



UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Marija V. NENEZIĆ JOVIĆ

RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI
SA PRIMENAMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 2023.



UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING

Marija V. NENEZIC JOVIC

STRATIFIED FAMILIES OF FUNCTIONS IN
THE THEORY OF ANALYTICAL INEQUALITIES
WITH APPLICATIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2023.

MENTOR:

dr Branko Malešević, redovni profesor

Katedra za primenjenu matematiku

Elektrotehnički fakultet

Univerzitet u Beogradu

ČLANOVI KOMISIJE:

dr Bojana Mihailović, docent

Katedra za primenjenu matematiku

Elektrotehnički fakultet

Univerzitet u Beogradu

dr Maja Petrović, vanredni profesor

Katedra za opštetehničke nlike

Saobraćajni fakultet

Univerzitet u Beogradu

dr Sanja Vujnović, docent

Katedra za signale i sisteme

Elektrotehnički fakultet

Univerzitet u Beogradu

dr Bojan Banjac, docent

Katedra za animaciju u inženjerstvu

Fakultet tehničkih nauka

Univerzitet u Novom Sadu

Datum odbrane :

Rezime

U okviru ove doktorske disertacije razmatrane su raslojene familije funkcija, njihove osnovne osobine, kao i primena na neke poznate rezultate iz Teorije analitičkih nejednakosti, dobijeni su neki novi rezultati u Teoriji analitičkih nejednakosti, a potom je razmatrana i primena dobijenih rezultata u nekim oblastima elektrotehnike.

Pod raslojenom familijom funkcija $\varphi_p(x)$ je podrazumevana familija funkcija definisana za svako $p \in D$, $D \subseteq R$ za $x \in (a, b)$ i koja je monotona po parametru $p \in D$.

U Teoriji analitičkih nejednakosti postoje razni primeri analitičkih nejednakosti baziranih za konkretnе vrednosti parametra i definisanih na datom, poznatom intervalu.

Disertacija se bazira na analizi poboljšanja i generalizaciji poznatih nejednakosti, primenom osobina metrike i pseudometrike, definisani su neki novi termini vezani za pojam u daljenosti, odstupanja funkcije od apscise, kao i moguće primene dobijenih rezultata na problemima koji se mogu opisati tim nejednakostima.

Osnovna klasa nejednakosti koja je razmatrana u disertaciji su miksovane trigonometrijske polinomske (MTP) nejednakosti. U disertaciji se navode još neke klase nejednakosti za koje su, primenom metrike i pseudometrike na osnovu definisanog odstupanja, dobijeni poboljšani rezultati.

Disertaciju prate i odgovarajući algoritmi napisani Maple kodom.

Ključne reči : Raslojene Familije Funkcija, Analitičke Nejednakosti, Miksovane Trigonometrijske Polinomske Nejednakosti, Metrika, Q -Funkcija, Funkcija Greške

Naučna oblast : Elektrotehnika i Računarstvo

Uža naučna oblast : Primjenjena Matematika

Abstract

Within this doctoral dissertation, stratified families of functions, their basic properties, as well as their application to some known results from the Theory of Analytical Inequalities were discussed, some new results were obtained in the Theory of Analytical Inequalities, and then the application of the obtained results in some areas of electrical engineering was considered.

Stratified family of functions $\varphi_p(x)$ means the family of functions defined for every $p \in D$, $D \subseteq R$ and for $x \in (a, b)$ which is monotone in the parameter $p \in D$.

In the Theory of Analytical Inequalities there are various examples of analytical inequalities based on specific parameter values and defined on a given, known interval.

The dissertation is based on the analysis of the improvement and generalization of known inequalities, by applying the properties of metric and pseudometric, some new terms are defined related to the concept of distance, deviation of the function from the abscissa, as well as the possible application of the obtained results to problems that can be described by those inequalities.

The basic class of inequalities discussed in the dissertation are mixed trigonometric polynomial (MTP) inequalities. The dissertation mentions some other classes of inequalities for which improved results were obtained by applying metric and pseudometric with defined deviation.

The dissertation is accompanied by corresponding algorithms written in Maple code.

Keywords : Stratified Family of Functions, Analytical Inequalities, Mixed Trigonometric Polynomial Inequalities, Metrics, Q - Function, Error Function

Scientific field : Electrotechnics and Computer Science

Area of research : Applied Mathematics

Posvećeno čerki Teodori.

Sadržaj

Spisak slika	iii
Spisak tabela	v
Uvod	1
1 Odlučivost	4
1.1 (Ne)odlučivi problemi	4
1.2 Neodlučivi problemi u elementarnoj analizi	6
1.3 Nejednakosti	8
2 Miksovane trigonometrijske polinomske (MTP) funkcije	10
2.1 Definicija MTP funkcija i osnovne osobine	10
2.1.1 Miksovani trigonometrijski polinomski sistemi (MTPS)	10
2.1.2 MTP funkcije i nejednakosti	14
2.2 Jeden postupak dokazivanja MTP nejednakosti	15
2.3 Neki doprinosi MTP nejednakostima	20
2.3.1 Nove aproksimacije nekih izraza koji uključuju trigonometrijske funkcije . .	20
2.3.2 Neka poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti	21
3 Dupli Tajlor-ovi razvoji (DTR)	26
3.1 Definicija DTR i osnovne osobine	26
3.2 Neki doprinosi Teoriji analitičkih nejednakosti primenom DTR	28
3.2.1 Poboljšanje Jordan-Stečkin i Becker-Stark nejednakosti primenom DTR . .	28
3.2.2 Neke nove procene preciznosti Huygens-ove aproksimacije primenom DTR .	31
4 Raslojene familije funkcija	32
4.1 Definicija raslojenosti i osnovne osobine	32
4.2 Metrički prostori. q - odstupanje funkcije	35
4.3 1 - odstupanje : Integralna metrika	38
4.4 Pseudo odstupanje	39
4.5 2 - odstupanje : Srednje kvadratna metrika	41
4.6 ∞ - odstupanje : Minimaks metrika	43

4.7	Znak raslojene familije funkcija	44
5	Primena q - odstupanja na raslojene familije funkcija	
	u Teoriji analitičkih nejednakosti	45
5.1	Osnovni primer q - odstupanja	45
5.2	Primena q - odstupanja na Stečkin-ovu nejednakost	57
5.3	Primena q - odstupanja na Cusa - Huygens nejednakost	70
5.4	Primena q - odstupanja na nejednakosti J. Sándor-a	82
5.5	Primena q - odstupanja na D'Aurizio trigonometrijske nejednakosti	106
5.6	Primena q - odstupanja na neke nejednakosti Becker - Stark tipa	130
6	Primene u elektrotehnici	153
6.1	Q - funkcija i funkcija greške $\text{erf}(\cdot)$ / $\text{erfc}(\cdot)$	153
6.2	Primena q - odstupanja u aproksimaciji funkcije greške	156
7	Zaključak i dalji pravci istraživanja	179
Prilog A : Opšta matematička pravila primenjena u disertaciji		181
Prilog B : Implementacija u programskom paketu Maple		182
Literatura		184
Biografija		191

Spisak slika :

1	PUMA - 560 robotska ruka	11
2	Familija funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$	46
3	Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_1$	49
4	Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = \tilde{p}_1$	51
5	Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_2$	53
6	Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_\infty$	55
7	Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$	56
8	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$	58
9	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = p_1$	62
10	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = \tilde{p}_1$	64
11	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = p_2$	66
12	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = p_\infty$	68
13	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	69
14	Familija funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$	70
15	Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_1$	75
16	Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = \tilde{p}_1$	77
17	Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_2$	79
18	Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_\infty$	80
19	Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	81
20	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$	82
21	Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1$	86
22	Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = \tilde{p}_1$	88
23	Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_2$	90
24	Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_\infty$	92

25	Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	93
26	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$	94
27	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$ za $p = p_1$	98
28	Familije funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$ za $p = \tilde{p}_1$	100
29	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$ za $p = p_2$	102
30	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$ za $p = p_\infty$	104
31	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x+1}{2}\right)^p$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	105
32	Familija funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$	106
33	Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_1$	110
34	Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = \tilde{p}_1$	112
35	Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_2$	114
36	Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_\infty$	116
37	Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	117
38	Familija funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$	118
39	Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_1$	122
40	Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = \tilde{p}_1$	124
41	Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_2$	126
42	Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_\infty$	128
43	Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$	129
44	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$	130
45	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1$	134
46	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = \tilde{p}_1$	136
47	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_2$	138
48	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_\infty$	140
49	Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$	141
50	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$	142
51	Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_1$	146
52	Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_2$	150
53	Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_\infty$	151
54	Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$	152
55	Veza Q funkcije i funkcije greške	155
56	Funkcije $\text{erf}(x)$ i $\text{erfc}(x)$	156

57	Familija funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$	158
58	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$, za $p = 3$	158
59	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = p_1$	161
60	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = \tilde{p}_1$	163
61	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = p_2$	165
62	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = p_\infty$	166
63	Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$	167
64	Familija funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$	169
65	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ (6.26), za $p = 1.22$	169
66	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_1$	172
67	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = \tilde{p}_1$	174
68	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_2$	176
69	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_\infty$	177
70	Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$	178

Spisak tabela :

2.1	DH notacija za PUMA 560 robot sa 6DOF [1]	12
-----	-------------------------------------------	----

Uvod

*"If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize how complicated life is."*

John von Neumann (1903 - 1957)

Ova doktorska disertacija je nastala kao rezultat dugogodišnjeg rada autorke u oblasti primenjene matematike, posebno rada sa trigonometrijskim funkcijama i aproksimacijama različitih poznatih nejednakosti.

Osnovni predmet izučavanja u disertaciji su raslojene familije funkcija i njihova primena na neke poznate rezultate iz Teorije analitičkih nejednakosti. Cilj istraživanja je bio dobijanje nekih novih rezultata u Teoriji analitičkih nejednakosti, kao i moguća primena u nekim oblastima elektrotehnike.

Interesovanje za temu disertacije se javilo mnogo pre konkretizovanja iste, pa je tokom studiranja, kao direktni rezultati istraživanja, publikovano i više naučno - istraživačkih radova objavljenih u eminentnim međunarodnim časopisima, od kojih su četiri sa SCI liste. Neka dostignuća iz pomenutih publikacija su predstavljena u ovoj disertaciji.

Disertacija se sastoji od sedam poglavlja koja se neformalno mogu podeliti na 3 celine.

Prva celina je uvodno teorijska i odnosi se na prva tri poglavlja. Pre izučavanja raslojenih familija funkcija, razmatrani su poznati pojmovi iz matematike, vezani za predmet disertacije i kojima se autorka bavila tokom istraživanja. Neki rezultati tih istraživanja su dati u ovoj celini.

Prvo poglavlje, koje predstavlja uvodno poglavlje, se odnosi na definisanje pojma odlučivosti u matematici, pojma problema u elementarnoj analizi, pogotovo neodlučivog tipa. Takođe su date neke istorijske činjenice vezane za nejednakosti, koje imaju široku primenu u matematici i čiji dokazi su rešenja mnogih problema. Iz tog razloga, mnogi matematičari su se bavili proučavanjem nejednakosti, što je između ostalog i predmet izučavanja u ovoj disertaciji, gde je razmatrana posebna klasa nejednakosti iz Teorije analitičkih nejednakosti i njihova primena u elektrotehnici.

U drugom poglavlju su proučavani miksovani trigonometrijski polinomski sistemi (MTPS), dat je primer njihove primene u robotici, odnosno, opisivanje moguće trajektorije koju pravi PUMA - 560 robotska ruka.

Takođe, proučavane su miksovane trigonometrijske polinomske (MTP) funkcije koje predstavljaju poseban slučaj MTPS. Ukratko je prikazan jedan metod dokazivanja MTP funkcija na osnovu [2], a pomenuta je i algoritamska procedura za dokazivanje MTP nejednakosti unutar intervala $(0, \frac{\pi}{2})$ iz disertacije [3], kao bitno dostignuće iz ove oblasti.

Kako se autorka disertacije bavila ovom tematikom u toku istraživanja, u drugom poglavlju su navedeni i neki postignuti rezultati, odnosno, data su poboljšanja poznatih nejednakosti, primenom MTP funkcija, pri čemu su u sekciji 2.3.1 [4] razmatrane neke nove aproksimacije izraza zasnovanih na trigonometrijskim funkcijama i data su poboljšanja za rezultate koje je postigao C. Mortici za neje dnakosti Wilker - Cusa - Huygens tipa, a u sekciji 2.3.2 [5] su data neka poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti.

U trećem poglavlju proučavani su dupli Tajlor-ovi razvoji (DTR), koji su veoma bitni za dokazivanje nekih trigonometrijskih nejednakosti. Takođe su navedena i neka poboljšanja poznatih nejednakosti, koje je autorka disertacije postigla u toku istraživanja, pri čemu su u sekciji 3.2.1 [5] data poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti primenom DTR, a u sekciji 3.2.2 [6] su date nove procene preciznosti Huygens-ove aproksimacije primenom DTR.

Četvrto poglavlje predstavlja drugu celinu, odnosno, matematičku osnovu vezano za predmet disertacije. Definisana je klasa raslojenih funkcija "nike" oblika, pri čemu je pojam raslojenosti koji je prethodno razmatran u [7] proširen na širu klasu metričkih prostora.

Posebno se razmatra pojam minimaks aproksimanta u odnosu na metrike D_1 , D_2 i D_∞ kod raslojenih familija funkcija. Uveden je i pojam q - odstupanja ($q = 1, 2, \infty$) za koje odstupanje aproksimacije funkcije pod određenim uslovima dostiže minimum. Pored toga je uvedeno i pseudo odstupanje, kao jedan pristup procene kvaliteta minimaks aproksimanta.

Pomoću ∞ - odstupanja su dobijeni bazični rezultati vezano za Cusa - Huygens i Sándor nejednakosti iz [7].

U disertaciji je posebno naveden uslov kada postoji 2 - odstupanje, korišćenjem integracije po parametru.

Navedeni su i uslovi merenja odstupanja pomoću površine (1 - odstupanje), a pored toga je uvedeno i merenje pomoću pseudo odstupanja, pri čemu su dobijeni rezultati i za takav pristup.

Treću celinu disertacije čine peto i šesto poglavlje, u kojima su, na osnovu matematičkih osnova izloženih u četvrtom poglavlju, date primene q - odstupanja kroz 11 Aplikacija.

Peto poglavlje se odnosi na primenu q - odstupanja na razne raslojene familije funkcija kroz niz aplikacija (sekcije 5.1 - 5.6). U petom poglavlju je određen kvalitet nejednakosti (Stečkin, Cusa - Huygens, Sándor, D'Aurizio, Becker - Stark), primenom q - odstupanja za $q = 1, 2, \infty$, kao i primenom pseudo odstupanja.

U ovim sekcijama razmatrane su familije "nike" oblika, klase funkcija razmatranih u [7] a kojima se autorka bavila u toku svog istraživanja. Od posebnog interesa je Becker - Stark nejednakost razmatrana u Aplikaciji 9 koja nije "nike" oblika, osim na konkretnom segmentu, čime se oblast istraživanja ove disertacije proširila i na neke nove klase nejednakosti.

Šesto poglavlje se odnosi na različite primene raslojenih familija funkcija u eletrotehnici. Posebno se razmatra Q - funkcija, koja ima široku primenu u različitim oblastima nauke i inženjerstva.

Q - funkcija je direktno povezana sa funkcijom greške $\text{erf}(\cdot)$ i njenom komplementarnom funkcijom $\text{erfc}(\cdot)$, što je od velikog značaja u problemima koji se javljaju u oblasti telekomunikacija.

Za funkciju greške su formirane odgovarajuće familije funkcija na osnovu aproksimacija koje su postigli C. Ren, A. R. MacKenzie [8] i J. - T. Chu [9]. Kvalitet dobijenih aproksimacija je razmatran kao i u petom poglavlju, određivanjem 1, 2, ∞ i pseudo odstupanja.

Posebno je bitno istaći da su u šestom poglavlju prvi put razmatrane raslojene familije funkcija koje u potpunosti nisu "nike" oblika.

U sedmom poglavlju su razmatrani postignuti rezultati u disertaciji, na osnovu čega je donet zaključak o istom i predloženi su budući pravci istraživanja.

Ovu disertaciju prate i dva priloga. Prilog A daje kratak uvid u opšta matematička pravila primenjena u disertaciji, dok Prilog B daje implementacije u programskom paketu Maple, koje su primenjene za simbolička i numerička računanja, za dobijanje rezultata u aplikacijama koje su razmatrane u petom i šestom poglavlju.

Kad god je Maple na osnovu implementacije za integraciju dozvoljavao, rezultati su prikazivani u simboličkom, a potom i numeričkom obliku.

U slučajevima gde Maple, u realnom vremenu, nije davao simboličke rezultate, formirani su odgovarajući numerički algoritmi, takođe, u programskom paketu Maple, te su u tom slučaju dobijeni rezultati samo numerički određeni.

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru dr Branku Maleševiću za sve stručne savete koje godinama unazad nesebično deli sa mnom, a koji su mi pomogli da ovu disertaciju uspešno privedem kraju. Zahvalujem se za svu podršku i razumevanje koji su mi mnogo značili u mom naučnom razvoju, kao i na svim idejama vezano za moje istraživanje tokom izrade disertacije. Verujem da je mnogo godina zajedničke saradnje i prijateljstva pred nama.

Zahvalujem se članu komisije dr Bojanu Mihailović, čiji saveti i doprinosi vezano za oblast raslojenih familija funkcija su mi bili osnova za predmet ove disertacije, inspiracija za dalji razvoj te tematike i postizanje novih rezultata. Zahvalujem se i ostalim članovima komisije : dr Maji Petrović, dr Sanji Vujnović i dr Bojanu Banjcu koji su korisnim sugestijama doprineli kvalitetu i uspešnom završetku ove disertacije.

Posebnu zahvalnost dugujem i spec.mat. Aleksandri Rosić, koja mi je nesebično pomogla tokom izrade disertacije na unapređenju kvaliteta grafičkih prikaza.

Svojim dragim kumovima, prijateljima i kolegama, zahvalujem što su godinama uz mene i čija mi podrška u svakom delu života neizmerno znači.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, čija podrška i pomoć su značajno doprineli izradi disertacije. Posebnu zahvalnost dugujem čerki Teodori za razumevanje i strpljenje, kojoj, kao najvećoj inspiraciji u mom životu i posvećujem ovu disertaciju.

Beograd, 2023. godine

*Marija NENEZIĆ JOVIĆ,
master inženjer elektrotehnike i računarstva*

Odlučivost

"It isn't that they can't see the solution. It is that they can't see the problem."

Gilbert K. Chesterton (1874 - 1936)

1.1 (Ne)odlučivi problemi

Do tridesetih godina XX veka, predstavljeno je nekoliko algoritamski nerešivih problema, odnosno problema za koje ne da nije poznato rešenje, nego se zna da ih je nemoguće rešiti.

Da bi se dovela u pitanje algoritamska rešivost nekog problema, potrebno je definisati sam problem.

Problem odlučivanja određuje se postojanjem algoritma koji na osnovu ulaznih podataka za zadati problem daje odgovor u obliku DA ili NE. Ako problem može da se reši bilo kakvim algoritmom onda je on odlučiv, u suprotnom, problem je neodlučiv.

Još 1928. godine su D. Hilbert¹ i W. Ackermann² problem odlučivanja baziran na postojanju algoritma za rešavanje nazvali "**Entscheidungsproblem**³".

U matematici i računarstvu se primenjuju algoritmi, koji se izvršavaju kroz procedure odlučivanja. Napominjemo da su problemi odlučivanja česta tema istraživanja, a delom je to tema i u ovoj disertaciji.

Jedan od problema odlučivanja je Gödel-ova⁴ teorema o nepotpunosti koja tvrdi da ne postoji potpun i konzistentan logički sistem koji tačno opisuje prirodne brojeve, kao i da konzistentan logički sistem koji opisuje prirodne brojeve ne može da potvrdi sopstvenu konzistentnost.

Logički sistem se smatra konzistentnim ako ne sadrži kontradikcije, odnosno, za svako tvrđenje ϕ ne mogu u isto vreme i ϕ i njegova protivrečna $\neg\phi$ biti dokazive. Logički sistem je potpun ako je dovoljan da se na njemu izgradi odgovarajuća teorija u potpunosti.

U ovom delu ćemo dati istorijski prikaz razvoja ove tematike.

¹David Hilbert : (1862 - 1943) nemački matematičar.

²Wilhelm Friedrich Ackermann : (1896 - 1962) nemački matematičar i logičar.

³Nemački naziv za "problem odlučivanja"

⁴Kurt Friedrich Gödel : (1906 - 1978) nemački matematičar, filozof, logičar.

K. Gödel je 1931. godine pokazao da postoje iskazi o prirodnim brojevima, odnosno pozitivnim celim brojevima, koji su tačni, ali koji se nikada ne mogu dokazati u okviru aritmetike. Potom su, K. Gödel i J. Herbrand⁵, 1933. godine, definisali klasu opših rekurzivnih funkcija, što je, između ostalog, imalo značajan uticaj na razvoj teorijskog i praktičnog računarstva. A. Church⁶ je 1936. godine predstavio metod za definisanje funkcija koji je nazvao λ -račun, dok je iste godine, A. Turing⁷ predstavio teorijski model računa. A. Church i A. Turing, nezavisno jedan od drugog, pokazali su da postoje neki problemi u matematici koji se ne mogu rešiti, u smislu da ne postoji algoritam za njihovo rešavanje. Na osnovu radova K. Gödel-a, A. Church-a, A. Turing-a, kao i mnogih drugih matematičara u to vreme, započeta je teorija izračunljivosti (teorija algoritama) i pokazano je da su mnogi problemi u matematici algoritamski nerešivi, odnosno, neodlučivi.

Algoritam, kao pojava, potiče još od davnina. Drevni matematičari Vavilona su oko 2500 godina p.n.e. primenjivali algoritam deljenja, dok su drevni grčki matematičari oko 240 godina p.n.e. koristili algoritam za pronalaženje prostih brojeva na određenom intervalu. Međutim, algoritam je naziv dobio tek mnogo kasnije, po imenu poznatog persijskog matematičara al-Khwurizmi-ja⁸. On je prvi posmatrao algebru kao zasebnu disciplinu, te je po njegovom delu "Al-Jabr" dobila ime. U današnje vreme, algoritam se najviše vezuje sa oblast računarstva, gde predstavlja proceduru za rešavanje problema.

Teorija izračunljivosti nastala je proučavanjem izračunljivih funkcija i Turing-ove mašine i bazirana je u osnovi na sledećem pitanju : Ako imamo funkciju definisaniu nad skupom prirodnih brojeva, šta znači da je ta funkcija izračunljiva? Za funkciju se kaže da je izračunljiva, ako postoji algoritam takav, da za sve ulazne podatke iz domena funkcije, daje odgovarajuće izlazne podatke. Samim tim, teorija izračunljivosti se bavi pronalaženjem odgovora i rešenja na ovo i slična pitanja, što je dovelo do teorije koja se i danas aktivno istražuje: teorije složenosti algoritma. Napominjemo da se teorija složenosti algoritma sa jedne strane razmatra kao grana matematike, a sa druge strane kao grana računarske tehnike.

Teorija izračunljivosti, kao oblast koja je nastala početkom XX veka, dala je osnovu za nastanak teorijskog računarstva nakon čega je usledio i razvoj savremenih digitalnih računara.

⁵Jacques Herbrand : (1908 - 1931) francuski matematičar.

⁶Alonzo Church : (1903 - 1995) američki matematičar, programer, logičar, filozof.

⁷Alan Mathison Turing : (1912 - 1954) engleski matematičar, programer, logičar, filozof.

⁸Muhammad ibn Musu al-Khwurizmi: (oko 780 - oko 850) persijski matematičar, astronom, geograf.

1.2 Neodlučivi problemi u elementarnoj analizi

B. Poonen⁹ je još jedan istraživač koji se bavio problemima odlučivanja u matematici. U [10] je predstavio nešto drugačije primere problema odlučivanja koji se javljaju u različitim granama matematike. Kao prvo, razjasnio je moguće tumačenje pojma neodlučivosti u matematici, potom se, kada je u pitanju oblast logike i problem odlučivanja, osvrnuo na Gödel-ovu teoremu o nepotpunosti, na osnovu koje su A. Church i A. Turing dokazali da su mnogi problemi neodlučivi i razvili pojam algoritma odlučivanja. B. Poonen je u svom radu analizirao i problem zaustavljanja (The Halting Problem) koji postavlja pitanje da li je moguće napisati algoritam za otklanjanje grešaka koji za ulazne podatke uzima n podataka, gde je n prirodan broj i odlučuje da li će se zaustaviti i iz njega izići sa odgovorom ili će ući u beskonačnu petlju bez konačnog odgovora.

Problemi odlučivanja znaka funkcije kao i postojanja korena funkcije na određenom intervalu, predmet su, između ostalog, i ove disertacije.

B. Poonen je u [10] razmatrao neke primere odlučivih i neodlučivih problema u elementarnoj analizi. Navodimo neke od tih neodlučivih problema za funkciju $f : [a, b] \rightarrow R$:

P_1 : Da li za datu funkciju f postoji koren $x_0 \in [a, b]$ takav da važi $f(x_0) = 0$?

P_2 : Da li za datu funkciju f važi da je $f(x) > 0$ za sve vrednosti $x \in [a, b]$?

Ako je funkcija f polinom sa racionalnim koeficijentima $P_n = P_n(x)$ definisan na segmentu $[a, b]$ pri čemu su a i b takođe racionalni brojevi, tada, na osnovu Sturm¹⁰-ove teoreme, postoji algoritam kojim je moguće odrediti broj realnih korena na intervalu $[a, b]$, što ovaj problem čini odlučivim.

Međutim, postavlja se pitanje : da li je moguće rešiti navedene probleme za svaku, odnosno, bilo koju klasu funkcija?

Istorija ovog problema potiče od rezultata koje su postigli u svojim radovima D. Richardson¹¹ [11], P.S. Wang¹² [12], M. Laczkovich¹³ [13], kada su predstavljene neke klase funkcija f , koje nisu polinomskog oblika i gde za probleme P_1 (postojanje korena) i P_2 (pozitivnost funkcije) nije moguće naći rešenje, što ove probleme čini neodlučivim. Naime, D. Richardson je u [11] pokazao da je problem P_1 za klasu funkcija koja sadrži polinome i sinusnu funkciju neodlučiv problem. Ovim problemom se bavio P. S. Wang, koji se takođe bavio ispitivanjem neodlučivih problema, baziranih na funkcijama sa realnom promenljivom i problemom odlučivanja da li takve funkcije imaju realnu nulu. U [12] je dokazao da je za tačno definisano klasu funkcija takav problem neodlučiv. Svoje dokaze je bazirao na rezultatima koje je D. Richardson postigao u [11]. Preciziraćemo samo jedan deo rezultata:

Neka je \mathbf{S} skup matematičkih izraza za koje važi da postoji skup pravila po kojima se odlučuje da li neki određeni izraz pripada skupu \mathbf{S} . Izraz je formiran od konačnog skupa simbola koje čine brojevi i promenljive. Tako definisani izrazi iz \mathbf{S} predstavljeni su kao funkcije nad nekim domenom \mathbf{D} .

