пример, код ваздуха при нормалним условима је $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$, $p = 101 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ и $\kappa = 1,4$. Са овим подацима из (11.2) израчунава се $c = 336 \text{ m/s}$. Највећу брзину звук има у водонику, који представља гас са најмањом густином (под условом константног притиска).

Ако се израз (11.2) комбинује са универзалном једначином гасног стања

$$pV/T = p_0V_0/T_0, \text{ добија се } c(T) = c(T_0) \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \text{ Дакле, брзина звука повећава се}$$

сразмерно квадратном корену апсолутне температуре. Развојем израза (11.3) у Тејлоров ред око тачке $c(T) = c(T_0)$ и занемаривањем чланова вишег реда добија се практичан израз зависности брзине звука у ваздуху од температуре:

$$c(t) = c_0 + 0,6 \cdot t(^{\circ}\text{C}) \quad (11.3)$$

где је $c_0 = 331,6 \text{ m/s}$ брзина звука у ваздуху на 0°C при нормалном атмосферском притиску.

Код чврстих тела брзина таласа зависи од облика тела. Основни значај има формула за чврсто хомогено тело неограничених димензија код кога је брзина лонгитудиналних таласа c_l дата изразом:

² Видети поглавље 12.

$$c_l = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}} \quad (11.4)$$

где је E_Y Јангов модуо еластичности³ чврстог тела. Брзина трансверзалних таласа c_t дата је формулом:

$$c_t = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}} \quad (11.5)$$

где је E_s модуо смицања⁴ чврстог тела. Однос брзина ова два типа таласа у чврстом телу износи:

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{E_Y}{E_s}}. \quad (11.6)$$

Модуо еластичности је 2 до 3 пута већи од модула смицања. То значи да је брзина лонгитудиналног таласа од 1,4 до 1,7 пута већа од брзине трансверзалног таласа. Код металне шипке, лонгитудинални талас се може добити ударцем чекића у њен базис. Трансверзални талас се добија ударцем управно на шипку.

Код течности еластичне особине изражава модуо стишљивости E_V који се дефинише изразом:

$$E_V = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \left[\text{N/m}^2 \right] \quad (11.7)$$

Модуо стишљивости је једнак односу **промене притиска** и одговарајуће **релативне промене запремине** течности. Код воде модуо стишљивости износи $E_V = 2,2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Брзина звука у течностима (лонгитудинални талас) дата је изразом:

$$c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}}. \quad (11.8)$$

Заменом одговарајућих вредности, из израза (11.8) за брзину звука у води добија се $c = 1480 \text{ m/s}$.

ЈЕДНАЧИНА РАВАНСКОГ ТАЛАСА. На месту $x = 0$ налази се извор таласа. Он представља материјалну тачку која врши хармонијске осцилације у вертикалном правцу са амплитудом y_0 , кружном учестаношћу ω , и са

³ Видети поглавље 8.

⁴ Видети поглавље 9.

почетном фазом једнаком нули. Елонгација или удаљеност тачке од равнотежног положаја износи:

$$y(t) = y_0 \sin \omega t \quad (11.9)$$

Осцилације извора стварају еластичне поремећаје средине које се, у виду таласа, простиру брзином c у хоризонталном правцу. Ако се претпостави да нема слабљења, на растојању x од извора, талас ће временски **каснити** за интервал $t_k = x / c$. То је тзв. време простирања таласа. Дакле, кретање тачке на растојању x добија се тако што се у једначини (11.9) уместо времена t унесе „кашњење“ $t - t_k$. Једначина осциловања тачке на растојању x гласи:

$$y(t, x) = y_0 \sin \omega(t - t_k) = y_0 \sin(\omega t - \omega x / c). \quad (11.10)$$

Израз (11.10) представља једначину раванског таласа који се простире у **смеру** x осе. Израз (11.10) може се написати на неколико алтернативних начина користећи следеће основне величине за осцилаторно и таласно кретање.

- **Фреквенција** (учестаност), ν [Hz] (број пуних осцилација у секунди);
 $\nu = \omega / 2\pi$.
- **Периода** T [s] (време трајања једне пуне осцилације), $T = 1 / \nu = 2\pi / \omega$.
- **Таласна дужина** λ [m] (растојање које талас пређе у једној периоди). Из претходних израза следи $\lambda = c \cdot T = c / \nu = 2\pi c / \omega$. Таласна дужина се може дефинисати и као растојање између двеју најближих тачака које осцилују у истој фази.
- **Таласни број** k [rad/m], дефинисан са $k = \omega / c = 2\pi / \lambda$.

Помоћу горе наведених величина, израз за равански талас добија следеће облике:

$$y(t, x) = y_0 \sin \omega(t - x / c) = y_0 \sin 2\pi(t / T - x / \lambda) = y_0 \sin(\omega t - kx). \quad (11.11)$$

Ако се равански талас простире у **супротном смеру** од x осе, брзина простирања има **негативан знак**. Време кашњења узима се са супротним знаком. Једначина овог таласа гласи:

$$y(t, x) = y_0 \sin \omega(t + x / c) = y_0 \sin 2\pi(t / T + x / \lambda) = y_0 \sin(\omega t + kx). \quad (11.12)$$

СТОЈЕЋИ ТАЛАС. Важан специјални случај таласног кретања великог практичног значаја је стојећи талас. Стојећи талас се добија збиром два таласа **исте фреквенције** и амплитуде, али **супротних смерова** простирања. Помоћу (11.11) и (11.12), за једначину стојећег таласа $y_s(t, x)$ добија се:

$$y_s(t, x) = y_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda) + y_0 \sin 2\pi(t/T + x/\lambda) \quad (11.13)$$

Применом тригонометријских трансформација, израз (11.13) постаје:

$$y_s(t, x) = 2y_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (11.14)$$

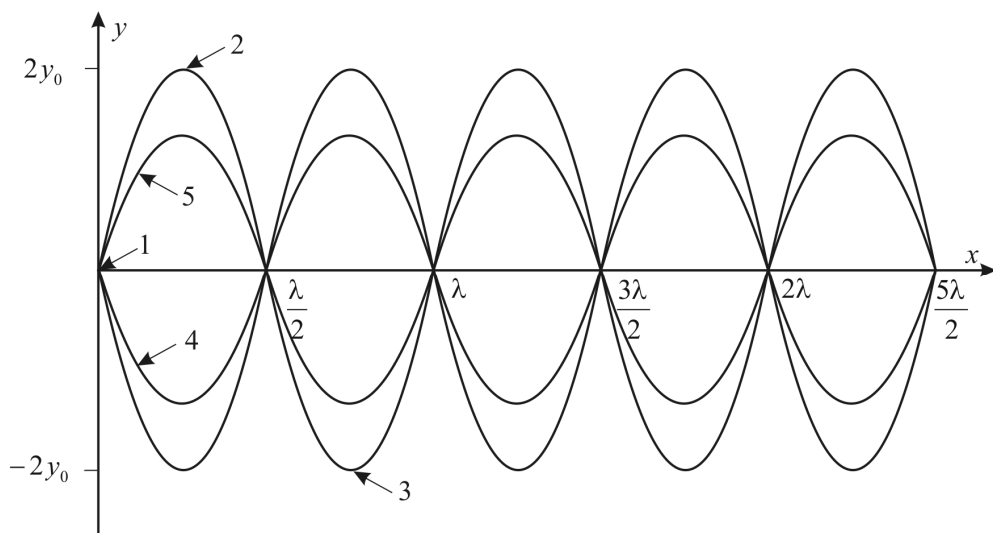
Види се да се једначина стојећих таласа може изразити **производом** две функције. Једна функција зависи **само од времена** ($\sin 2\pi t / T$), а друга **само од положаја**, тј. од координате, ($\cos 2\pi x / \lambda$). Места на којима амплитуда има нулту вредност, тј. места која **трајно мирују**, називају се **чворови стојећег таласа**. Тачке у којима амплитуда осциловања има максималну вредност од $2y_0$ зову се **трбуси стојећег таласа**. Све тачке између два суседна чвора осцилују у истој фази. Тачке лево и десно од чвора осцилују у противфази. Амплитуда осцилација зависи од растојања и износи $2y_0 \cos 2\pi x / \lambda = 2y_0 \cos kx$. Амплитуда се креће у опсегу од минималне вредности 0 у чворовима (чија је удаљеност од извора $x_m = n\lambda / 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$)

до максималне вредности $2y_0$ на трбусима (који су на местима $x_0 = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$).

На слици 11.1 приказан је стојећи талас у неколико карактеристичних тренутака:

- Бројем 1 је означен положај тачака у тренуцима $t = nT/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тада су све тачке у **равнотежном стању**, тј. средина изгледа непоремећена, као да талас и не постоји.
- Стање означено бројем 2 настаје у тренуцима $t = T/4 + nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тада тачке на трбусима, који су на растојању $x = n\lambda$, $n = 0, 1, 2, \dots$ имају елонгацију која износи $2y_0$.
- Стање означено бројем 3, јавља се након једне полупериоде у односу на стање 2. Тада на трбусима таласа елонгације имају супротан знак у односу на положај 2.
- Стања 4 и 5 јављају се после осмине периоде у односу на стања 1, 2 односно 3.

Битан услов за добијања стојећих таласа је **потпуна једнакост** фреквенција два таласа која се простиру у супротним смеровима. Овај услов је тешко испунити помоћу два независна извора. Стојећи таласи се практично добијају тако, што се равански талас (директни) **одбија** од неке управне препреке и тиме формира талас **супротног смера** простирања. Директни и одбијени талас имају блиске амплитуде што значи да су испуњени услови за настанак стојећих таласа (при одбијању увек долази до одређеног слабљења, али оно не треба да буде велико).



Слика 11.1 Стојећи трансверзални талас у неколико карактеристичних тренутака: (1) - све тачке у равнотежном (непоремећеном) стању, (2) и (3) - у тренуцима $T/4$ и $3T/4$ тачке на трбусима су у максимумима, (4) и (5) су међустања после $T/8$ у односу на стање равнотеже, или у односу на стање максимума.

Звучни талас великог интензитета може се **практично** добити под условом да се на његовом извору формира стојећи талас. Да би талас имао одређену таласну дужину и фреквенцију, потребно је да линеарне димензије еластичне средине, тј. извора звука, задовоље један од следећа два услова:

а) дужина средине износи **цео број половина** таласних дужина $L = n\lambda / 2$, $n = 1, 2, \dots$

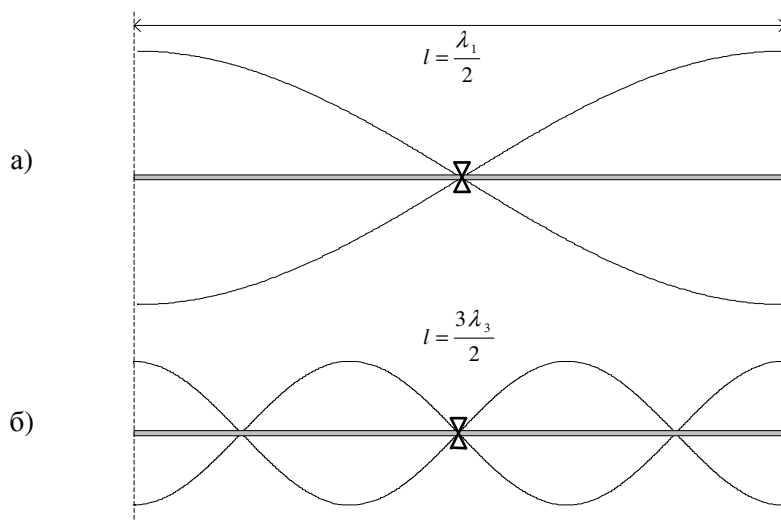
б) дужина је једнака **непарном броју четвртина** таласних дужина $L = (2n + 1)\lambda / 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$

На слици 11.2 дати су примери стојећих таласа код којих је испуњен услов а) тј. код којих је дужина l једнака целом броју половина таласних дужина. Слика 11.2а приказује штап, учвршћен у средини, док су крајеви слободни. На **месту учвршћења увек се налази чвор**. Трбуси стојећег таласа настају на **слободним крајевима** штапа. На слици 11.2а приказан је само **основни стојећи** талас, код кога таласна дужина износи $\lambda_1 = 2l$. На истом штапу могуће је остварити и више других типова стојећих таласа који испуњавају услов а). Ови таласи имају мање таласне дужине, односно вишу фреквенцију у односу на основни талас. То су тзв. виши хармоници. На слици 11.2б приказан је пример вишег хармоника. У питању је трећи хармоник, чија је таласна дужина три пута мања, а фреквенција три пута виша у поређењу са основним

таласом, $\lambda_3 = 2l/3$. Виши хармоници имају увек **мању амплитуду**, односно мањи интензитет у поређењу са основним таласом. У пракси се, поред основног таласа, увек спонтано формирају и већи број виших хармоника. Људско ухо **не уочава** постојање виших хармоника због њиховог малог интензитета.

Међутим хармоници утичу на субјективни утисак тона. Људски слух индиректно осећа постојање виших хармоника по тзв. боји тона. Познато је да је човек у стању да разликује два тона истог интензитета и фреквенције који дају два различита инструмента на основу садржаја виших хармоника, тј. на основу боје тона.

На слици 11.2 могу се такође анализирати стојећи таласи који постоје на штапу учвршћеном у једној крајњој тачки при чему је други крај слободан. Наиме, може се посматрати само лева или само десна половина штапа. У случају основног таласа, приказаног на слици 11.2а, једна половина штапа понаша се као резонатор са два пута мањом дужином, али са **истом** таласном дужином λ_1 као и код целог штапа. У овом случају је дужина резонатора једнака **једној четвртини** таласне дужине. Код овог таласа задовољен је услов осциловања означен са б).

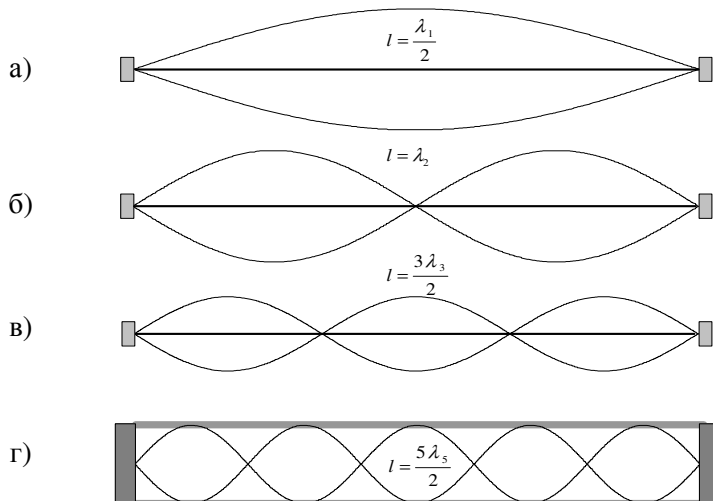


Слика 11.2 Стојећи таласи на штапу који је учвршћен на средини:
а) основни талас при полуталасној резонанцији, б) трећи хармоник стојећег таласа.

Ако се засебно посматрају половине штапа на слици 11.2б, долази се до следећег закључка. Обе половине штапа представљају резонаторе на којима је

успостављен **трећи хармоник** стојећег таласа, при чему дужина износи **три четвртине** таласне дужине.

Неколико других примера стојећих таласа приказано је на слици 11.3. На слици 11.3а приказана је затегнута струна са формираним основним таласом. У овом случају чворови стојећег таласа се налазе у тачкама учвршћења, дакле на крајевима струне. Укупна дужина струне једнака је **целом броју половина** таласних дужина. Код основног таласа, испуњен је услов $\lambda_1 = 2l$. На слици 11.3б, приказан је талас са **два пута** краћом таласном дужином, и два пута вишом фреквенцијом. То је други хармоник, код кога је $\lambda_2 = l$. Треба уочити, да други хармоник **не може** да се формира код штапа на слици 11.2, јер би тада трбух таласа требало да буде на средини, што онемогућава учвршћење у тој тачки. На слици 11.3в приказан је трећи хармоник код кога је $\lambda_3 = 2l/3$. Хармоник n – тог реда⁵ задовољава услов $\lambda_n = 2l/n$.



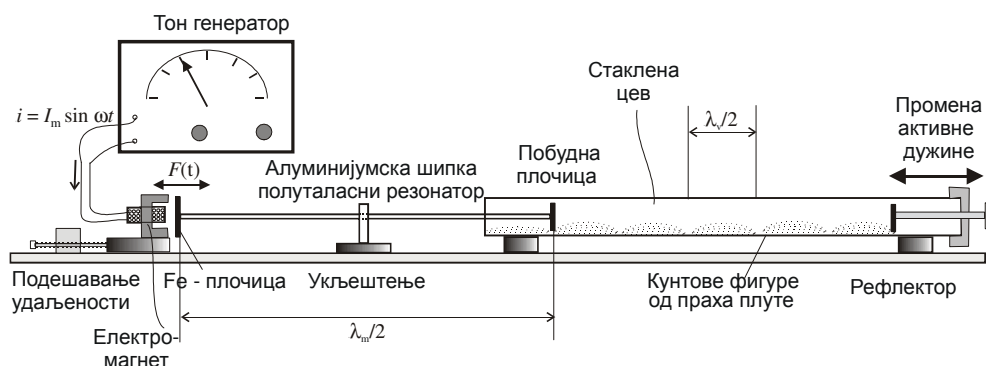
Слика 11.3 Стојећи таласи на струни и у ваздушном стубу:
 а) основни таласна струни, б) и в) други и трећи хармоници на струни,
 г) пети хармоник звучног таласа у затвореном ваздушном стубу⁶.

⁵ Звуци највише фреквенције код виолине, тзв. флажолети представљају више хармонике на струни. Они се изводе тако што уметник само додирне прстом (а не притисне) жицу на тачном месту. На месту додира ствара се чвор одговарајућег вишег хармоника.

⁶ Иако је талас у ваздуху увек лонгитудиналан, при цртању се приказује трансверзални талас; лонгитудинални талас се не може јасно графички илустровати.

11.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ БРЗИНЕ ЗВУКА

Апаратура приказана на слици 11.4 је модификована у односу на оригиналну верзију Кунтове цеви у томе што се побуђивање, уместо ручно, врши континуално помоћу електромагнета. На леви крај штапа постављена је гвоздена плочица, а на малом растојању од ње електромагнет. Напајање електромагнета је из простопериодичног генератора чија се фреквенција и амплитуда напона могу подешавати. Фреквенција се читава на скали генератора.



Слика 11.4 Апаратура за демонстрацију појаве стојећих таласа и мерење брзине звука у ваздуху и алуминијуму помоћу Кунтових фигура.