⁹Bjorn Mikhail Poonen (1968 -) : američki matematičar.

¹⁰Jacques Charles Sturm (1803 - 1859) : francuski matematičar.

¹¹Daniel Richardson : engleski matematičar i programer.

¹²Paul S. Wang : (1944 -) kinesko - američki matematičar i programer.

¹³Miklós Laczkovich : (1948 -) mađarski matematičar.

Za neki ceo broj n , možemo da definišemo \mathbf{S}_n kao klasu izraza koju čine :

- (a) racionalni brojevi i realan broj π
- (b) promenljive x_1, x_2, \dots, x_n
- (c) operacije : sabiranje, množenje i kompozicija
- (d) sinusna funkcija

D. Richardson izraze iz \mathbf{S}_n poistovećuje sa funkcijama nad realnim brojevima i pokazuje da se za proizvoljno veliko n , može smatrati da je $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}$.

Naime, B. F. Caviness je rezultate D. Richardson-a definisao kroz sledeću teoremu :

Teorema 1.1 *Neka postoji funkcija f takva da važi $f(x_1) \in \mathbf{S}_1$, tada je pretpostavka : “postoji realan broj r takav da važi $f(r) < 0$ ” rekurzivno neodlučiva.*

Takođe važi sledeće tvrđenje :

Teorema 1.2 *Neka postoji funkcija f takva da važi $f(x_1) \in \mathbf{S}_1$, tada je pretpostavka : “postoji realan broj r takav da važi $f(r) = 0$ ” rekurzivno neodlučiva.*

Ovim tvrđenjima, Wang je, na osnovu radova Richardson-a i Caviness-a došao do rezultata koji dokazuju postojanje klase izraza \mathbf{S} , kao neodlučiv problem, odnosno dokazao je da su za neku funkciju $f \in \mathbf{S}$ tvrđenja koja se odnose na znak funkcije i postojanje realnog korena funkcije rekurzivno neodlučiva.

Navodimo poboljšanje prethodnih rezultata koje je dao M. Laczkovich u [13]. Naime, M. Laczkovich je razmatrao proizvoljne polinome sa celobrojnim koeficijentima, kroz upotrebu funkcija : $x, \sin x^m$ i $\sin(x \cdot \sin x^m)$, za ($m = 1, 2, \dots$), u odnosu na operaciju sabiranja i tako formirao klasu \mathbf{S}_1 .

Upotrebom ove klase eliminisao je π iz skupa izraza (koje je razmatrao D. Richardson), redukovao je broj kompozicija i za takvu klasu je dokazao sledeću teoremu :

Teorema 1.3 *Za $f \in \mathbf{S}_1$ naredna tvrđenja su rekurzivno neodlučiva :*

- (a) postojanje realnog broja x , takvog da je $f(x) > 0$
- (b) postojanje realnog broja x , takvog da je $f(x) = 0$

Redukovanjem kompozicija, zamenom $\sin \pi x_i$ sa $\sin x_i$, M. Laczkovich je dao malo drugačiju varijantu Richardson-ove teoreme, odnosno, za bilo koje i , ako postoji funkcija $f : R \rightarrow R^n$ takva da je

$$f(x) := \left(x \sin x, x \sin x^3, \dots, x \sin x^{2n-1} \right)$$

onda važi sledeća teorema :

Teorema 1.4 *Neka je \mathcal{F} skup funkcija $R \rightarrow R^n$ kreirana od celih brojeva, x i operacija sabiranja, množenja i kompozicije sa $\sin x$. Tada je nemoguće odlučiti za datu $f \in \mathcal{F}$, da li je f na celom intervalu nenegativna. Takođe je nemoguće odrediti da li je funkcija f na celom intervalu pozitivna ili ima koren.*

1.3 Nejednakosti

Matematičari često koriste nejednakosti, kako bi uz pomoć njih ograničili veličine za koje egzaktne formule ne daju konkretnе rezultate i ne mogu se lako izračunati.

Nejednakosti se veoma često koriste u svetu oko nas, iako možda to ne znamo (ili ne razumemo), ali shvatanje kako tumačiti, a samim tim i rešiti neku nejednakost od velike je važnosti u svakodnevnom životu. Tako na primer imamo: ograničenje brzine na putu, maksimalno ograničenje plaćanja na bankovnim računima, broj tekstualnih poruka koje mogu da se šalju svakog meseca sa mobilnog telefona, sve su to situacije iz svakodnevnog života koje je moguće predstaviti nejednakostima. Na ovakav način, mnogi problemi iz svakodnevnog života se mogu modelirati nejednakostima, tako što se najpre identifikuju veličine koje se porede, izabere odgovarajući znak nejednakosti, a kao rešenje dobijamo niz mogućnosti.

Slobodnije rečeno, nejednakosti mogu da predstavljaju odnos između dva broja ili algebarska izraza, koji može da bude veći od, veći ili jednak, manji od, manji ili jednak i kao takav može se koristiti i u drugim naučnim oblastima kao što su računarstvo, ekonomija, statistika, fizika i mnogo toga drugog.

Matematičari su se tokom istorije često sretali sa problemima modeliranim nejednakostima, kao i samim nejednakostima koje je bilo teško tumačiti, odnosno, odrediti njihova rešenja.

Drevni matematičari su poznavali sam pojam nejednakosti, njima su se bavili i tako definisali: nejednakost aritmetičko - geometrijske sredine, nejednakost trougla, izoperimetrijsku nejednakost. Jedan od najpoznatijih matematičara, Euklid¹⁴, je koristio pojmove kojima je upoređivao magnitude, dok su stari Grci, među kojima je i Arhimed¹⁵, koristili nejednakosti da izračunaju zapreminu piramide, a koristili su nejednakosti i za mnoge druge primene.

Iako su nejednakosti postojale kao pojam u različitim granama matematike i svojim postojanjem pomogle matematičkim otkrićima, nemaju dugu istoriju kao posebna disciplina koja se proučava. Jednu od prvih knjiga "Nejednakosti" napisali su G. Hardy¹⁶, J. Littlewood¹⁷, G. Pólya¹⁸ [14] 1934. godine. Potom sledi knjiga, na ovu temu, koju su napisali E. Beckenbach¹⁹ i R. Bellman²⁰ 1961. godine [15]. Treće bitno delo "Analitičke nejednakosti" napisao je D. Mitrinović²¹ 1970. godine [16]. Ove knjige od nejednakosti kao pojma, formiraju oblast matematike koja daje nove ideje, tehnike i primene za nova istraživanja.

Navodimo neke istorijske činjenice o nejednakostima.

Iako su se nejednakosti koristile od vremena starih Grka, pa sve do modernog doba, primenjivale su se bez definisanog simbola nejednakosti veoma dugo.

¹⁴Euklid (oko 300. p.n.e.) : starogrčki matematičar, geometar, logičar.

¹⁵Arhimed (oko 287. p.n.e. - 212. p.n.e.) : starogrčki matematičar, astronom, fizičar.

¹⁶Godfrey Harold Hardy (1877 - 1947) : engleski matematičar.

¹⁷John Edensor Littlewood (1885 - 1977) : engleski matematičar.

¹⁸George Pólya (1887 - 1985) : mađarski matematičar.

¹⁹Edwin Ford Beckenbach (1906 - 1982) : američki matematičar.

²⁰Richard Ernest Bellman (1920 - 1984) : američki matematičar, programer.

²¹Dragoslav S. Mitrinović (1908 - 1995) : srpski matematičar.

Znaci za veće od ($>$) i manje od ($<$) uvedeni su 1631. godine u delu britanskog matematičara T. Harriot-a²² "Artis Analyticae Praxis", objavljenog 10 godina nakon njegove smrti. Simbole je zapravo izmislio urednik knjige. Harriot je u početku koristio trouglaste simbole koje je urednik promenio da liče na moderne simbole. Naime, Harriot je bio inspirisan simbolom na ruci Indijanca kada je dobio ideju za simbole nejednakosti, odnosno, razložio je domorodački simbol na dva dobro poznata simbola $>$ i $<$. Harriot je takođe koristio paralelne linije (vertikalne " \parallel ", ne kao današnje horizontalne " $=$ ") kako bi označio pojam "jednakosti". Kako se navodi u "VNR Concise Encyclopedia of Mathematics", znak jednakosti je izumeo R. Recorde²³ matematičar na dvoru engleskog kralja Edvarda VI, koji je između ostalog predstavio algebru svojim sunarodnicima. Prvi put je koristio znak jednakosti u knjizi "The Whetstone of Witte", 1557. godine, kako bi izbegao ponavljanje reči "jednako je". Simbole za manje ili jednako (\leq) i veće ili jednako (\geq) sa jednom linijom znaka jednakosti ispod njih prvi je upotrebio francuski matematičar P. Bouguer²⁴ 1734. godine. Pored toga što su u 18. veku konačno definisani simboli za nejednakosti, uvelo se još nešto novo - počelo je pojedinim nejednakostima da se dodeljuju i imena, što je dalo još veću važnost nejednakostima. Nejednakosti se više nisu zvalile po onome čime su se bavile, već su se nejednakostima dodeljivala imena matematičara koji su ih ili otkrili ili dokazali po prvi put (npr. "Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky").

Kao što je već pomenuto, od 1934. godine bogata literatura posvećena je otkrivanju novih vrsta nejednakosti i njihovim primenama. Važnost nejednakosti je prihvaćena od samog početka njihovog nastanka pa do danas i široko je prihvaćena kao jedna od glavnih pokretača napretka analize. Različite nejednakosti su uopštavali mnogi matematičari, pa je to sada aktivno i interesantno polje istraživanja. Poslednjih godina teorija matematičkih nejednakosti je zaokupila pažnju velikog broja istraživača i uticala na različite grane matematike. Mnogi istraživački časopisi objavljaju članke koji se odnose na ovu važnu oblast matematike. Elementarne nejednakosti imaju široku primenu u mnogom oblastima matematike, kao i drugih nauka. Njihovi dokazi su rešenja mnogih problema. Mnogi matematičari se bave nejednakostima, traže u do sad poznatoj literaturi, one koje žele da primene, da poboljšaju opseg rešenja, da za nejednakosti koje nemaju dokaze, te dokaze i pronađu, što je za mnoge i veliki izazov. Tako su mnoge elementarne nejednakosti evoluirale, čime je proširena i njihova primena, a samim tim i dat još veći značaj ovom polju istraživanja.

U ovoj disertaciji razmatrana je posebna klasa nejednakosti iz Teorije analitičkih nejednakosti, dobijeni su novi rezultati, a razmatrana je i njihova primena u elektrotehnici.

²²Thomas Harriot (oko 1560 - 1621) : engleski astronom, matematičar, etnograf, prevodilac.

²³Robert Recorde (oko 1512 - 1558) : velški fizičar, matematičar.

²⁴Pierre Bouguer (1698 - 1758) : francuski matematičar, geodeta, astronom.

Miksovane trigonometrijske polinomske (MTP) funkcije

*"The moving power of mathematical invention
is not reasoning but imagination."*

Augustus de Morgan (1806 - 1871)

2.1 Definicija MTP funkcija i osnovne osobine

2.1.1 Miksovani trigonometrijski polinomski sistemi (MTPS)

B. Dong, B. Yu i Y. Yu u [17] su razmatrali **miksovane trigonometrijske polinomske sisteme (MTPS)**, gde su ih definisali kao :

$$F(y, \theta) = (f_1(y, \theta), \dots, f_{n+m}(y, \theta))^T = 0 \quad (2.1)$$

za $y = (y_1, \dots, y_n)$ i $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, pri tom

$$f_i(y, \theta) = \sum_{\alpha \in S_i} b_{i\alpha} y^\beta \sin^\mu \theta \cos^\nu \theta + c_i^1 \quad (2.2)$$

za $1 \leq i \leq n+m$, $\alpha = (\beta, \mu, \nu)$, $S_i \subset N^{n+2m} \setminus \{0\}$, $c_i^1 = \text{const.}$ i pri čemu je:

$$\begin{cases} y^\beta &= y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} \\ \sin^\mu &= \sin_1^{\mu_1} \dots \sin_m^{\mu_m} \\ \cos^\nu &= \cos_1^{\nu_1} \dots \cos_m^{\nu_m} \end{cases} \quad (2.3)$$

U navedenom radu [17] su prikazane i metode za rešavanje MTPS, dok su u [17] i [18] dati primeri praktične primene za rešavanje problema u obradi signala kod sonara i radara kao i modeliranje d_1 , ipp i PUMA sistema preko MTPS. Naime, ovi sistemi se primenjuju u mnogim naučnim oblastima i inženjerstvu, među kojima su i neurofiziologija [19], kinematika [20], PUMA robot [21], [22].

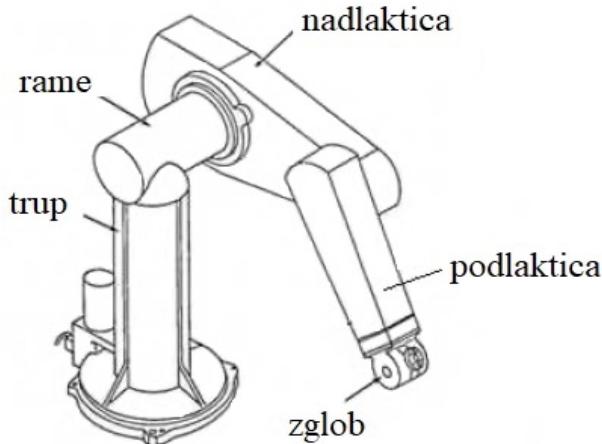
Ovde navodimo kratak istorijat i primene PUMA robota, jer se u matematičkom opisu takvih robota javljaju MTPS [1], [21], [22], [23], [24], .

Naziv PUMA je nastao kao skraćenica od "Programmable Universal Manipulation Arm". PUMA [25] je industrijska robotska ruka koju je razvio V. Scheinman i koja se prvobitno proizvodila u robotskoj kompaniji Unimation. Kompanije Westinghouse, Stäubli i Nokia Robotics su takođe proizvodile PUMA robote tokom 1980-ih godina, pri čemu je PUMA-560 najčešće korišćen model. PUMA robot se proizvodio u tri kategorije: 200, 500 i 700 serije. Serija 200 je manja desktop jedinica, model koji je bio korišćen za prvu robotsku stereotaktičku biopsiju mozga 1985. godine. Serija 500 je veličine do skoro 2 metra. Ovaj model je popularnog dizajna i najprepoznatljivija je konfiguracija. Serija 700 je najveća u grupi i bila je namenjena za montažnu traku, farbanje i zavarivanje. Bez obzira na dimenzije i funkciju PUMA robota, za njih je karakteristično to da se sastoje od dve glavne, međusobno povezane, komponente: mehaničke ruke i kontrolnog sistema (kontrolera). Za modeliranje položaja robotske ruke u sistemu (definisanje trajektorije pokreta), koriste se MTPS.

Robotska ruka, odnosno robotski manipulator, ima značajnu ulogu u mnogim industrijskim aplikacijama, kao i automatici, gde jedan složen robotski sistem može da izvede mnogobrojne radnje umesto čoveka. Robotska ruka aktivira niz pokreta, kako bi rešila zadatak, unutar svog unapred definisanog radnog prostora, a što zavisi od fizičkih karakteristika same ruke, odnosno, broja njenih spojeva (zglobova).

Robot PUMA - 560 je matematički najbolje opisan robot, pa se samim tim najčešće koristi u istraživačke i obrazovne svrhe. U [1], [23], [24] je razmatran dizajn robotske ruke, optimalna trajektorija PUMA - 560 robota, kinematika, kao i algoritmi za njihovo izračunavanje. U [1] je, između ostalog, razmatran robot PUMA - 560 sa 6 DOF (degree of freedom, stepena slobode, odnosno mogućih pokreta zglobova), pri čemu je dat način rešavanja zadataka baziran na kinematici i planiranju trajektorije robotske ruke. Rešenje je dato u vidu optimizacionog algoritma, koji se bavi analizom kinematike i trajektorije robota.

Na sledećoj slici [1] je dat izgled PUMA robotske ruke :



Slika 1: PUMA - 560 robotska ruka

2.1.1 MIKSOVANI TRIGONOMETRIJSKI POLINOMSKI SISTEMI (MTPS)

Određivanje položaja robotske ruke se vrši na osnovu koordinantnih sistema koji se postavljaju u zglobove i na segmente robota na različite načine. Položaj svakog koordinatnog sistema u odnosu na segment je uvek poznat.

Način postavljanja koordinatnih sistema na segmente robota naziva se Denavit-Hartenbergova ili DH notacija (konvencija), kojom se opisuje ukupna transformacija sistema preko svega četiri parametra θ , a , d i a .

Karakteristično za PUMA robota je to, da se sve tri ose zglobova hvataljke seku u jednoj tački, pri čemu se takav zglob hvataljke naziva Ojlerov zglob. Ukratko, koordinatni sistemi PUMA robota, postavljeni u skladu sa DH notacijom, su prikazani sledećom tabelom :

Tabela 2.1: DH notacija za PUMA 560 robot sa 6DOF [1]

segment	d	a	α	inicijalna vrednost	konačna vrednost
1	0	0	-90	-185	185
2	0.7	0.5	0	-155	35
3	0.948	0.948	90	-130	154
4	0	0.68	-90	-350	350
5	0	0	90	-130	130
6	0	0.853	0	-350	350

Za moguće pokrete robotske ruke na osnovu slobode kretanja date prethodnom DH tablicom, dobija se transformaciona matrica [1] :

$$A_i = \begin{bmatrix} C\theta_{n+1} & -S\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & S\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}C\theta_{n+1} \\ S\theta_{n+1} & C\theta_{n+1}C\alpha_{n+1} & -C\theta_{n+1}S\alpha_{n+1} & \alpha_{n+1}S\theta_{n+1} \\ 0 & S\alpha_{n+1} & C\alpha_{n+1} & d_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je $C = \cos$ i $S = \sin$.

Za svaki zglob se može odrediti pojedinačna matrica transformacije korišćenjem jednačine za A_i . Ovaj izraz sadrži tri fiksna elementa, kao što je jedna promenljiva (teta), jedna matrica tipa 1×3 i jedna 3×3 rotaciona matrica. Položaj hvataljke je označen matricom tipa 1×3 dok je orijentacija kraja hvataljke predstavljena rotacionom matricom 3×3 .

Karakteristične matrice za svaki zglob PUMA robotske ruke se mogu odrediti kao :

$$A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & \alpha_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & \alpha_1 S\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & \alpha_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & \alpha_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & 0 & S\theta_3 & 0 \\ S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & -S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & 0 & C\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & 0 & S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & 0 & -C\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu ovih karakterističnih matrica, kompletan transformacija se može predstaviti sa :

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

odnosno

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} n_x &= C_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] + S_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ n_y &= S_1[C_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - S_{23}S_5C_6] - C_1(S_4C_5C_6 + C_4S_6) \\ n_z &= S_{23}(C_4C_5C_6 - S_4S_6) - C_{23}S_5C_6 \\ o_x &= C_1[-C_{23}(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] + S_1(-S_4S_5S_6 + C_4C_6) \\ o_y &= S_1[-C_{23}(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + S_{23}S_5S_6] - C_1(-S_4C_5S_6 + C_4C_6) \\ o_z &= -S_{23}(C_4C_5C_6 + S_4C_6) + C_{23}S_5S_6 \\ a_x &= C_1[C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5] - C_1S_4S_5 \\ a_y &= S_1[C_{23}C_4S_5 + S_{23}C_5] - C_1S_4S_5 \\ a_z &= S_{23}C_4S_5 - S_{23}C_5 \\ p_x &= C_1(C_2a_2 + a_1) + S_1d_3 \\ p_y &= S_1(C_2a_2 + a_1) - C_1d_3 \\ p_z &= S_2a_2 \end{aligned}$$

Prethodna analiza je navedena iz razloga da se pokaže da potencijalna putanja kretanja PUMA robotske ruke može da se predstavi uz pomoć MTPS.

2.1.2 MTP funkcije i nejednakosti

U slučaju kada je

$$y = x \quad \text{i} \quad \theta = x$$

leva strana MTPS se transformiše u *miksovanu trigonometrijsku polinomsку (MTP) funkciju*, odnosno:

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^n b_{i\alpha} x^\beta \sin^\mu x \cos^\nu x \quad (2.4)$$

gde su $b_{i\alpha} \in R \setminus \{0\}$, $(\beta, \mu, \nu) \in N_0^3$ i $n \in N$. Uvođenjem : $\alpha_i = b_{i\alpha}$ i $(\beta, \mu, \nu) = (p_i, q_i, r_i) \in N_0^3$ (za $i = 1..n$ i $n \in N$) dobijamo oblik MTP funkcije :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x \quad (2.5)$$

koji je prvi put naveden i primjenjen u [26] i od tada je opšte prihvaćen. U [26] je dat i postupak dokazivanja MTP nejednakosti tipa $f(x) > 0$, za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

MTP funkcije su razmatrane i u [27] gde je postavljen problem određivanja uslova, odnosno vrednost funkcije u rubnim tačkama intervala :

$$f(0) = 0 \quad \text{i} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

gde su koeficijenti MTP funkcije racionalni ne-nula brojevi $\alpha_i \in R \setminus \{0\}$, a $(p_i, q_i, r_i) \in N_0^3$ trojke brojeva iz N_0 , za segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Problem se može rešiti numerički, ali je u radu [27] data i procedura odlučivanja kojom se polazna MTP funkcija anulira u rubnim tačkama.

U [2] dat je metod dokazivanja, dok je u disertaciji [3] u vidu algoritma predstavljena procedura za dokazivanje MTP nejednakosti unutar intervala $(0, \frac{\pi}{2})$. Određivanje vrednosti funkcije u rubnim tačkama, kao i unutar intervala $(0, \frac{\pi}{2})$ daje mogućnost potpunog automatskog dokazivanja MTP nejednakosti na celom segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$.

MTP funkcije i nejednakosti su predmet proučavanja u matematici i računarstvu [2], [16], [17], [28], [29], dok su postupci automatskog dokazivanja MTP funkcija i nejednakosti razmatrani u [26], [30], [31], [32], kao i u disertaciji [3].

Jedan način dokazivanja MTP nejednakosti $f(x) > 0$ je određivanje polinoma $P(x)$ tako da važi $f(x) > P(x) > 0$, za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a takav postupak je dat u narednom poglavljju.

2.2 Jedan postupak dokazivanja MTP nejednakosti

Kao što je pomenuto u prethodnoj sekciji, u [26] je razmatran metod dokazivanja MTP nejednakosti, odnosno, klase nejednakosti oblika :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x > 0 \quad (2.6)$$

gde su $\alpha_i \in R \setminus \{0\}$, $(p_i, q_i, r_i) \in N_0^3$, $n \in N$ i $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. U Teoriji analitičkih nejednakosti se često primenjuju funkcije ovog oblika. Autorka disertacije je u toku istraživanja analizirala mnoge radeve²⁵ koji se bave ovim nejednakostima pri čemu su neke od njih i korišćene u ovoj disertaciji.

Metode dokazivanja bazirane su na poređenju sinusne i kosinusne funkcije sa Maclaurin-ovim polinomima, međutim, te iste metode ne daju rezultate za aproksimaciju sinusne i kosinusne funkcije viših stepena. U [26] je definisan metod za dokazivanje nejednakosti tipa MTP, transformacijom funkcije $f(x)$ u ekvivalentan oblik, gde se javljaju sinusne i kosinusne funkcije višestrukih uglova.

Navodimo sledeće definicije i teoreme iz [26]:

Definicija 2.1 Neka je $f(x)$ proizvoljna funkcija koja se može aproksimirati Taylor-ovim polinomom $T_k(x)$ stepena k , u okolini neke tačke a . Za dato $\eta > 0$ se na intervalu $x \in (a - \eta, a + \eta)$ mogu odrediti:

- (a) navišna aproksimacija funkcije $f(x)$ u označi $\bar{T}_k^{f,a}(x) = T_k(x)$ ako važi $T_k(x) \geq f(x)$
- (b) nanižna aproksimacija funkcije $f(x)$ u označi $\underline{T}_k^{f,a}(x) = T_k(x)$ ako važi $T_k(x) \leq f(x)$

Teorema 2.1 (a) Za polinom $T_n(t) = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$ gde je $n = 4k + 1$, $k \in N_0$ važi

$$\left(\forall t \in [0, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \sin t$$

$$\left(\forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t$$

Za $t = 0$ nejednakosti se pretvaraju u jednakosti.

Za $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važe jednakosti $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$ i $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$.

- (b) Za polinom $T_n(t) = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$ gde je $n = 4k + 3$, $k \in N_0$ važi

$$\left(\forall t \in [0, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t$$

$$\left(\forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \sin t$$

Za $t = 0$ nejednakosti se pretvaraju u jednakosti.

Za $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važe jednakosti $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$ i $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$.

²⁵Neki od radova : [33], [34], [35], [36] - [39], [40], [41], [42] - [45], [46], [47], [48], [49], [50] - [52], [53] - [55], [56], [57], [58], [59], [60] - [62], [63], [64] - [71]

$$(c) \text{ Za polinom } T_n(t) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} \text{ gde je } n = 4k, k \in N_0 \text{ važi}$$

$$\left(\forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \cos t$$

Za $t = 0$ nejednakost se pretvara u jednakost.

Za $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$.

$$(d) \text{ Za polinom } T_n(t) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} \text{ gde je } n = 4k + 2, k \in N_0 \text{ važi}$$

$$\left(\forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \cos t$$

Za $t = 0$ nejednakost se pretvara u jednakost.

Za $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$ važi jednakost $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$.

U [4] dat je poredak koji važi za sinusnu funkciju :

$$\begin{aligned} \underline{T}_3^{\sin,0}(t) &\leq \underline{T}_7^{\sin,0}(t) \leq \underline{T}_{11}^{\sin,0}(t) \leq \underline{T}_{15}^{\sin,0}(t) \leq \dots \leq \sin t \leq \dots \\ &\leq \bar{T}_{13}^{\sin,0}(t) \leq \bar{T}_9^{\sin,0}(t) \leq \bar{T}_5^{\sin,0}(t) \leq \bar{T}_1^{\sin,0}(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

za $t \in [0, \sqrt{20}] = [0, 4.472\dots]$. Ovaj poredak je primenjen i u [5] za dokazivanje Jordan-Stekkin i Becker-Stark nejednakosti. U [4] je takođe dat poredak koji važi za kosinusnu funkciju :

$$\begin{aligned} \underline{T}_2^{\cos,0}(t) &\leq \underline{T}_6^{\cos,0}(t) \leq \underline{T}_{10}^{\cos,0}(t) \leq \underline{T}_{14}^{\cos,0}(t) \leq \dots \leq \cos t \leq \dots \\ &\leq \bar{T}_{12}^{\cos,0}(t) \leq \bar{T}_8^{\cos,0}(t) \leq \bar{T}_4^{\cos,0}(t) \leq \bar{T}_0^{\cos,0}(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

za $t \in [0, \sqrt{12}] = [0, 3.464\dots]$.

Metod dokazivanja MTP nejednakosti zasniva se na ideji da se uprosti izraz $\sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$, koristeći višestruke uglove.

Važi teorema:

Teorema 2.2 Za $r_i, q_i \in N$ važi :

(a) r_i, q_i oba neparna :

$$\sin^{q_i} x \cos^{r_i} x = \sum_{k=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}-1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{q_i}{2}+k+j-\frac{1}{2}} \binom{r_i}{j} \binom{q_i}{k-j} \sin((r_i+q_i-2k)x)}{2^{r_i+q_i-1}}$$

(b) r_i paran, q_i neparan :

$$\sin^{q_i} x \cos^{r_i} x = \sum_{k=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{q_i}{2}+k+j-\frac{1}{2}} \binom{r_i}{j} \binom{q_i}{k-j} \sin((r_i+q_i-2k)x)}{2^{r_i+q_i-1}}$$

(c) r_i neparan, q_i paran :

$$\sin^{q_i} x \cos^{r_i} x = \sum_{k=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{q_i}{2}+k+j} \binom{r_i}{j} \binom{q_i}{k-j} \cos((r_i+q_i-2k)x)}{2^{r_i+q_i-1}}$$

(d) r_i, q_i oba parna :

$$\begin{aligned} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x &= \sum_{k=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}-1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{q_i}{2}+k+j} \binom{r_i}{j} \binom{q_i}{k-j} \cos((r_i+q_i-2k)x)}{2^{r_i+q_i-1}} \\ &+ \sum_{j=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}} \frac{(-1)^{q_i+\frac{r_i}{2}+j} \binom{r_i}{j} \binom{q_i}{\frac{r_i}{2}+\frac{q_i}{2}-1} \cos((r_i+q_i-2k)x)}{2^{r_i+q_i}} \end{aligned}$$

Na osnovu Teoreme 2.2 može se definisati opšti ekvivalentan oblik MTP funkcije:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^{p_i} \left(\sum_{k=0}^{\frac{r_i+q_i}{2}-1} \theta_k \text{trig}_k^{q_i, r_i} ((q_i + r_i - 2k)x) \right) \quad (2.9)$$

gde je θ_k koeficijent uz trigonometrijsku funkciju, na osnovu Teoreme 2.2,

$$\text{trig}_k^{q_i, r_i} = \begin{cases} \sin : (q_i, r_i - \text{oba neparna}) \vee (q_i - \text{paran}, r_i - \text{neparan}) \\ \cos : (q_i - \text{neparan}, r_i - \text{paran}) \vee (q_i, r_i - \text{oba parna}). \end{cases}$$

Na osnovu prethodno navedenog dolazimo do sledećih nejednakosti vezanih za sinusnu, odnosno kosinusnu funkciju, samim tim i za $\text{trig}_k^{q_i, r_i}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{2r+1} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} < \sin t < \sum_{i=0}^{2r} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ \sum_{i=0}^{2s+1} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!} < \cos t < \sum_{i=0}^{2s} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

za $r, s \in N$.

Primenom ovih ograničenja dolazimo i do konačnog oblika MTP funkcije :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\frac{r_i}{2} + \frac{q_i}{2} - 1} \alpha_i \theta_k x^{p_i} \operatorname{trig}_k^{q_i, r_i} ((q_i + r_i - 2k)x). \quad (2.11)$$

Kao što je u prethodnoj sekciji navedeno, metoda dokazivanja MTP nejednakosti kod kojih je $f(x) > 0$ se zasniva na određivanju polinoma $P(x)$ tako da važi $f(x) > P(x) > 0$ za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, a sve u zavisnosti od znaka proizvoda $\alpha_i \theta_k$.

Tačnije, za bilo koju MTP funkciju $f(x)$, za neko proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se formirati polinom $P(x)$ tako da važi :

$$P(x) < f(x) < P(x) + \varepsilon$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Na osnovu Definicije 2.1, kao i Teoreme 2.1, a vezano za transformaciju i aproksimaciju MTP funkcije $f(x)$, kreiran je metod za određivanje polinoma $P(x)$ [26], koristeći Tajlor-ove aproksimacije. Ako taj polinom ispunjava uslove da je $P(x) > 0$ onda važi i da je $f(x) > 0$, a sve na intervalu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

U [38] dato je sledeće tvrđenje :

Teorema 2.3 Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, važi

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} < 2 + \frac{2}{45}x^3 \tan x.$$

Konstanta $\frac{2}{45}$ je najbolja moguća.

U [26] je dat dokaz nejednakosti navedene u Teoremi 2.3, putem definisanog metoda, za MTP nejednakosti.

Takođe je, uz pomoć algoritma, dat dokaz za otvoreni problem [61]:

Teorema 2.4 Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Tada važi

$$\begin{aligned} \frac{(2\pi^4/3)x^3 + (8\pi^4/15 - 16\pi^2/3)x^5}{(\pi^2 - 4x^2)^2} &< x \sec^2 x - \tan x \\ &< \frac{(2\pi^4/3)x^3 + (256/\pi^2 - 8\pi^2/3)x^5}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \end{aligned}$$

gde su $\left(\frac{8\pi^4}{15} - \frac{16\pi^2}{3}\right)$ i $\left(\frac{256}{\pi^2} - \frac{8\pi^2}{3}\right)$ najbolje moguće konstante.

U [30] predstavljen je metod za dokazivanje MTP nejednakosti oblika (2.6) tako što su MTP nejednakosti redukovane na odgovarajuće polinomske nejednakosti. Prikazana je i primena algoritma na primerima. Takođe, algoritam je primenjen i za analizu racionalne Padé aproksimacije funkcije $\cos^2 x$, kao i poboljšanje klase nejednakosti koje je definisao Z.H. Yang.

Kao osnova za istraživanje a samim tim i kreiranje algoritma uzet je rad Mortici-ja koji je proširio opseg Wilker - Cusa - Huygens nejednakosti, primenjujući metod koji je nazvao prirodni pristup [50].

Metod se zasniva na poređenju i zameni $\sin x$ i $\cos x$ sa odgovarajućim Tajlor-ovim polinomima oblika (2.10), za svako celobrojno $r, s \in N_0$ i $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Na ovaj način se komplikovani trigonometrijski izrazi mogu redukovati na prostije polinomske ili racionalne izraze.

Nekoliko istraživača je u svojim radovima vršilo ispitivanja i transformaciju komplikovanih MTP funkcija i nejednakosti uz pomoć ovog prirodnog pristupa. Analizirani su samo trigonometrijski izrazi koji se odnose na neparne stepene $\cos x$, pa prirodna metoda nije primenljiva na funkciju $\cos^2 x$ na celom segmentu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

U [30] je kreiran algoritam baziran na prirodnom pristupu, sa ciljem da se on proširi i formalizuje za širu klasu trigonometrijskih nejednakosti i da uključi i one sa parnim stepenom $\cos x$, bez ograničenja. Kao primer primene ovog algoritma, baziranog na prirodnom pristupu, u [30] su dati sledeći dokazi :

- (a) Dokaz racionalne Padé aproksimacije funkcije $\cos^2 x$.

G. Bercu [72] je primenjivao Padé aproksimacije kako bi dokazao određene nejednakosti sa trigonometrijskim funkcijama. Neka je $(f(x))_{[m/n]}$ Padé aproksimant $[m/n]$ funkcije $f(x)$ [72],

Tada ako predstavimo kosinusnu funkciju $\cos^2 x$ preko Padé aproksimacija :

$$(\cos^2 x)_{[6/4]} = \frac{-59x^6 + 962x^4 - 3675x^2 + 4095}{17x^4 + 420x^2 + 4095}$$

i

$$(\cos^2 x)_{[4/4]} = \frac{163x^4 - 780x^2 + 945}{13x^4 + 165x^2 + 945}.$$

onda važi sledeća teorema :

Teorema 2.5 Sledеće nejednakosti su tačne za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$(\cos^2 x)_{[6/4]} < \cos^2 x < (\cos^2 x)_{[4/4]} \quad (2.12)$$

- (b) Poboljšanje klase funkcija Z.H. Yang-a.

Z.H. Yang [65] je dokazao sledeće nejednakosti, za svako $x \in (0, \pi)$:

$$\cos^2 \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \cos^3 \frac{x}{3} \leq \frac{2 + \cos x}{3}. \quad (2.13)$$

Pre njega su Klén, Visuri i Vuorinen [58] dokazali nejednakost na intervalu $\left(0, \sqrt{\frac{27}{5}}\right) = (0, 2.322\dots)$.

Primenom algoritma prirodnog pristupa dobijeno je poboljšanje za ovu klasu nejednakosti:

Teorema 2.6 Za svako $x \in (0, \pi)$ i $a \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ sledeće nejednakosti važe:

$$\cos^2 \frac{x}{2} \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^a \leq \frac{\sin x}{x}. \quad (2.14)$$

Algoritam sa metodom prirodnog pristupa može se uspešno primeniti za dokazivanje široke kategorije klasičnih MTP nejednakosti. Primenjen je za dokazivanje nekih otvorenih problema MTP nejednakosti, a može se koristiti i za dokazivanje nekih novih klasa nejednakosti.

2.3 Neki doprinosi MTP nejednakostima

2.3.1 Nove aproksimacije nekih izraza koji uključuju trigonometrijske funkcije

Rad "New approximations of some expressions involving trigonometric functions" [4], autora **M. Nenezić**, B. Malešević, C. Mortici je objavljen sa ciljem da se primeni metod rešavanja trigonometrijskih nejednakosti, kasnije definisan u [26], za aproksimaciju nekih trigonometrijskih funkcija.

Rad je takođe imao za cilj poboljšanje rezultata koje je dobio C. Mortici u [51] u vezi sa Wilker - Cusa - Huygens nejednakostima. Ovo se pokazalo kao odličan primer primene metoda čija je aplikacija moguća i uspešna na širu klasu problema.

Naime, Wilker je u [73] razmatrao nejednakost :

$$2 < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x}$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, pri čemu je postavio problem određivanja najveće konstante $c > 0$ tako da važi:

$$2 + cx^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x}$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wilker-ova nejednakost je bila interesantna mnogim autorima, te je, na osnovu svog istraživanja, X. Sumner [74] dokazao sledeću dvostruku nejednakost

$$2 + \frac{16}{\pi^4} x^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \frac{8}{45} x^3 \tan x$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

C. Mortici je dao u [51] sledeće dve teoreme :

Teorema 2.7 Za svako $x \in (0, 1)$ važi :

$$2 + \left(\frac{8}{45} - a(x) \right) x^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \left(\frac{8}{45} - b(x) \right) x^3 \tan x$$

gde je $a(x) = \frac{8}{945} x^2$, $b(x) = \frac{8}{945} x^2 - \frac{16}{14175} x^4$.

Teorema 2.8 Za svako $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ na levoj strani i za svako $x \in \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ na desnoj strani važi sledeća nejednakost :

$$2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + c(x) \right) x^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + d(x) \right) x^3 \tan x$$

gde je $c(x) = \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, $d(x) = \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \left(\frac{960}{\pi^6} - \frac{16}{\pi^4} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$.

Metod dokazivanja nejednakosti u [4] je predstavljen i u [26] i zasnovan je na upotrebi odgovarajućih aproksimacija nekih miksovanih trigonometrijskih polinoma sa konačnim Taylor-ovim razvojem i predstavlja nastavak Mortici-jeve analize iz [50]. Metod iz [26] je primenjen i u [35], [49], [75] za srođne nejednakosti.

Na osnovu originalnog računskog metoda, izvršena je modifikacija funkcija $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ koje je Mortici predstavio kao rezultat svoje analize, pri čemu su dobijeni precizniji rezultati na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu toga u [4] dokazane su dve nove teoreme :

Teorema 2.9 Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$2 + \left(\frac{8}{45} - a(x) \right) x^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \left(\frac{8}{45} - b(x) \right) x^3 \tan x$$

gde je $a(x) = \frac{8}{945}x^2$, $b_1(x) = \frac{8}{945}x^2 - \frac{a}{14175}x^4$, pri čemu je $a = \frac{480\pi^6 - 40320\pi^4 + 3628800}{\pi^8} = 17.15041\dots$

Teorema 2.10 Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi sledeća nejednakost :

$$2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + c(x) \right) x^3 \tan x < \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + d(x) \right) x^3 \tan x$$

gde je $c(x) = \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$, $d(x) = \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \left(\frac{960}{\pi^6} - \frac{16}{\pi^4} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$.

Navedene teoreme nastale su za konkretnе MTP nejednakosti.

2.3.2 Neka poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti

Rad "Some improvements of the Jordan-Stečkin and Becker-Stark inequalities" [5], autora M. Nenezić i L. Zhu, je nastao kao poboljšanje Jordan-Stečkin i Becker-Stark nejednakosti koje su razmatrane od strane autora L. Debnath, C. Mortici i L. Zhu u [76], odnosno nejednakosti:

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.15)$$

i njenih poboljšanja

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.16)$$

i

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^5} (\pi^4 - 16x^4), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.17)$$

U [5] su data sledeća poboljšanja poznatih nejednakosti :

(a) Teorema 1 iz [76] : Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 < \\ & < \frac{\sin x}{x} < \\ & < \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 + \frac{1}{120}x^4 \end{aligned} \quad (2.18)$$

U [5] dato je poboljšanje nejednakosti (2.18).

Kako važi (2.7), sinc x funkcija se može aproksimirati sa :

$$\begin{aligned} \underline{T}_2^{\text{sinc},0}(x) & < \underline{T}_6^{\text{sinc},0}(x) < \underline{T}_{10}^{\text{sinc},0}(x) < \underline{T}_{14}^{\text{sinc},0}(x) < \dots < \text{sinc } x < \dots \\ & < \bar{T}_{12}^{\text{sinc},0}(x) < \bar{T}_8^{\text{sinc},0}(x) < \bar{T}_4^{\text{sinc},0}(x) < \bar{T}_0^{\text{sinc},0}(x), \end{aligned} \quad (2.19)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \sqrt{20}) = (0, 4.47213 \dots)$, na osnovu činjenice da je Tajlor-orov razvoj sinc x funkcije dat sa:

$$\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \quad (2.20)$$

za $x \neq 0$.

Na osnovu aproksimacija (2.19), dobijena je sledeća teorema :

Teorema 2.11 Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$\begin{aligned} \underline{T}_2^{\text{sinc},0}(x) & = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 \leq \\ & \leq \underline{T}_{4k_1-2}^{\text{sinc},0}(x) < \text{sinc } x < \bar{T}_{4k_2}^{\text{sinc},0}(x) \leq \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \\ & + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right)x^2 + \frac{1}{120}x^4 = \bar{T}_4^{\text{sinc},0}(x) < \bar{T}_0^{\text{sinc},0}(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

za $k_1, k_2 \in N$.

Napomena. Očigledno je da je Teorema 2.11 poseban slučaj Teoreme 1 iz [76].

(b) Teorema 2 iz [76] : Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 - \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 < \\ & < \frac{\sin x}{x} < \\ & < \frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 - \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 + \left(\frac{8}{\pi^5} + \frac{1}{120}\right)x^4 \end{aligned} \quad (2.22)$$

U [5] dato je poboljšanje nejednakosti (2.22).

Definisani su polinomi :

$$Q_4(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 - \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 = -\frac{8x^4}{\pi^5} - \frac{x^2}{6} + 1$$

i

$$\begin{aligned} R_4(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 - \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 + \left(\frac{8}{\pi^5} + \frac{1}{120}\right)x^4 \\ &= \left(-\frac{16}{\pi^4} + \frac{40}{\pi^5} + \frac{1}{120}\right)x^4 - \frac{x^2}{6} - \frac{5}{2\pi} + 2 \end{aligned}$$

na osnovu kojih je dobijena sledeća teorema:

Teorema 2.12 Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$Q_4(x) < \underline{T}_6^{\text{sinc},0}(x) \leq \underline{T}_{4k_1-2}^{\text{sinc},0}(x) < \text{sinc } x < \bar{T}_{4k_2}^{\text{sinc},0}(x) \leq \bar{T}_4^{\text{sinc},0}(x) < R_4(x) \quad (2.23)$$

za $k_1, k_2 \in N$.

Napomena. Teorema 2.12 je poseban slučaj Teoreme 2 iz [76].

(c) Teorema 4 iz [76] : Za svako $x \in (0, 1)$ važi :

$$\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)x - \frac{8}{\pi^3}x^2 < \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} < \left(1 - \frac{4}{\pi^2}x\right) \quad (2.24)$$

U [5] je dato poboljšanje nejednakosti (2.24).

Za funkciju

$$f(x) = \tan x - \frac{4}{\pi} \frac{x}{\pi - 2x}$$

na osnovu Taylor-ovog razvoja $\tan x$ funkcije iz [77]:

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1} \quad (2.25)$$

gde su B_i Bernoulli-jevi brojevi ²⁶ i uz upotrebu binomnog razvoja $\frac{1}{1-(\frac{2}{\pi}x)}$ nad intervalom $(0, \frac{\pi}{2})$, dobijen je stepeni razvoj:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)|B_{2i}|}{(2i)!} x^{2i-1} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{x}{1 - \left(\frac{2}{\pi}x\right)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)|B_{2i}|}{(2i)!} x^{2i-1} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{\pi^{j+1}} x^j \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \alpha_k x^k, \end{aligned} \quad (2.26)$$

²⁶Bernoulli-jevi brojevi su određeni rekurzivnom formulom, gde je: $B_0 = 1$, $B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}$ za $n \in N$ i javljaju se u zapisu raznih stepenih razvoja poput (2.25)

sa koeficijentima:

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2^{k+1}}{\pi^{k+1}} & : k=2\ell \\ \frac{2^{2k+1}(2^{2k+1}-1)|B_{k+1}|}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{\pi^{k+1}} & : k=2\ell-1 \end{cases}$$

za $\ell \in N$. Tada važi:

$$\alpha_k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 \quad i \quad (\alpha_k) \downarrow \quad (2.27)$$

za $k \in N$.

Na osnovu Lajbnic-ove teoreme za alternativne redove dobijena je sledeća teorema:

Teorema 2.13 Za svako $x \in (0, 1)$ i $\ell \in N$, važi :

$$\underline{T}_{2\ell}^{f,0}(x) < f(x) < \overline{T}_{2\ell-1}^{f,0}(x). \quad (2.28)$$

Napomena. Nejednakost (2.28) za $\ell = 1$ predstavlja konkretnu nejednakost Teoreme 4 iz [76].

- (d) Teorema 5 iz [76] : Za svako $x \in (0.373, \frac{\pi}{2})$ u levoj okolini i za svako $x \in (0.301, \frac{\pi}{2})$ u desnoj okolini, važe sledeće nejednakosti:

$$\frac{8 + a(x)}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x} < \frac{8 + b(x)}{\pi^2 - 4x^2} \quad (2.29)$$

gde je

$$a(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{8}{3} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2$$

i

$$b(x) = a(x) + \left(\frac{32}{\pi^3} - \frac{8}{3\pi} \right) \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^3.$$

U [5] je dato poboljšanje nejednakosti (2.29), koje navodimo u daljem razmatranju.

Posmatrana je funkcija :

$$\varphi(x) = (\pi^2 - 4x^2) \frac{\tan x}{x},$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Zamenom x sa $\frac{\pi}{2} - t$ u funkciji $\varphi(x)$ je dobijeno :

$$\psi(t) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{8t(\pi - t)\cot t}{\pi - 2t}$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Poboljšanja nejednakosti iz Teoreme 5 u [76] su data sledećom teoremom:

Teorema 2.14 Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi :

$$\begin{aligned} \underline{T}_4^{\psi,0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= 8 + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{8}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi^3} - \frac{8}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3 \\ &+ \left(\frac{64}{\pi^4} - \frac{16}{3\pi^2} - \frac{8}{45}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4 < \\ &< \varphi(x) < \\ &< \bar{T}_5^{\psi,0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 8 + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{8}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi^3} - \frac{8}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3 \\ &+ \left(\frac{64}{\pi^4} - \frac{16}{3\pi^2} - \frac{8}{45}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^4 + \left(\frac{128}{\pi^5} - \frac{32}{3\pi^3} - \frac{8}{45\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^5. \end{aligned}$$

Jedan dokaz ovog tvrđena je zasnovan na ekvivalentnim miksovanim trigonometrijskim polinomskim nejednakostima :

$$f(x) = \left(\pi^2 - 4x^2\right) \sin x - x T_4^{\psi,0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cos x > 0$$

i

$$g(x) = \left(\pi^2 - 4x^2\right) \sin x - x T_5^{\psi,0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cos x < 0,$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Napomena. Očigledno je da je Teorema 2.14 poseban slučaj Teoreme 5 iz [76].

Dalje je posmatran niz $(\alpha_k)_{k \in N}$ definisan sa :

$$\alpha_1 = 1, \alpha_{2j} = 0, \alpha_{2j+1} = -\frac{2^{2j}|B_{2j}|}{(2j)!}$$

za $j \in N$. Na osnovu [77] sledi razvoj :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{8}{\pi} t (\pi - t) \frac{1}{1 - \left(\frac{2t}{\pi}\right)} \cot t \\ &= \frac{8}{\pi} t (\pi - t) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2j+1} t^{2j-1} \right) \end{aligned}$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Neka je $r_2(m)$ ostatak deljenja prirodnog broja m sa 2. Tada je u [5] postavljena naredna hipoteza :

- Za funkciju $\psi(t)$ na $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi jednakost :

$$\psi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{8 \alpha_{m+1-r_2(m)}}{\pi^{r_2(m)}} + \sum_{i=1}^{[m/2]} \frac{2^{2i+2+r_2(m)} \alpha_{m+1-2i-r_2(m)}}{\pi^{2i+r_2(m)}} \right) t^m \quad (2.30)$$

- Za funkciju $\psi(t)$ na $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $\ell \in N$, važe nejednakosti :

$$\underline{T}_{2\ell}^{\psi,0}(t) < \psi(t) < \bar{T}_{2\ell+1}^{\psi,0}(t) \quad \left(t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \wedge \ell \in N \right). \quad (2.31)$$

Dupli Taylor-ovi razvoji (DTR)

"No human investigation can be called real science if it can not be demonstrated mathematically."

Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

3.1 Definicija DTR i osnovne osobine

U sledećem delu dajemo prikaz osnovnih osobina i definicija vezano za duple Taylor-ove razvoje. U [78] su razmatrane aproksimacije pomoću duplih Taylor-ovih razvoja, pa imamo da važi sledeće:

Definicija 3.1 Neka je $T_n^{f,a_+}(x)$ Taylor-ov polinom funkcije $f(x)$, stepena $n \in N_0$, u desnoj okolini tačke a . Ako za realnu funkciju $f : (a, b) \rightarrow R$ postoji konačni limesi $f^{(k)}(a_+) = \lim_{x \rightarrow a_+} f^{(k)}(x)$, za $k = 0, 1, \dots, n$ onda je

$$T_n^{f,a_+}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a_+)}{k!} (x - a)^k \quad (3.1)$$

prva Taylor-ova aproksimacija funkcije f u desnoj okolini tačke a , za $n \in N_0$, pri čemu je

$$R_n^{f,a_+}(x) = f(x) - T_n^{f,a_+}(x) \quad (3.2)$$

ostatak prve Taylor-ove aproksimacije u desnoj okolini tačke a .

Na sličan način može da se definiše i sledeće :

Definicija 3.2 Neka je $T_n^{f,b_-}(x)$ Taylor-ov polinom funkcije $f(x)$, stepena $n \in N_0$, u levoj okolini tačke b . Ako za realnu funkciju $f : (a, b) \rightarrow R$ postoji konačni limesi $f^{(k)}(b_-) = \lim_{x \rightarrow b_-} f^{(k)}(x)$, za $k = 0, 1, \dots, n$ onda je

$$T_n^{f,b_-}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b_-)}{k!} (x - b)^k \quad (3.3)$$

prva Taylor-ova aproksimacija funkcije f u levoj okolini tačke b , za $n \in N_0$, tada je

$$R_n^{f,b_-}(x) = f(x) - T_n^{f,b_-}(x) \quad (3.4)$$

ostatak prve Taylor-ove aproksimacije u levoj okolini tačke b .

Definicija 3.3 Za polinom oblika

$$\mathbb{T}_n^{f;a_+,b_-}(x) = \begin{cases} T_{n-1}^{f,a_+}(x) + \frac{1}{(b-a)^n} R_n^{f,a_+}(b_-)(x-a)^n & : n \geq 1 \\ f(b_-) & : n = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

kažemo da je druga Taylor-ova aproksimacija funkcije f u desnoj okolini tačke a , za $n \in N_0$, dok je polinom :

$$\mathbb{T}_n^{f;b_-,a_+}(x) = \begin{cases} \mathbb{T}_{n-1}^{f,b_-}(x) + \frac{1}{(a-b)^n} R_n^{f,b_-}(a_+)(x-b)^n & : n \geq 1 \\ f(a_+) & : n = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

druga Taylor-ova aproksimacija funkcije f u levoj okolini tačke b , za $n \in N_0$.

Takođe, iz [78] imamo da važi sledeće tvrđenje :

Teorema 3.1 Prepostavimo da je funkcija $f(x)$ realna funkcija na intervalu (a, b) i neka je n pozitivan ceo broj takav da takav da postoji $f^{(k)}(a_+)$ i $f^{(k)}(b_-)$, za $k \in 0, 1, \dots, n$.

(i) Prepostavimo da je $(-1)^{(n)} f^{(n)}(x)$ rastuća na intervalu (a, b) . Tada, za svako $x \in (a, b)$ važi sledeća nejednakost :

$$\mathbb{T}_n^{f;b_-,a_+}(x) < f(x) < T_n^{f,b_-}(x) \quad (3.7)$$

Dalje, ako je $(-1)^n f^{(n)}(x)$ opadajuća na intervalu (a, b) tada za svako $x \in (a, b)$ važi obrnuta nejednakost.

(ii) Prepostavimo da je $f^{(n)}(x)$ rastuća na intervalu (a, b) , tada za svako $x \in (a, b)$ važi :

$$\mathbb{T}_n^{f;a_+,b_-}(x) > f(x) > T_n^{f;a_+}(x) \quad (3.8)$$

Dalje, ako je $f^{(n)}(x)$ opadajuća na intervalu (a, b) tada za svako $x \in (a, b)$ važi obrnuta nejednakost.

Teorema 3.1 se često naziva Teorema o duplim Taylor-ovima aproksimacijama. U nekim radovima se pojavljuje i pod nazivom Teorema WD, koji je dobila po autorima S. Wu i L. Debnath koji su je dokazali u [79].

Neke interesantne primene Teoreme 3.1 se mogu naći u [80], [81], [82], [83].