Електромагнет, кроз чији калем протиче наизменична струја, делује на плочицу (а тиме и на штап) привлачном силом сразмерном **квадрату јачине струје**. Струја је простопериодична, $i(t) = I_{\max} \sin \omega t$, па сила, која ствара подужне деформације штапа, износи:

$$F(t) = K i^2(t) = K I_{\max}^2 \sin^2 \omega t \quad (11.15)$$

где је K константа.

Тригонометријском трансформацијом (11.15) постаје:

$$F(t) = \frac{K I_{\max}^2}{2} - \frac{K I_{\max}^2}{2} \cos 2\omega t \quad (11.16)$$

Сила електромагнета има две компоненте:

- једносмерну **привлачну** силу, $F = K I_{\max}^2 / 2$,
- простопериодичну силу $F(t) = \frac{K I_{\max}^2}{2} \cos 2\omega t$ која врши побуђивање алуминијумског штапа, и ствара стојећи талас на њему.

Звучну побуду врши наизменична компонента, чија је фреквенција **два пута виша** од фреквенције струје $i(t)$ која се читава на скали генератора⁷.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Помоћу завртња електромагнет се поставља на растојање од око 2 mm у односу на гвоздену плочицу. Фреквенција тон генератора се постепено мења све док се интензитет звука осетно појача. То је знак да је дошло до резонанције штапа, тј. да се у штапу јавио лонгитудинални стојећи талас на полуталасној резонантној фреквенцији. Не мењајући фреквенцију генератора, сада се постепено помера положај плочице (рефлектора) на другом крају цеви чиме се мења активна дужина ваздушног стуба. У једном положају рефлектора, звук се додатно појачава, што означава да је настала резонанција такође и у ваздушном стубу.

Након успостављања резонанције у акустичком систему, врше се fine корекције следећих елемената који могу да побољшају резонанцију: растојања електромагнета, фреквенције генератора и положаја рефлектора у цеви. При добро подешеној резонанцији, услед велике амплитуде стојећег таласа, честице плуте на дну цеви формирају Кунтове фигуре, чији је облик приказан на слици 11.4. Унутар једне фигуре честице се групишу у виду финих „завеса“. На местима трбуха стојећег таласа, количина честица је највећа, а на местима чворова најмања. По искључењу генератора, прах од плуте пада на дно цеви, али облик и дужина фигура остају добро видљиви. Дужина ваздушног стуба l_v једнака је растојању између побудне плочице и рефлектора. На овој дужини формирано је n Кунтових фигура, тј. испуњен је услов $l_v = n\lambda_v / 2$, где је λ_v таласна дужина звука у ваздуху. Таласна дужина одређена је изразом $\lambda_v = 2l_v / n$. Фреквенција звука ν_z је **два пута** виша од фреквенције генератора ν_g , тј. $\nu_z = 2\nu_g$. Брзина звука у ваздуху израчунава се на основу израза:

$$c_v = \nu_z \lambda_v = 2\nu_g \frac{2l_v}{n} = \frac{4\nu_g l_v}{n}. \quad (11.17)$$

⁷ Код звучника врши се побуђивање мембрана помоћу електромагнета, али је фреквенција осциловања **једнака** фреквенцији наизменичне струје калема. То се постиже тиме што се у магнетско коло ставља и један снажан **стални магнет**. Када је једносмерно поље магнета знатно јаче од наизменичног поља калема, фреквенција осциловања мембране, односно звука, **једнака је** фреквенцији побудне струје. Међутим и овде се јавља компонента звука са двоструком фреквенцијом, само знатно мањег интензитета од простопериодичне компоненте.

Брзина звука у алуминијуму c_{Al} може се одредити мерењем дужине штапа l , која је једнака **половини таласне** дужине звука, $\lambda = 2l$. На основу ових величина добија се:

$$c_{Al} = v_z \lambda = 2v_g \cdot 2l = 4v_g l. \quad (11.18)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. На основу добијених вредности у експерименту рачунају се апсолутне и релативне грешке мерења (ε_a и ε_r) брзине звука у ваздуху и Јанговог модула еластичности за алуминијум. Условно тачна вредност брзине звука у ваздуху одређује се према изразу (11.3). Тачна вредност Јанговог модула еластичности износи $6,9 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Коначни резултати мерења изражавају се у облику $(c_v \pm \varepsilon_a)$ и $(E_{Y_{Al}} \pm \varepsilon_a)$.

Коментари. Из облика Кунтових фигура на слици 11.4 се види да се плочица која побуђује ваздушни стуб налази на месту које одговара чвору таласа. Ово је у извесној мери нелогично, јер у чвору амплитуда треба да има приближно нулту вредност. Међутим, код резонантних система (механичких и електричних) код којих су губици мали, амплитуда максималних осцилација по правилу знатно надмашује амплитуду побудне периодичне силе (или напона). Побудна плочица представља, дакле, виртуелни чвор стојећег таласа.

Иза побудне плочице налази се затворени простор који је дугачак око једне половине таласне дужине дужине у ваздуху. У том простору се формира полуталасна резонанција у ваздуху што смањују губитке енергије уназад. То доприноси повећању акустичке снаге у главном простору цеви, са предње стране плочице.

При израчунавању брзине звука у алуминијуму, занемарује се утицај побудних плочица учвршћених на оба краја штапа. Међутим, ове плочице имају одређени утицај на резонантну фреквенцију штапа јер представљају сконцентрисане инерцијалне елементе на крајевима. Због тога је резонантна фреквенција нешто нижа него у случају хомогеног штапа. Другим речима, плочице чине еквивалентну дужину штапа нешто већом од стварне.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

August Kundt (1839 – 1894) немачки физичар. Кунт се у почетку своје каријере посветио астрономији, али је касније наставио свој рад у области акустике и оптике. Био је професор у Цириху, Вирцбургу и Стразбуру. Касније је био директор Физичког института у Берлину. Наследио је Хелмхолца на Катедри за експерименталну физику. Испитивао је оптичке особине течности, пара и танких металних филмова. Наставио је рад Фарадеја у области магнетооптике. Открио да магнетско поље изазива окретање равни поларизације светлости код неких гасова и пара. Открио је начин визуелизације стојећих звучних таласа у стакленој цеви, која се назива именом аутора. Кунтова цев је коришћена за мерење брзина простирања звука у разним гасовима. Један кратер на Месецу носи његово име.

ВЕЖБА 4

Део 2/2

12. МЕРЕЊЕ ОДНОСА СПЕЦИФИЧНИХ ТОПЛОТА c_p/c_v ЗА ВАЗДУХ

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Ручна ваздушна пумпа при брзом сабијању ваздуха се загреје, јер се део рада претвара у топлоту.
- ❖ При наглом отварању металног затварача боце са газираним пићем, уочава се водена пара, кондензована при хлађењу услед брзог (адијабатског) ширења засићене паре.
- ❖ При испуштању гаса из спреј-боце, место у близини отвора истицања гаса се расхлади.
- ❖ Код плинске боце, гас истиче споро, па се хлађење не уочава; дотоком топлоте из околине боца се одржава на приближно константној температури.

12.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

Гасови имају неке битне разлике у односу на чврсте и течне супстанције. Запремина неке количине гаса није дефинисана, јер гас тежи да у **потпуности** испуни затворену посуду у којој се налази; то такође значи да се гасови могу сабијати и ширити у **врло великом распону запремина**.

Чврста тела и течности имају запремину која се мало мења при уобичајеним притисцима. Другим речима, течности и чврста тела, за разлику од гасова, су **мало стишљиви**.

При загревању, гасови се при константном притиску шире **знатно више** од течности, а поготову од чврстих тела.

Да би се телу масе m повисила температура за ΔT , потребно му је предати количину топлоте $Q = mc\Delta T$. Коефицијент $c = Q / m\Delta T$ [J/kgK] назива се **специфична топлота**; она је бројно једнака количини топлоте потребне да се један килограм супстанце загреје за један степен. Код чврстих тела и течности, због њиховог малог температурског ширења и мале стишљивости

специфична топлота **не зависи много од услова** при којима се загревање врши.

Међутим, код гасова, вредност специфичне топлоте се осетно мења зависно од услова при загревању. Постоје различити режими загревања, али су следећа два гранична случаја од посебног интереса:

- загревање при константној запремини гаса,
- загревање при константном притиску.

Уобичајено је да се количина гаса, уместо у килограмима, изражава у молovima. Мол је једна од основних јединица SI система. Један мол супстанце садржи Авогадров број честица ($N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Маса једног мола неког елемента назива се моларна маса M [g/mol]. Она је бројно је једнака средњем¹ броју нуклеона (протона и неутрона) у језгру. За угљеник је усвојено да има моларну масу која износи тачно $M = 12 \text{ g/mol}$. Један мол идеалног гаса, при нормалном атмосферском притиску и 0°C има запремину од 22,414 литра.

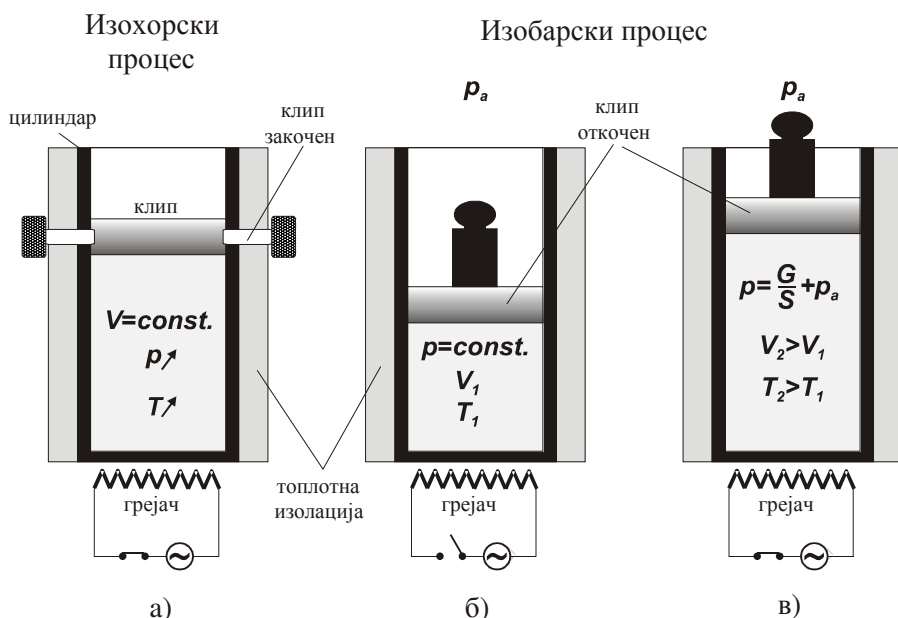
Код гасова се по правилу користе специфичне топлоте које се, уместо на килограм, односе на мол гаса. Ове специфичне топлоте означавају се словом c [J/mol K].

На слици 12.1 приказан је топлотно изоловани цилиндар у коме се налази нека количина гаса чија је запремина одређена положајем клипа који се може померати. Разматрају се два карактеристична начина загревања гаса:

- Загревање при константној запремини, $V = \text{Const}$, слика 12.1а, што се постиже тиме што се **клип закочи**. Овом процесу одговара моларна специфична топлота гаса при константној запремини c_v .
- Загревање при константном притиску², $p = \text{Const}$, слика 12.1б и 12.1в. Константан притисак се остварује тиме што је клип **откочен** (ослобођен), тако да може да се помера, без трења, под дејством промена унутрашњег притиска. Вредност притиска се може подешавати постављањем тега различите масе. На почетној температури, клип се налази у положају приказаном на слици 12.1б. Када се температура гаса повиси за износ ΔT клип се помери у положај приказан на слици 12.1в, при чему притисак остаје на првобитној вредности.

¹ Средњи број узима у обзир изотопски састав елемента. У природном саставу елемента постоји одређени проценат неколико изотопа. Изотопи су атоми истог елемента који се разликују по броју неутрона.

² Ако покретни клип масе m_k има попречни пресек S и на њега је постављен тег масе m , у цилиндру ће притисак износити $p = p_a + (m + m_k)g / S$, где је p_a атмосферски притисак.



Слика 12.1 а) Загревање гаса при константној запремини; клип је закочен, б) загревање при константном притиску, када се клип слободно помера в) повећавајући запремину гаса, уз вршење рада $A = p\Delta V$.

Код загревања гаса при константној запремини (**изохорски процес**), сва апсорбована топлота претвара се **искључиво** у пораст унутрашње енергије ΔU . Количина топлоте дата је изразом $Q_1 = \Delta U = nc_V \Delta T$. Зависност притиска и температуре дата је једначином $p_1 / T_1 = p_2 / T_2$.

Код загревања при константном притиску (**изобарски процес**), услед померања клипа запремина се повећава за износ ΔV , што значи да се **обавља рад** на савладавању спољашње силе, $A = p\Delta V$. Отуда је за исти пораст температуре потребна **већа количина топлоте**, $Q_1 = \Delta U + A = nc_V \Delta T + p\Delta V$. Ова количина топлоте може се добити изразом $Q_2 = nc_p \Delta T$. Пошто је $Q_2 > Q_1$, види се да је $c_p > c_V$. Другим речима количник $\kappa = c_p / c_V$ је **већи од један**. Однос специфичних топлота κ је карактеристична величина за сваки гас. Теоријски се показује да је вредност κ одређена **бројем атома у молекулу**.

Број степени слободе j једнак је броју независних начина кретања молекула којима он **стиче кинетичку енергију**. Начини кретања могу бити **транслација** и **ротација око оса које пролазе кроз тежиште**. Код идеалног

гаса, атом се приказује **моделом материјалне тачке**. Другим речима полупречник атома се сматра нулом, али атом поседује масу, слика 12.2а.

У једноатомске гасове спадају племенити гасови. Код њих атом у исто време представља молекул гаса. Молекул може стицати кинетичку енергију translацијом дуж 3 осе координатног система, x, y, z . Одговарајуће три компоненте кинетичке енергије су $E_x = mv_x^2/2$, $E_y = mv_y^2/2$, $E_z = mv_z^2/2$. Ротацијом око **сопствене** осе једноатомски молекул **не може** стицати кинетичку енергију $E_\omega = I\omega^2/2$, јер му је момент инерције **једнак нули** с обзиром да му је полупречник једнак нули. То значи да број степени слободе молекула једноатомног гаса износи $j_1 = 3$.

Двоатомски молекул се моделује са две материјалне тачке које се налазе на сталном растојању d . Дакле, молекул одговара двома малим куглама на крајевима лаког штапа, слика 12.2б. Овакав систем поседује моменте инерције за две осе x и y (I_x и I_y), које су **управне** на растојање d . За осу z , која се поклапа са дужи d , момент инерције једнак је нули. То значи да ротацијом око z осе молекул **не може** стицати кинетичку енергију. Дакле двоатомни молекул има пет степени слободе, $j_2 = 5$, (три степена слободе translације и два степена слободе ротације).

Троатомни молекул моделује се као три материјалне тачке постављене у теменима троугла. Троатомни и остали молекули са већим бројем атома имају **шест степени слободе**, $j_3 = 6$, (три степена translације и три степена ротације). Наиме, момент инерције постоји за **било коју** осу координатног система, слика 12.2в.

Максвел³ је поставио закон по коме енергија неког молекула гаса на температури T износи $E = jkT/2$. То значи да **сваки** степен слободе **подједнако** доприноси кинетичкој енергији молекула.

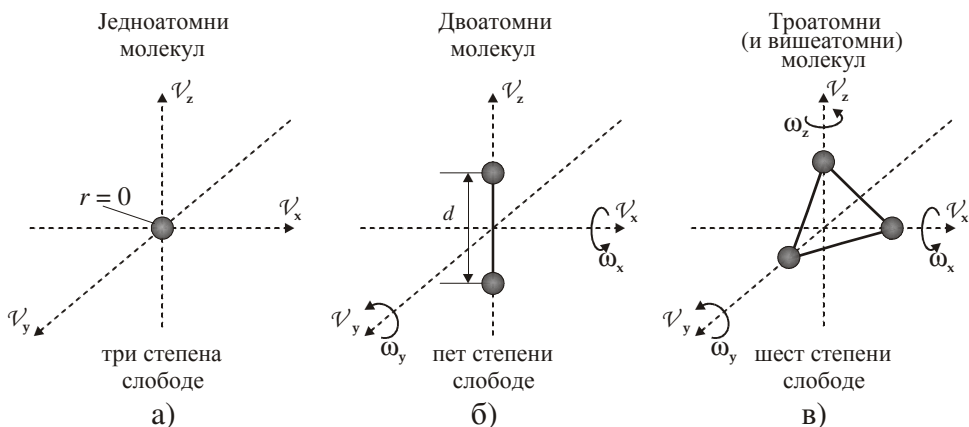
Теоријски се доказује да је однос специфичних топлота дат формулом:

$$\kappa = \frac{j+2}{j}. \quad (12.1)$$

Из (12.1) следи да за једноатомне гасове ($j=3$) важи $\kappa_1 = 5/3 = 1,666$, за двоатомне $\kappa_2 = 7/5 = 1,4$ а за троатомне и вишеатомне молекуле $\kappa_3 = 8/6 = 1,333$.

³ James Clerk Maxwell (1831 - 1879), енглески математичар и физичар.

Ваздух представља смешу у коме највећи удео имају двоатомни гасови, азот и кисеоник, а у мањем износу постоје неки племенити гасови, али такође и троатомни гасови, као што су угљен диоксид и водена пара. Због највећег удела двоатомних гасова, ваздух има однос $\kappa \approx 1,4$.



Слика 12.2 Модели: а) једноатомског, б) двоатомског и в) троатомског молекула идеалног гаса. На сликама су означени правци translација и само оне ротације при којима молекул стиче кинетичку енергију.

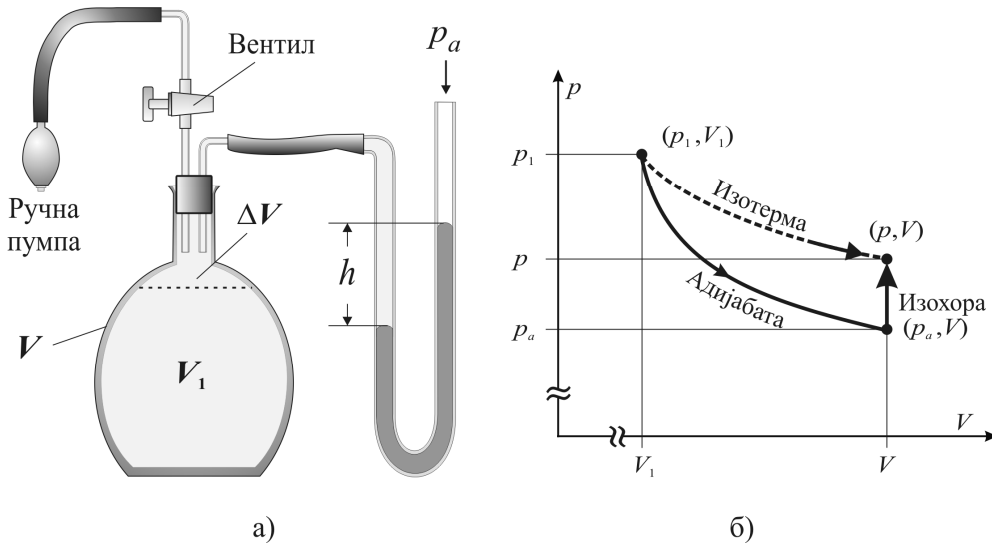
12.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ ОДНОСА C_p/C_v ЗА ВАЗДУХ

Апаратура за мерење односа специфичних топлота методом Клемен-Дезормеа⁴, слика 12.3а, састоји се од стаклене боце запремине $V \approx 10$ литара, вентила, ваздушне пумпе и манометра.

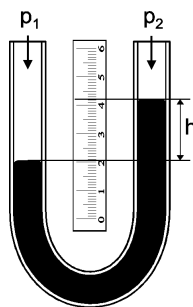
Манометар. Живин манометар, апсолутно мерило притиска, користи се као јефтино и поуздано мерило притиска у лабораторијама. У стакленој вертикалној савијеној цеви облика „U“ налази се чиста жива, слика 12.4. Уколико на отворима манометра делују притисци p_1 и p_2 , јавља се разлика нивоа у крацима $h = (p_1 - p_2) / \rho g$, где је ρ густина живе, која на 0°C износи $\rho = 13,5951 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. На географској ширини од 45° и на нивоу мора за гравитационо убрзање се узима $g = 9,80616 \text{ m/s}^2$. Квалитетни живини манометри треба да имају релативно широку цев. Наиме, на додиру са стакленим зидом, површина живе је закривљена услед дејства површинског напона. Закривљеност утолико мање утиче на читавање нивоа, уколико је

⁴Nicolas Clement - Desormes, (1779 - 1848), француски физичар и индустријалац.

цев шири. Код квалитетнијих манометара користе се релативно широке цеви са пречником од 1 cm и већим. Непогодно је што манометри са широком цеви запремају велику количину чисте живе. Осим тога, мали механички потреси стварају дуготрајне осцилације живиног стуба, што отежава тачно читавање нивоа. Лабораторијски манометри обично имају стуб живе висине од једног метра, а ређе два или три метра. То значи да опсег разлике притисака износи 1 бар до 4 бара. На тачност мерења утиче вертикални положај манометра.



Слика 12.3 а) Апаратура за мерење односа $\kappa = c_p / c_v$, б) p – V дијаграм за ваздух током поступка мерења односа $\kappa = c_p / c_v$.



Слика 12.4 Живин манометар „U“ типа, мерило разлике притиска.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. На почетку се отвори вентил и помоћу пумпе повећа притисак у боци, тако да разлика нивоа живе у манометру буде десетак центиметара. Након тога се затвори вентил и сачека неколико минута да би се температура у боци, која је током пумпања порасла, поново изједначила са

температуром околног ваздуха. Изједначење температуре са околином је настало када разлика нивоа течности у манометру h_1 добије устаљену вредност. Притисак ваздуха у боци тада износи:

$$p_1 = p_a + \rho g h_1 \quad (12.2)$$

где је p_a , спољашњи, атмосферски притисак.

У једном тренутку се отвара вентил за **врло кратко** време, реда величине око једне секунде, након чега се вентил затвара. Током брзог ширења гаса дошло је до изједначења притиска у боци са атмосферским притиском. Из боце је истекла мања запремина ваздуха ΔV , а преостао је ваздух чија је запремина у почетку износила $V_1 = V - \Delta V$. Нагла експанзија ваздуха представља **адијабатски процес**, тј. процес током кога, због **кратког трајања**, није могло доћи до размене топлоте гаса са околином. При адијабатском ширењу, температура гаса брзо опада, а запремина ваздуха се повећа од вредности V_1 до V .

Овај процес приказан је на слици 12.3б стрмијом кривом, тзв. адијабатом, чија једначина гласи:

$$p_1 V_1^\kappa = p_a V^\kappa. \quad (12.3)$$

Након затварања вентила, расхлађени ваздух у боци почиње да се загрева преносом топлоте из околине. Загревање ваздуха одиграва се при константној запремини V , тј. у питању је изохорски процес, током кога се **притисак повећава**. Овај процес приказан је вертикалном линијом (p_a, V, pV). Када дође до поновног изједначења температуре ваздуха у балону и околине, разлика нивоа течности у манометру ће износити h , ($h < h_1$), тј. у боци ће постојати притисак p дат изразом:

$$p = p_a + \rho g h. \quad (12.4)$$

У крајњем стању, ваздух је поново на собној температури, као што је био и на почетку. Отуда се целокупан процес може приказати као да је постојала **изотермна промена** од почетног стања (p_1, V_1) до завршног стања (p, V). Одговарајућа једначина изотермног процеса гласи:

$$p_1 V_1 = p V. \quad (12.5)$$

Овај процес приказан је испрекиданом кривом линијом на слици 12.3б.

Из једначина (12.3) и (12.5), могуће је елиминисати запремине V и V_1 , па се добија једначина по притисцима:

$$\frac{p_1}{p_a} = \left(\frac{p_1}{p} \right)^\kappa. \quad (12.6)$$

Из (12.6) за однос специфичних топлота се добија:

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_a}\right)}{\ln\left(\frac{p_1}{p}\right)}. \quad (12.7)$$

Користећи (11.2) и (11.4), израз (11.7) добија облик:

$$\kappa = \frac{\ln(1 + \rho g h_1 / p_a)}{\ln(1 + \rho g h_1 / p_a) - \ln(1 + \rho g h / p_a)} \quad (12.8)$$

Други чланови у логаритмима су много мањи од 1, тј. $\rho g h_1 \ll p_a$ и $\rho g h \ll p_a$. Из математике је познато, да ако је $\varepsilon \ll 1$, важи апроксимација $\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon$. Применом ове апроксимације, израз (12.8) може се свести на једноставнији облик:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h}. \quad (12.9)$$

Мерења нивоа h_1 и h треба поновити неколико пута чиме се добијају подаци потребни за одређивање односа $\kappa = c_p / c_v$.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. Након поновљених мерења, одређује се средња

вредност $\kappa_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_1$, и стандардно одступање средње вредности које

истовремено представља стандардну мерну несигурност тип А. Мерна несигурност тип Б може се одредити према изразу (2.2) за случај индиректно мерених величина, међутим ова несигурност у укупном буџету мерне несигурности не даје значајан допринос, па се може занемарити.

За проширену мерну несигурност тип А усвајамо Гаусову расподелу и она ће истовремено представљати и проширену комбиновану мерну несигурност U_c .

Конечан резултат мерења односа c_p / c_v изражава се у облику $(\kappa \pm U_c)$.

Релативна грешка мерења. Ако се усвоји да је ваздух двоатомни гас, израчунати релативну грешку мерења.

На крају вежбе може се одредити брзина звука у ваздуху помоћу експериментално добијене вредности κ и израза (11.2) усвајајући да је густина ваздуха $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Апсолутна и релативна грешка мерења одређују се према условно тачној вредности брзине звука израчунате према изразу (11.3).

Коментар. Иако је, у принципу, описани експеримент једноставан, по правилу, не даје задовољавајуће резултате. Наиме, добијене вредности коефицијента κ значајније одступају од теоријске вредности $\kappa_2 = 1,4$ и то ка мањим вредностима.

Ефекат који утиче да се систематски добијају **ниже вредности** односа κ је релативно узак отвор славине, што онемогућује праву адијабатску експанзију. Наиме, због уског отвора потребно је држати славину **дуже време** у отвореном стању да би се потпуно изједначили унутрашњи притисак са атмосферским. За време такве експанзије долази истовремено до адијабатског пада температуре, али такође и до његовог загревања од стаклених зидова који су на собној температури. Када се на крају славина затвори, крајњи пораст притиска $p = \rho gh$ бива **мањи** од очекиване вредности која би се добило под претпоставком да је експанзија била у потпуности адијабатска. Да би се узрок наведене систематске појаве умањено, потребно је славину држати што краће отвореном. Евентуално испуштање ваздуха на славини и другим заптивкама, такође систематски утичу на мерни резултат.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

Amadeo Carlo Avogadro (1776 – 1856), италијански научник. Авогадро је студирао правне науке и касније започео самостално проучавање физике и математике. Постао је професор математичке физике у Торину. Он је први физикохемичар који је јасно уочио и објаснио разлику између молекула и атома. Дао је тзв. Авогадров принцип који је камен темељац науке о гасовима: **једнаке запремине гасова на истој температури и притиску садрже исти број молекула**. У то време није постојао појам мола; Авогадро није могао знати вредност броја који данас носи његово име. Један кратер на Месецу носи његово име.

James Clerk Maxwell (1831 - 1879), енглески математичар и физичар. Његов највећи допринос представљају чувене Максвелове диференцијалне једначине које представљају врхунац развоја класичне електромагнетике. Такође је дао допринос кинетичкој теорији гасова. Аутор функције расподеле брзина молекула у идеалном гасу. Један кратер на Месецу носи његово име.

ВЕЖБА 5

13. МЕРЕЊЕ СПЕЦИФИЧНЕ ТОПЛОТЕ ЧВРСТИХ ТЕЛА

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ У термоакумулационој пећи постоје опеке велике специфичне топлоте и великог топлотног капацитета. Током ноћи потребно је дуже времена да се опеке загреју грејачима. Следећег дана, пећ може више часова да одаје акумулирану топлоту.
- ❖ У ресторанима јела се служе у претходно загрејаним тањирима, због чега дуже остају топла. Керамика има велику специфичну топлоту, па хладан тањир одузима доста топлоте и нагло хлади садржај.
- ❖ Зид од камена, угрејан на сунцу током летњег дана, остаје топао до дуго у ноћ. Метални објекти, сличних димензија много се брже расхладе.
- ❖ У пролеће ваздух се брзо угреје; међутим, веће водене масе, мора и језера, охлађена током зиме, загреју се тек после дужег периода топлог времена.

13.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

Највећи допринос који је Џул¹ је дао физици, представља доказ да је топлота само један од различитих видова енергије, што је данас опште позната чињеница. Мерење количине топлоте потребно је у многим научним гранама. Уређаји за мерење количине топлоте називају се калориметри².

- У науци о материјалима, помоћу калориметара одређују се термални параметри као што су специфична топлота, топлотни капацитет, топлотна проводност и др.
- У хемији, калориметрима се одређује енергија ослобођена при некој реакцији. Овом типу припадају калориметри са „бомбом“ који служе за мерење топлоте сагоревања разних горива. Испитивана супстанца

¹ James Prescott Joule (1818 – 1889) енглески физичар.

² Назив калориметар и јединица калорија потичу из времена када се сматрало да топлоту преноси неки претпостављени флуид без тежине који је називан калорик.

сагорева у затвореној посуди са доста кисеоника при чему се мери ослобођена топлота.

- У електротехници, калориметри служе за мерење снаге електромагнетских таласа и снаге при високим фреквенцијама.
- У нуклеарној физици примењују се калориметри за одређивање енергије која се развија радиоактивним распадом или другим физичким процесима. Код ових типова калориметара апсорпција топлоте или размена топлоте одиграва се у некој затвореној количини течности.
- Посебну групу чине проточни калориметри. Топлота која се мери предаје се флуиду (течности или гасу) који протиче устаљеном брзином. При томе се одређује проток и разлика температура долазног и излазног флуида, загрејаног снагом топлотног извора.
- Проточни калориметри користе се у системима даљинског грејања топлотом водом. На местима прикључка потрошача мери се разлика температуре долазне и излазне воде као и проток воде. Снага грејања сразмерна је производу температурске разлике и протока. Код оваквог мерења потрошач плаћа стварно потрошену енергију, а не фиксни износ сразмеран површини стана.

ТОПЛОТНИ КАПАЦИТЕТ И СПЕЦИФИЧНА ТОПЛОТА. Сходно другом закону термодинамике проток топлотне енергије се спонтано успоставља од области са вишом температуром ка области са нижом температуром. Прелаз топлоте се обавља до изједначења температуре тела. Температура свих тела виша је од апсолутне нуле, што значи да сва тела поседују одређену енергију услед термичких кретања атома. Ова врста унутрашње енергије, директно је пропорционална температури. Код идеалних гасова једини вид унутрашње енергије је топлота. Међутим, код реалних тела постоје и други видови унутрашње енергије.

Физичке последице преноса количине топлоте могу бити:

- промена температуре тела и
- фазни прелаз, тј. промена агрегатног стања тела.

При загревању тела од почетне температуре T_1 до крајње T_2 , количина топлотне енергије пренете телу износи:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} M dT \quad (13.1)$$

где је M [J/K] **топлотни капацитет** тела. Ако је температурски опсег $[T_1, T_2]$ релативно узак, топлотни капацитет је константна величина, па се из (13.1) добија:

$$Q = M(T_2 - T_1). \quad (13.2)$$

Из (13.2) види се да је топлотни капацитет бројно једнак количини топлоте која тело загреје за један келвин, односно Целзијусов степен. У уском темепературском опсегу топлотни капацитет је сразмеран маси тела:

$$M = c \cdot m \quad (13.3)$$

где је c [J/kg K] **специфична топлота**³. Она зависи од врсте супстанце, а не од масе или облика тела. Израз (13.1) добија једноставан облик:

$$Q = c m (T_2 - T_1). \quad (13.4)$$

Ово је основна формула у калориметрији из које следи, да је енергија коју је апсорбовало или предало неко тело, сразмерна производу масе и разлике температуре. Израз (13.4) користи се код чврстих тела и течности, под условом да интервал температуре не обухвата температуру фазног прелаза (или топљења или кључања). Код гасова, специфична топлота није константа већ зависи од тога како се мењају притисак, односно запремина током загревања.

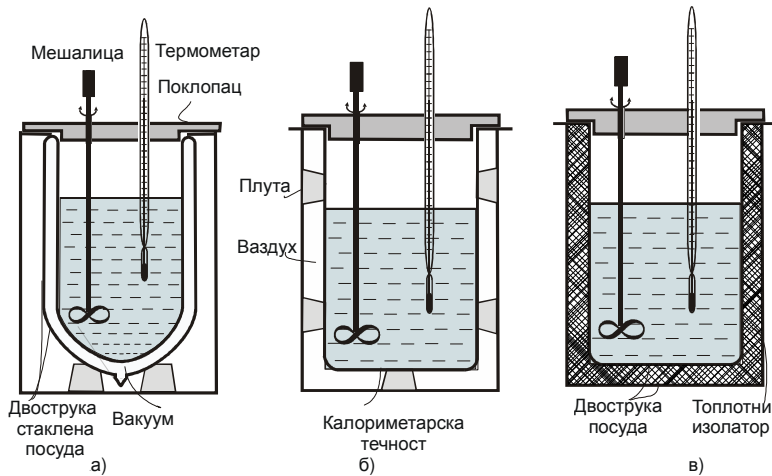
Калориметар. Лабораторијски калориметар се састоји од посуде која је топлотно изолована од околине, слика 13.1. Најбољу топлотну изолацију имају посуде са двоструким зидом са посребреним унутрашњим површинама, између којих је вакуум, слика 13.1а. Вакуум не дозвољава пренос топлоте провођењем, а посребрене површине смањују пренос топлоте зрачењем. То су тзв. Дјуерове⁴ посуде у којима се чувају течни гасови. Под називом термос, овај тип топлотно изолованих посуда нашао је широку примену у техници и домаћинству.

Код једноставних калориметара, посуда је смештена у један већи суд, тако да се изолација постиже слојем ваздуха, слика 13.1б. Добра изолација се постиже, такође, ако се између зидова налази неки од топлотних изолатора као што су, на пример стаклена вуна или стиропор, слика 13.1в. У калориметарској посуди постоји одређена маса воде чија се температура мери живиним термометром. Калориметар је такође снабдевен мешалицом, јер је

³ Ова величина се такође назива и специфични топлотни капацитет.

⁴ Sir James Dewar, (1842 - 1923), шкотски хемичар и проналазач.

предуслов добре уједначености температуре њено повремено или стално мешање. Ако би течност мировала, хладнија вода, због веће густине, била би при дну, а топлија вода при врху.



Слика 13.1 Неки облици водених калориметара: а) са Дјуеровом посудом (тзв. термос), б) и в) са двоструком металном изолованом посудом.

У калориметар се сипа вода масе m_v . **Специфична топлота воде** је физичка константа која износи $c_v = 4186 \text{ kJ/(kgK)}$. Топлотни капацитет воде износи $M_v = m_v c_v$. Посуда калориметра је обично од алуминијума или бакра који представљају материјале веома добре проводности. Ако је калориметар већим делом напуњен водом, може се сматрати да се целокупна маса посуде налази на температури воде. Ако је маса посуде m_p , а специфична топлота материјала c_p , топлотни капацитет посуде износи $M_p = c_p m_p$. Мешалица је такође од метала велике топлотне проводности, па се може сматрати да јој је температура једнака температури воде, под условом да је већим делом у води. Ако је маса мешалице m_m , а специфична топлота материјала c_m , топлотни капацитет износи $M_m = c_m m_m$. Утицај термометра на укупни топлотни капацитет се узима у обзир на следећи начин. Структура термометра је сложена; састоји се од живе која је већим делом у резервоару, и од спољашњег стакленог зида са скалом. Стакло је топлотни изолатор, што значи да само уроњени део запремине ΔV термометра преузима температуру воде. Према искуству, топлотни капацитет живиног термометра одређује се изразом $M_t = K \Delta V$. За живине термометре, вредност константе износи $K = 1,9 \cdot 10^6 \text{ [J/(K m}^3\text{)]}$. Укупни топлотни капацитет калориметра једнак је збиру свих појединих капацитета

$$M_u = c_v m_v + c_p m_p + c_m m_m + K \Delta V . \quad (13.5)$$

Ако се у калориметар унесе количина топлоте ΔQ , одговарајућа промена температуре ΔT добија се из израза $\Delta Q = M_u \Delta T$.

Топлотна изолованост калориметра, без обзира на употребљене материјале и начин конструкције, никада **није савршена**. Наиме, загрејана течност у калориметру се постепено хлади, да би се након дужег времена изједначила са температуром околине. Закон хлађења је експоненцијалан, али се у краћим временским интервалима брзина хлађења може апроксимирати линеарном функцијом времена.

Корекција на топлотне губитке калориметра услед лоше изолованости могу се извршити на следећи начин. У калориметар се сипа вода, при чему су маса и температура воде блиске средњим вредностима у предстојећем експерименту. После времена Δt измери се снижење температуре од ΔT . Средња брзина хлађења износи $b = \Delta T / \Delta t$ [$^{\circ}\text{C/s}$]. Ако се овим калориметром изврши експеримент који траје t_e , средњи губитак топлоте износи $\Delta Q_g = M_u b t_e$. Ако се у експерименту измери количина топлоте Q , коригована количина топлоте износи $Q_k = Q \pm \Delta Q_g$. Знак „+“ се узима ако је температура виша, а „-“ ако је нижа од околине.