3.2 Neki doprinosi Teoriji analitičkih nejednakosti primenom DTR

3.2.1 Poboljšanje Jordan-Stečkin i Becker-Stark nejednakosti primenom DTR

U "Some improvements of the Jordan-Stečkin and Becker-Stark inequalities" [5], autora M. Nenezić i L. Zhu dat je primer primene duplih Taylor-ovih razvoja za dokazivanje nekih trigonometrijskih nejednakosti. Rad je nastao kao poboljšanje Jordan-Stečkin i Becker-Stark nejednakosti koje su razmatrane u [76], gde su dokazane sledeće teoreme :

(a) Teorema 3 iz [76] : Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) < \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad (3.9)$$

U [5] dato je poboljšanje nejednakosti (3.9).

U monografiji [16], D. S. Mitrinović je razmatrao Stečkin-ovu nejednakost:

$$\tan x > \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x},$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Neka je :

$$f(x) = \tan x - \frac{4x}{\pi(\pi - 2x)}, \quad (3.10)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tada važi :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

U [76], nejednakosti iz Teoreme 3 su predložene kao adekvatne aproksimacije funkcije $f(x)$ u levoj okolini tačke $x = \frac{\pi}{2}$. Zamenom x sa $\frac{\pi}{2} - t$ u funkciji $f(x)$, uvodimo funkciju:

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi},$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Na osnovu [77], za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$\cot t < \bar{T}_n^{\cot,0}(t) = \frac{1}{t} - \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k} |B_{2k}|}{(2k)!} t^{2k-1}$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $n \in N$ i gde su B_i ($i \in N$) Bernoulli-jevi brojevi. Dalje:

$$g(t) < \bar{T}_n^{\cot,0}(t) - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi} \quad (3.11)$$

i u skladu sa Teoremom 3.1

$$\cot t > \underline{T}_n^{\cot,0,\pi/2}(t) = T_{n-1}^{\cot,0}(t) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(g\left(\frac{\pi}{2}\right) - T_{n-1}^{\cot,0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) t^n \quad (3.12)$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i $n \in N$. Na osnovu (3.11) and (3.12), imamo :

$$g(t) > \underline{T}_n^{\cot;0,\pi/2}(t) - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi} \quad (3.13)$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Neka je:

$$F_n^g(t) = \overline{T}_n^{\cot,0}(t) - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi}$$

i

$$\mathbb{F}_n^g(t) = \underline{T}_n^{\cot;0,\pi/2}(t) - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi}.$$

Vraćanjem smene $t = \frac{\pi}{2} - x$ u (3.11) i (3.13), dobijena je sledeća teorema:

Teorema 3.2 Za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i $n \in N$, imamo :

$$\mathbb{F}_n^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < f(x) < F_n^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (3.14)$$

Posledica 1 Na osnovu ovoga zaključeno je da imamo poboljšanja za nejednakost iz Teoreme 3 u [76] data Teoremom 3.14 kao i za konkretne vrednosti prirodnog broja n :

1. Za $n = 1$ i za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi:

$$\begin{aligned} Q_1(x) < \mathbb{F}_1^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) < f(x) < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= F_1^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = R_1(x) \end{aligned}$$

2. Za $n = 3$ i za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, važi:

$$\begin{aligned} Q_1(x) < \mathbb{F}_1^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < \mathbb{F}_3^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{6}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 \\ &< f(x) < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{45} = F_3^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < F_1^g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = R_1(x). \end{aligned}$$

(b) Teorema 6 iz [76] : Za svaki realan broj $x \in (0, 1.371)$, važi sledeća nejednakost :

$$\frac{\tan x}{x} < \frac{\pi^2 - \left(4 - \frac{1}{3}\pi^2\right)x^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\pi^2\right)x^4}{\pi^2 - 4x^2} \quad (3.15)$$

U [5] dato je poboljšanje nejednakosti (3.15). Neka je

$$f(x) = (\pi^2 - 4x^2) \frac{\tan x}{x}$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Na osnovu tangensnog razvoja u stepeni red (2.25) može se pokazati da važi :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^{2k-2} \quad (3.16)$$

gde se koeficijenti C_k iskazuju preko Bernoulli-jevih brojeva u obliku :

$$C_k = \frac{\pi^2 \cdot 2^{2k} (2^{2k} - 1) |B_{2k}|}{(2k)!} - \frac{4 \cdot 2^{2k-2} (2^{2k-2} - 1) |B_{2k-2}|}{(2k-2)!} \quad (3.17)$$

$x \in (0, c)$ i $0 < c < \frac{\pi}{2}$, za konkretan broj $C_k < 0$ i $k \in N$.

Na osnovu Teoreme 3.1 dobijena je sledeća teorema:

Teorema 3.3 Za svako $x \in (0, c)$, gde je $0 < c < \frac{\pi}{2}$, važi sledeća nejednakost:

$$\begin{aligned} \underline{T}_{m_1}^{f;0,c}(x) &= \sum_{k=1}^{m_1-1} C_k x^{2k-2} + \left(\frac{1}{c}\right)^{2m_1-2} \left(f(c) - \left(\sum_{k=1}^{m_1-1} C_k c^{2k-2}\right)\right) x^{2m_1-2} \\ &< f(x) < \sum_{k=1}^{m_2} C_k x^{2k-2} = \bar{T}_{m_2}^{f,0}(x) \end{aligned}$$

za $m_1, m_2 \in N$.

Teorema 3.3 je posledica Teoreme 6 iz [76] za slučaj kada je $m_2 = 3$.

U [84] su takođe razmatrane aproksimacije pomoću duplih Taylor-ovih razvoja kao i njihova primena za dobijanje nekih opštijih rezultata za trigonometrijske nejednakosti koje je dokazao J. Sándor u [85].

3.2.2 Neke nove procene preciznosti Huygens-ove aproksimacije primenom DTR

Rad pod nazivom “**Some new estimates of precision of Cusa-Huygens and Huygens approximations**”, autora B. Malešević, M. Nenezić, L. Zhu, B. Banjac i M. Petrović [6], objavljen je sa ciljem da se poboljšaju gornje granice i dobiju precizniji rezultati za Cusa - Huygens-ovu i Huygens-ovu aproksimaciju. Dobijene granice su oblika polinoma i racionalnih funkcija.

U radu su za dobijanje određenih rezultata primenjivani DTR i razmatrana je sledeća Huygens-ova funkcija :

$$\varphi(x) = \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x \quad (3.18)$$

na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ za niz koeficijenata

$$i_k = \frac{2(-1)^k}{3(2k+1)!} + \frac{2^{2k+2}(2^{2k+2}-1)|B_{2k+2}|}{3(2k+2)!} \quad (3.19)$$

za $k \in N_0$. Tada važi teorema :

Teorema 3.4 Važi $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1}$ na intervalu $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pri čemu je a_k definisano sa (3.19) i neka je $c \in (0, \frac{\pi}{2})$. Za Huygens-ovu funkciju tada važi :

$$\begin{aligned} T_0^{\varphi;0+}(x) &< \dots < T_n^{\varphi;0+}(x) < T_{n+1}^{\varphi;0+}(x) < \dots \\ &\dots < \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x < \dots \\ &\dots < \mathbb{T}_{n+1}^{\varphi;0+,c-}(x) < \mathbb{T}_n^{\varphi;0+,c-}(x) < \dots < \mathbb{T}_0^{\varphi;0+,c-}(x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

za $x \in (0, c)$.

Raslojene familije funkcija

"It is true that a mathematician who is not also something of a poet will never be a perfect mathematician."

Karl Weierstrass (1815 - 1897)

4.1 Definicija raslojenosti i osnovne osobine

Familije raslojenih funkcija, monotonih u odnosu na jedan parametar, tema su mnogih istraživanja. Jedan od bitnijih radova na ovu temu je i [7], u kojem su date osnovne definicije raslojenih funkcija, koje ovde koristimo, njihove osobine i veze tih funkcija sa određenim rezultatima iz Teorije analitičkih nejednakosti. Na osnovu [7] navodimo :

Definicija 4.1 Neka je $\varphi_p(x)$ familija funkcija, za $x \in (a, b)$ i $p \in R$. Za familiju $\varphi_p(x)$ kažemo da je raslojena po parametru ako postoji $D \subseteq R$ ($D \neq \emptyset$) tako da je monotona po parametru $p \in D$.

Precizirajmo, familija funkcija $\varphi_p(x)$ je *rastuće* raslojena ako

$$(\forall p_1, p_2 \in D) p_1 < p_2 \Leftrightarrow \varphi_{p_1}(x) < \varphi_{p_2}(x), \quad (4.1)$$

odnosno *opadajuće* raslojena ako

$$(\forall p_1, p_2 \in D) p_1 < p_2 \Leftrightarrow \varphi_{p_1}(x) > \varphi_{p_2}(x), \quad (4.2)$$

za svako $x \in (a, b)$. Neka je $I \subseteq D$ maksimalni interval u D , takav da za $p \in I$ i za svako $x \in (a, b)$ važi

$$\varphi_p(x) > 0,$$

i neka je $J \subseteq D$ maksimalni interval u D , takav da za $p \in J$ i za svako $x \in (a, b)$ važi

$$\varphi_p(x) < 0.$$

Ako je skup $D = R^+$, pretpostavimo da za neprazne podskupove I i J važi

$$I \cup J \subset D.$$

Tada ima smisla ispitivati pozitivnost, odnosno, negativnost funkcije $\varphi_p(x)$, za $x \in (a, b)$ pri izboru parametra $p \in D \setminus (I \cup J)$.

Veliki broj analitičkih nejednakosti se može interpretirati kao nejednakosti oblika

$$\varphi_p(x) < 0 \quad \text{ili} \quad \varphi_p(x) > 0$$

za konkretni izbor familije i za parametre $p \in D$ i za sve vrednosti x na intervalu (a, b) .

Osnovni cilj istraživanja u ovoj disertaciji je određivanje nekih novih uslova za familiju $\varphi_p(x)$ pod kojima postoji parametar p , takav da za tu vrednost parametra postoji najmanje moguće odstupanje familije u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Navodimo tvrdjenje iz [86] koje će biti korišćeno u ovoj disertaciji:

Teorema 4.1 (Nike teorema) *Neka je $f : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija (za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$) koja zadovoljava sledeće uslove :*

(a) $f^{(m)}(x) > 0$ za $x \in (0, c)$;

(b) postoji desna okolina nule u kojoj važe sledeće nejednakosti :

$$f < 0, f' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0;$$

(c) postoji leva okolina tačke c u kojoj važe sledeće nejednakosti :

$$f > 0, f' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (0, c)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (0, x_0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (x_0, c)$. Funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu $(0, c)$, odnosno, postoji tačno jedna tačka $t \in (0, x_0) \subset (0, c)$ takva da je $f(t) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu $(0, x_0)$, odnosno, na intervalu $(0, c)$.

U slučajevima kada nije moguće primeniti Nike teoremu u prethodno navedenoj formi, moguće je primeniti sledeću teoremu, koja daje dovoljne uslove da funkcija na intervalu ima tačno jednu nulu i tačno jedan minimum [7].

Teorema 4.2 (Nike teorema, II forma) *Neka je $f : (0, c) \rightarrow \mathbb{R}$ m puta diferencijabilna funkcija (za neko $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$) koja ispunjava sledeće uslove:*

(a) $f^{(m)}$ ima tačno jednu nulu x_m na $(0, c)$ tako da je $f^{(m)} > 0$ na $(0, x_m)$ i $f^{(m)} < 0$ na (x_m, c) ;

(b) postoji desna okolina nule u kojoj su sledeće nejednakosti tačne

$$f < 0, f' < 0, \dots, f^{(m-1)} < 0;$$

(c) postoji leva okolina tačke c u kojoj su sledeće nejednakosti tačne

$$f > 0, f' > 0, \dots, f^{(m-1)} > 0.$$

Tada funkcija f ima tačno jednu nulu $x_0 \in (0, c)$ i $f(x) < 0$ za $x \in (0, x_0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (x_0, c)$. Funkcija f ima tačno jedan lokalni minimum na intervalu $(0, c)$, odnosno, postoji tačno jedna tačka $t_0 \in (0, x_0) \subset (0, c)$ takva da je $f(t_0) < 0$ najmanja vrednost funkcije f na intervalu $(0, x_0)$, odnosno, $(0, c)$.

Ove teoreme su razmatrane u [7] gde su doble naziv Nike teorema, zbog karakterističnog izgleda funkcije, oblika udice ("Nike" znaka²⁷). Za familije funkcije koje ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 i Teoreme 4.2 kažemo da su "nike" oblika. Familija $\varphi_p(x)$ za $x \in (a, b)$ i $p \in R$ je "nike" oblika ako je svaka funkcija te familije tog oblika.

Nadalje, u disertaciji razmatramo familije $\varphi_p(x)$ za $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$ (videti aplikacije u poglavlju 5), takođe će biti razmatrani i slučajevi kada $x \in (a, b)$ i $p \in (c, d) \subset R^+$.

Među familijama $\varphi_p(x)$ "nike" oblika, pri izboru $x \in (a, b)$ i $p \in (c, d) \subset R^+$ izdvajamo klasu raslojenih familija za koju važe dodatni uslovi:

- (a*) $\varphi_c(x) < 0$ i $\varphi_d(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$ i u rubnim tačkama $\varphi_c(a+) = \varphi_c(b-) = \varphi_d(a+) = 0$ i $\varphi_d(b-) \in R^+$
- (b*) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $x \in (a, b)$ i $\varphi_p(b_-)$ je takođe neprekidna po $p \in (c, d)$
- (c*) za svako $p \in (c, d)$, postoji desna okolina tačke a u kojoj važi $\varphi_p(x) < 0$.

Takve familije smatraćemo standardnim familijama "nike" oblika, a kada one to nisu, to će biti posebno istaknuto.

²⁷"Nike" znak, kao logo, je dizajniran prema krilima grčke boginje pobede Nike.

4.2 Metrički prostori. q - odstupanje funkcije

Metrički prostor je skup na kojem je definisan pojam udaljenosti (razdaljina - metrika) između elemenata skupa koji se obično nazivaju tačkama. Udaljenost između tačaka odnosno elemenata skupa se meri funkcijom koja se zove metrika ili funkcija udaljenosti.

Metrički prostori se najčešće primenjuju radi uopštavanja pojmove konvergencije i neprekidnosti, u višedimenzionalnom prostoru R^n i ostalim apstraktnim prostorima koji to dopuštaju.

Definicija 4.2 [87] *Metrički prostor je uređen par (X, d) gde je X skup elemenata, a d metrika nad X , odnosno funkcija :*

$$d : X \times X \rightarrow R \quad (4.3)$$

za koju važe sledeća svojstva odnosno aksiome :

- (a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (koincidencija)
- (b) $d(x, y) \geq 0$ (nenegativnost)
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrija)
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (nejednakost trougla)

U zavisnosti od toga koji uslovi važe metrika može biti [87] :

- (a*) premetrika ako važe uslovi (a), (b)
- (b*) pseudometrika ako važe uslovi (b), (c), (d) i modifikovan uslov (a), da se zahteva samo $d(x, x) = 0$
- (c*) semimetrika ako važe uslovi (a), (b), (c)
- (d*) kvažimetrika ako važe uslovi (a), (b), (d)

Za ovu disertaciju će, pored metričkih prostora, posebno biti od interesa i pseudometrički prostori [88], [89]. Pseudo metričke prostore je uveo Đ. Kupera²⁸ 30-ih godina XX veka.

Zbog svojih karakteristika, metrički prostori se često koriste u mnogim granama matematike a posebno za proučavanje i rešavanje problema u matematičkoj analizi i geometriji.

R.M. Fréchet²⁹ je 1906. godine uveo pojam metričkog prostora u svojoj disertaciji "Sur quelques points du calcul fonctionnel³⁰" [90], kao pojam koji proističe iz funkcionalne analize.

Postoji više načina da se uvede metrika u nekom višedimenzionalnom prostoru R^n .

Navodimo standardne **q - metrike** [90], [91] :

- 1) Skup R^n je metrički prostor sa metrikom definisanom sa

$$d = d(x, y) = \|x - y\|_q, \quad (4.4)$$

za $q \geq 1$, koja je određena normom

$$\|x\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q}.$$

²⁸Duro Kupera (1907 - 1993) srpski matematičar.

²⁹René Maurice Fréchet (1878 - 1973) francuski matematičar.

³⁰"O nekim tačkama funkcionalne analize"

Ovu metriku u funkciji od parametra q ćemo označavati sa d_q **metrika** i za nju ćemo razmatrati sledeće posebne slučajeve :

- (a) Za $q = 1$: rastojanje je $d_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

Ova metrika se često naziva taxicab ili Manhattan metrika.

- (b) Za $q = 2$: rastojanje je $d_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$.

Ova metrika se naziva Euklidovo rastojanje.

- (c) Za $q \rightarrow \infty$: rastojanje je $d_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^q \right)^{1/q} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

Ova metrika se naziva Čebiševljevo rastojanje.

- 2) Neka je $C[a, b]$ skup svih neprekidnih funkcija $f : [a, b] \rightarrow R$, tada se može uvesti metrika u sledećem obliku :

$$D_q(f, g) = \|f - g\|_q = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (4.5)$$

za $x \in [a, b]$ i $q \geq 1$, pri čemu je $\|\cdot\|$ norma funkcije određena sa

$$\|f\|_q = \left(\int_a^b |f(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Ovu metriku u funkciji parametra q ćemo označavati sa D_q **metrika** i za nas će biti posebno značajni slučajevi :

- (a) Za $q = 1$: rastojanje između funkcija je

$$D_1 = D_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Ova metrika se često naziva integralna metrika.

- (b) Za $q = 2$: rastojanje između funkcija je

$$D_2 = D_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Ova metrika se često naziva srednje kvadratna metrika.

- (c) Za $q \rightarrow \infty$: rastojanje između funkcija je

$$D_\infty = D_\infty(f, g) = \lim_{q \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^q dx \right)^{1/q} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

Dodatno, primer pseudo metrike koji se razmatra u ovoj disertaciji je

$$\tilde{D} = \tilde{D}(f, g) = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

za $f, g \in C[a, b]$. Napomenimo osobitost pseudo metrike da $\tilde{D}(f, g) = 0$ ne mora dovesti do zaključka da je $f = g$ za $f, g \in C[a, b]$.

U ovoj disertaciji je posebno bitan i pojam odstupanja u odnosu na x - osu. Za $f \in C[a, b]$ uvedimo :

$$\delta_q(f) = D_q(f, 0) \quad (4.6)$$

i nazovimo **q - odstupanje funkcije** f od x -ose, u smislu D_q metrike, (za $q = 1, 2, \infty$). Ako je $g(x) = 0$ tada je $\delta_q(f) = D_q(f, g)$.

U ovoj disertaciji su razmatrani posebni slučajevi q - odstupanja :

$$(a) \text{ za } q = 1 : \delta_1(f) = D_1(f, 0) = \int_a^b |f(x)| dx,$$

$$(b) \text{ za } q = 2 : \delta_2(f) = D_2(f, 0) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx},$$

$$(c) \text{ za } q = \infty : \delta_\infty(f) = D_\infty(f, 0) = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Takođe, u ovoj disertaciji razmatramo i pojam pseudo odstupanja $\tilde{\delta} = \tilde{D}(f, 0)$ u **sekciji 4.4**.

4.3 1 - odstupanje : Integralna metrika

Neka je $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$. Za familiju funkcija

$$\varphi_p(x) : [a, b] \longrightarrow R$$

neprekidnu po $p \in [c, d]$ neprekidna je i funkcija :

$$\delta_1^{(p)} = \delta_1(\varphi_p) = \int_a^b |\varphi_p(x)| dx \quad (4.7)$$

po parametru $p \in [c, d]$.

1 - odstupanje familije neprekidnih funkcija $\varphi_p(x)$ uvodimo kao absolutni minimum funkcije

$$\delta_1^{(p)} = \delta_1(\varphi_p)$$

koji se dostiže, saglasno Vajerštras - ovoj³¹ teoremi [92], u nekoj tački $p = p_1 \in [c, d]$.

Samu tačku $p = p_1$ u tom slučaju zovemo **1 - vrednost parametra**, te na osnovu prethodnog :

$$\delta_1^{(p_1)} = \delta_1(\varphi_{p_1})$$

predstavlja **1 - odstupanje** familije funkcija. Za 1 - vrednost parametra funkciju

$$\varphi_{p_1}(x)$$

nazvaćemo **1-minimaks aproksimant** familije $\varphi_p(x)$.

Za standardnu familiju funkcija $\varphi_p(x)$ "nike" oblika, po Nike teoremmama, svaka funkcija iz te familije ima jedinstven koren $x_0^{(p)} \in (a, b)$ kao i jedinstven minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p)})$. Samim tim **1 - odstupanje** određuje se kao minimum funkcije :

$$F_1(p) = \int_a^b |\varphi_p(x)| dx = \int_a^{x_0^{(p)}} -\varphi_p(x) dx + \int_{x_0^{(p)}}^b \varphi_p(x) dx \quad (4.8)$$

U ovoj disertaciji, a posebno u prezentovanim aplikacijama, u Poglavlјima 5 i 6, biće od interesa konkretne standardne familije funkcija "nike" oblika pri izboru $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$.

Prepostavimo da se ograničavamo na familije $\varphi_p(x)$ koje su neprekidno diferencijabilne po parametru $p \in [c, d]$, tada važi sledeća teorema o stacionarnoj tački :

Teorema 4.3 Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ "nike" oblika, gde je $x \in [a, b] = [0, b]$ i $p \in [c, d]$ i funkciju $F_1(p)$ (4.8) stacionarna tačka p ispunjava :

$$-\int_0^{x_0^{(p)}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx + \int_{x_0^{(p)}}^b \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx = 2\varphi_p(x_0^{(p)}) \cdot (x_0^{(p)})'_p \quad (4.9)$$

³¹Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897) nemački matematičar.

Dokaz. Iz Lajbnic - ovog pravila (Prilog A), za $x \in [a, b] = [0, b]$ sledi:

$$\begin{aligned} F'_1(p) &= \frac{d}{dp} F_1(p) = \left(\frac{d}{dp} \int_0^{x_0^{(p)}} -\varphi_p(x) dx \right) + \left(\frac{d}{dp} \int_{x_0^{(p)}}^b \varphi_p(x) dx \right) \\ &= \left(-\varphi_p(x_0^{(p)}) \cdot (x_0^{(p)})'_p - \int_0^{x_0^{(p)}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx \right) - \left(\varphi_p(x_0^{(p)}) \cdot (x_0^{(p)})'_p + \int_{x_0^{(p)}}^b \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx \right) = 0 \\ \iff & - \int_0^{x_0^{(p)}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx + \int_{x_0^{(p)}}^b \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx = 2\varphi_p(x_0^{(p)}) \cdot (x_0^{(p)})'_p \end{aligned}$$

■

U Teoriji analitičkih funkcija moguće je izdvojiti brojne primere standardnih familija funkcija "nike" oblika (npr. [57])

$$\varphi_p(x) = f(x) - pg(x), \quad (4.10)$$

po parametru $p \in D \subset R$.

Jednačina dobijena u (4.9) je komplikovana za resavanje po parametru p čak i u specijalnim slučaju familije funkcija poput (4.10). Stoga se minimum funkcije $F_1(p)$ određuje numerički.

Kada je funkcija $\varphi_p(x)$ parabola (po x) onda je minimum funkcije $F_1(p)$ moguće odrediti i simbolički, što je prezentovano u Aplikaciji 1.

4.4 Pseudo odstupanje

Za neprekidnu funkciju $f \in C[a, b]$ uvedimo $\tilde{\delta}$ - **pseudo odstupanje**

$$\tilde{\delta}(f) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Za ovako određeno pseudo odstupanje važe sledeća svojstva :

- (a) $\tilde{\delta}(f) = 0$ akko je suma označenih površina neprekidne funkcije f nad $[a, b]$ jednaka nuli,
- (b) $\tilde{\delta}(\alpha f) = |\alpha| \tilde{\delta}(f)$ za skalar $\alpha \in R$ i $f \in C[a, b]$,
- (c) $\tilde{\delta}(f + g) \leq \tilde{\delta}(f) + \tilde{\delta}(g)$ za $f, g \in C[a, b]$.

Neka je $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$. Za familiju funkcija

$$\varphi_p(x) : [a, b] \longrightarrow R$$

neprekidnu po $p \in [c, d]$ neprekidna je i funkcija :

$$\tilde{\delta}^{(p)} = \tilde{\delta}(\varphi_p) = \left| \int_a^b \varphi_p(x) dx \right| \quad (4.11)$$

po parametru $p \in [c, d]$.

Neka je familija funkcija $\varphi_p(x)$ "nike" oblika. Uvodimo $p = \tilde{p}_1$ kao **pseudo vrednost parametra** ukoliko je :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \quad (4.12)$$

Prepostavimo da za vrednost parametra $p = c$ dobijamo pozitivnu a za vrednost parametra $p = d$ negativnu funkciju familije $\varphi_p(x)$. Tada svaka funkcija familije $\varphi_p(x)$ za vrednosti $p \in (c, d)$ ima jedan koren (slučaj kada su funkcije familije rastuće raslojene). Zbog neprekidnosti postoji vrednost $p = \tilde{p}_1$ takva da važi jednačina (4.12).

Za pseudo vrednost parametra funkciju

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$$

nazvaćemo **pseudo minimaks aproksimant** familije $\varphi_p(x)$.

Navodimo specijalno određivanje parametra $p = \tilde{p}_1$ za familiju $\varphi_p(x) = f(x) - pg(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\varphi_p(x)) = 0 &\iff \left| \int_a^b (f(x) - pg(x)) dx \right| = 0 \iff \int_a^b (f(x) - pg(x)) dx = 0 \\ &\implies p = \tilde{p}_1 = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \end{aligned}$$

(ukoliko je $\int_a^b g(x) dx \neq 0$) i ovim je određena eksplicitna **pseudo vrednost parametra**, koja se može simbolički odrediti kad to navedene integracije dopuštaju.

Važi tvrđenje: Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ "nike" oblika neka je $p = \tilde{p}_1$ pseudo vrednost parametra ($\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1})(x) = 0$). Tada, neka je $\beta = x_0^{\tilde{p}_1}$ jedinstven koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}$. Tada postoji

$$\tilde{P} = 2 \left| \int_a^\beta \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx \right| < +\infty$$

Važi tvrđenje koje daje vezu između 1 - odstupanja i pseudo odstupanja:

Teorema 4.4 *Funkcija*

$$\delta_1(\varphi_p(x)) = \int_a^b |\varphi_p(x)| dx \quad (4.13)$$

je neprekidna po parametru $p \in [c, d] \subset R^+$. Važi

$$0 < \delta_1(\varphi_{p_1}) \leq \tilde{P}, \quad (4.14)$$

ukoliko je $\varphi_p(x)$ standardna familija "nike" oblika. Minimum $\delta_1(\varphi_{p_1})$ se dostiže za $p = p_1 \in [c, d]$.