Калориметарска мерења не треба вршити на температурама које су блиске тачки кључања. Тада је испаравање интензивно, па се јављају велики губици топлоте које је тешко узети у обзир, односно кориговати.

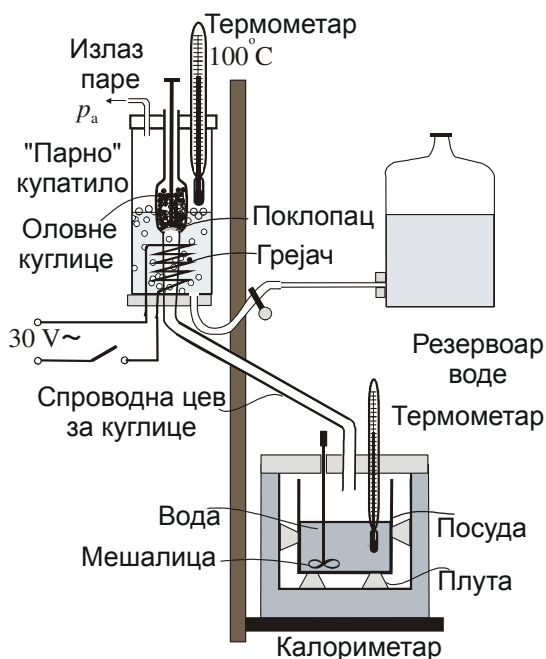
13.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ СПЕЦИФИЧНЕ ТОПЛОТЕ ЧВРСТЕ СУПСТАНЦЕ У ЗРНАСТОМ ОБЛИКУ

Супстанца чија се специфична топлота мери има зрнаст облик, не упија воду и не раствара се у њој. Зрна могу бити од метала, као што је олово, или од неметала, на пример од стакла.

Апаратура за одређивање специфичне топлоте супстанце у зрнастом облику приказана је на слици 13.2. Водено купатило снабдевано је електричним грејачем који се напаја наизменичним напоном од око 30 V. Унутар купатила је комора у којој се загрева испитивани зрнасти материјал. На почетку се измери маса осушених зрна m (олово, стакло или др). Пре стављања зрна **затвара се отвор цеви**, да зрна, грешком, не би одмах упала у калориметар. Након тога затвара се и горњи отвор коморе да атмосферски ваздух не би снижавао температуру куглица. Комора се налази делом у води, а делом у

засићеној пари изнад воде која кључала на атмосферском притиску. Спољашњи зид коморе налази се на температури од 100°C . После 15 минута од почетка кључања, може се сматрати да је и температура куглица унутар коморе такође приближно 100°C . Током кључања, вода из купатила испарава у атмосферу, па се ниво постепено смањује. Купатило је спојено са воденим резервоаром са дестилованом водом, коју треба повремено пуштати у купатило, одржавајући ниво приближно сталним⁵.

Пре упуштања загрејаних куглица у калориметар, воду треба промешати и на термометру прочитати температуру t_1 . Куглице треба пустити тако да све, у **што краћем времену** упадну у калориметар. Одмах након тога треба промешати воду и сачекати краће време, да се устали температура коју показује термометар. Након двадесетак секунди треба прочитати температуру t_2 и помоћу формуле (13.7) одредити специфичну топлоту материјала куглица.



Слика 13.2 Апаратура за одређивање специфичне топлоте чврстих супстанци у зрнастом облику.

⁵ Ако би вода из купатила потпуно испарила, грејач би остао у ваздуху и прегорео.

ПОСТУПАК МЕРЕЊА изводи се на следећи начин:

- У калориметар се сипа вода на собној температури.
- Зрнаста супстанца се загреје у купатилу са кључалом водом чија је температура $t_k = 100^\circ\text{C}$.
- Загрејана супстанца се пушта да, под дејством гравитације, упадне у калориметар.
- Кратко време након пуштања зрна, у калориметру се устали повишена температура, чију вредност треба измерити.

Током експеримента мере се следеће величине:

- Маса воде у калориметру m_v (обично 50 g до 100 g).
- Маса супстанце m чија се специфична топлота мери. Пожељно је да ова маса буде већа. Тада је пораст температуре у калориметру већи, а несигурност мерења мања.
- Почетна температура воде t_1 у калориметру.
- Повишена температура воде у калориметру t_2 , након спуштања угрејаних куглица.

Принцип мерења помоћу калориметра своди се на закон одржања енергије; у овом случају закон гласи:

Количина топлоте коју преда загрејано тело хладећи се од температуре t_k до t_2	=	Количина топлоте коју прими калориметар загревајући се од температуре t_1 до t_2
--	---	---

Овај закон изражен математичком формулом гласи:

$$cm(t_k - t_2) = c_v m_v (t_2 - t_1) \quad (13.6)$$

одакле се за специфичну топлоту тела добија:

$$c = \frac{c_v m_v (t_2 - t_1)}{m(t_k - t_2)}. \quad (13.7)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. На основу добијених вредности у експерименту рачунају се апсолутна и релативна грешка мерења (ε_a и ε_r) специфичне топлоте чврстог тела. Условно тачна вредност специфичне топлоте чврстог тела у зрнастом облику је специфична топлота олова која износи 130 J/(kgK) , тј. $130 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$. Коначан резултат мерења изражава се у облику $(c \pm \varepsilon_a)$.

Студентима се препоручује да, полазећи од израза (13.7), самостално изведу израз за стандардну мерну несигурност тип Б специфичне топлоте за случај индиректно мерених величина. Усвојити да су све несигурности мерења масе једнаке u_m и да су све несигурности мерења температуре једнаке u_t . Сматрати да су све мерене величине некорелисане. На крају, одредити проширену мерну несигурност U_c и резултат изразити у облику $(c \pm U_c)$, а затим га упоредити са резултатом израженим са апсолутном грешком мерења.

Коментар. На тачност резултата велики утицај има несигурност мерења разлике температуре $t_2 - t_1$. Ова разлика која износи око 2°C је релативно мала и несигурност мерења од око $0,2^\circ\text{C}$ значајно утиче на крајњи резултат. У овом експерименту није узет у обзир утицај апсорпције топлоте од делова калориметра (посуде, мешалице и термометра). Ово се може образложити тиме што стакло од које је посуда релативно слабо проводи топлоту. Ниво воде је низак, па је мали део посуде у контакту са водом. Уколико би се узела у обзир апсорпција топлоте од делова калориметра, то би било еквивалентно као да је масе воде у посуди већа од стварне. Дакле, маса воде m_v у формули (13.7) је мања од еквивалентне количине којом би се узела у обзир топлота коју апсорбују делови калориметра. То значи да овај систематски ефект утиче на добијање ниже вредности c од реалне. Иако су куглице у купатилу загрејане на температуру кључања воде од 100°C , оне у купатило упадају са нешто нижом температуром. Наиме, при падању кроз криву стаклену цев, долази до извесног хлађења куглица. Из формуле (13.7) може се закључити да овај систематски ефект такође утиче да се добије нешто нижа вредност специфичне топлоте од стварне вредности.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

James Prescott Joule (1818 – 1889) енглески физичар. Џејмс Џул је до пунолетства имао за татора славног хемичара Далтона. У младости Џул се одушевио појавама из области електрицитета експериментишући са утицајем електрицитета на човека. Своје главне резултате Џул је дао у објашњавању природе термичких појава. Побео је схватање да топлота потиче од хипотетичког флуида названог калорик. Сматрао је да је загрејаност резултат кретања честица материјала, при чему је он претпостављао да се ради о ротацији честица. Његов велики допринос науци био је доказ да је топлота само један од видова енергије. Експериментално је показао претварање потенцијалне енергије у топлоту. Одредио је фактор конверзије између количине топлоте изражене у калоријама са јединицом енергије, која у SI систему носи Џулово име. Утврдио је да закон о одржању енергије важи само под условом када се узму у обзир **сви видови енергије**. Сарађивао је са Келвином на успостављању апсолутне температурске скале. Дао је познату формулу за количину топлоте која се ствара у отпорнику протицањем струје, тзв. Џулов ефекат. Проучавао је појаву магнетострикције. Један кратер на Месецу носи његово име.

Sir James Dewar (1842 - 1923), шкотски хемичар и проналазач, специјалиста за криогену технику; први довео водоник у течно, а затим у чврсто стање. Испитивао особине материјала на ниским температурама. Сарађивао са Пјером Киријем на проучавању радијума. Предвидео појаву суперпроводности. Пронашао експлозив кордит и др. Један кратер на Месецу носи његово име.

ВЕЖБА 6

Део 1/2

14. МЕРЕЊЕ ЗАВИСНОСТИ ТАЧКЕ КЉУЧАЊА ВОДЕ ОД ПРИТИСКА

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ На планинама влада низак ваздушни притисак и вода кључа при нижој температури него у нижим крајевима. На пример, на врху Копаоника (2000 метара надморске висине), притисак износи око 797 милибара, а вода кључа при 93,5°C. На питање где се јаје брже скува, у Београду или на врху Копаоника, правилан одговор је - у Београду, иако вода брже прокључа на планини.
- ❖ Папинов („експрес“) лонац почиње да испушта пару када натпритисак у њему достигне приближно 2 бара. Тада температура кључања воде износи око 120°C, па се намирнице скувају брже него на атмосферском притиску где вода кључа при 100°C. Отварање лонца под повишеним притиском водене паре је опасно, јер настаје бурно кључање и изливање вреле течности. Из истог разлога не треба отварати хладњак прегрејаног аутомобила.
- ❖ Код стерилизатора медицинске опреме, вода се загрева, при натпритиску преко 2 бара, до око 130°C. Брзо сушење и хлађење постиже се снижавањем притиска - вакуумирањем.
- ❖ Године 1971, при повратку на Земљу космичког брода Сојуз 11, притисак у кабини је нагло опао услед кvara. Три руска космонаута, који нису била у заштитним оделима нашли су се у вакууму. То је довело да кључања течности у организму, па је цела посада тренутно изгубила живот.
- ❖ У комори са сниженим притиском долази до убрзаног испаравања, што се користи за брзо сушење воћа и других намирница.
- ❖ На температурама нижим од 0°C водена пара прелази директно у чврсто стање (сублимација) што се види у скупљању иња у замрзивачима. Током зиме иње настаје и у природним условима.
- ❖ Довољно расхлађене боце са пићем, после изношења из хладњака, бивају овлажене капљицама росе које се кондензују из околног ваздуха.

14.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

Молекули течности, на свим температурама, крећу се хаотично, различитим брзинама и у различитим правцима. При температурама нижим од тачке кључања, већина молекула има брзине које су недовољне да молекул напусти течност. Спори молекули не могу да савладају спољашњи атмосферски притисак и силе кохезије, који молекуле држе унутар течности. Расподела брзина молекула, на **свим температурама** је таква да постоји њихов одређени проценат са довољно великим брзинама да могу да напусте течност и оду у атмосферу. Брзине тих молекула припадају десном „репу“ функције расподеле, где теоријски, брзине могу имати и вредности које теже бесконачности. Испод температуре кључања, течност напуштају само површински молекули.

У ваздуху изнад површине воде такође постоји одређени број молекула водене паре. Неки од ових молекула доспевају на површину и улазе у течност. Брзина „враћања“ молекула, је спорија од брзине испаравања. Међутим, при стопроцентној влажност ваздуха, брзине испаравања и кондензације постају једнаке.

При порасту температуре, повећавају се брзине молекула и испаравање постаје све јаче. Када температура достигне тачку кључања, започиње интензивно испаравање по **целокупној запремини** течности. Брзине већине молекула постају толико велике да лако савладавају спољашњи и хидростатички притисак, као и кохезионе силе, па се свуда формирају мехурићи водене паре, који се пењу ка површини, повећавајући притом своју запремину. Овај фазни прелаз из течног у гасовито стање назива се засићено кључање или сатурација. Као и сви фазни прелази, кључање се обавља при **константној температури**, која се назива тачком кључања. Температура тачке кључања је карактеристична величина за сваку течност, а представља функцију притиска. Зависност притиска и температуре кључања преставља нелинеарну функцију дату Клаузијус¹ - Клапејроновом² једначином

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{q_m}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \quad (14.1)$$

где је $R = 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ универзална гасна константа, а $q_m \text{ [J/mol]}$ моларна топлота испаравања. Ако је моларна топлота испаравања течности позната, и ако је позната температура кључања на атмосферском притиску, из (14.1)

¹ Rudolf Clausius (1822 - 1888), немачки физичар.

² Benoit Paul Emile Clapeyron (1799 - 1864), француски физичар.

могуће је одредити тачку кључања на било ком притиску. Такође се, при некој задатој температури, може израчунати притисак при коме течност кључа.

Сваки фазни прелаз може имати **два смера**. Оба смера дешавају се при **истој температури**. У једном смеру, систему се доводи топлота, док се при другом смеру топлота одводи. Фазни прелази код воде су следећи:

- **Кључање** (испаривање) и супротни процес - **кондензација**, тј. прелазак течности у пару, и обрнуто. На нормалном атмосферском притиску овај процес се обавља при температури од око 100°C.
- Фазни прелаз **топљења леда** и његов супротни процес - **мржњење воде** одигравају се при 0°C.
- На температурама нижим од 0,01°C (или 273,16 K) јавља се фазни прелаз сублимација, који представља **директни** прелазак из гасовитог стања (пара) у чврсто стање (лед) и обрнуто. Пример преласка паре у лед постоји у замрзивачу хладњака. Влага из ваздуха се на хладним површинама директно претвара у лед.

14.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ ЗАВИСНОСТИ ТАЧКЕ КЉУЧАЊА ВОДЕ ОД ПРИТИСКА

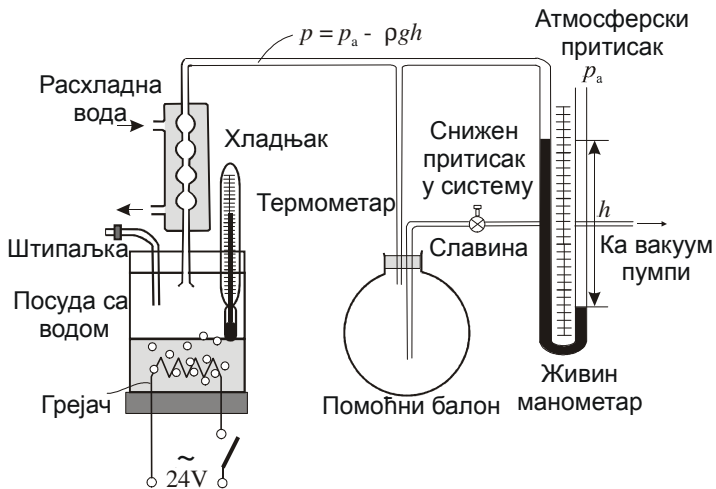
Снимање зависности тачке кључања од притиска врши се помоћу апаратуре приказане на слици 14.1. Дестилована вода је насута у цилиндрични стаклени суд са електричним грејачем. Температура у суду се читава на уграђеном термометру. Приликом загревања воде, посуда је отворена према спољашњој атмосфери помоћу стаклене цеви која се наставља гуменим цревом. При атмосферском притиску вода се загрева до тачке кључања.

Притисак у посуди са водом може да се снижава воденом вакуум пумпом. Брзина вакуумирања регулише се на два начина: а) јачином протока воде, и б) отвором славине на цеви која спаја пумпу са системом. При укључењу пумпе, гумено црево се **затвара штипаљком** чиме се прекида контакт са атмосфером. Водена пара сада одлази у кондензатор где се преводи у течно стање. Кондензатор се расхлађује водом из водовода чиме се одводи топлота ослобођена кондензацијом. Кондензатор се састоји од више овалних сегмената чиме се постиже велика додирна површина и добра ефикасност кондензације.

Између кондензатора и вакуум пумпе налази се стаклени балон релативно велике запремине. Балон има улогу да ублажи брзе промене притиска у

систему³. Ако би при сувише бурном кључању вода прошла кроз кондензатор, она би се сакупила у балону.

За мерење потпритиска у систему користи се живин „U“ манометар. Један крај манометра је спојен на цев која спаја кондензатор и балон, док је други крај отворен према атмосфери. Током загревања, које се обавља при атмосферском притиску⁴, нивои живе у оба крака су једнаки, тј. потпритисак је нула. При раду вакуум пумпе, атмосферски притисак потискује десни стуб живе наниже, док се леви стуб живе пење. При разлици нивоа h , у систему влада притисак $p = p_a - \rho gh$, где је $\rho = 13,59 \text{ kg/m}^3$ густина живе.



Слика 14.1 Апаратура за снимање тачке кључања воде у зависности од притиска.

Вакуум пумпе. Појам вакуум, уопштено, означава притисак ваздуха нижи од атмосферског притиска. На пример, усисивачи прашине се на енглеском језику називају вакуум чистачи. Међутим, у неким областима физике и технологије, вакуум означава простор са веома сниженим притиском реда величине 10^{-8} делова атмосферског притиска. У неким високим технологијама, као што су микро и наноелектроника или површинска обрада материјала, неопходно је да се процеси одвијају при изузетно ниским радним притисцима, који се називају високи вакуум. За добијање високог вакуума неопходни су вишестепени начини испумпавања. За, почетно, грубо снижење притиска користе се механичке пумпе. Даљу евакуацију врше уљне вакуум

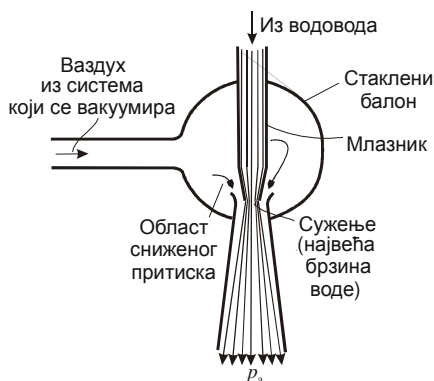
³ То је аналогно улози електричног кондензатора код исправљача наизменичне струје, где паралелно спојени кондензатор смањује таласност исправљеног напона.

⁴ Гумена цев је тада отворена.

пумпе или пак пумпе облика веома брзих турбина, тзв. турбомолекуларне пумпе.

За стварање мањих потпритисака користе се једноставне вакуум пумпе са млазом воде, слика 14.2. Вода из славине пушта се да великом брзином истиче из уског млазника који се наставља на конусну цев. Вода истиче на ширем крају конуса где је брзина **мања** него на млазнику. Млазник је обухваћен стакленим балоном који је спојен стакленом цеви са комором у којој треба остварити смањење притиска. На спољњем крају конуса, где вода истиче, влада атмосферски притисак. Пошто је ту брзина мања него на млазнику, према Бернулијевој једначини следи да у балону, испод млазника влада притисак **нижи од атмосферског**. Молекули ваздуха у балону, захваћени брзим млазом воде, бивају избачени напоље. Ваздух из коморе притиче у балон где се даље испумпава у атмосферу. То доводи до постепеног снижавања притиска у комори.