Dokaz. Posledica neprekidnosti integrala po parametru i prema Vajerštras - ovoj teoremi. ■

Napomena. Ukoliko je analitički izraz $\varphi_p(x)$ složen, tada vršimo numeričko određivanje 1 - odstupanja

$$\delta_1^{(p)} = \delta_1(\varphi_p).$$

4.5 2 - odstupanje : Srednje kvadratna metrika

Neka je $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$. Za familiju funkcija

$$\varphi_p(x) : [a, b] \longrightarrow R$$

neprekidnu po $p \in [c, d]$ neprekidna je i funkcija :

$$\delta_2^{(p)} = \delta_2(\varphi_p) = \sqrt{\int_a^b \varphi_p^2(x) dx} \quad (4.15)$$

po parametru $p \in [c, d]$. Primetimo da $\delta_2^{(p)}$ ima minimum u tački p ako i samo ako $(\delta_2^{(p)})^2$ ima minimum u istoj tački p .

Dalje razmatramo

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = (\delta_2(\varphi_p))^2 = \int_a^b \varphi_p^2(x) dx$$

u cilju određivanja minimuma. Dodatno, ukoliko je $\varphi_p(x)$ neprekidno diferencijabilna po parametru $p \in [c, d]$ moguće je $F(p)$ diferencirati ispod znaka integrala po Lajbnic - ovom pravilu (Prilog A), za konstantne granice integrala a i b .

Uvodimo 2 - odstupanje familije neprekidnih funkcija $\varphi_p(x)$ kao apsolutni minimum funkcije

$$\delta_2^{(p)} = \delta_2(\varphi_p)$$

koji postoji i dostiže se saglasno Vajerštras - ovoj teoremi, u nekoj tački $p = p_2 \in [c, d]$. Samu tačku $p = p_2$ nazivamo **2 - vrednost parametra**.

Koristimo dalje dodatnu pretpostavku da se ograničavamo na familije funkcija $\varphi_p(x)$ koje su dva puta neprekidno diferencijabilne po parametru $p \in [c, d]$. Tada za $\varphi_p(x)$ uvodimo Psi funkciju $\Psi_p(x)$ i IPsi funkciju $\Phi_p(x)$ ³² na sledeći način :

$$\Psi_p(x) = \frac{\partial}{\partial p}(\varphi_p^2(x)) \quad \text{i} \quad \Phi_p(x) = \frac{\partial^2}{\partial p^2}(\varphi_p^2(x)) \quad (4.16)$$

Važi :

$$\begin{aligned} F'(p) = \frac{\partial}{\partial p}(F(p)) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_a^b \varphi_p^2(x) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial p} (\varphi_p^2(x)) dx \\ &= \int_a^b 2\varphi_p(x) \left(\frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) \right) dx = \int_a^b \Psi_p(x) dx \end{aligned} \quad (4.17)$$

i

$$F''(p) = \frac{\partial^2}{\partial p^2}(F(p)) = \int_a^b \Phi_p(x) dx. \quad (4.18)$$

³²In, Im : slovo Јн (Јн) koje potiče od rane čirilice. Izgleda kao invertovano slovo Psi (Ψ), okrenuto naopako, pa ga i čitamo kao IPsi (Invertovano Psi)

U ovoj disertaciji, u aplikacijama, će se javljati samo slučajevi kad postoji samo jedna vrednost $p = p_2$ takva da je :

$$F'(p_2) = 0 \quad \text{i} \quad F''(p_2) > 0 \quad (4.19)$$

tada p_2 smatramo za **2 - vrednost parametra**. Pojam 2 - vrednost parametra može i dodatno da se proširi (kada se minimum funkcije određuje preko izvoda funkcije višeg reda od 2). Za jedinstvenu vrednost parametra p_2 vrednost:

$$\delta_2^{(p_2)} = \delta_2(\varphi_{p_2})$$

nazivamo **2 - odstupanje** i tada za 2 - vrednost parametra funkciju

$$\varphi_{p_2}(x)$$

nazivamo **2-minimaks aproksimant** familije $\varphi_p(x)$.

Razmotrimo specijalnu familiju funkcija

$$\varphi_p(x) = f(x) - pg(x), \quad (4.20)$$

takvu da $\int_a^b g^2(x)dx > 0$, tada je

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_a^b \varphi_p^2(x)dx = \int_a^b (f(x) - pg(x))^2 dx \\ &= \int_a^b (f^2(x) - 2pf(x)g(x) + p^2g^2(x))dx \\ &= \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) p^2 + \left(\int_a^b -2f(x)g(x)dx \right) p + \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \\ &= Ap^2 + Bp + C \end{aligned}$$

za $A = \int_a^b g^2(x)dx > 0$, $B = \int_a^b -2f(x)g(x)dx$, $C = \int_a^b f^2(x)dx$. Ako su f i g linearno nezavisne $f \neq \lambda \cdot g$ za $\lambda \in R$, tada za diskriminantu važi:

$$\Delta = B^2 - 4AC < 0 \iff \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 < \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

(Holder-ova integralna nejednakost [93]). Samim tim

$$F(p) = Ap^2 + Bp + C > 0$$

jer je $A > 0$ i $\Delta = B^2 - 4AC < 0$. Tada je $p = p_2 = \frac{-B}{2A}$ upravo **2 - vrednost parametra** za koju je

$$\delta_2^{(p_2)} = \sqrt{F(p_2)} = \sqrt{Ap^2 + Bp + C} = \sqrt{\frac{4AC - B^2}{4A}}$$

vrednost **2 - odstupanja** u kojoj $F(p)$ dostiže minimum a time i $(\delta_2(p))^2$.

U aplikacijama A1, A2, A6, A7 i A9 familije funkcija $\varphi_p(x)$ jesu oblika (4.20), a u ostalim aplikacijama nisu tog obika. Za sve aplikacije A1 – A11 odgovarajuće $F(p)$ funkcije imaju vizuelno, na osnovu grafika, tačno jedan minimum i 2 - vrednost parametra $p = p_2$, određene uz pomoć Maple.

4.6 ∞ - odstupanje : Minimaks metrika

Neka je $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$. Za familiju funkcija

$$\varphi_p(x) : [a, b] \longrightarrow R$$

neprekidnu po $p \in [c, d]$ neprekidna je i funkcija :

$$\delta_{\infty}^{(p)} = \delta_{\infty}(\varphi_p) = \max_{p \in [c, d]} |\varphi_p(x)| \quad (4.21)$$

po parametru $p \in [c, d]$.

∞ - odstupanje familije neprekidnih funkcija $\varphi_p(x)$ uvodimo kao absolutni minimum funkcije

$$\delta_{\infty}^{(p)} = \delta_{\infty}(\varphi_p)$$

koji se dostiže, saglasno Vajerštras - ovoj teoremi, u nekoj tački $p = p_{\infty} \in [c, d]$.

Samu tačku $p = p_{\infty}$ nazivamo ∞ - vrednost parametra, te na osnovu prethodnog i uvodimo :

$$\delta_{\infty}^{(p_{\infty})} = \delta_{\infty}(\varphi_{p_{\infty}})$$

kao ∞ - odstupanje.

Kao što je napomenuto sekciji 4.3, u ovoj disertaciji posebno će biti od interesa familije $\varphi_p(x)$ "nike" oblika, za koje važi sledeće tvrđenje [7] :

Teorema 4.5 Neka je $\varphi_p(x)$ familija funkcija neprekidnih po $x \in (a, b)$ za svako $p \in R^+$ i rastuće raslojene za $p \in R^+$ i neka je $c, d \in R^+$ ($c < d$). Ako važi:

(a*) $\varphi_c(x) < 0$ i $\varphi_d(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$ i u rubnim tačkama $\varphi_c(a+) = \varphi_c(b-) = \varphi_d(a+) = 0$ i $\varphi_d(b-) \in R^+$

(b*) funkcije $\varphi_p(x)$ su neprekidne po $p \in (c, d)$ za svako $a \in (a, b)$ i $\varphi_p(b-)$ su takođe neprekidne po $p \in (c, d)$

(c*) za svako $p \in (c, d)$, postoji desna okolina tačke a u kojoj važi $\varphi_p(x) < 0$

(d*) za svako $p \in (c, d)$ funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu ekstremnu vrednost na (a, b) i to minimum tada postoji jedinstveno rešenje za $p \in R^+$ sledeće jednačine :

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p(b_-)$$

pri čemu za $d_0 = |\varphi_{p_0}(t^{(p_0)})| = \varphi_{p_0}(b_-)$ važi :

$$d_0 = \inf_{p \in R^+} \sup_{x \in (a, b)} |\varphi_p(x)|$$

Kada su u pitanju opadajuće raslojene familije funkcija, za njih važi analogna teorema.

Napomenimo, da sa prethodnim tvrđenjem imamo da je

$$\delta_{\infty} = \inf_{p \in R^+} \sup_{x \in (a, b)} |\varphi_p(x)|$$

ako je familija $\varphi_p(x)$ definisana za $x \in (a, b)$ i $p \in R^+$. Ukoliko familija $\varphi_p(x)$ dopušta razmatranje nad segmentima za $x \in [a, b]$ i $p \in [c, d] \subset R^+$, tada

$$\delta_\infty = \min_{p \in [c, d]} \max_{x \in [a, b]} |\varphi_p(x)|$$

Za ∞ - vrednost parametra funkciju

$$\varphi_{p_\infty}(x)$$

nazvaćemo **∞ - minimax aproksimant** familije.

U Poglavljima 5 i 6, određujemo za raslojene familije funkcija odgovarajuće q - minimaks aproksimante, za $q = 1, 2, \infty$, kao i pseudo odstupanje, u simboličkom obliku ako je moguće, inače u numeričkom obliku.

4.7 Znak raslojene familije funkcija

Po pitanju znaka funkcija iz familije $\varphi_p(x)$ "nike" oblika važi [7] :

Teorema 4.6 Za funkcije $\varphi_p(x)$ koje ispunjavaju uslove Teoreme (4.5) važe sledeća tvrđenja :

(a) Ako je $p \in (0, c]$ tada

$$x \in (a, b) \implies \varphi_p(x) \leq \varphi_c(x) < 0.$$

(b) Ako je $p \in (c, d)$ i funkcija $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ tada

$$x \in (a, x_0^{(p)}) \implies \varphi_p(x) < 0,$$

i

$$x \in (x_0^{(p)}, b) \implies \varphi_p(x) > 0.$$

(c) Ako $p \in [d, \infty)$ tada

$$x \in (a, b) \implies \varphi_p(x) \geq \varphi_d(x) > 0.$$

Kada su u pitanju opadajuće raslojene familije funkcija, za njih važi analogna teorema.

Primena q - odstupanja na raslojene familije funkcija u Teoriji analitičkih nejednakosti

*"As for everything else, so for a mathematical theory:
beauty can be perceived but not explained."*

Arthur Cayley (1821 - 1895)

Peto poglavlje se odnosi na primenu q - odstupanja na razne familije raslojenih funkcija kroz niz aplikacija podeljenih na sekcije (5.1 - 5.6). U ovom poglavlju je određen i kvalitet nejednakosti (Stečkin, Cusa - Huygens, Sándor, D'Aurizio, Becker - Stark), primenom q - odstupanja za $q = 1, 2, \infty$, kao i primenom pseudo odstupanja.

U narednim sekcijama su razmatrane familije "nike" oblika, klase funkcija iz [7], a kojima se autorka disertacije bavila u toku svog istraživanja. Data su i nova poboljšanja Stečkin-ove nejednakosti dobijena primenom q - odstupanja. Ovom nejednakosću se autorka bavila u toku svog istraživanja kada su postignuti rezultati primenom duplih Tajlor-ovih razvoja. Od posebnog interesa je Becker - Stark nejednakost razmatrana u Aplikaciji 9 koja nije "nike" oblika, osim na konkretnom segmentu.

Za dobijanje rezultata (simbolička i numerička računanja) u aplikacijama koje su razmatrane, kako u ovom tako i u narednom poglavlju, primenjene su implementacije u programskom paketu Maple.

5.1 Osnovni primer q - odstupanja

APLIKACIJA 1

Uvodni primer aplikacije koji se razmatra u ovoj disertaciji se odnosi na familiju funkcija $\varphi_p(x)$ koje predstavljaju parabole :

$$\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x \quad (5.1)$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in [0, 1] \subset R^+$.

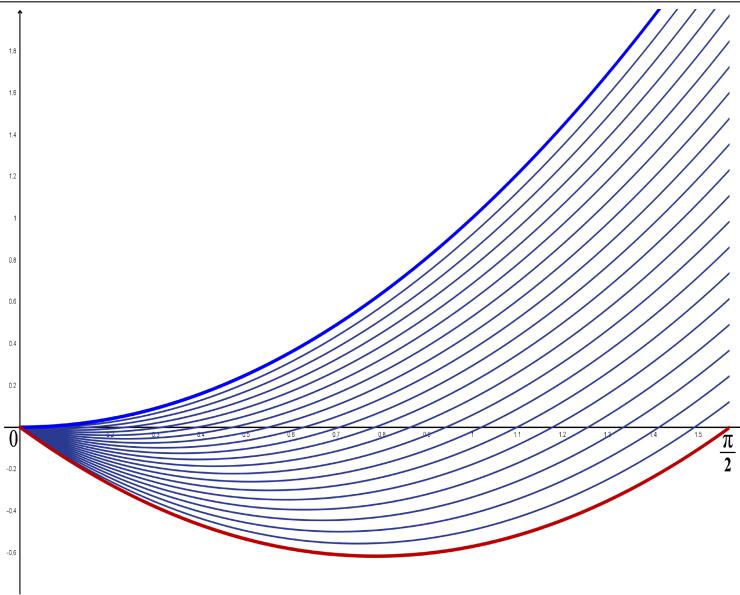
Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -\frac{1}{2}\pi x < 0 \quad (5.2)$$

to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in [0, 1] \subset R^+$.

Na sledećoj slici je dat grafik familije funkcija 5.1 :

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**



Slika 2: Familija funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p:

$$A = 0 \quad i \quad B = 1$$

Na segmenu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.1), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 2$

$$\varphi_p''(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}(x) = 2 > 0 \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_p(x) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{p\pi^2}{4} + \left(\pi - \frac{p\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies x^2 > \frac{1}{2}A\pi x \geq \frac{1}{2}p\pi x$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \implies x^2 < \frac{1}{2}p\pi x$$

i

$$x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies x^2 > \frac{1}{2}p\pi x$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies x^2 < \frac{1}{2}B\pi x \leq \frac{1}{2}p\pi x$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ moguće je odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.1) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = [0, 1]$ takav da se dostiže minimum:

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x^2 - \frac{1}{2}p\pi x \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{p\pi}{2}} -x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) dx + \int_{\frac{p\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\frac{\pi^3}{24}p^3 - \frac{\pi^3}{16}p + \frac{\pi^3}{24} \right) \end{aligned}$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Primetimo da $x^2 - \frac{1}{2}p\pi x = x \left(x - \frac{1}{2}p\pi \right) = 0$ dovodi do korena $x = x_0^{(p)} = \frac{p\pi}{2}$.

Označimo :

$$F_1(p) = \frac{\pi^3}{24}p^3 - \frac{\pi^3}{16}p + \frac{\pi^3}{24} \quad (5.3)$$

za $p \in [0, 1]$. Funkcija $F_1(p)$ ima stacionarnu tačku $p = p_1$ koju određujemo iz uslova :

$$F_1'(p) = \frac{\pi^3}{8}p^2 - \frac{\pi^3}{16} = 0$$

Napominjemo, da za funkciju $F_1(p)$ stacionarnu tačku možemo da odredimo i saglasno Teoremi 4.3 :

$$\begin{aligned} F_1'(p) &= - \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx + \int_{\frac{p\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial p} \varphi_p(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{p\pi}{2}} \frac{\pi x}{2} dx - \int_{\frac{p\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{\pi^3}{8}p^2 - \frac{\pi^3}{16} = 0 \end{aligned}$$

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067811\dots$$

Pri tome važi :

$$F_1''(p_1) = \frac{\pi^3}{4}p_1 > 0.$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1.1107207345\dots$$

*i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :*

$$\varphi_{p_1}(x) = x^2 - \frac{1}{2}p_1\pi x = x^2 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\pi x$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\sqrt{2}\pi^3}{48} = 0.3783970075\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067811\dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1.1107207345\dots$. Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$:

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x)dx = -\frac{\sqrt{2}\pi^3}{192} = -0.2283827968\dots$$

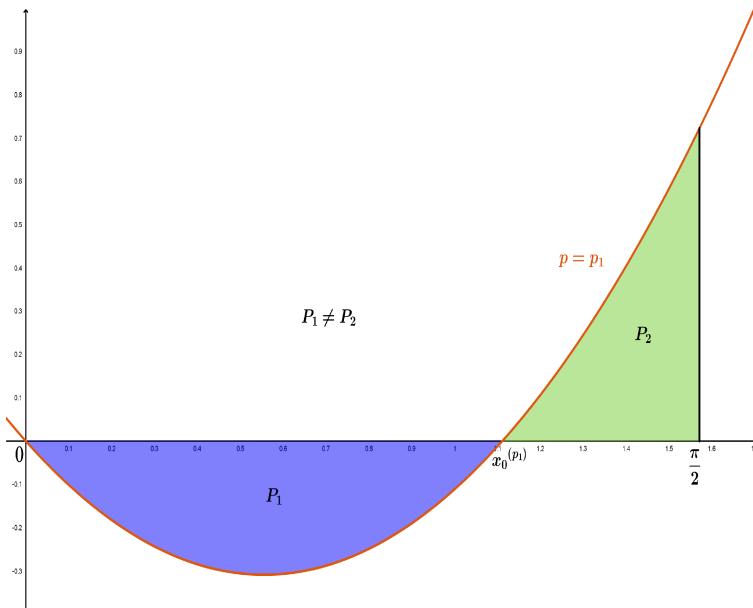
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x)dx = \frac{\pi^3}{24} - \frac{5\sqrt{2}\pi^3}{192} = 0.1500142106\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\sqrt{2}\pi^3}{48} = 0.3783970074\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osi.



Slika 3: Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{2} p \pi x \right) dx = 0 \implies p = \tilde{p}_1 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi x}{2} dx}$$

$$p = \tilde{p}_1 = \frac{2}{3} = 0.6666666666 \dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = \frac{\pi}{3} = 1.0471975511 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = x^2 - \frac{1}{2} \tilde{p}_1 \pi x$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067811 \dots \quad \text{za } x_0^{(p_1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1.1107207345 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{2}{3} = 0.6666666666 \dots \quad \text{za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = \frac{\pi}{3} = 1.0471975511 \dots$$

pri čemu je :

$$\varphi_{p_1}(x) = x^2 - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} x$$

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = x^2 - \frac{\pi}{3} x$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = \frac{2}{3} = 0.6666666666\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = \frac{\pi}{3} = 1.0471975511\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

Označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

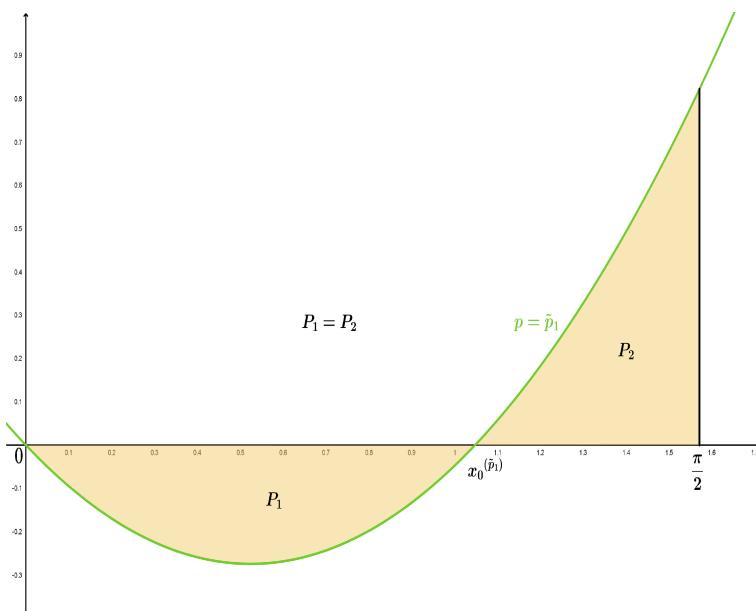
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = -\frac{\pi^3}{162} = -0.1913967696\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = \frac{\pi^3}{162} = 0.1913967696\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 4: Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Primetimo da je familija funkcija $\varphi_p(x)$ oblika (4.20), pa postoji

$$\delta_2^{p_2} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = [0, 1]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum:

$$\begin{aligned} \delta_2^{(p_2)} &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x^2 - \frac{1}{2}p\pi x \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{2}p\pi x \right)^2 dx} \\ &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\frac{\pi^5}{96}p^2 - \frac{\pi^5}{64}p + \frac{\pi^5}{160}} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{F(p)} \end{aligned}$$

pri čemu je :

$$F(p) = \frac{\pi^5}{96}p^2 - \frac{\pi^5}{64}p + \frac{\pi^5}{160} \quad (5.4)$$

za $p \in [A, B]$.

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx.$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

Određujemo prvo stacionarnu tačku iz uslova :

$$F'(p) = \frac{\pi^5}{48}p - \frac{\pi^5}{64} = 0$$

čime dobijamo,

$$p = p_2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

i tada je :

$$F''(p_2) = \frac{\pi^5}{48} = 6.375410103 > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = \frac{3\pi}{8} = 1.178097245 \dots$$

i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$.

Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_2}(x) = x^2 - \frac{1}{2}p_2\pi x = x^2 - \frac{3}{4}\pi x$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

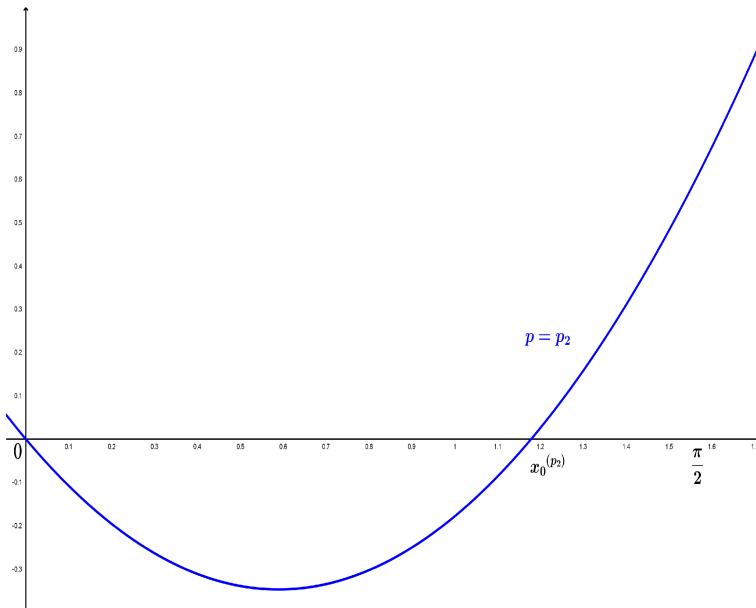
$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A,B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

koji iznosi :

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.3457440373 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = \frac{3}{4} = 0.75$, 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 5: Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = [0, 1]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje:

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| x^2 - \frac{1}{2} p \pi x \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5 postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Na osnovu činjenice da parabola $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2} p \pi x$ ima koordinate temena (po x)

$$(t^{(p)}, \varphi_p(t^{(p)})) = \left(\frac{\pi p}{4}, -\frac{\pi^2 p^2}{16} \right)$$

vrednost parametra $p = p_\infty \in [A, B]$ za koji se dostiže minimaks odstupanje se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$\begin{aligned} |\varphi_p(t^{(p)})| &= \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2 p^2}{16} &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} p \right) = \frac{\pi^2}{4} (1 - p) \\ \Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$p = p_\infty = 2\sqrt{2} - 2 = 0.8284271247 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija **∞ - minimaks aproksimant** funkcije :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = x^2 - \frac{1}{2} p_\infty \pi x = x^2 - \frac{1}{2} (2\sqrt{2} - 2) \pi x$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum

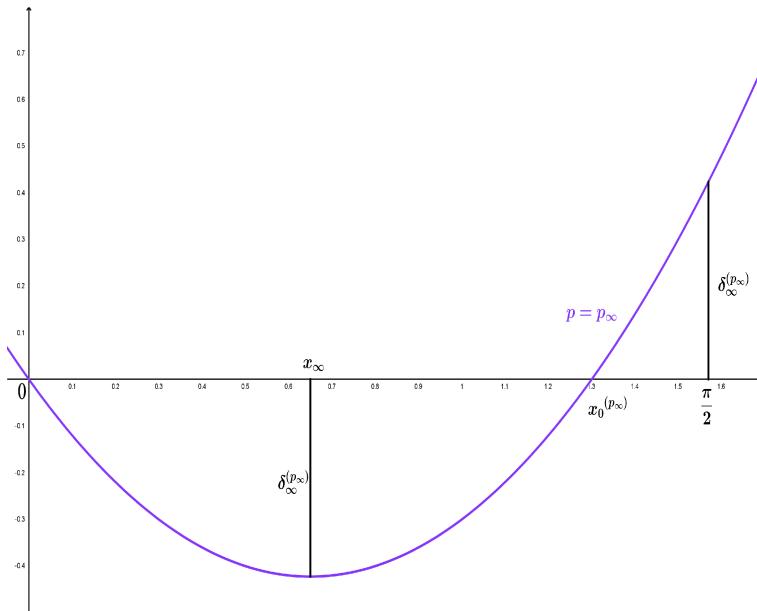
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koji iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} (2\sqrt{2} - 2) \pi^2 = 0.4233391011 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 2\sqrt{2} - 2 = 0.8284271247\dots$ ∞ - minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metriku.



Slika 6: Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071067811\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x^2 \approx_1 \frac{1}{2} p_1 \pi x$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = \frac{2}{3} = 0.6666666666\dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

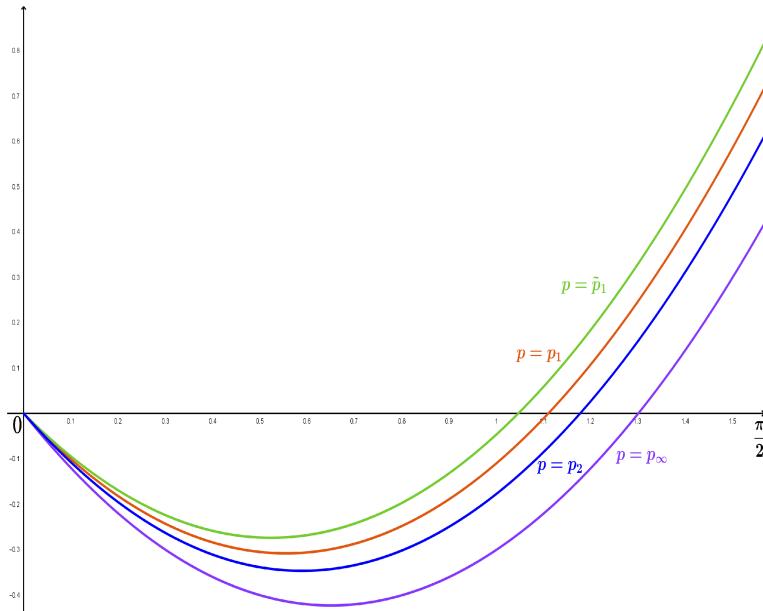
$$x^2 \approx_{\tilde{1}} \frac{1}{2} \tilde{p}_1 \pi x$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = \frac{3}{4} = 0.75$ najbolja aproksimacija u smislu u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x^2 \approx_2 \frac{1}{2} p_2 \pi x$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 2\sqrt{2}-2 = 0.8284271247\dots$ najbolja aproksimacija u smislu u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x^2 \approx_\infty \frac{1}{2} p_\infty \pi x$$



Slika 7: Funkcija $\varphi_p(x) = x^2 - \frac{1}{2}p\pi x$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

5.2 Primena q - odstupanja na Stečkin-ovu nejednakost

APLIKACIJA 2

U [sekciji 3.2](#) su predstavljena poboljšanja Stečkin-ove nejednakosti koje je autorka disertacije postigla primenom duplih Taylor-ovih razvoja u [5], a na osnovu nejednakosti koja je razmatrana u [76].