Ефикасност пумпе је сразмерна брзини истицања воде из млазника. Теоретски притисак не може бити снижен испод напона водене паре при температури водоводне мреже. Међутим, у стварности се постижу мањи потпритисци, реда величине 600 до 700 милибара. Очигледан недостатак ове врсте вакуум пумпе представља велики утрошак пијаће воде при раду.



Слика 14.2 Водена вакуум пумпа

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. При атмосферском притиску вода се доведе до тачке кључања. Тада се грејач искључује и затвара гумено црево. Вентил који спаја вакуум пумпу треба да је затворен. Водоводна славина се отвара и вакуум пумпа почиње са радом. **Пажљивим отварањем вентила** вакуум пумпе, постепено се снижава притисак у систему. То доводи до поновног започињања кључања и опадања температуре воде⁵. Подешавањем отвора

⁵ Треба избегавати нагло смањење притиска јер може да дође до бурног кључања и изливања воде кроз хладњак.

вентила пумпе, процес кључања при сниженом притиску треба довести у приближно устаљено стање. При томе се читају два податка:

- разлика нивоа стубова живе h у манометру и
- температура при којој вода кључа у посуди, t_k .

Највећа пажња је потребна код снимања првих тачака при вишим температурама. У области виших притисака све вакуум пумпе имају велику ефикасност и брзо смањују притисак у комори. То доводи до интензивног кључања и брзог опадања температуре воде. Да би се снимио већи број тачака при вишим температурама, смањење притиска у почетку треба да што постепеније, што се може постићи пажљивим руковањем вентилом пумпе.

При мањим притисцима брзина вакуумирања се смањује. У каснијем току експеримента, када су температуре воде ниже, потребан је све бржи проток протока воде у пумпи да би се наставило снижење притиска и вода доводила у стање кључања. Експеримент се завршава онда када ни при најјачем протоку воде и потпуно отвореној славини више не долази до кључања.

У Прилогу 8 дати су подаци о стварним вредностима тачке кључања чисте воде у зависности од притиска. На основу ових еталонских вредности одређују се одступања експерименталних података, а затим се црта график зависности $p = f(t)$ на милиметарском папиру или уз помоћ неког софтверског алата, при чему треба користити експоненцијално фитовање.

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

Rudolf Clausius (1822 - 1888), немачки физичар. Открио фундаментални физички појам - ентропију. Формулисао законе термодинамике и са Максвелом допринео развоју кинетичке теорије гасова. Један кратер на Месецу носи његово име.

Benoit Paul Emile Clapeyron (1799 - 1864), француски физичар, специјалиста за локомотиве и железницу и сјајан математичар. Творац универзалне једначине гасног стања. Математички формулисао и анализирао Карноов циклус помоћу две изотерме и две адијабате.

John Dalton (1766 – 1844), енглески хемичар. Џон Далтон се у почетку бавио метеорологијом, а касније хемијом. Проучавао је састав ваздуха и апсорпцију гасова у води. Открио је да се елементи међусобно сједињују у тежинским односима који стоје у односу целих бројева. Наставио је и продубио теорију о атомском саставу материје коју је први дао антички грчки филозоф Демокрит. По Далтону, атом сваког елемента има јединствену тежину и друге особине. Сматрао је да постоје три врсте атома: једноставни (елементи), сложени (прости молекули) и комплексни (сложени молекули). Дао је прву табелу атомских тежина елемената. Вероватно највећи значај има Далтонов закон да **укупни притисак смеше гасова представља збир парцијалних притисака појединих чланова смеше**. Оставио је опоруку да му очи буду сециране након смрти, ради проучавања мане вида, неразликовања неких боја, која се по њему назива далтонизам. Један кратер на Месецу носи његово име.

ВЕЖБА 6

Део 1/2

15. МЕРЕЊЕ ТОПЛОТЕ ИСПАРАВАЊА ВОДЕ

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ Када вода кључањем прелази из течног у гасовито стање, запремина паре постаје много већа од запремине воде у течном стању. Део енергије из грејача троши се на рад при повећавању запремине. Отуда је топлота испаравања знатно већа од топлоте топљења леда, јер се при топљењу запремина остаје скоро непромењена.
- ❖ На плажи, по изласку из воде, човек осећа хладноћу због испаравања воде са тела.
- ❖ На летњој топлоти, флаша пића се може нешто расхладити ако се обавије влажном тканином.
- ❖ Да би нека количина воде на тачки кључања у потпуности испарила, потребно је око 7 пута више енергије него да би се иста количина воде од собне температуре загрејала до тачке кључања.
- ❖ Код клима уређаја и фрижидера хлађење се заснива на наглом испаравању фреона, који је претходно компримовањем доведен у течно стање.
- ❖ Енергија Сунца која пада на површине океана у највећој мери се троши на испаравање воде чиме се формирају облаци.

15.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

У оквиру претходног поглавља описан је процес кључања као фазни прелаз из течног у гасовито стање. Код фазних прелаза, на пример при кључању, довођење топлоте не ствара пораст температуре. Топлотна енергија се троши искључиво на превођење воде из течног стања у гасовито, тј. у водену пару. Утрошена топлота се **не манифестује порастом температуре**, већ само смањењем масе течности и порастом масе паре. Енергија по јединици масе која се утроши на испаравање назива латентна топлота¹. Када се течности која кључа доведе количина топлоте dQ у гасовито стање се преведе пропорционална маса dm :

¹ Латентан, на латинском значи скривен.

$$dQ = q \cdot dm \quad (15.1)$$

где је q [J/kg] топлота испаравања². Укупна количина топлоте дата је изразом:

$$Q = \int_{m_0}^m q dm. \quad (15.2)$$

Ако се при кључању не мења хемијски састав супстанце, топлота испаравања не зависи од масе тј. представља константу. Тада се из (15.2) добија:

$$Q = q \Delta m. \quad (15.3)$$

У претходном поглављу је речено да сви процеси фазног прелаза имају два могућа смера, при чему се оба прелаза обављају при истој, константној температури. У случају испаравања, супротан процес је кондензовање. Код воде, оба процеса се одигравају на температури, која при нормалном атмосферском притиску износи³ $t_k = 100^\circ\text{C}$.

Да би се стекао бољи увид у трајање процеса загревања воде и промене агрегатних стања, дат је дијаграм на слици 15.1. Као полазна супстанца узета је маса $m = 1$ kg леда у облику снега на почетној температури $t_1 = -40^\circ\text{C}$. Овај лед се налази у посуди стављеној на грејалицу чија је константна снага $P = 1$ kW. Ради једноставности усвојена је претпоставка да не постоје губици топлоте, него да се целокупна енергија грејача преноси на воду у посуди. Процес загревања се прати до тренутка када се целокупна вода преведе у пару која се затим загреје до температуре од 140°C . Процес се састоји од следећих фаза:

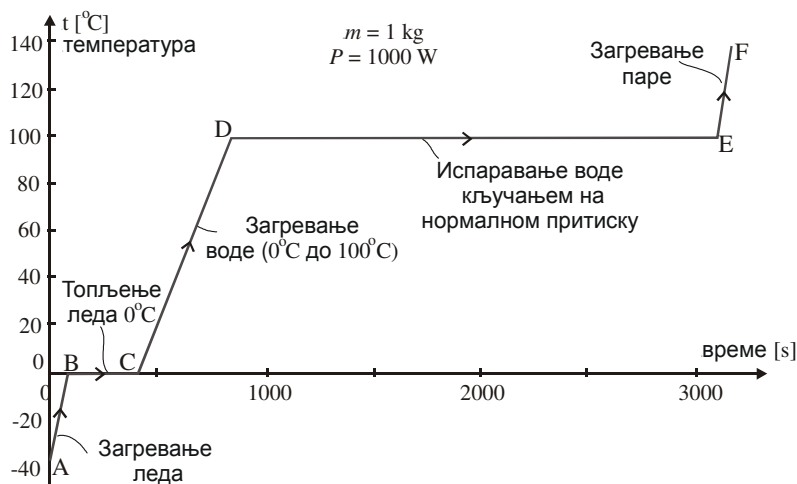
- $A \rightarrow B$ - Загревање леда од температуре t_1 до 0°C . Трајање овог процеса износи 82 секунде.
- $B \rightarrow C$ - Топљење леда при температури од 0°C . Овај фазни прелаз траје око 334 s.
- $C \rightarrow D$ - Загревање воде од 0°C до 100°C чије трајање износи око 418 s.
- $D \rightarrow E$ - Испаравање воде при константном притиску и при 100°C . Овај фазни прелаз има најдуже трајање, које износи око 2260 s.

² Користи се такође термин латентна топлота испаравања односно кондензовања.

³ Тачнија вредност температуре кључања воде, при нормалним условима, износи $t_k = 99,975^\circ\text{C}$. До овог резултата се дошло средином седамдесетих година 20. века. Код експеримената наставног карактера, може се користити заокружена вредност $t_k = 100^\circ\text{C}$.

- $E \rightarrow F$ - На крају, загревања паре при константном притиску траје око 80 s.

Енергија која се потроши на поједине фазе овог процеса сразмерна је одговарајућим интервалима времена трајања.



Слика 15.1 Дијаграм температуре воде током загревања и фазних прелаза.

15.2 ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ ТОПЛОТЕ ИСПАРАВАЊА ВОДЕ

Апаратура је приказана на слици 15.2. У стакленој посуди са електричним грејачем (водено купатило) налази се дестилована вода. Купатило је спојено, помоћу црева, са балоном који садржи резервну количину дестиловане воде. Током експеримента црево је затворено (стегнуто) штипаљком. За време кључања, ниво воде у купатилу се постепено смањује. По потреби, треба додавати потребну количину воде, краткотрајним отварањем штипаљке. При томе вода прелази из резервоара у купатило, по принципу спојених судова. Грејач на тај начин остаје увек у води. Наиме, ако би грејна жица остала у ваздуху она би се брзо прегрејала и прегорела.

Карактеристике апаратуре при овом експерименту су следеће.

- Калориметарски суд је од бакра и већим делом је напуњен водом масе m_v специфичне топлоте c_v . Због добре топлотне проводности бакра, може се сматрати да се целокупна маса посуде налази на температури воде.

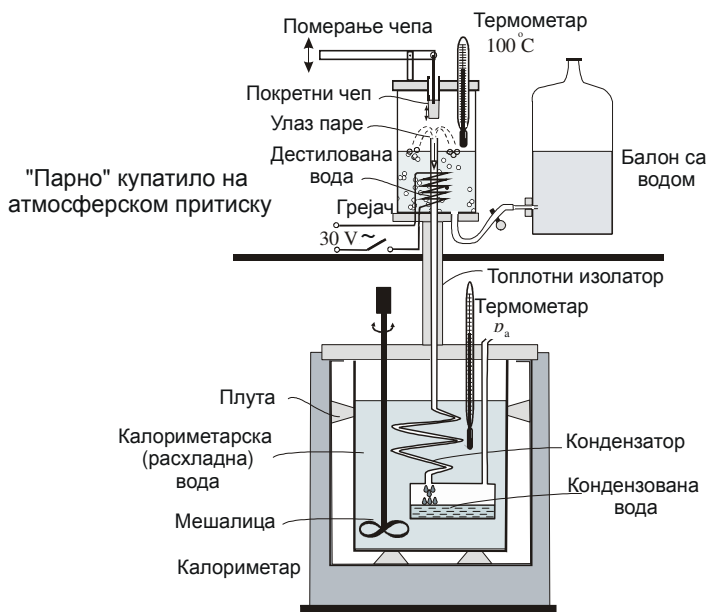
Другим речима, неопходно је узети у обзир топлотни капацитет посуде $M_p = c_p m_p$.

- Из истих разлога треба узети у обзир топлотне капацитете мешалице $M_m = c_m m_m$ и термометра $K\Delta V$, као што је објашњено у поглављу 13.
- Процес кондензовања воде врши се у кондензатору који је већим делом уроњен у воду. Топлота која се ослобађа при кондензовању се у целини предаје води. На крају експеримента цео садржај калориметра има температуру једнаку температури воде. Отуда треба узети у обзир такође и топлотни капацитет кондензатора $M_k = c_k m_k$.
- Из претходног следи да је укупни капацитет M_u калориметра дат изразом:

$$M_u = M_v + M_p + M_k + M_m + K\Delta V \quad (15.4)$$

где је $K = 1,9 \cdot 10^6 \text{ [J/(Km}^3\text{)]}$. Закон о одржању енергије у овом експерименту може се изразити на следећи начин:

Топлота коју водена пара масе μ ослободи кондензовањем, при температури $t_k = 100^\circ\text{C}$	+	Топлота коју кондензована вода масе μ преда калориметру током хлађења од t_k до t_2	=	Топлота коју прими целокупан калориметар (вода, посуда, кондензатор и термометар) током загревања од t_1 до t_2
---	---	---	---	---



Слика 15.2 Апаратура за одређивање топлоте испаравања (кондензовања) воде.

Математичка формулација претходног исказа гласи:

$$q\mu + c_v\mu(t_k - t_2) = M_u(t_2 - t_1). \quad (15.5)$$

Из (15.5), за топлоту испаравања воде добија се:

$$q = \frac{M_u(t_2 - t_1) - c_v\mu(t_k - t_2)}{\mu}. \quad (15.6)$$

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Пре почетка експеримента на ваги се измери маса m_{p1} празне калориметарске посуде. Посуда се затим пуни дестилованом водом (око 0,8 kg), тако да већи део кондензатора буде у води. Затим се измери посуда са водом m_{p2} . Маса воде m_v добија се одузимањем масе празне посуде од укупне масе. Треба измерити масу m_m металног дела мешалице и запремину дела термометра ΔV који се урања у воду. Запремина се одређује или урањањем термометра у малу мензурку са водом или израчунавањем на бази мерења спољашњих димензија термометра. Масу кондензатора m_{k1} треба измерити, с тим што се претходно добро осуши, споља и изнутра.

Кондензатор се ставља у калориметар и помоћу гуменог црева спаја са купатилом. Ниво дестиловане воде је такав, да је целокупан грејач у води. Пре укључења грејача, затварач у купатилу треба поставити у доњи положај, у коме је купатило отворено према атмосфери, а улаз пари у кондензатор затворен. Тада се прочита и запише почетна температура у калориметру t_1 .

Када вода почне да кључа, затварач се пребацује у горњи положај тако да пара из купатила, уместо у атмосферу, почиње да улази у кондензатор. Ту пара прелази у течно стање и сакупља се на дну резервоара. Цев којом се пара уводи у кондензатор је споља обмотана добрим топлотним изолационим слојем. Тиме се спречава да пара започне кондензовање пре уласка у кондензатор.

Све време док траје кондензација треба мешати воду, чиме се повећава брзина преноса топлоте у калориметру. Експеримент траје док се температура воде у калориметру не повиси за око 20°C. Тада треба искључити грејач и затворити довод паре у кондензатор. Након тога, треба наставити са интензивним мешањем све док термометар у калориметру не покаже устаљену вредност температуре t_2 . Затим се отвара калориметар и вади кондензатор са кондензованом водом. Спољашњу површину кондензатора треба обрисати и затим, на ваги, измерити масу кондензатора m_{k2} са водом. При томе треба обратити пажњу да се кондензована вода не проспе. Маса кондензоване воде добија се одузимањем, $\mu = m_{k2} - m_{k1}$. Заменом ове вредности, и претходно измерених података, у једначину (15.6) израчунава се топлота испаравања воде.

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. На основу добијених вредности у експерименту рачунају се апсолутна и релативна грешка мерења (ε_a и ε_r) топлоте испаравања воде. Условно тачна вредност износи топлоте испаравања воде 2257 kJ/kg. Коначан резултат мерења изражава се у облику $(q \pm \varepsilon_a)$.

Студентима се препоручује да изведу израз за стандардну мерну несигурност тип Б топлоте испаравања воде за случај индиректно мерених величина. Усвојити да су све несигурности мерења масе једнаке u_m и да су све несигурности мерења температуре једнаке u_t . Сматрати да су све мерене величине некорелисане. На крају, одредити проширену мерну несигурност U_c и резултат изразити у облику $(q \pm U_c)$, а затим упоредити овај резултат са преходно добијеним резултатом израженим са апсолутном грешком мерења.

Коментар. Код свих експеримената, па и код овог, утицај неких систематских ефеката се не узимају у обзир. Ти ефекти су, између осталог, и следећи.

Део воде се кондензује у цеви која спаја кондензатор и водено купатило при чему се део топлоте преда околини. Ово чини масу воде у кондензатору већом од оне која се кондензовала у калориметру. Ова појава утиче да добијена вредност топлоте кондензовања буде мања.

Трајање експеримента је релативно дуго (око 20 до 30 минута), а температура калориметра се осетно повећава (двадесетак степени). Отуда долазе до изражаја губици топлоте услед слабе топлотне изолације. Као последица тога, температура t_2 је нижа од вредности коју би имала при бољој изолацији. Ова појава такође даје мању вредност топлоте испаравања од реалне.

При израчунавању укупног топлотног капацитета калориметра, било је претпостављено да посуда, кондензатор и мешалица у целости имају температуру t_2 која се очитава на термометру. Међутим, ове компоненте су делимично изван воде, па је температура тих делова нижа од очитане температуре. Другим речима, израчунати топлотни капацитет M_u је већи од стварене вредности. Из (15.6) види се да овај ефект утиче да се добије већа вредност топлоте испаравања.

Повећањем дужине трајања експеримента, добија се већа маса μ кондензоване воде. Истовремено се добија и виша крајња температура t_2 у калориметру. То је повољно са становишта боље тачности мерења и масе и температуре. Међутим, при вишој температури у калориметру и при дужем трајању експеримента, повећавају се губици енергије, што неповољно утиче на тачност. Ово указује да дужина трајања експеримента мора бити усвојена компромисно.

ВЕЖБА 7

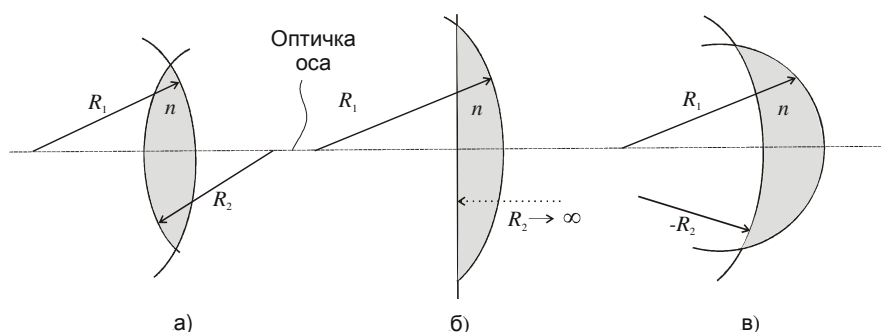
16. МЕРЕЊЕ ЖИЖНЕ ДАЉИНЕ СОЧИВА ИЗ РАСТОЈАЊА ПРЕДМЕТА И ЛИКА

ПОЗНАТЕ ПОЈАВЕ И ЗАНИМЉИВОСТИ

- ❖ У списима старих римских писаца (Плиније и др.) спомињу су заобљене стаклене плоче кроз које се предмети виде увећано и којима се на Сунцу може запалити ватра.
- ❖ Већина људи, у неком животном добу, користи наочаре, тј. сочива, ради отклањања недостатка вида.
- ❖ Оптичко сочиво добило је назив (у разним језицима) по махунастој јестивој биљци сочиву, јер имају сличан облик.
- ❖ Прва помагала за бољи вид на бази сочива, јавила су се у Европи у 13. веку. Након открића штампе (1452. године) нагло је порастао интерес за производњом и коришћењем наочара жељених карактеристика.
- ❖ Почетком 17. века, комбиновањем сочива створени су први оптички инструменти, телескоп и микроскоп, који су омогућили брзи развој целокупне науке.
- ❖ Сочиво у људском оку је сабирно и има жижу даљину која се може адаптирати (код младих особа) у опсегу од 1,7 cm за удаљене објекте до 1,59 cm за блиске објекте, што одговара јачинама од 59 односно 63 диоптрија.
- ❖ Снопови убрзаних наелектрисаних честица (електрона, јона и др) могу се фокусирати и скретати помоћу електричног и магнетског поља аналогно фокусирању и скретању светлосних зрака. Дисциплина која се бави фокусирањем наелектрисаних честица је тзв. електронска (или јонска) оптика. На пример, слика на ТВ екрану формира се уз помоћ електронског оптичког система.
- ❖ Ултразвучни таласи имају таласну дужину реда величине милиметра, па се крећу усмерено слично светлосним зрацима. Ултразвучни таласи се могу такође фокусирати одговарајућим врстама сочива.
- ❖ Гравитација великих небеских тела ствара уочљиво кривљење путање светлости, сходно Ајнштајновој теорији. Неке галаксије на тај начин формирају гравитациона сочива која појачавају светлост и омогућују посматрање екстремно удаљених галаксија.

16.1 ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ

СОЧИВО, ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И ЦРТАЊЕ ЛИКА. Сочиво се састоји од пуног стакла или другог провидног материјала. Сферно сочиво има две стране које представљају делове **две сфере** које се секу, слика 16.1а. Карактеристични параметри сочива су два полупречника кривине, R_1, R_2 и индекс преламања материјала n . Права која спаја центре сферних површина које сачињавају сочиво назива се **оптичка оса**. На слици 16.1б приказано је сочиво код кога је једна страна равна, а друга испупчена (тзв. план - конвексно сочиво). Код њега се један од полупречника кривине сматра бескрајно великим ($R_2 \rightarrow \infty$). Код сочива на слици 16.1в, једна страна сочива је конкавна.



Слика 16.1 Облици сабирних сочива: а) биконвексно, б) план - конвексно, в) менискус - конвексно.

Анализа проласка светлости кроз сферна сочива заснива се на теорији преламања светлости на сферним површинама. Ова теорија је веома обимна и не може бити дата у уџбенику ове врсте. Препоручује се да се читаоци упознају са овом материјом у неком од наших уџбеника¹, према којој се користи уобичајена апроксимативна анализа заснована на следећим претпоставкама:

- Сочива су **танка**. То значи да им је дебљина знатно мања од оба полупречника кривине. У околини оптичке осе, сочиво се понаша као танка равна плочица.
- Зраци треба да падају на сочиво под **малим угловима** у односу на оптичку осу сочива. Ово су тзв. **параксијални зраци**. Другим речима,

¹ Видети, на пример, П. Маринковић, П. Михаиловић, Одабрана поглавља физике Оптика и Топлота, Академска мисао 2017.

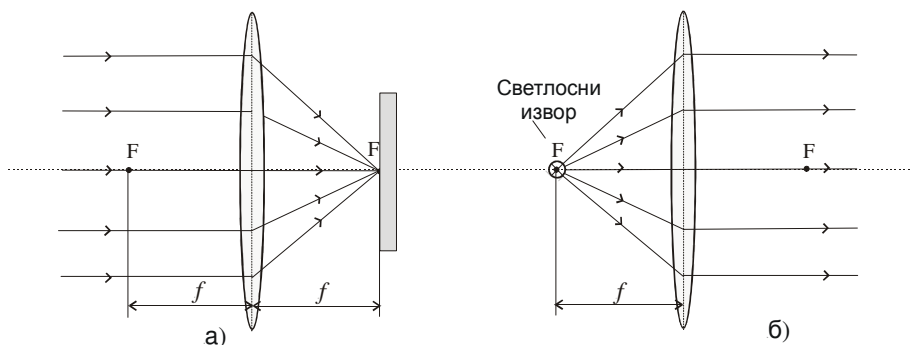
посматрају се само они зраци који се крећу на малом растојању од оптичке осе.

- У елементарној анализи не разматра се зависност индекса преламања материјала сочива од таласне дужине (дисперзија).

Основно својство **сабирног сочива** је да зраке паралелне са оптичком осом, скупља у једну тачку која се назива **жижа сочива** а означава се са F , слика 16.2. Растојање жиже f од сочива назива се **жижна даљина**. Ако се тачкасти извор светлости налази у жижи, зраци који падају на сочиво настављају да се крећу паралелно оси. Сочиво има две једнако удаљене жиже, леву и десну. Жижна даљина сочива f одређена је полупречницима кривине и индексом преламања стакла n , према формули:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (16.1)$$

У једначини (16.1) полупречници се сматрају позитивним код конвексних (испупчених), а негативним код конкавних (удубљених) површина.



Слика 16.2 а) Зраци паралелни оси сакупљају се у жижи, б) ако је тачкасти извор у жижи, сочиво ствара паралелни сноп зрака.

Величина $\omega = \frac{1}{f}$ назива се **јачина сочива**. Њена јединица је **диоптрија**, при чему жижна даљина мора бити изражена у метрима.

Цртање lika код сабирног сочива – главни зраци. У близини оптичке осе сочива се понашају као **танке равне плочице**. При проласку кроз танку равну плочицу зрак **не скреће**, него се паралелно помера, пропорционално дебљини плочице. С обзиром да се дебљина сочива сматра занемарљиво малом, следи закључак да зрак који пада у **центар практично не скреће** при пролазу кроз сочиво. Зрак (1) који пролази кроз центар сочива, представља

један од главних зракова. Зрак (2) који пада на сочиво **паралелно оси**, и на другој страни сочива пролази кроз жижу је такође главни зрак. Трећи главни зрак (3) **пролази кроз леву жижу** и под углом пада на сочиво. По проласку кроз сочиво, зрак (3) креће се **паралелно** оптичкој оси.

На слици 16.3 приказан је светли предмет у облику вертикалне стрелице на растојању p које испуњава услов $2f > p > f$. Сва три главна зрака који крећу из врха, на другој страни, секу се у истој тачки која представља **лик** врха стреле. У овом случају добија се лик који је обрнут и увећан. При цртању лика довољно је користити било која **два главна зрака** (од три).

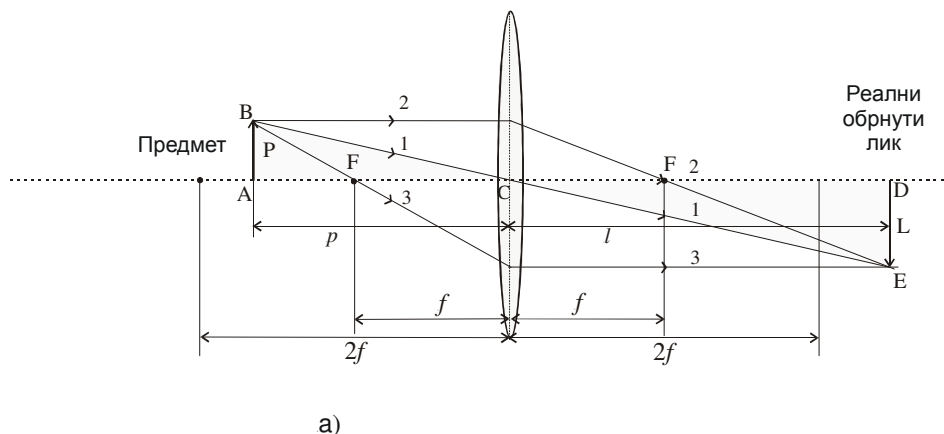
При анализи сочива, осим жижне даљине f , користе се и следеће величине:

- Растојање предмета од сочива p .
- Растојање лика од сочива l .
- Величина предмета P .
- Величина лика L .
- Увећање сочива $u = \frac{L}{P}$.

Основна једначина сочива гласи:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}. \quad (16.2)$$

Све величине у датом случају се узимају као позитивне, јер је лик формиран у пресеку **стварних** зракова. Реални лик се може пројектовати на заклону (екрану) као **светла фигура**.



Слика 16.3 Главни зраци и цртање лика светлог предмета код сабирног сочива.

Из сличних троуглова ABC и CDE за увећање сочива добија се:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}. \quad (16.3)$$

Из (16.2) и (16.3) могу се извести следећи закључци.

- Увећање је веће од 1 ако се предмет налази у опсегу растојања $f < p < 2f$.
- Увећање је мање од 1 ако се предмет налази у опсегу растојања $2f < p < \infty$.
- При $p = 2f$ увећање износи 1. Тада се лик формира на истом растојању, $l = p = 2f$.
- Ако се предмет приближава жижи (споља) $p \rightarrow f$, лик се помера ка бесконачности, $l \rightarrow \infty$, а увећање такође тежи бесконачности, $u \rightarrow \infty$.

ПРИМЕНА САБИРНОГ СОЧИВА КАО ЛУПЕ. Уколико је предмет налази на растојању мањем од жижне даљине, главни зраци се **не пресецају**, јер се по проласку кроз сочиво разилазе (дивергирају), слика 16.4. То значи да се тако не може добити реалан лик који би се пројектовао на заклону (екрану). Међутим **продужеци** карактеристичних зрака се пресецају са **исте стране** на којој је и предмет. Лик се добија у пресеку **продужених** (а не стварних) зрака па се назива **виртуелни лик**. Овај лик је **усправан и увећан**. **Видљив је оком**, иако се не може пројектовати на заклону. Сочиво које се користи на овај начин назива се **лупа**.

У једначини (16.2) растојање виртуелног лика од сочива, l , узима се као **негативна величина**. Једначина за лупу гласи:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}. \quad (16.4)$$

Из (16.4) следи, да када је предмет близак жижи, $p \rightarrow f$, ($p < f$) удаљеност предмета тежи бесконачности, а такође и увећање. У пракси, наравно то није оствариво. Предмет врло малих димензија поставља се близу жиже. Тада се настоји да се лик, који је такође мали, формира на удаљености s која најудобнија за посматрање. Ова оптимална удаљеност се назива **даљина јасног вида**. Из слике 16.4 следи да увећање лупе приближно износи:

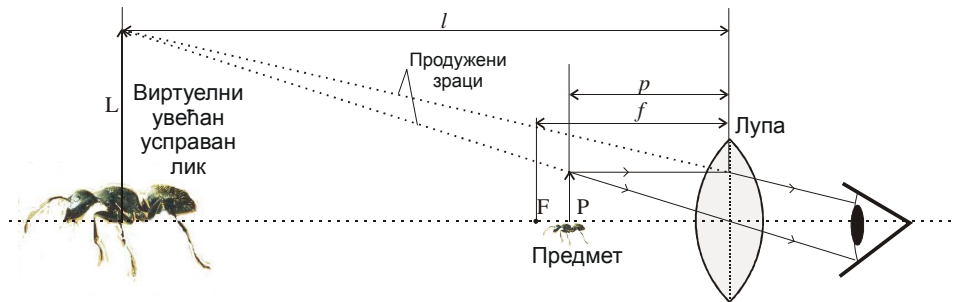
$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p} \approx \frac{s}{f}. \quad (16.5)$$

На пример, ако је жижна даљина сочива, $f = 2$ cm и ако се лик формира на удаљености $s \approx 30$ cm увећање лупе око 15 пута.

Постоје лупе које слабовиде особе користе за лакше читање. Те лупе имају велику површину и већу вредност жижне даљине. Растојање сочива и текста је мање од жижне даљине, док је особа која чита на нешто већој удаљености.

Лупе за читање имају појачања која типично износе од 2 до 3 пута. Анализа овакве примене лупе се може видети у уџбеницима из оптике.

За посебне намене користе се сложеније врсте лупа које се састоје од два сочива. Ове лупе се користе у неким занатима, као што је часовничарски. Повећање оваквих лупа креће се око 20 пута.



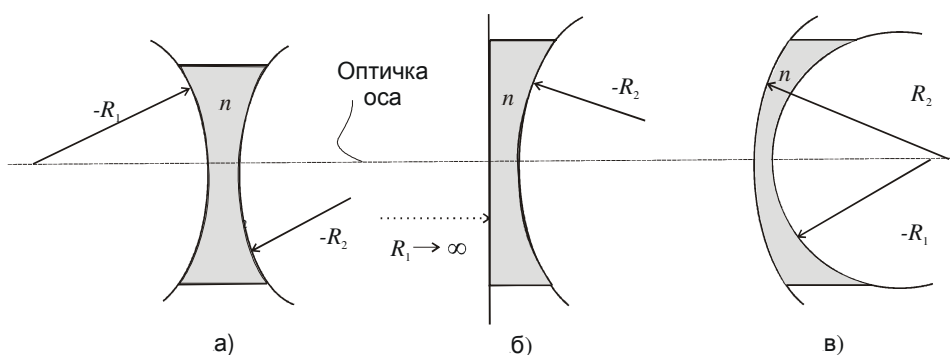
Слика 16.4 Сабирно сочиво примењено као лупа за посматрање врло малих објеката.

РАСИПНА СОЧИВА И ЊИХОВА ПРИМЕНА. Расипна сочива по свом облику могу бити биконкавна, план - конкавна и менискус - конкавна, слика 16.5. Особина расипних сочива је да самостално **не дају реалне ликове** који би се могли пројектовати на заклону (екрану). Жижна даљина расипних сочива одређена је једначином, која има исти облик као и код сабирних:

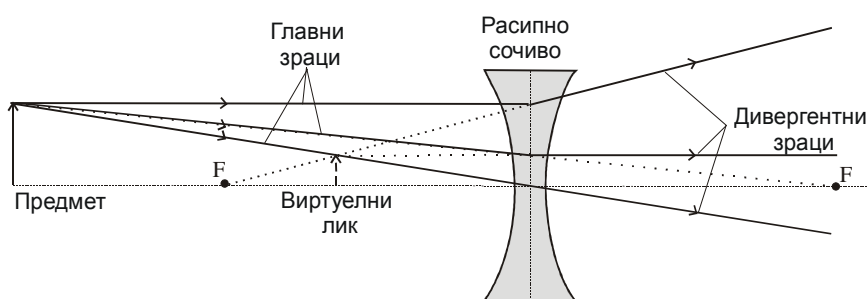
$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (16.5)$$

Међутим, код расипних сочива жижна даљина се узима као **негативна величина**. Полупречници кривина код удубљених површина имају негативан знак а код испупчених површина позитиван. Код расипних сочива менискус - конкавног типа, конкавна површина има **мањи полупречник** од конвексне површине.

На слици 16.6 приказани су главни зраци код расипног сочива, и начин формирања лика. Први главни зрак (1) пролази **кроз центар** сочива, без скретања, (као и код сабирног сочива). Други главни зрак (2) пада на сочиво **паралелно оси**. Овај зрак на другој страни сочива дивергентно скреће. Међутим, **продужетак** зрака пролази кроз жижу, на стране на којој је предмет. Трећи главни зрак (3) има правац ка жижи **на другој страни сочива**. Овај зрак, по проласку кроз сочиво има правац паралелан оси сочива. Главни зрак (1) и **продужеци** зрака (2) и (3) секу на страни на којој је и предмет, формирајући виртуелан, усправан и умањен лик. У једначину сочива (16.2), величине f и l уносе се као негативне, а p као позитивна величина.



Слика 16.5 Типови расипних сочива: а) биконкавно, б) план - конкавно, в) менискус - конкавно.



Слика 16.6 Главни зраци и формирање виртуелног lika код расипног сочива.

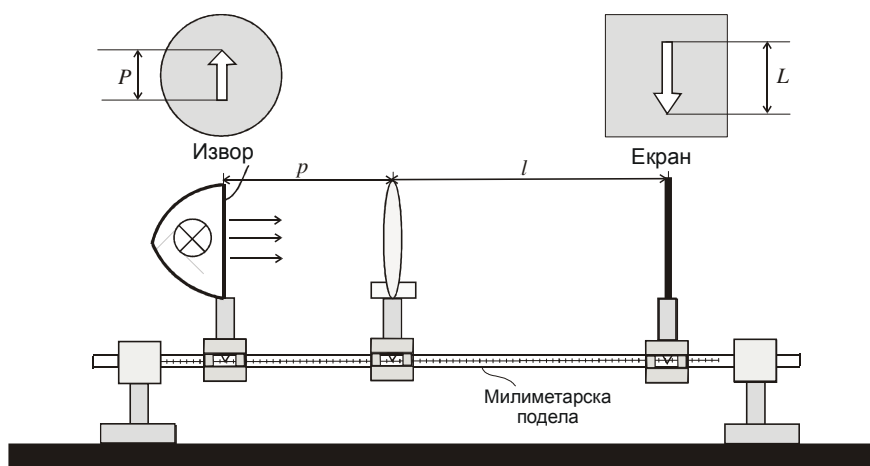
КОМБИНОВАНА СОЧИВА. Ако се два танка сочива међусобно приљубе, с тим да имају исту оптичку осу, добија се **комбиновано сочиво**. Ако жишне даљине сочива износе f_1 и f_2 , комбиновано сочиво се понаша као једно танко сочиво жишне даљине:

$$\frac{1}{f_k} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (16.6)$$

Другим речима комбиновано сочиво има јачину једнаку збиру јачина оба сочива, $\omega_k = \omega_1 + \omega_2$. При томе се жишне даљине и јачине узимају као позитивне величине код сабирних, а негативне величине код расипних сочива. Ако се комбинују сабирно и расипно сочиво, комбиновано сочиво се понаша као сабирно ако је модуо јачине сабирног сочива већи него код расипног, и обрнуто. Комбинацијом сабирног и расипног сочива могу се умањити неки од системских недостатака сочива као што су сферна и хроматска аберација.