U ovoj Aplikaciji je data detaljna analiza Stečkin-ove nejednakosti, kao i njena poboljšanja, na osnovu D_q -metrike, odnosno q -odstupanja. Ponovićemo neka tvrđenja i rezultate prikazane u [sekciji 3.2](#) koji su bitni za ovu Aplikaciju, a potom ćemo predstaviti nove rezultate dobijene primenom metrike i pseudo metrike.

Teorema 5.1 (Teorema 3 u [76]) Za svako $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) < \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad (5.5)$$

□

D.S. Mitrinović je u [16] razmatrao Stečkin-ovu nejednakost :

$$\tan x > \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} \quad (5.6)$$

za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i na osnovu koje je formirana funkcija :

$$f(x) = \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} \quad (5.7)$$

za koju važi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{\pi}{2}. \quad (5.8)$$

Uvođenjem smene za x sa $\frac{\pi}{2} - t$ u funkciji $f(x)$, dobijamo funkciju :

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t - \frac{1}{t} + \frac{2}{\pi},$$

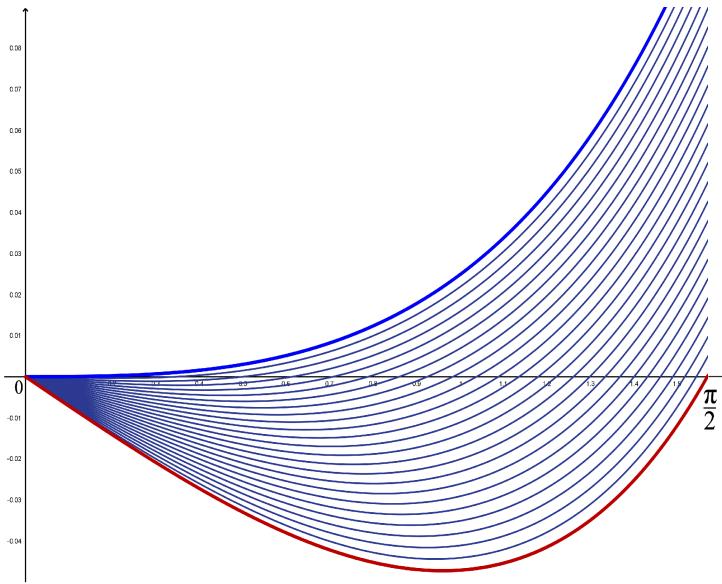
za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, odnosno nejednakost (5.5) transformišemo u :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}t < g(t) < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}t \quad (5.9)$$

za $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija u funkciji od x :

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - g(x) - px = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \quad (5.10)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{\pi^2}\right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0^+) = 0$. Stoga za familiju funkcija (5.10) možemo da smatramo da je dodefinisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Slika 8: Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -x < 0 \quad (5.11)$$

to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{\pi^2}\right] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p :

$$A = \frac{1}{3} = 0.3333333333\dots \quad i \quad B = \frac{4}{\pi^2} = 0.4052847344\dots$$

Vrednosti ovih konstanti su dobijeni u [5], kao jedan od poboljšanih rezultata za Teoremu 3 iz [76], primenom DTR-a.

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.10), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 3$

$$\begin{aligned} \varphi_p'''(x) &= \frac{d^3 \varphi_p}{dx^3}(x) \\ &= -\frac{2(-2x^4 \cos^2 x + 3 \cos^4 x - x^4 - 6 \cos^2 x + 3)}{x^4 \sin^4 x} > 0 \end{aligned} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Pri tome, postoji

$$\varphi_p'''(x) = \frac{2}{15} = 0.1333333333 > 0$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(-p + \frac{1}{3}\right)x + \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \frac{1}{4725}x^7 + O(x^9)$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{p\pi}{2} + \left(-p + 1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{16}{\pi^4}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ -odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \cot x < \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - Ax \leq \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $(0, \frac{\pi}{2})$. Takođe važi

$$x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \implies \cot x < \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px$$

i

$$x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \cot x > \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \cot x > \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - Bx \geq \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ je moguće odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

*Za familiju funkcija (5.10) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :*

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned}
 \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right| dx \right) \\
 &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right| dx \right) \\
 &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right) dx \right) \\
 &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p))
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right) dx$$

tada je :

$$\begin{aligned}
 F_1(p) &= - \left(-\ln(\sin x) + \ln x - \frac{p}{2}x^2 \right) \Big|_0^{x_0^{(p)}} \\
 &\quad + \left(-\ln(\sin x) + \ln x - \frac{p}{2}x^2 \right) \Big|_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

iskazano preko $x_0^{(p)}$.

Iz (5.12) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p\left(x_0^{(p)}\right) = \frac{2}{\pi} - \cot\left(x_0^{(p)}\right) + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x_0^{(p)}\right)}{\pi x_0^{(p)}} - px_0^{(p)} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcendentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.13) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 0.3645833335 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.113222751 \dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_1 x$$

Za ovakav izbor parametra $p = p_1$ familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0219266145 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost parametra $p = p_1 = 0.3645833335 \dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.113222751 \dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x -ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0100907037 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

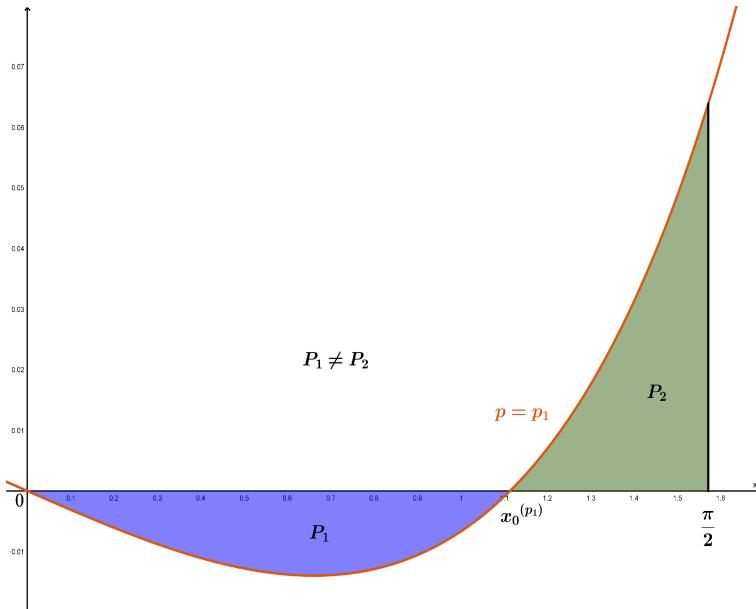
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.0118867499 \dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0219774536 \dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osi.



Slika 9: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi^2} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2} - x)}{\pi x} - px$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2} - x)}{\pi x} - px \right) dx = 0 \implies -\frac{\pi^2 p}{8} - \ln 2 + \ln \pi = 0$$

$$\implies p = \tilde{p}_1 = \frac{8(\ln \pi - \ln 2)}{\pi^2} = 0.3660391537 \dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.135703054 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - \tilde{p}_1 x$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 0.3645833335 \dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.113222751 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = 0.3660391537 \dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.135703054 \dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1}(x) &= \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - (0.3645833335 \dots) x \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - (0.3660391537 \dots) x \end{aligned}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = \frac{8(\ln \pi - \ln 2)}{\pi^2} = 0.3660391537 \dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.135703054 \dots$ Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

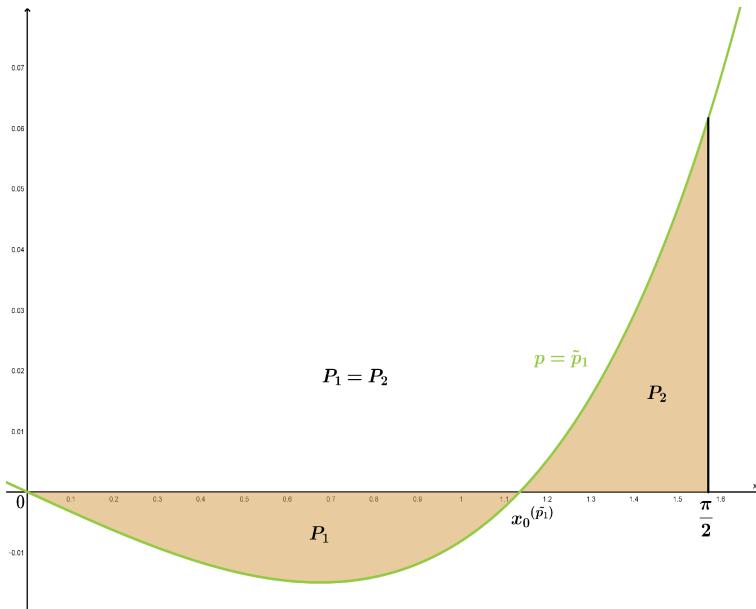
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = -0.0110112116\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = 0.0110112116\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 10: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi x} - \cot x - px$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Primetimo da je familija funkcija $\varphi_p(x)$ oblika (4.20), pa postoji

$$\delta_2^{p_2} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_2^{(p_2)} &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right|^2 dx} \\ &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right)^2 dx} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Na osnovu *sekcije 4.5* važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx.$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right) (-x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \cot x - 2 + 2px^2) dx \\ \iff \frac{p\pi^3}{12} - \pi + \pi \ln 2 &= 0 \implies p = p_2 = -\frac{12(\ln 2 - 1)}{\pi^2} = 0.3730882904\dots \end{aligned}$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = \frac{\pi^3}{12} = 2.583856391 \dots > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.235661499 \dots$$

*i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant** :*

$$\varphi_{p_2}(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_2 x$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

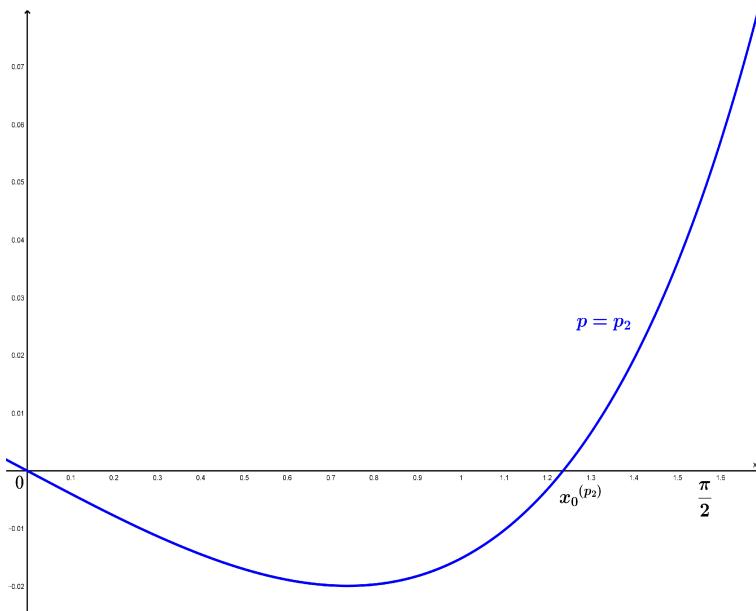
$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0000095916 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = -\frac{12(\ln 2 - 1)}{\pi^2} = 0.3730882904 \dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 11: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje:

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \left| \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - px \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se dobija numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 0.3860729509 \dots \quad i \quad x_\infty = 0.8389974985 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija **∞ - minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_\infty x$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

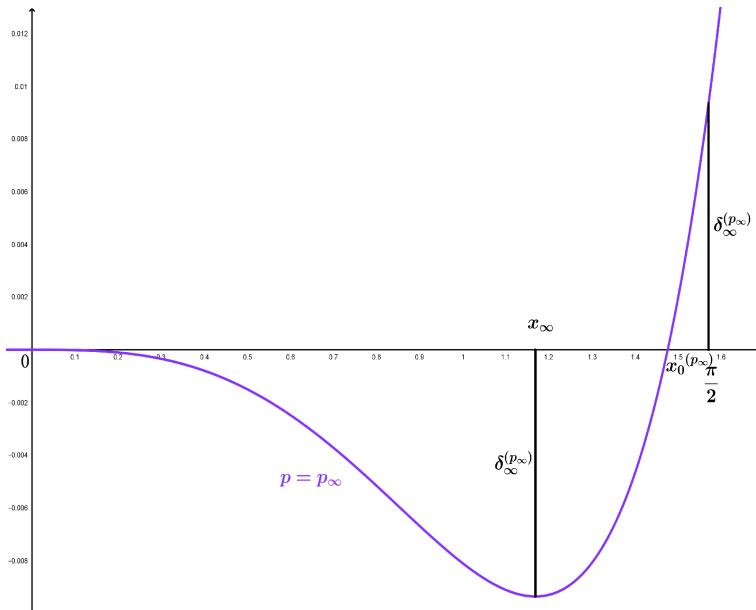
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0301777991 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 0.3860729509\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0301777991\dots$ od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metriku.



Slika 12: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2} - x)}{\pi x} - px$ za $p = p_\infty$

Zaključak 1.

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 0.3645833335\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\cot x \approx_1 \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_1 x$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 0.3660391537\dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

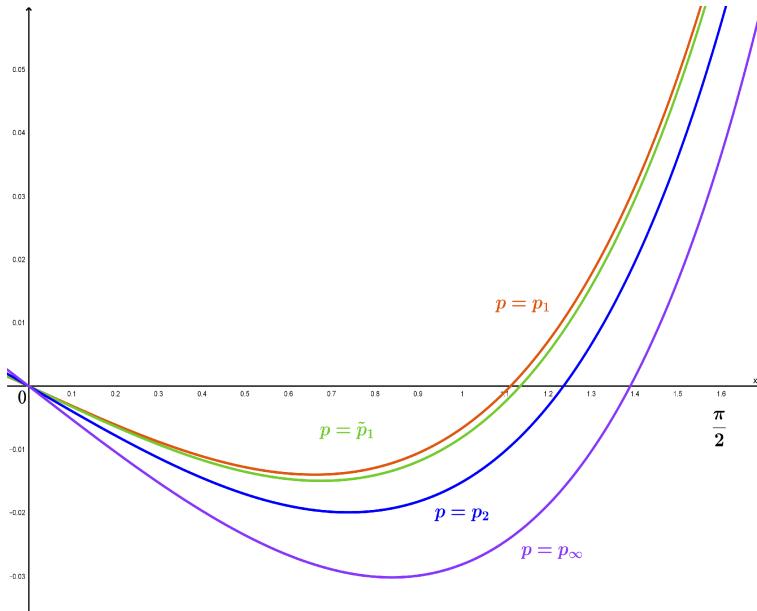
$$\cot x \approx_{\tilde{1}} \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - \tilde{p}_1 x$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 0.3730882904\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\cot x \approx_2 \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_2 x$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 0.3860729509 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ -metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\cot x \approx_\infty \frac{2}{\pi} + \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\pi x} - p_\infty x$$



Slika 13: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi} - \cot x + \frac{2(\frac{\pi}{2}-x)}{\pi x} - px$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

Zaključak 2.

Na osnovu rezultata izloženih u ovoj Aplikaciji dolazimo do zaključka da isti rezultati važe i za raslojenu familiju funkcija koja može da se definiše za funkciju (5.7), ukoliko vratimo primenjenu smenu za x sa $\frac{\pi}{2} - t$. Detaljna analiza takve familije funkcija biće predmet daljeg istraživanja.

5.3 Primena q - odstupanja na Cusa - Huygens nejednakost

U Teoriji analitičkih nejednakosti, javljaju se brojni primeri koji dovode do raslojenih familija funkcija što će biti primenjeno u sledećem nizu aplikacija.

APLIKACIJA 3

U [94] analizirana je nejednakost koju je definisao N. de Cusa³³ i data je njena aproksimacija na osnovu familije nejednakosti i određivanja najpovoljnijeg parametra. Potom je u [7] nastavljen rad na proučavanju Cusa nejednakosti. U ovoj disertaciji je data detaljna analiza naredne teoreme, kao i njena poboljšanja, na osnovu D_q - metrike, odnosno q - odstupanja.

Teorema 5.2 (Cusa) Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ važi

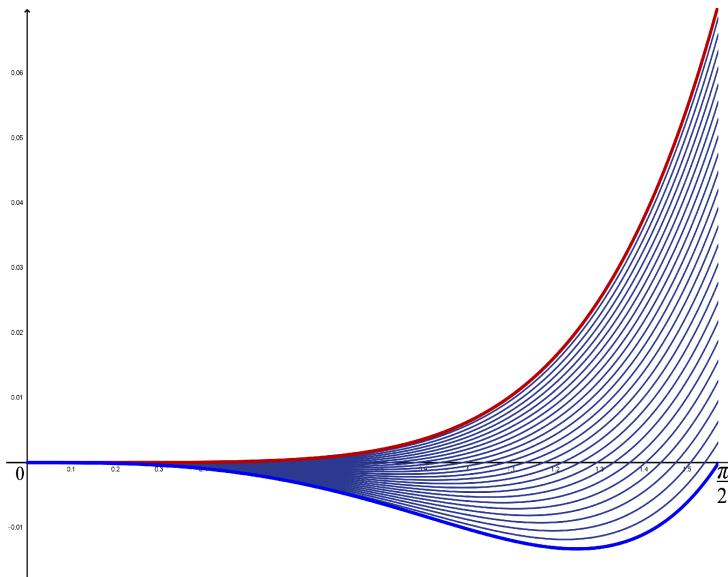
$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < x \quad (5.15)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x} \quad (5.16)$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in [\frac{2}{\pi-2}, 2] \subset R^+$.



Slika 14: Familija funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$

³³Nicolaus de Cusa (1401 - 1464) nemački kardinal, filozof, sudija, matematičar, astronom.

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -\frac{\sin x(\cos x - 1)}{(p + \cos x)^2} > 0 \quad (5.17)$$

to je familija funkcija rastuće raslojena u odnosu na parametar $p \in [\frac{2}{\pi-2}, 2] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [7] :

$$A = \frac{2}{\pi - 2} = 1.751938393\dots \quad i \quad B = 2$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.16), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 4$

$$\begin{aligned} \varphi_p^{iv}(x) &= \frac{d^4 \varphi_p}{dx^4}(x) \\ &= -\frac{(p+1) \sin x}{(p+\cos x)^5} \left(p^4 - 11 \cos x p^3 + (11 \cos^2 x - 20) p^2 + \right. \\ &\quad \left. + (-\cos^3 x + 20 \cos x) p - 8 \cos x^2 + 24 \right) > 0 \end{aligned} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = -\frac{-\frac{p}{6} + \frac{1}{3}}{p+1} x^3 - \frac{\frac{p}{120} - \frac{1}{30} - \frac{1}{12} \frac{p-2}{p+1}}{p+1} x^5 + O(x^7)$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{p+1}{p} + \left(1 - \frac{p+1}{p^2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{-\frac{p}{2} - \frac{1}{2} + \frac{p+1}{p^2}}{p} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{\frac{1}{6} \frac{p+1}{p} - \frac{1}{2} \frac{p^3 + p^2 - 2p - 2}{p^3}}{p} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies x < \frac{(A+1)\sin x}{A + \cos x} \leq \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x}$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \implies x < \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x}$$

$$i \\ x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies x > \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x}$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies x > \frac{(B+1)\sin x}{B + \cos x} \geq \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x}$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ je moguće odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.16) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = [\frac{2}{\pi-2}, 2]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x - \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x} \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| x - \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x} \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| x - \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x} \right| dx \right) \quad (5.18) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(x - \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x} \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{(p+1)\sin x}{p + \cos x} \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} -\left(x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}\right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}\right) dx$$

tada je :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= -\left(\frac{x^2}{2} + \ln(p+\cos x)p + \ln(p+\cos x)\right) \Big|_0^{x_0^{(p)}} \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2} + \ln(p+\cos x)p + \ln(p+\cos x)\right) \Big|_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -2\frac{x_0^{(p)}{}^2}{2} - 2\ln(p+\cos(x_0^{(p)}))p - 2\ln(p+\cos(x_0^{(p)})) \\ &\quad + (p+1)\ln(p+1) + \frac{\pi^2}{8} + (p+1)\ln(p) \end{aligned} \quad (5.19)$$

iskazano preko $x_0^{(p)}$.

Iz (5.18) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}\right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p(x_0^{(p)}) = x_0^{(p)} - \frac{(p+1)\sin(x_0^{(p)})}{p+\cos(x_0^{(p)})} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcendentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.19) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 1.8219383938\dots$$

5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.3317629508\dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_1}(x) = x - \frac{(p_1 + 1) \sin x}{p_1 + \cos x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje:

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0052321132\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost parametra $p = p_1 = 1.8219383938\dots$, 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.3317629508\dots$. Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$:

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0030973091\dots$$

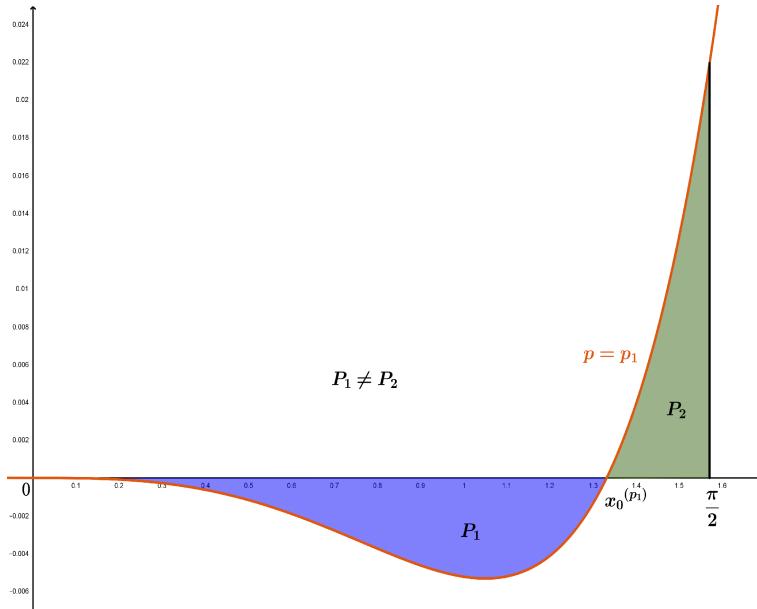
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.002134804\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0052321132\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 15: Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{(p_1 + 1) \sin x}{p_1 + \cos x} \right) dx = 0 \implies p_1 \ln(p_1) + \frac{\pi^2}{8} + \ln(p_1) - p_1 \ln(p_1 + 1) - \ln(p_1 + 1) = 0$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 1.8306188749 \dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2990119608 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$.

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

*Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:*

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = x - \frac{(\tilde{p}_1 + 1) \sin x}{\tilde{p}_1 + \cos x}$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\delta_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 1.8219383938\dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.3317629508\dots$$

$$\tilde{p}_1 = 1.8306188749\dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2990119608\dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1}(x) &= x - \frac{(2.8219383938\dots) \sin x}{(1.8219383938\dots) + \cos x} \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= x - \frac{(2.8306188749\dots) \sin x}{(1.8306188749\dots) + \cos x} \end{aligned}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = \frac{2}{3} = 1.8306188749\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2990119608\dots$ Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na intervalu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

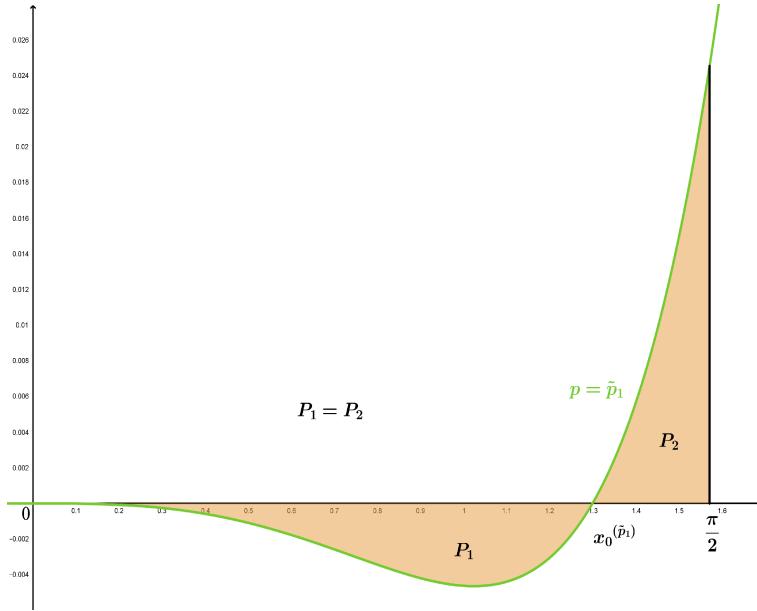
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = -0.0026423172\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na intervalu $\left[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0.0026423172\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 16: Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x}$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = [\frac{2}{\pi-2}, 2]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x} \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{(p+1)\sin x}{p+\cos x} \right)^2 dx} \quad (5.20)$$

Na osnovu *sekcije 4.5* važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx.$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff & \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(x - \frac{(p+1) \sin x}{p+\cos x} \right) \left(-\frac{\sin x}{p+\cos x} + \frac{(p+1) \sin x}{(p+\cos x)^2} \right) dx \\ = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (p \sin x \cos x - \cos^2 x - xp \cos x + \sin x \cos x)}{(p+\cos x)^3} dx \\ - & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x (p \sin x + x \cos x + xp - \sin x)}{(p+\cos x)^3} dx = 0 \end{aligned}$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 1.8033728009\dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.03906794994\dots > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.3992056044\dots$$

*i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim pokazujemo i da postoji parametar $p = p_2$ za koji se dobija **2-minimaks aproksimant** :*

$$\varphi_{p_2}(x) = x - \frac{(p_2+1) \sin x}{p_2 + \cos x}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A,B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

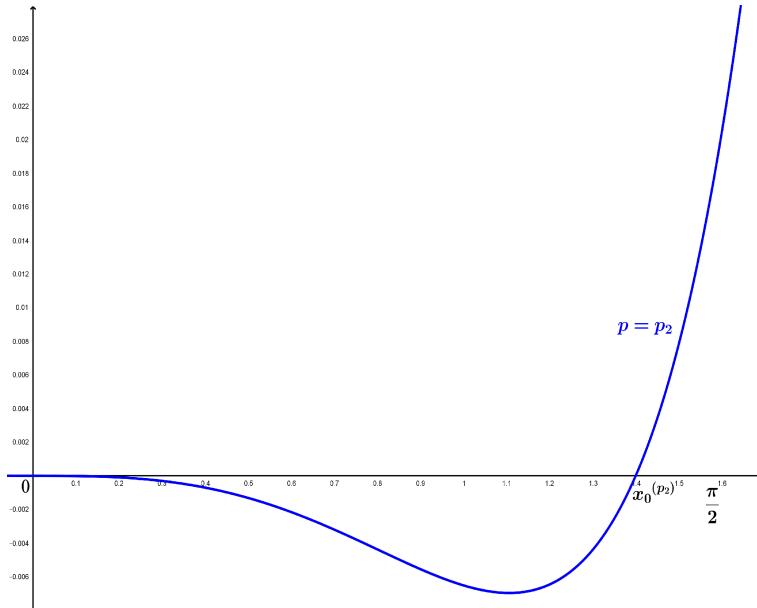
koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0058445353\dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 1.8033728009 \dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 17: Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = [\frac{2}{\pi-2}, 2]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje:

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| x - \frac{(p+1) \sin x}{p+\cos x} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se dobija numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$p_\infty = 1.7811463564 \dots$	i	$x_\infty = 1.1687134133 \dots$
---------------------------------	-----	---------------------------------

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - minimaks aproksimant :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = x - \frac{(p_\infty + 1) \sin x}{p_\infty + \cos x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

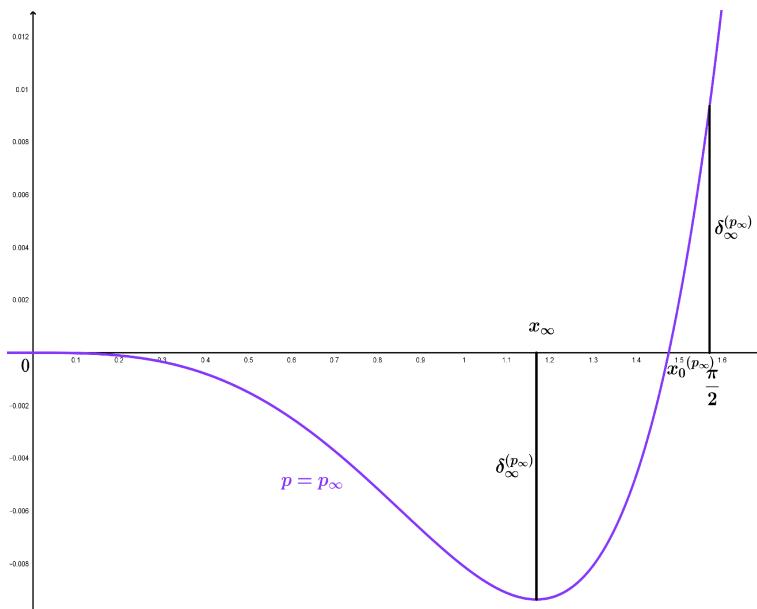
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.00936015036\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 1.7811463564\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0093601503\dots$ od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metriku.



Slika 18: Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p+\cos x}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 1.8219383938 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x \approx_1 \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 1.8306188749 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

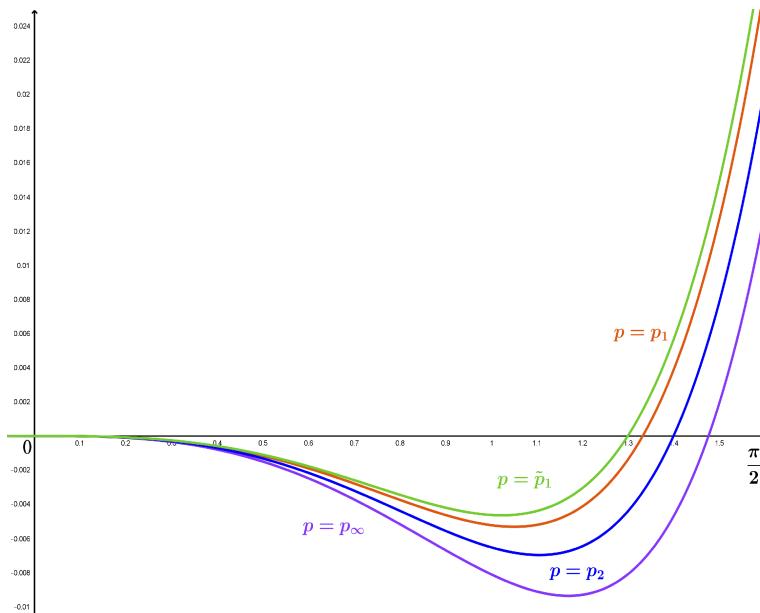
$$x \approx_{\tilde{1}} \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 1.8033728009 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x \approx_2 \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 1.7811463564 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$x \approx_\infty \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$$



Slika 19: Funkcija $\varphi_p(x) = x - \frac{(p+1) \sin x}{p + \cos x}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$

5.4 Primena q - odstupanja na nejednakosti J. Sándor-a

Kroz naredna dva primera, odnosno, dve teoreme navedene u njima, dat je prikaz određivanja najbolje aproksimacije familije funkcija na osnovu q - odstupanja, čime su poboljšani rezultati koje je postigao J. Sándor za određene trigonometrijske nejednakosti [59]. Pomenute nejednakosti su razmatrane takođe u [7].

APLIKACIJA 4

Teorema 5.3 (J. Sándor u [59]) Za $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ važi

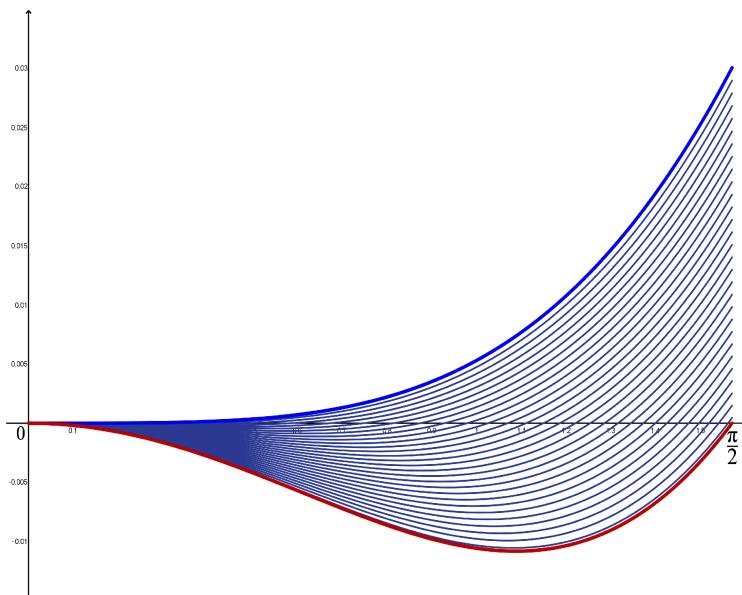
$$\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right) < \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{\frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)}} \quad (5.21)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \quad (5.22)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in \left[1, \frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)} \right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0^+) = 0$. Stoga za familiju funkcija (5.22) možemo da smatramo da je dodefnisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p \ln \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right) < 0 \quad (5.23)$$

to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[1, \frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)} \right] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [59] :

$$A = 1 \quad i \quad B = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 1.11373999\dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.22), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 3$

$$\varphi_p'''(x) = \frac{d^3 \varphi_p}{dx^3} = \frac{1}{8} \frac{\left(6 - 2 \cos^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2}} > 0 \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(-\frac{1}{6}p + \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{72}p^2 + \frac{1}{120}\right)x^4 + O(x^6),$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \left(1 - \frac{p\pi^2}{4}\right) + \left(-p\pi + \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - p\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right), \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ -odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^A \leq \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in (0, x_0^{(p)}) \implies \frac{\sin x}{x} > \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p$$

i

$$x \in (x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{x} > \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^B \geq \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ je moguće odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.22) određujemo ***q - odstupanje*** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[1, \frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left\{ \int_0^{x_0^{(p)}} \left| \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right| dx \right\} \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left\{ \int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) dx \right\} \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) dx \tag{5.25}$$

Iz (5.24) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\frac{1}{3} \cos(x) + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p \left(x_0^{(p)} \right) = \left(\frac{1}{3} \cos(x_0^{(p)}) + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin(x_0^{(p)})}{x_0^{(p)}} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcedentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.25) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikованo za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 1.0600000095\dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.2211687494\dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_1} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0044059739\dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 1.0600000095 \dots$ I - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.2211687494 \dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x -ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x -ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$:

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0023419204 \dots$$

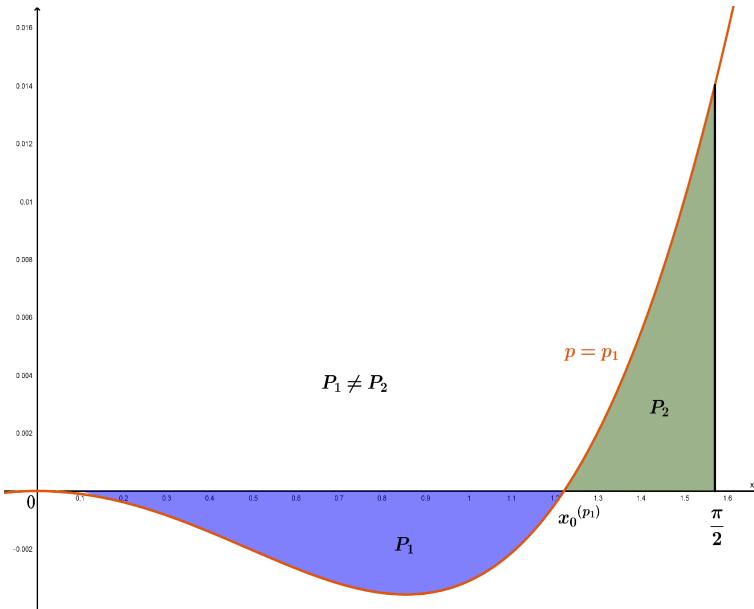
odnosno označena vrednost površine iznad x -ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.0020640535 \dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0044059739 \dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x -osu.



Slika 21: Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - *pseudo odstupanje*. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} \cos(x) + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) dx = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} \cos(x) + \frac{2}{3} \right)^p dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 1.0583292305\dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2068463294\dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{\tilde{p}_1} - \frac{\sin x}{x}$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 1.0600000095\dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.2211687494\dots$$

$$\tilde{p}_1 = 1.0583292305\dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2068463294\dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

pri čemu je :

$$\varphi_{p_1}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^{1.0600000095...} - \frac{\sin x}{x}$$

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^{1.0583292305...} - \frac{\sin x}{x}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 1.0583292305\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2068463294\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

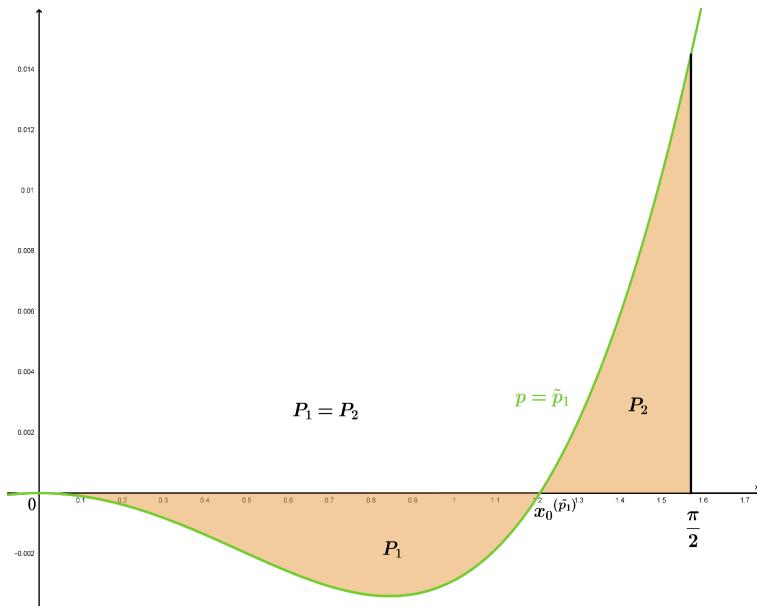
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = -0.0021997094\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0.0021997095\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 22: Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[1, \frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)}\right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx} \quad (5.26)$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p \ln \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 1.069987542 \dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.0573586155 \dots > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.3010855953 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

*i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant**:*

$$\varphi_{p_2}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_2} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

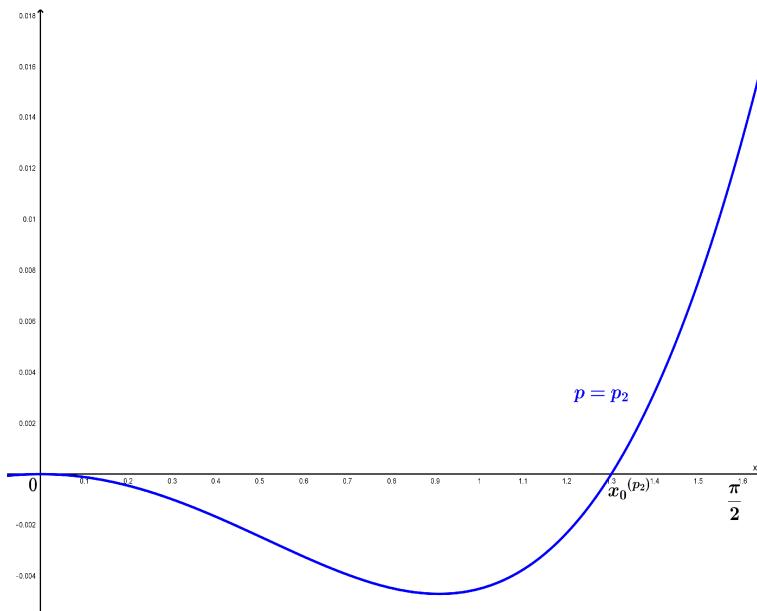
koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0000128292\dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 1.069987542\dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 23: Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[1, \frac{\ln(\pi/2)}{\ln(3/2)}\right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje:

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se dobija numerički pomoću Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 1.0871695347 \dots \quad i \quad x_\infty = 0.9885675404 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - **minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_\infty} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

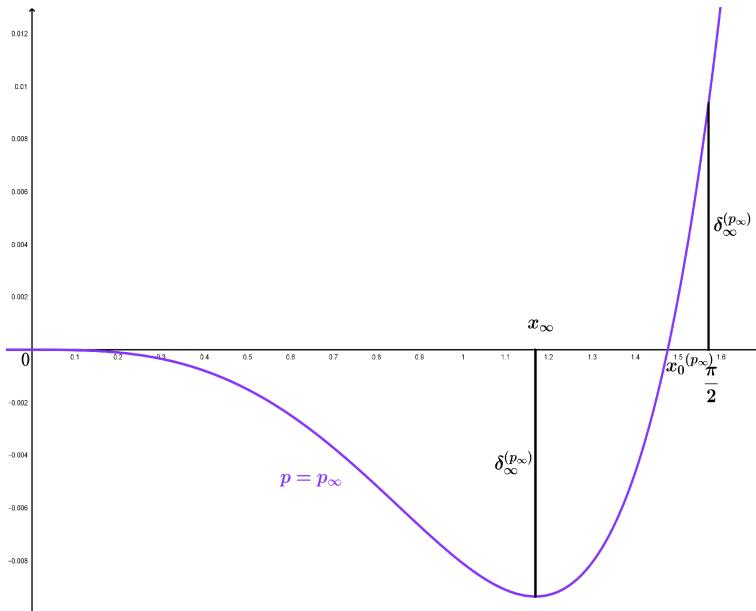
koje numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0068956325 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 1.0871695347 \dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0068956325 \dots$ od x -ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ -metriku.



Slika 24: Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3}\right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 1.0600000095 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_1 \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_1}$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 1.0583292305 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

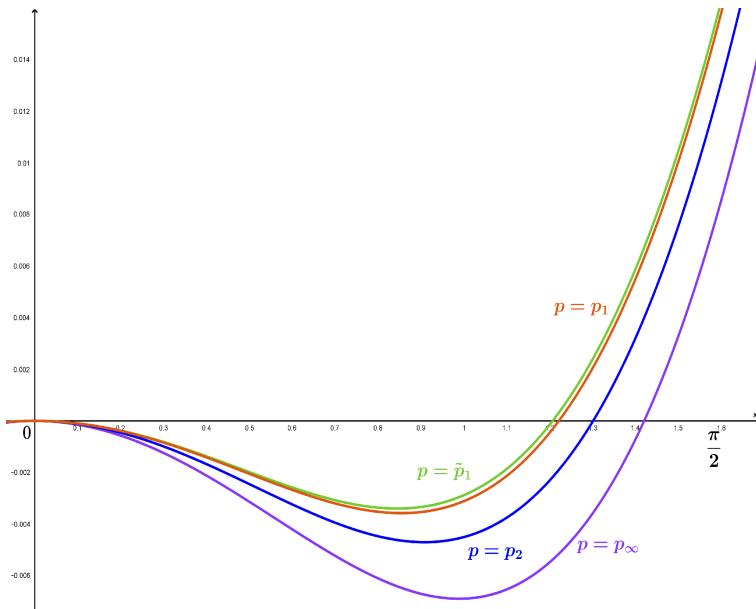
$$\frac{\sin x}{x} \approx_{\tilde{1}} \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{\tilde{p}_1}$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 1.069987542 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_2 \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_2}$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 1.0871695347 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_\infty \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^{p_\infty}$$



Slika 25: Funkcija $\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{3} \cos x + \frac{2}{3} \right)^p - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$

APLIKACIJA 5

Teorema 5.4 (J. Sándor u [59]) Za $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ važi

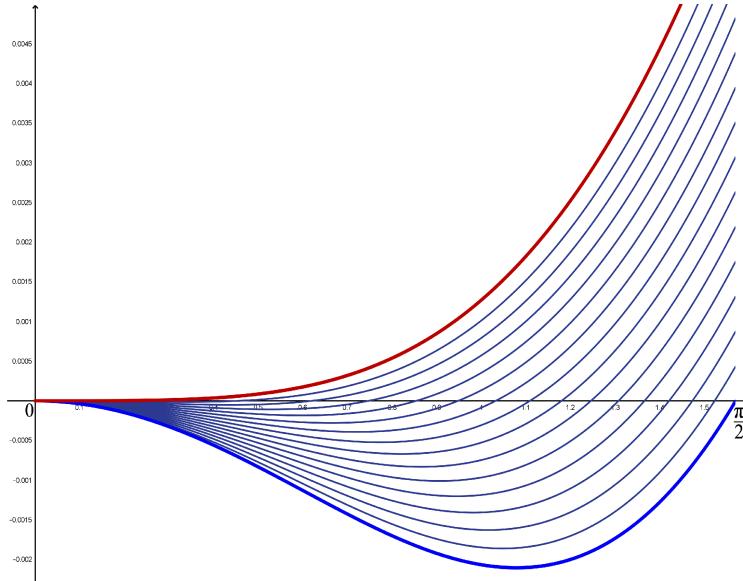
$$\left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^{\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}} < \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.27)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \quad (5.28)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in \left[\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}, \frac{2}{3}\right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0^+) = 0$. Stoga za familiju funkcija (5.28) možemo da smatramo da je dodefnisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Slika 26: Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -\left(\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2}\right)^p \ln\left(\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{2}\right) > 0 \quad (5.29)$$

to je familija funkcija rastuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}, \frac{2}{3}\right] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [59]:

$$A = \frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2} = 0.6514961294 \dots \quad i \quad B = \frac{2}{3} = 0.6666666666 \dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.28), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 3$

$$\begin{aligned} \varphi_p'''(x) &= \frac{d^3 \varphi_p}{dx^3} = \frac{-px^4 \sin x \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^{p-1} (p^2 \cos x - p^2 + 3p - 1)}{2x^4(\cos x + 1)} \\ &\quad - \frac{2(\cos x + 1) + (x^3 \cos x - 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x)}{2x^4(\cos x + 1)} > 0 \\ &\qquad\qquad\qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \left(-\frac{1}{6} + \frac{p}{4}\right)x^2 + \left(\frac{p}{96} - \frac{p^2}{32} + \frac{1}{120}\right)x^4 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{5040} + \frac{p}{1440} - \frac{p^2}{384} + \frac{p^3}{384}\right)x^6 + O(x^8) \end{aligned}$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= \frac{2}{\pi} - e^{-p \ln 2} + \left(-\frac{4}{\pi^2} + pe^{-p \ln 2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{2\left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right)}{\pi} - e^{-p \ln 2} \left(\frac{p^2}{2} - \frac{p}{2}\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2(\pi^2 - 8)}{\pi^4} - e^{-p \ln 2} \left(-\frac{p}{6} + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{6}\right)\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right), \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^A \leq \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in (0, x_0^{(p)}) \implies \frac{\sin x}{x} < \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$$

i

$$x \in (x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{\sin x}{x} > \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{\sin x}{x} > \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^B \geq \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ je moguće odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.27) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}, \frac{2}{3}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \right| dx \right) \quad (5.30) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} -\left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right) dx \quad (5.31)$$

Iz (5.30) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p(x_0^{(p)}) = \frac{\sin(x_0^{(p)})}{x_0^{(p)}} - \left(\frac{\cos(x_0^{(p)}) + 1}{2} \right)^p = 0.$$

Prethodna jednačina je transcendenta i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.31) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 0.6579961294\dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.2133841296\dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_1}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0009238570\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 0.6579961294\dots$ I-minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.2133841296\dots$. Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x-ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$:

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x)dx = -0.0004886236\dots$$

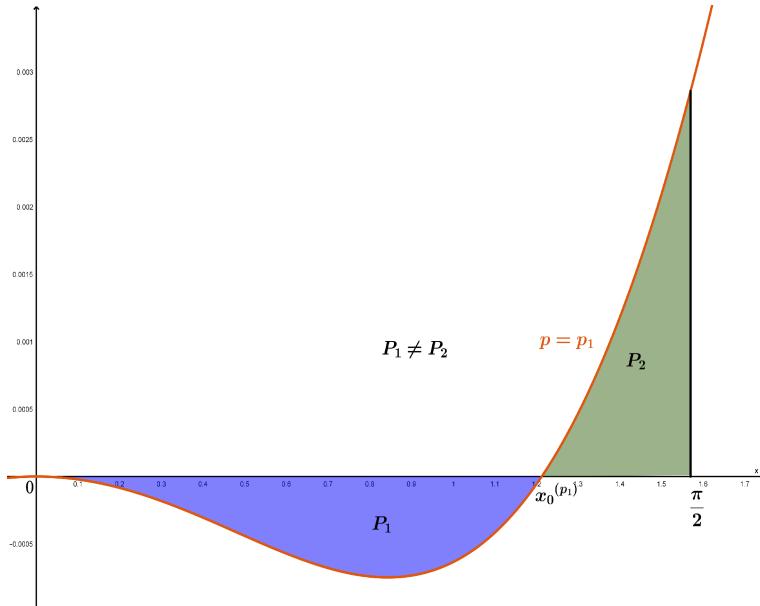
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x)dx = 0.0004352334\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.000923857\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osi.



Slika 27: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right) dx = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 0.6581965695 \dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2000787434 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{\tilde{p}_1}$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 0.6579961294 \dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.2133841296 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = 0.6581965695 \dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2000787434 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

pri čemu je :

$$\varphi_{p_1}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{0.6579961294\dots}$$

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{0.6581965695\dots}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 0.6581965695\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2000787434\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x-ose jednake, $P_1 = P_2$. Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

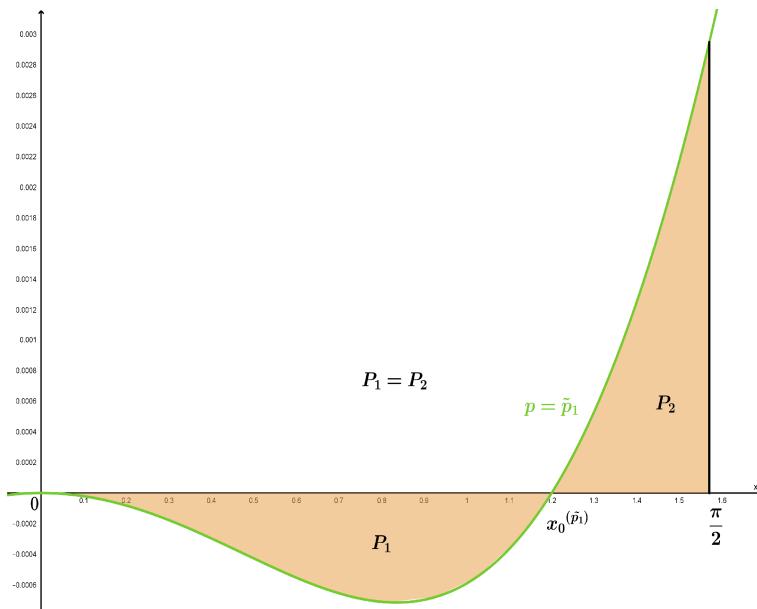
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = -0.0004623527\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0.0004623527\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 28: Familije funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}, \frac{2}{3} \right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right)^2 dx} \quad (5.32)$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \left(\frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right) \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \ln \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 0.6565973279 \dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.1509616653 \dots > 0$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.3015274155 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen 2-minimaks aproksimant :

$$\varphi_{p_2}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_2}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

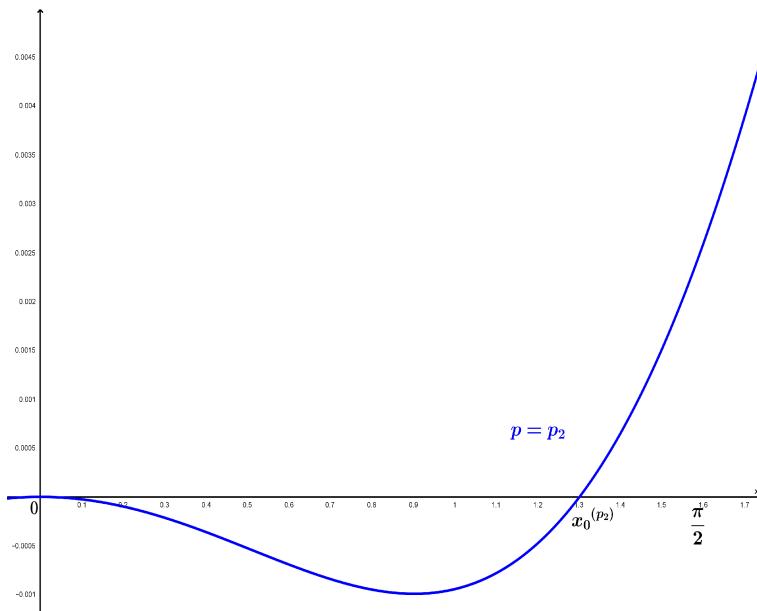
koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0000014481\dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 0.6565973279\dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 29: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[\frac{\ln(\pi/2)}{\ln 2}, \frac{2}{3} \right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$\left| \varphi_p(t^{(p)}) \right| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se dobija numerički pomoću Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 0.6546277227 \dots \quad i \quad x_\infty = 0.9767654757 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - minimaks aproksimant :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_\infty}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

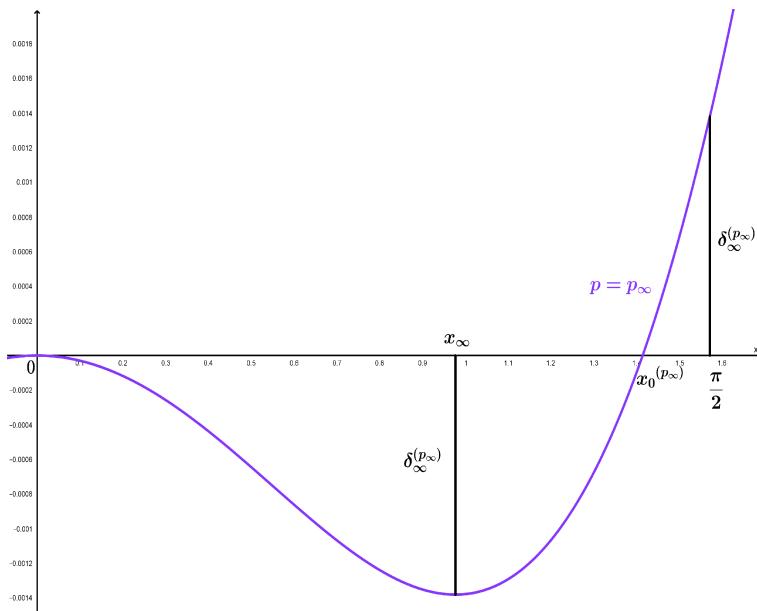
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0013803832 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$.