16.2 ОДРЕЂИВАЊЕ ЖИЖНЕ ДАЉИНЕ ИЗ РАСТОЈАЊА ПРЕДМЕТА И ЛИКА

Експерименти са оптичким компонентама, као што су сочива, призме, решетке, ласери, фотодетектори и др. обављају се на **оптичкој клупи**. Она представља клизни механизам на коме се компоненте могу стабилно учврстити и по потреби померати. На клупи постоји милиметарска подела на којој се читавају растојања између светлосног извора оптичке компоненте и екрана, односно фото детектора. Код осетљивих експеримената посебна пажња се посвећује механичкој стабилности клупе, али такође и саме подлоге, односно просторије чије вибрације могу да значајно утичу на квалитет мерења. У посебно важним случајевима, просторија се смешта у приземље, а некад и у подрумске просторије у којима постоји масивна подлога која смањује вибрације.



Слика 16.7 Изглед оптичке клупе за одређивање жишне даљине сочива.

Изглед оптичке клупе приказан је на слици 16.7. На једном крају клупе се налази светлосни извор. У овој вежби извор се састоји од сијалице затворене у кућишту. Са предње стране налази се закљон на коме је урезан отвор облика усправне стрелице, која има улогу **светлог предмета**. На другом крају клупе налази се закљон (екран) који се може померати. На средњем стативу налазе се жљебови у које се могу поставити сочиво или систем сочива чија се жижна даљина одређује. Сваки од делова на клупи има могућност померања, како по даљини, тако и по висини. То омогућава постављање система дуж заједничке оптичке осе.

Оптичке клупе се користе за испитивања недостатака сочива као што су хроматска и сферна аберација, и за друге намене (испитивање светлосних извора, посматрање ефеката дифракције помоћу оптичке решетке и др).

ДИРЕКТНИ МЕТОД ОДРЕЂИВАЊА ЖИЖНЕ ДАЉИНЕ

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Извор и заклон се постављају у неки произвољан положај. Сочиво, чија се жижна даљина одређује, налази се на средњем стативу. Сочиво се помера док се на заклону појави јасни лик светле стрелице. У том положају се измере растојања p и l и упишу у табелу. Експеримент се понавља n пута (десетак), при различитим вредностима растојања извора и заклона. Пожељно је да се нека од мерења понове на истом растојању. Жижна даљина се израчунава из формуле:

$$f = \frac{pl}{p+l} \quad (16.7)$$

ОБРАДА РЕЗУЛТАТА МЕРЕЊА. На основу добијених вредности треба израчунати вредности жижне даљине f_i . Затим се одређује средња вредност

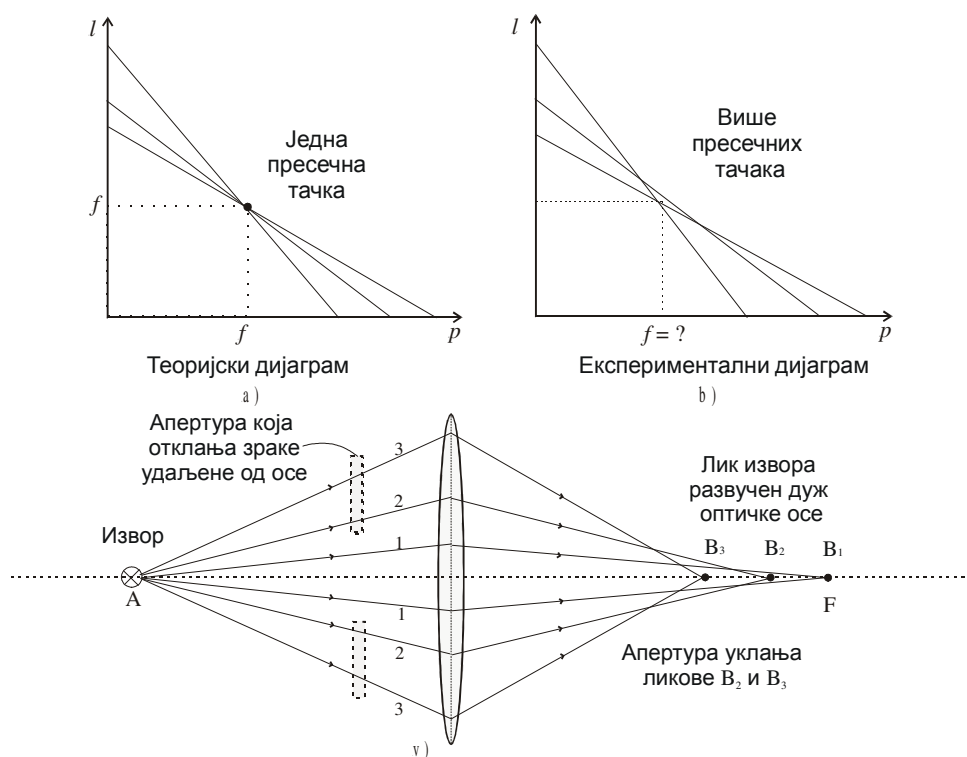
$$f_s = \frac{1}{n} \sum f_i, \text{ стандардно одступање мерења } s = \sqrt{\frac{\sum (f_i - f_s)^2}{n-1}} \text{ и стандардно}$$

$$\text{одступање средње вредности } s_{f_s} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Графички приказ и дискусија резултата. Подаци мерења могу се унети у дијаграм чији је облик приказан на слици 16.8а. На апсцису се наносе вредности растојања предмета, p_i , а на ординату лика l_i . Уколико се одговарајући парови тачака споје правом линијом, све линије би требало да се секу у **истој тачки**. Из једначине сочива показује се да координате пресечне тачке износе (f, f) . То значи да се одређивањем координате пресечне тачке, графичким путем добија вредност жижне даљине сочива. Међутим, када се експериментални резултати унесу у дијаграм, добија се график чији облик може бити као на слици 16.8б.

Наиме линије на слици 16.8б секу се у више тачака, што отежава одређивање жижне даљине са дијаграма. То указује да код реалног сочива постоји одступање од идеализованих претпоставки коришћених при извођењу једначине сочива. Једна од тих претпоставки је да зраци падају веома близу центра сочива. Када та претпоставка није испуњена, долази до изражаја **сферна аберација**. Та појава илустрована је на слици 16.8в. Из извора у тачки

А на оси, зраци падају на сочиво под различитим угловима. Од ових зрака формира се **више ликова** тачке. Зраци (1) који падају на сочиво под врло малим углом, сакупљају се у B_1 која је у жижи F . Зраци (2) и (3) који падају на сочиво под већим угловима, сакупљају се у тачкама B_2 и B_3 које су на растојањима **мањим** од жижне даљине сочива. С обзиром да зраци из извора падају на сочиво у једном опсегу углова, следи закључак да се лик тачке налази **развучен по једној дужи** на оптичкој оси. Код извора облика стрелице, као код оптичке клупе, услед сферне аберације добија се **делимично изоштрен** лик у одређеном опсегу дужина.



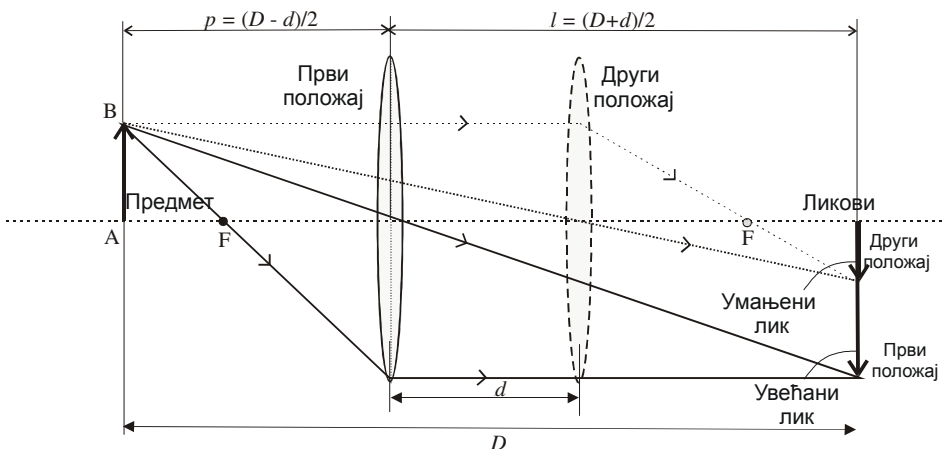
Слика 16.8 Графички начин одређивања жижне даљине сабирног сочива, а) теоријски дијаграм, у коме се све линије секу у истој тачки, б) изглед практичног дијаграма, в) уз објашњење сферне аберације сочива.

Код инструмената утицај сферне аберације се умањује постављањем отвора променљиве површине - тзв. дијафрагме или апертуре, која је на слици 16.8в приказана тачкастом линијом. Помоћу њих се уклањају зраци који иду далеко од оптичке осе сочива, што побољшава оштрину лика.

Суштина Беселове² методе састоји се у чињеници да се, при датом растојању извора и заклона, јасан лик може добити у два **различита положаја** сочива. У првом положају сочиво је ближе извору, а јасан лик на екрану се добија као увећан. У другом положају, сочиво је ближе екрану, па се лик добије као умањен, слици 16.9.

Код Беселове методе мере се следећа два податка.

- Растојање D између светлог предмета и заклона.
- Растојање d за које треба померити сочиво да би се поново добио јасан лик.
-



Слика 16.9 Беселов метод одређивања жижне даљине сочива; јасан лик се добија при два положаја сочива, на међусобном растојању d .

Уводећи у (16.2) смене $p = \frac{D-d}{2}$ и $l = \frac{D+d}{2}$, добија се:

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D}. \quad (16.8)$$

ПОСТУПАК МЕРЕЊА. Мерни поступак се изводи на истој оптичкој клупи. Светлосни извор и заклон се поставе на произвољно растојање D и затим пронађу два положаја, на међусобној удаљености d , при којима се добија јасан лик. Поступак треба понављати десетак пута за различита растојања D . Са добијеним резултатима жижне даљине треба извршити статистичку анализу као код директне методе, и упоредити одговарајуће резултате.

² Friedrich Wilhelm Bessel, (1784 – 1846) немачки астроном и математичар.

Жижну даљину расипних сочива није могуће измерити директним посматрањем. Наиме, на оптичкој клупи, расипно сочиво не даје реални лик који се може формирати на заклону. Међутим, када се расипно сочиво **комбинује** са једним сабирним сочивом могућно је добити еквивалентно сочиво које се понаша као **сабирно**. Из (16.6) види се да је потребни услов да расипно сочиво има мању оптичку јачину од сабирног (по модулу). Комбиновано сочиво се тада понаша као сабирно, па му се жижна даљина може одредити једном од претходно описаних метода (директном или Беселовом). За комбинацију расипног сочива жижне даљине f_r и сабирног f_s , жижна даљина комбинованог сочива f_k износи:

$$\frac{1}{f_k} = \frac{1}{f_s} - \frac{1}{f_r}. \quad (16.9)$$

Након што се одреди жижна даљина комбинованог сочива f_k , жижна даљина расипног сочива се добија из формуле:

$$f_r = \frac{f_s f_k}{f_k - f_s}. \quad (16.10)$$

ПОЗНАТИ НАУЧНИЦИ

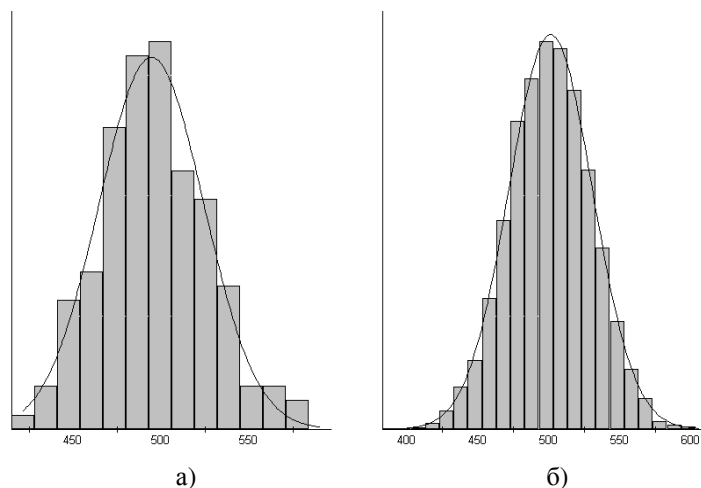
Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) немачки астроном и математичар. Школу похађао само до своје 14. године. Касније се самостално образовао у астрономији и математици. Као астроном остварио врхунске резултате. Открио постојање тамних звезде на основу њиховог утицаја на кретање звезда јачег сјаја. Побољшао тачност одређивања позиције великог броја звезда. Развио методе отклањања оптичких, механичких и метеоролошких утицаја на грешке астрономских посматрања. Докторску дисертацију одбранио на препоруку Гауса. Решавајући проблеме кретања тела у гравитационом пољу дао доприносе у математици. Открио *Беселову диференцијалну једначину*. Решења једначине су *Беселове функције*, које представљају важну класу специјалних функција са применама у физици и техници. Један кратер на Месецу носи име Бесел.

ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1

Централна гранична теорема

Централна гранична теорема даје објашњење под којим условима се елементи неке популације или резултати неког мерења расподељују према Гаусовој расподели. Експериментално се може проверити да ако се из једне популације формира већи број узорака и одреде њихове средње вредности, расподела средњих вредности ће увек бити Гаусова, без обзира каква је расподела популације. Најједноставније се ова тврдња проверава уз помоћ рачунара, генерисањем случајних бројева према некој теоријској расподели. Реализован је следећи пример: Помоћу програма који даје случајне бројеве са униформном расподелом у интервалу од 0 до 1000 генерисано је 100 бројева и одређена њихова средња вредност x_{s1} . Математичко очекивање ове средње вредности је на средини интервала између 0 и 1000, тј. $x_{os1} = 500$. Међутим, стварно добијена средња вредност се најчешће мање или више разликује од очекиване вредности. Понављањем описаног поступка 150 пута добијен је узорак средњих вредности (x_{si}) од 150 елемената чији је хистограм приказан на слици 1а. На истој слици је такође приказана и Гаусова расподела са истом средњом вредношћу и стандардним одступањем. Види се да хистограм има облик сличан Гаусовој расподели, али се такође уочавају и одређене разлике.



Слика 1 Хистограм расподеле средњих вредности добијених генерисањем узорака од по 100 случајних бројева у распону 0-1000, а) пример за 150 узорака и б) пример за 10.000 узорака.

Исти поступак је поновљен, али са већим бројем генерисаних узорака. Наиме, генерисано је 10.000 узорака од по 100 случајних бројева у интервалу од 0 до 1000. Израчунавањем њихових средњих вредности добијен је узорак од 10.000 случајних бројева чији су хистограм и одговарајућа Гаусова расподела приказани на слици 16. У овом случају хистограм очигледно има боље поклапање са Гаусовом кривом него у претходном случају. Овим је експериментално илустровано да када популација има униформну расподелу, средње вредности узорака имају Гаусову расподелу.

Исти закључак се изводи на основу примера са популацијом која има Гаусову расподелу. Производи, који се аутоматски пакују у фабрици, имају масе чија је средња вредност блиска номиналној маси, док је расподела у принципу Гаусова. Из великог производа исте номиналне масе може се формирати одређени број узорака. Прецизним мерењем показује се да се средње вредности масе узорака по правилу разликују. Цртањем хистограма и у овом случају се показује да је расподела добијених средњих вредности Гаусова.

У практичним мерењима услови које предвиђа Централна гранична теорема су често испуњени, па је самим тиме и Гаусова расподела широко заступљена. Као пример може се узети класични аналогни инструмент са покретним калемом. Познато је да код њега казаљка заузима онај угаони положај у коме се момент услед протицања струје изједначава са збиром момента спиралне опруге и момента трења у лежишту. Међутим при понављању мерења, угао закретања, по правилу, неће бити истоветан, иако струја има константну вредност. Та појава се објашњава тиме што на кретни систем истовремено делују многи поремећаји. На пример трење у лежишту се стално мења уласком честица прашине, вибрацијама, температурским варијацијама и др. Деловање већег броја утицајних величина проузрокује резултантни отклон казаљке који, према Централној граничној теореми, има промене које подлежу Гаусовој расподели.

Познато је да на крајевима неког отпорника (кроз који не протиче струја) постоји напон термалног шума који представља случајни сигнал са средњом вредношћу једнаком нули. Функција расподеле амплитуде термалног шума је Гаусова што се такође објашњава помоћу централне граничне теореме. У отпорнику постоји огроман број слободних електрона који се крећу кроз отпорник Брауновим случајним кретањем. Укупни напон на крају отпорника је збир разлика потенцијала који потичу од свих електрона. И у овом случају услови Централне граничне теореме су у потпуности испуњени, па је расподела амплитуде термалног шума Гаусова.

ПРИЛОГ 2

1. Предмети SI и њихове вредности у односу на основну јединицу

Веће јединице			Мање јединице		
Назив	Ознака	Вредност	Назив	Ознака	Вредност
yotta	Y	10^{24}	yocto	y	10^{-24}
zetta	Z	10^{21}	zepto	z	10^{-21}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
tera	T	10^{12}	pico	p	10^{-12}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
mega	M	10^6	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
hecto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
deka	da	10^1	deci	d	10^{-1}

2. Предмети SI могу се употребљавати испред:

- основних јединица SI, (осим јединице за масу kg);
- изведених јединица SI које имају посебан назив и ознаку, (осим јединице за Целзијусову температуру °C);
- следећих мерних јединица ван SI : литар, тона, текс, бар, електронволт, волтампер и вар.

3. Предмети SI могу се употребљавати испред мерних јединица из тачке 2. овог прилога и кад се те јединице налазе у саставу других изведених јединица SI и комбинованих мерних јединица које се изражавају у облику производа или количника.

4. Испред мерне јединице може се употребити само један предметак SI.

5. Изложитељ који се ставља на ознаку мерне јединице односи се на целу децималну мерну јединицу.

ПРИЛОГ 3

Правила писања физичких величина и јединица у тексту и у формулама

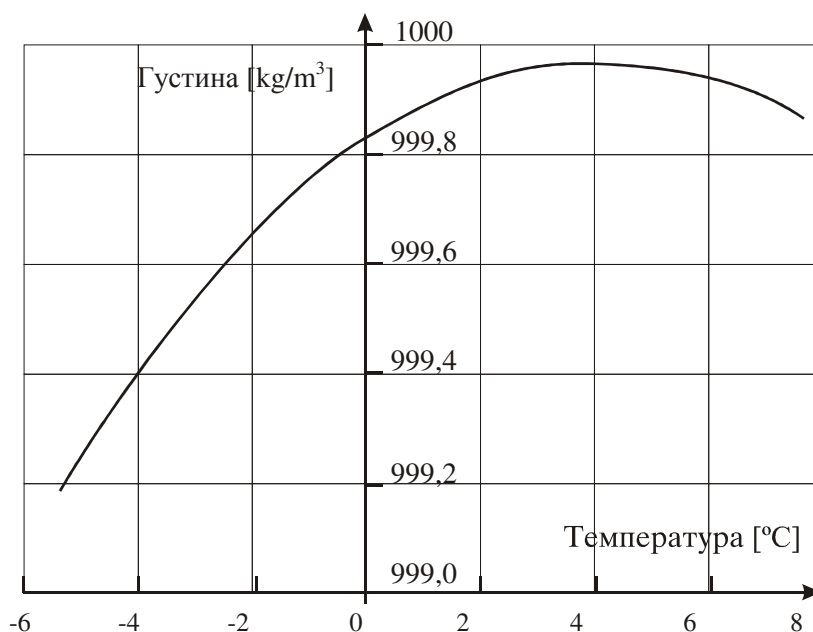
1. Физичке величине пишу се у формулама, а такође и у тексту, курзивом - **косим словима** (италик) **латинске и грчке азбуке**.
2. Ознаке функција, као на пример $\sin$, $\cos$, $\ln$, $\arcsin$ и друге, пишу се **усправним словима**.
3. Ознаке мерних јединица пишу се **усправним словима латинске и грчке азбуке**.
4. Ознаке мерних јединица пишу се без тачке на крају.
5. Назив предметка SI и назив мерне јединице пишу се заједно као једна реч.
6. Ознака предметка SI и ознака мерне јединице пишу се заједно.
7. Бројна вредност одваја се размаком од ознаке мерне јединице.
8. Производ две мерне јединице обележава се тачком као симболом множења. Тачка се може изоставити кад је ознака мере таква да не може настати забуна.

У системима писања и обраде података са ограниченим скупом знакова, могу се употребљавати посебно прилагођене ознаке мерних јединица, функција као и симбола множења, дељења и степеновања.

ПРИЛОГ 4

Густина и коефицијент површинског напона за воду у зависности од температуре

Температура [$^{\circ}\text{C}$]	Густина [kg/m^3]	Коефицијент површинског напона $10^{-3}[\text{N/m}]$
-8	потхлађена вода	77,0
-5		76,4
0	999,87	75,6
5	999,99	74,9
10	999,73	74,22
15	999,13	73,49
18	998,62	73,05
20	998,23	72,75
25	997,07	71,97
30	995,67	71,18
40	992,24	69,56
50	988,07	67,91
60	983,24	66,18
70	977,81	64,4
80	971,83	62,6
100	958,38	58,9



Дијаграм густине воде у зависности од температуре (треба уочити да је и максимална густина, при температури од око 4°C , нешто мања од 1000 kg/m^3)

ПРИЛОГ 5

Физичке карактеристике неких течности

Течност	Густина kg/m ³	Тачка мржњења °C	Тачка кључања °C	Топлота испаравања J/kg · 10 ³
Вода (H ₂ O)	≈ 1000	0	≈ 100	2257
Амонијак (NH ₃)	682	-78	-33,5	
Метанол (CH ₃ OH)	786	- 97,8	65	1098
Етанол (C ₂ H ₅ OH)	785	-114,1	78	838
Етар (C ₂ H ₅ OC ₂ H ₅)	74	-138,5	34	
Глицерин (или глицерол) (C ₃ H ₈ O ₃)	1260	18	290	
Жива (Hg)	13579	- 38,87	365,58	294

Познато је да се јако алкохолна пића добијају дестилацијом преврелог воћа или житарица. У супстанци која се дестилује, поред етил алкохола, постоји и одређени удео метил алкохола, који је много токсичнији. Због ниже температуре кључања метил алкохола његов садржај у дестилату је знатно већи на почетку, у односу на каснији ток дестилације.

ПРИЛОГ 6

Карактеристике неких чврстих материјала (на собној температури)

Материјал	Густина [kg·m ⁻³ ·10 ³]	Модуо еластичности [N·m ⁻² ·10 ¹⁰]	Модуо торзије [N·m ⁻² ·10 ¹⁰]	Специфична топлота (0°C -100°C) [J·°C ⁻¹ kg ⁻¹ 10 ³]
Алуминијум	2,70	6,6 - 7,2	2,8	0,900
Антимон	6,68	8,0	2,0	0,209
Бакар	8,92	12,3 – 16,1	5	0,385
Бетон	2,2 – 2,4	0,1 – 0,5		0,88
Бронза	8,9	7,9 – 12,3	4,3	0,355
Ванадијум	6,07	0,1 – 0,5		0,5
Волфрам	19,3	36 - 40	14,5	0,125
Гвожђе	7,86	20	8	0,444
Разни челици	≈ 7,8	14,2 -21,6	≈ E _γ / 3	≈ 0,44
Германијум	5,35	13	5	0,305
Дрво	0,1 – 1,2	0,3 - 1,6		≈ 2,5
Злато	19,3	8	2,9	0,129
Иридијум	22,42	52 (max !)	13,5	0,13
Кадмијум	8,64	0,5	0,2	0,23
Калај	7,31	5,5	0,7	0,23
Кречњак	2,6 – 2,9			0,88
Кобалт	8,9	18 - 21	8	0,385
Лив сиви	7,1 – 7,3	7,5 - 12	3 – 5	0,54
Лив црвени	8,6	8	3	0,38
Месинг	≈ 8,4	7 – 12	3 – 5	0,38
Молибден	10,2	33	17	0,27
Никл	8,9	19,3	8	0,44
Олово	11,3	1,7	0,8	0,130
Паладијум	11,97	11,5	5	0,25
Платина	21,45	1,7		0,134
Плута	0,2 - 0,3			≈ 1,9
Родијум	12,45	28		0,25
Силицијум	2,33	11,6		0,71
Сребро	10,49	8	2,7	0,234
Стакло	2,4 – 2,6	5 – 8	2 – 3	0,5 – 1,0
Стакло - кварцно	2,2	5 - 8	2 – 3	1,00
Титанијум	4,51	10,3	3,5	0,61
Уранијум	19,05	20,8	4,8	0,12
Угљеник	1,5 – 2,5			0,720
Угљеник дијамант	3,52			0,502
Хром	7,14	25		0,46
Цинк	7,14	10 - 13	3,5	0,39

Студентова расподела

Значај Студентове расподеле у мерној техници је у статистичкој анализи узорака са малим бројем елемената (на пример ако се располаже узорком од 3 до 30 поновљених мерења). Гаусова расподела тада није адекватна, јер се она у принципу односи само на велике узорке, тј. скупове са великим бројем података.

Студентову расподелу открио је W. Gosset¹ 1908. године. Расподела је добила назив по псеудониму Студент, под којим је аутор објавио свој рад. Студентова расподела зависи од параметра n_s који се назива **број степени слободе**. Број n_s једнак је броју мерних резултата минус један, $n_s = n - 1$. Променљива Студентове расподеле је бездимензионална и означава се словом t . Она може да се мења у распону $-\infty < t < +\infty$ као и променљива z код стандардизоване Гаусове расподеле. Као и Гаусова, и Студентова расподела има симетричан облик у односу на y осу. На слици 1а, приказано је пет дијаграма Студентове расподеле за $n_s=1; 2; 5; 10$ и $n_s \rightarrow \infty$. Средња вредност (математичко очекивање) променљиве t је нула, (као и у случају променљиве z). Студентова расподела има особину да при порасту броја степени слободе n_s прелази у стандардизовану Гаусову расподелу, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(t) = p_{GU}(t)$. Дакле, крива са највећим максимумом на слици 1 представља и уопштену Гаусову расподелу. Може се показати да Студентова расподела има стандардно одступање веће од 1, тј. веће него уопштена Гаусова расподела. У граничном случају, када $n_s \rightarrow \infty$, стандардно одступање Студентове расподеле тежи јединици. Уколико је број степени слободе мањи, утолико се стандардно одступање Студентове расподеле повећава.

Вероватноћа да случајна величина t има већу вредност од унапред задате вредности t_{n_s, P_1} одређена је интегралом:

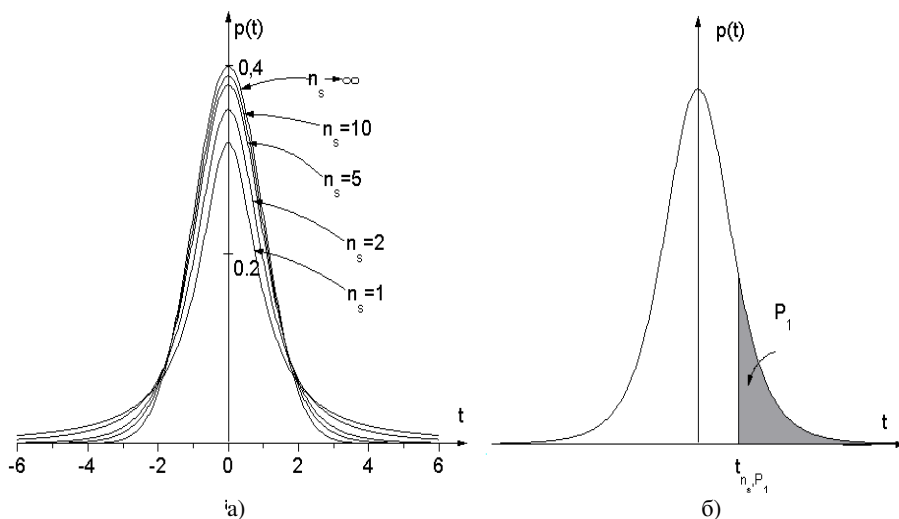
$$P_1 = \int p(t) dt .$$

Вероватноћа P_1 геометријски је приказана сивом површином на слици 1б.

Једна од главних примена Студентове расподеле је статистичка анализа узорака са мањим бројем чланова. Анализа мањих узорака има велики значај у пракси, јер се при тестирањима производа у индустрији често узимају мањи узорци ради уштеде у материјалним издацима и скраћивања времена теста.

¹ William Sealey Gosset, (1876 – 1937), енглески математичар - статистичар. Био је запослен у чувеној пивари Гинис у Ирској. Власник фабрике је забрањивао запосленима да публикују чланке и радове под сопственим именима, па је Gosset, тада млад човек, усвојио научни псеудоним „Студент“, који је стално користио.

Код малих узорак постоји могућност да елементи буду врло блиски очекивању μ . Стандардно одступање таквог узорка s , добијено помоћу израза (1.9) било би мање од вредности стандардног одступања σ одговарајуће популације. Овакав узорак не би добро репрезентовао популацију. Применом Студентове расподеле врши се корекција стандардног одступања тиме што се оно множи фактором $t_{n_s, P}$ који зависи од броја чланова узорка и од тражене статистичке сигурности. Ако је у питању вероватноћа од 68,3 % корекциони фактор $t_{n_s, 68\%}$ је већи од један.



Слика 1 а) Студентова расподела за $n_s=1; 2; 5; 10$ и $n_s \rightarrow \infty$ степени слободе (уопштена Гаусова расподела), б) P_1 - вероватноћа да одређена вредност променљиве t_{n_s, P_1} буде надмашена.

Ширина интервала у коме се налази тачна вредност зависи од броја степени слободе n_s и статистичке сигурности (вероватноће) P , према изразу:

$$\mu = x_s \pm t_{n_s, P} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (1)$$

Применом Студентове расподеле, кориговане вредности стандардног одступања и стандардног одступања средње вредности гласе:

$$s_s = t_{n_s, P} \cdot s, \quad (2)$$

$$s_{s x_s} = t_{n_s, P} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (3)$$

У табели 1 дате су вредности променљиве t за различите бројеве степени слободе n_s и типичне вредности статистичких сигурности. Види се да $t_{n_s, P}$ при

великим вредностима броја степени слобode тежи коефицијенту проширења k за исту вероватноћу P Гаусове расподеле:

$$\begin{aligned}\lim_{n_s \rightarrow \infty} (t_{n_s, 68\%}) &= 1, \\ \lim_{n_s \rightarrow \infty} (t_{n_s, 95\%}) &= 2, \\ \lim_{n_s \rightarrow \infty} (t_{n_s, 99\%}) &= 2,58. \\ \lim_{n_s \rightarrow \infty} (t_{n_s, 99,7\%}) &= 3.\end{aligned}$$

Уколико се број степени слобode смањује, корекциони фактор се повећава. Повећање је утолико веће уколико је већа и статистичка сигурност P . Студентова расподела даје шири интервал у коме се са датом вероватноћом налази тачна вредност μ у поређењу са интервалом који даје Гаусова расподела. Ово проширење интервала је утолико веће уколико је број степени слобode мањи (тј. мањи број мерних резултата) и што је статистичка сигурност (вероватноћа) већа.

Као пример узет је узорак од $n=10$ мерних резултата, тј. са бројем степени слобode $n_s = n - 1 = 9$. За вероватноћу 68,3 % фактор проширења је 1,03, тј. већи је за само 3 % него код Гаусове расподеле. Међутим за више вредности вероватноће, на пример за 99,7 %, фактор проширења износи 4,09. Ово је осетно већа вредност од фактора 3 који одговара Гаусовој расподели.

Табела 1 Вредности фактора Студентове расподеле за различите бројеве степени слобode n_s и статистичке сигурности P .

n_s број степени слобode	$t_{n,P}$ параметар Студентове расподеле				
	$P = 50\%$	68,3%	95%	99%	99,73%
2	0,82	1,32	4,30	9,92	18,35
3	0,76	1,20	3,18	5,84	9,22
4	0,74	1,15	2,78	4,60	6,62
5	0,73	1,11	2,57	4,03	5,51
6	0,72	1,09	2,46	3,71	4,90
7	0,71	1,08	2,37	3,50	4,53
8	0,71	1,07	2,31	3,35	4,28
9	0,70	1,06	2,26	3,25	4,09
10	0,70	1,06	2,23	3,17	3,96
11	0,70	1,05	2,20	3,11	3,85
12	0,70	1,05	2,18	3,05	3,76
13	0,70	1,05	2,16	3,01	3,69
14	0,69	1,04	2,14	2,98	3,64
15	0,69	1,04	2,13	2,95	3,59
16	0,69	1,04	2,12	2,92	3,54
17	0,69	1,04	2,11	2,90	3,51
18	0,69	1,04	2,10	2,88	3,48
19	0,69	1,04	2,09	2,86	3,45
20	0,69	1,03	2,09	2,84	3,43
∞ (Гаусова расподела)	0,674	1,000	1,960	2,576	3,000

ПРИЛОГ 8

Зависност тачке кључања воде од притиска

t [°C]	p [kPa]	t [°C]	p [kPa]	t [°C]	p [kPa]
0	0,611	34	5,323	68	28,578
1	0,658	35	5,627	69	29,845
2	0,706	36	5,945	70	31,179
3	0,759	37	6,279	71	32,540
4	0,814	38	6,629	72	33,968
5	0,873	39	6,996	73	35,449
6	0,935	40	7,381	74	36,983
7	1,002	41	7,783	75	38,571
8	1,074	42	8,205	76	40,212
9	1,149	43	8,645	77	41,906
10	1,229	44	9,107	78	43,667
11	1,313	45	9,590	79	45,495
12	1,404	46	10,092	80	47,376
13	1,498	47	10,620	81	49,324
14	1,599	48	11,168	82	51,352
15	1,706	49	11,743	83	53,446
16	1,818	50	12,339	84	55,608
17	1,939	51	12,968	85	57,849
18	2,065	52	13,622	86	60,157
19	2,199	53	14,302	87	62,532
20	2,340	54	15,009	88	64,987
21	2,488	55	15,743	89	67,522
22	2,645	56	16,517	90	70,150
23	2,811	57	17,317	91	72,858
24	2,986	58	18,158	92	75,647
25	3,169	59	19,025	93	78,529
26	3,363	60	19,932	94	81,504
27	3,567	61	20,866	95	84,572
28	3,782	62	21,854	96	87,734
29	4,008	63	22,867	97	91,003
30	4,245	64	23,914	98	94,365
31	4,496	65	25,016	99	97,821
32	4,758	66	26,163	100	101,396
33	5,034	67	27,350		

ЛИТЕРАТУРА

- К. Станковић, Д. Станковић, П. Осмокровић, *Лабораторијске вежбе из физике*, Завод за физику техничких факултета Универзитета у Београду, 2014.
- Вучић, В. *Основна мерења у физици*, Научна књига, Београд, 1997.
- Вучић, В. Ивановић, Д. *Физика I*, Научна књига Београд, већи број издања.
- П. Маринковић, *Физика I*, скрипта, ауторско издање, 2014.
- Ј. Цветић, *Таласи*, скрипта, ауторско издање, 2003.
- П. Маринковић, П. Михаиловић, *Одабрана поглавља физике Оптика и Топлота*, Академска мисао 2017.
- Д. Станковић, *Физичко техничка мерења*, III издање, Универзитет у Београду, 1997.
- К. Станковић, П. Осмокровић, М. Вујисић, *Мерна несигурност*, Академска мисао, 2009.
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fundamentals of Physics*, J. Willey and Sons Inc, New York, 2018.
- K. Krane. *Modern Physics*, 3rd edition, J. Willey and Sons Inc, New York, 2012.
- Young, H. Freedman, R. *University Physics*, Addison Wesley, San Francisco, 2000.
- Bernard, C. Epp, C. *Laboratory Experiments in College Physics*, J. Willey, New York, 1995.
- Wilson, J. *Physics Laboratory Experiments*, Houghton Mifflin C. Boston, 1998.
- Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*, International Organization for Standardization, 1993.
- Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration*, European Cooperation for Accreditation, 1999.
- Rowley, A. *Evaluating Uncertainty for Laboratories*, Alan Rowley Associates, West Ayton, 2001.
- Taylor, B. Kuyatt, C. *Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*, NIST Technical Note 1297, 1994.

Izdavač

Akadska misao

Primorska 21, Beograd

Tel./Fax: +381 11 3218 354

Marko Vujadinović dipl. el. inž.

+381 63 30 10 75

marko.vujadinovic@akadska-misao.rs

Aleksandar Rašković, dipl. el. inž.

+381 63 30 10 65

sasa.raskovic@akadska-misao.rs

www.akadska-misao.rs

office@akadska-misao.rs

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

53.08(075.8)(076)

СТАНКОВИЋ, Ковиљка, 1979-

Лабораторијске вежбе из физике / Ковиљка
Станковић. - Београд : Академска мисао, 2019
(Чачак : Висока техничка школа струковних
студија). - 160 стр. : илустр. ; 25 cm

На врху насл. стр: Универзитет у Београду,
Електротехнички факултет. - Тираж 500. -
Напомене уз текст. - Библиографија: стр. 159.

ISBN 978-86-7466-801-6

а) Физика - Мерења - Вежбе
COBISS.SR-ID 279820812