Za vrednost $p = p_\infty = 0.6546277227\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0013803832\dots$ od x -ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ -metriku.



Slika 30: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2}\right)^p$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 0.6579961294\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_1 \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_1}$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 0.6581965695\dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

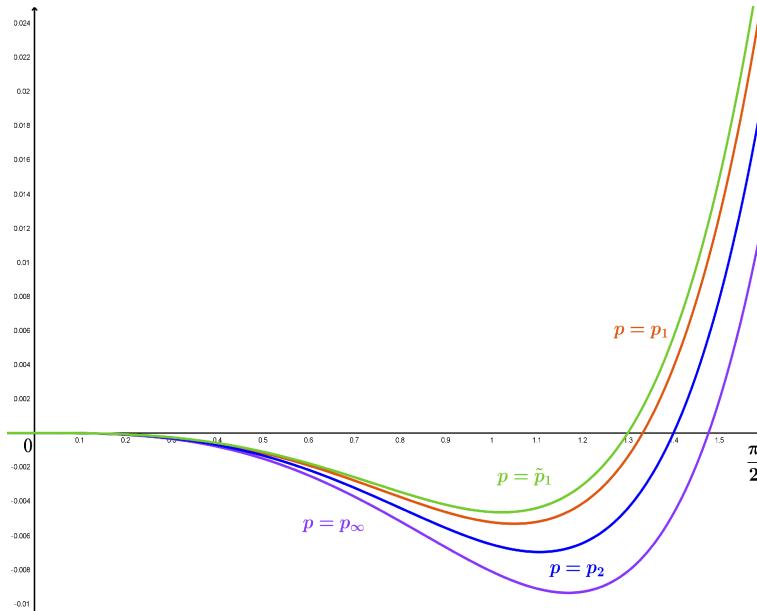
$$\frac{\sin x}{x} \approx_1 \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{\tilde{p}_1}$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 0.6565973279\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_2 \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_2}$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 0.6546277227\dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_\infty \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^{p_\infty}$$



Slika 31: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\sin x}{x} - \left(\frac{\cos x + 1}{2} \right)^p$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$

5.5 Primena q - odstupanja na D'Aurizio trigonometrijske nejednakosti

U radu "Some minimax approximants of D'Aurizio trigonometric inequalities" [95], autora B. Malesevic, B. Mihailovic, M. Nenezic Jovic, L. Milinkovic, razmatrane su D'Aurizio trigonometrijske nejednakosti i poboljšani rezultati koje je postigao J. Sándor proučavanjem istih, primenom raslojenih familija funkcija.

APLIKACIJA 6

Teorema 5.5 (J. Sándor) Za $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ važi

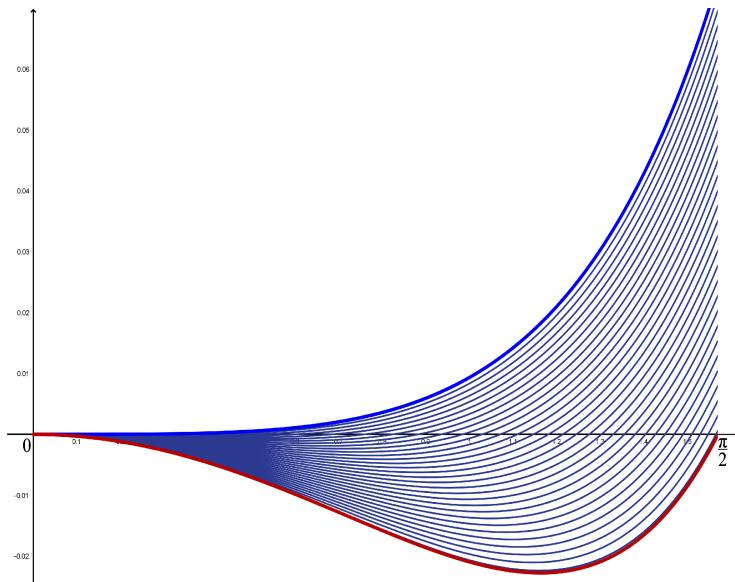
$$1 - \frac{4}{\pi^2}x^2 < \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - \frac{3}{8}x^2 \quad (5.33)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \quad (5.34)$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in [\frac{3}{8}, \frac{4}{\pi^2}] \subset R^+$.



Slika 32: Familija funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -x^2 < 0 \quad (5.35)$$

to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in [\frac{3}{8}, \frac{4}{\pi^2}] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [85]:

$$A = \frac{3}{8} = 0.375 \quad i \quad B = \frac{4}{\pi^2} = 0.40528\dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.34), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 3$

$$\varphi_p'''(x) = \frac{d^3 \varphi_p}{dx^3} = \frac{1}{8} \frac{\left(6 - 2 \cos^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{\cos^4 \frac{x}{2}} > 0 \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) Bazirano na Taylor - ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(\frac{3}{8} - p\right)x^2 + \frac{1}{128}x^4 + O(x^6),$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0)$$

(c) Bazirano na Taylor - ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \left(1 - \frac{p\pi^2}{4}\right) + \left(-p\pi + \sqrt{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - p\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{5\sqrt{2}}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right), \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}})$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - A x^2 \leq 1 - p x^2.$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in (0, x_0^{(p)}) \implies \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} > 1 - p x^2$$

i

$$x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} < 1 - p x^2$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} > 1 - B x^2 \geq 1 - p x^2.$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ moguće je odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.34) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right| dx \right) \quad (5.36) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} - \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) dx$$

tada je :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= - \left(x - 4 \sin \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left(\sec \left(\frac{x}{2} \right) + \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \frac{px^3}{3} \right) \Big|_0^{x_0^{(p)}} \\ &\quad + \left(x - 4 \sin \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left(\sec \left(\frac{x}{2} \right) + \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \frac{px^3}{3} \right) \Big|_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

odnosno :

$$\begin{aligned} F_1(p) = & -2x_0^{(p)} + 8 \sin\left(\frac{x_0^{(p)}}{2}\right) - 4 \ln\left(\sec\left(\frac{x_0^{(p)}}{2}\right) + \tan\left(\frac{x_0^{(p)}}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}p \left(x_0^{(p)}\right)^3 \\ & + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} + 2 \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - \frac{p\pi^3}{24} \end{aligned} \quad (5.37)$$

iskazano preko $x_0^{(p)}$.

Iz (5.36) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p\left(x_0^{(p)}\right) = 1 - \frac{\cos x_0^{(p)}}{\cos \frac{x_0^{(p)}}{2}} - p \left(x_0^{(p)}\right)^2 = 0.$$

Prethodna jednačina je transcedentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.37) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 0.3910625 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.247298365 \dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$.

Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p_1 x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0091523211\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 0.3910625\dots$ I - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.247298365\dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x)dx = -0.0046303074\dots$$

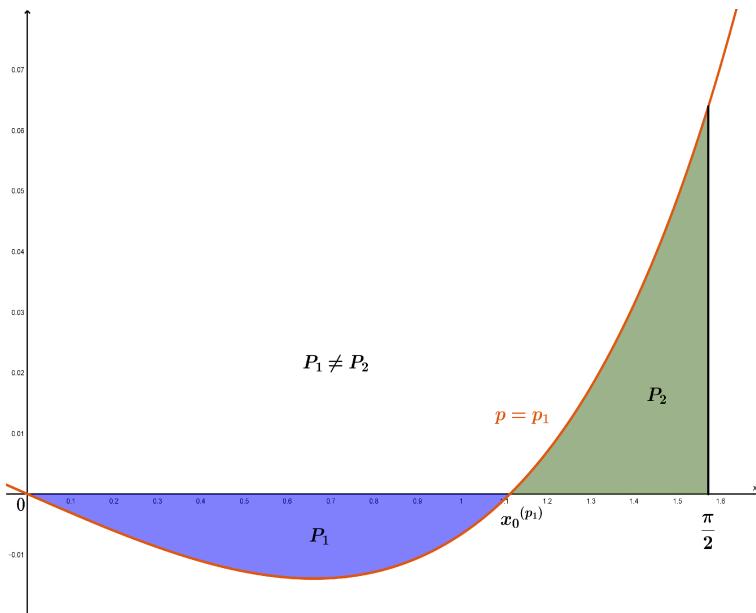
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x)dx = 0.0045220137\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0091523211\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 33: Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{\pi}{2}} - p x^2$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) dx = 0 \\ \implies p = \tilde{p}_1 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \right) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx} \\ \iff p = \tilde{p}_1 &= \frac{24 \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2} - \ln 2 + 2 \ln 2 + \sqrt{2} \right)}{\pi^3} = 0.3909569315\dots \end{aligned}$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2447654559\dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - \tilde{p}_1 x^2$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 0.3910625\dots \quad \text{za } x_0^{(p_1)} = 1.247298365\dots$$

$$\tilde{p}_1 = 0.3909569315\dots \quad \text{za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2447654559\dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned}\varphi_{p_1}(x) &= 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - (0.3910625\dots)x^2 \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - (0.3909569315\dots)x^2\end{aligned}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 0.3909569315\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2447654559\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x-ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

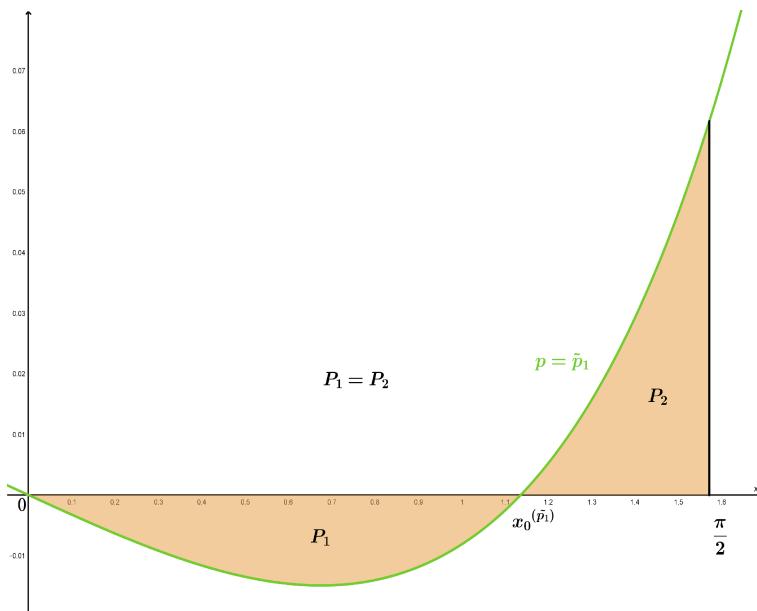
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = -0.0045762524\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = 0.0045762532\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 34: Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Primetimo da je familija funkcija $\varphi_p(x)$ oblika (4.20), pa postoji

$$\delta_2^{p_2} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right)^2 dx} \quad (5.38)$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right) (-x^2) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2x^2 + 2x^2 \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} + 2p x^4 \right) dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = p_2 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - x^2 \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \right) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx} \Leftrightarrow p = p_2 = 0.3945557939\dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = \frac{\pi^5}{80} = 3.825246062 > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.344410974 \dots$$

*i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant** :*

$$\varphi_{p_2}(x) = 1 - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} - p_2 x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

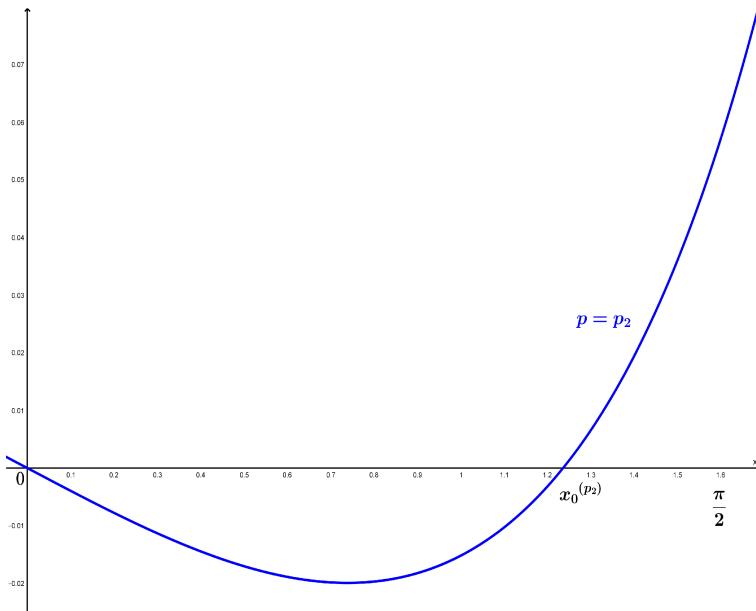
$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

koje numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0098777072 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 0.3945557939 \dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 35: Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} - p x^2$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2 \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se ostvaruje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 0.399161163 \dots \quad i \quad x_\infty = 1.069252853 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - minimaks aproksimant :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p_\infty x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum :

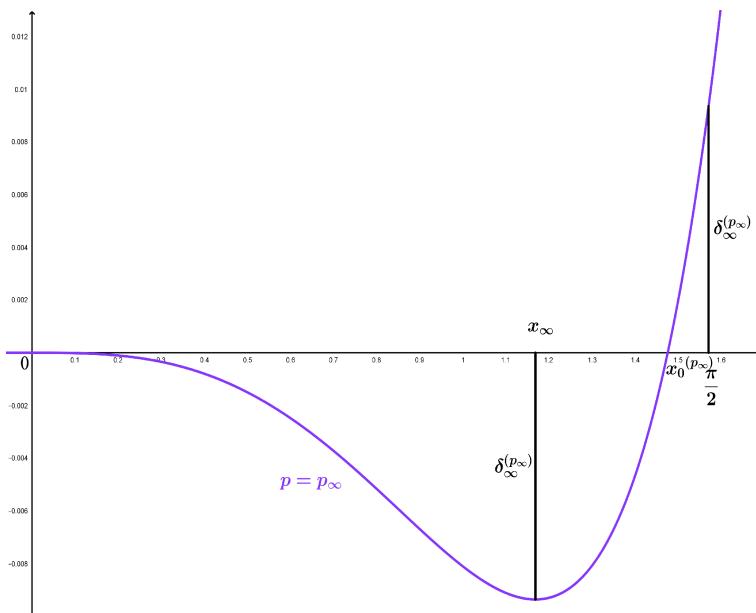
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koji numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0151093069 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$.

Za vrednost $p = p_\infty = 0.399161163\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0151093069\dots$ od x -ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ -metriku.



Slika 36: Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 0.3910625 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \approx_1 p_1 x^2$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 0.3909569315 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

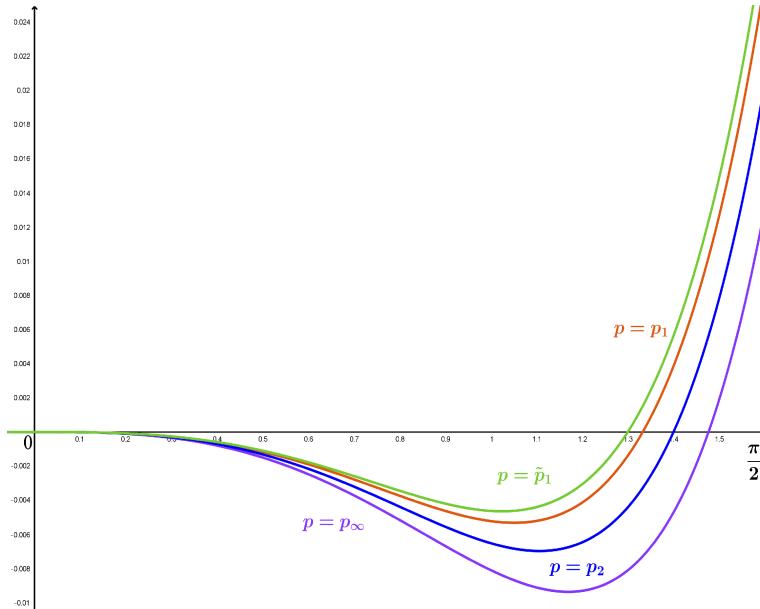
$$1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \approx_{\tilde{1}} \tilde{p}_1 x^2$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 0.3945557939 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \approx_2 p_2 x^2$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 0.399161163 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} \approx_\infty p_\infty x^2$$



Slika 37: Funkcija $\varphi_p(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2}} - p x^2$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$

APLIKACIJA 7

Teorema 5.6 (J. Sándor) Za $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ važi

$$2 - \frac{1}{4}x^2 < \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - \frac{4(2 - \sqrt{2})}{\pi^2}x^2 \quad (5.39)$$

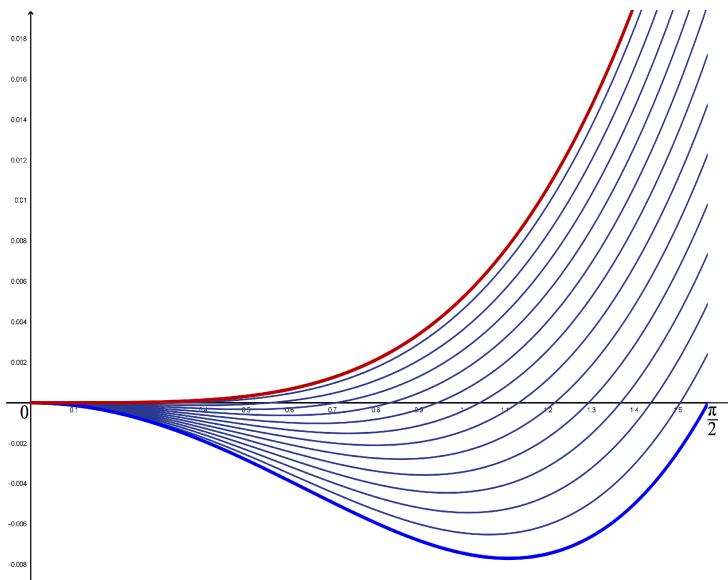
□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \quad (5.40)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ i za vrednost parametra $p \in \left[\frac{2-\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\pi^2}, \frac{1}{4} \right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0^+) = 0$.

Stoga za familiju funkcija (5.40) možemo da smatramo da je dodefinisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Slika 38: Familija funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = x^2 > 0 \quad (5.41)$$

to je familija funkcija rastuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[\frac{2-\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\pi^2}, \frac{1}{4} \right] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [85] :

$$A = \frac{2 - \sqrt{2} - \frac{1}{4}}{\pi^2} = 0.2374103008 \dots \quad i \quad B = \frac{1}{4} = 0.25$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.40), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da, za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 4$

$$\varphi_p^{iv}(x) = \frac{d^4 \varphi_p}{dx^4} = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0 \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(-\frac{1}{4} + p\right)x^2 + \frac{1}{192}x^4 + O(x^6)$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & \left(-2 + \sqrt{2} + \frac{p\pi^2}{4}\right) + \left(p\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \\ & + \left(p - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - Ax^2 \leq 2 - px^2.$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Takođe važi

$$x \in (0, x_0^{(p)}) \implies \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} < 2 - p x^2$$

i

$$x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} > 2 - p x^2$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} > 2 - B x^2 \geq 2 - p x^2.$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ moguće je odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje.

Za familiju funkcija (5.40) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[\frac{2-\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\pi^2}, \frac{1}{4}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum:

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p_1)}} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right| dx + \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right| dx \right) \quad (5.42) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p_1)}} -\left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right) dx + \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} -\left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right) dx$$

tada je :

$$\begin{aligned} F_1(p) &= - \left(-2x + 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{px^3}{3} \right) \Big|_0^{x_0^{(p)}} + \left(-2x + 4 \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{px^3}{3} \right) \Big|_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4x_0^{(p)} - 8 \sin\left(\frac{x_0^{(p)}}{2}\right) - \frac{px_0^{(p)3}}{3} - \pi + 2\sqrt{2} + \frac{p\pi^3}{24} \end{aligned} \quad (5.43)$$

iskazano preko $x_0^{(p)}$.

Iz (5.42) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p\left(x_0^{(p)}\right) = -2 + \frac{\sin x_0^{(p)}}{\sin \frac{x_0^{(p)}}{2}} + p \left(x_0^{(p)}\right)^2 = 0$$

Prethodna jednačina je transcedentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.43) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 0.242410301 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.214594305 \dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p_1 x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0036185221\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 0.242410301\dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.214594305\dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x)dx = -0.0018036742\dots$$

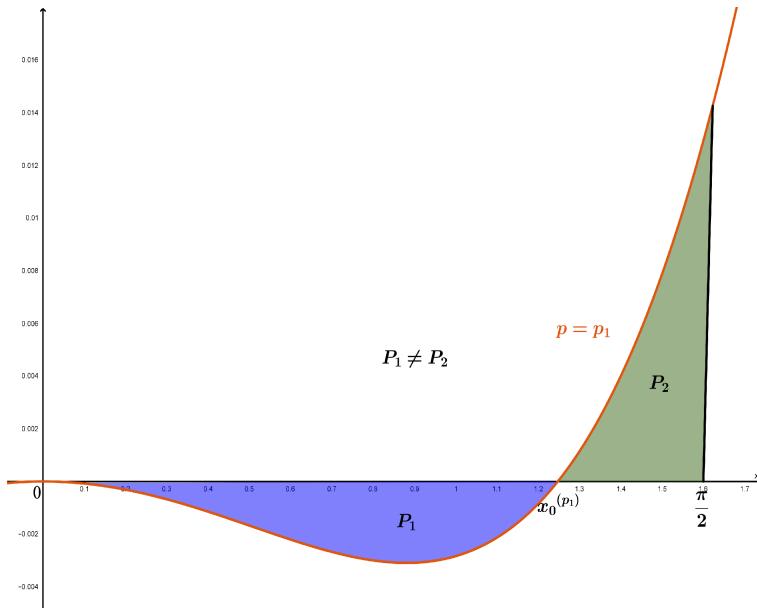
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x)dx = 0.0018148479\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0036185221\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 39: Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\begin{aligned} & \Rightarrow p = \tilde{p}_1 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx} \\ & \iff p = \tilde{p}_1 = \frac{24(\pi - 2\sqrt{2})}{\pi^3} = 0.2424016521 \dots \end{aligned}$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.215294778 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + \tilde{p}_1 x^2$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 0.242410301 \dots \quad \text{za } x_0^{(p_1)} = 1.214594305 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = 0.2424016521 \dots \quad \text{za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.215294778 \dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1}(x) &= -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + (0.242410301 \dots) x^2 \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + (0.2424016521 \dots) x^2 \end{aligned}$$

5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 0.2424016521\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.215294778\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x -ose jednake, $P_1 = P_2$. Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x -ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

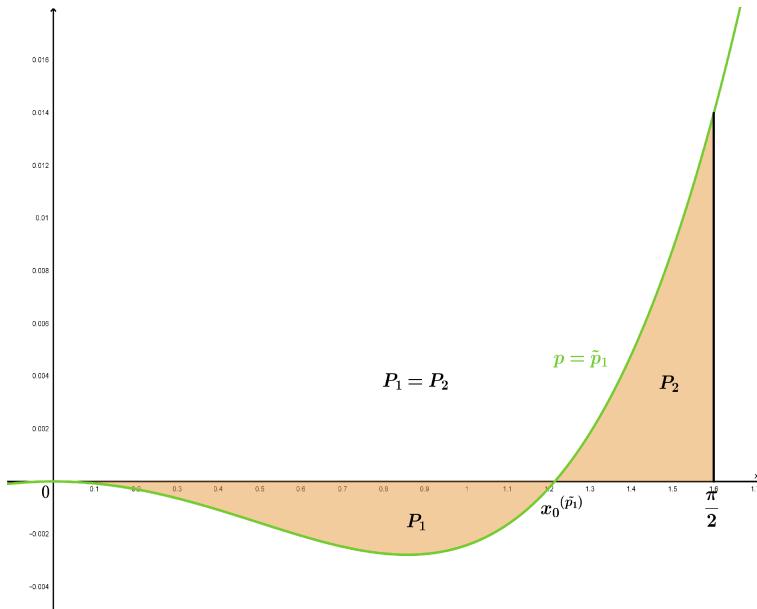
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = -0.0018088444\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x -ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0.0018088444\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 40: Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Primetimo da je familija funkcija $\varphi_p(x)$ oblika (4.20), pa postoji

$$\delta_2^{p_2} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[\frac{2-\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\pi^2}, \frac{1}{4} \right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right)^2 dx} \quad (5.44)$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Lambda_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(-2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right) (x^2) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-4x^2 + 2x^2 \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + 2p x^4 \right) dx = 0 \\ \implies p = p_2 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x^2 - 2x^2 \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x^4 dx} \\ \iff p = p_2 &= \frac{80 \left(\frac{\pi^3}{6} - \sqrt{2}\pi^2 - 8\sqrt{2}\pi + 32\sqrt{2} \right)}{\pi^5} = 0.2409751757\dots \end{aligned}$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = \frac{\pi^5}{80} = 3.825246062 > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.32602012\dots$$

*i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant** :*

$$\varphi_{p_2}(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p_2 x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže :

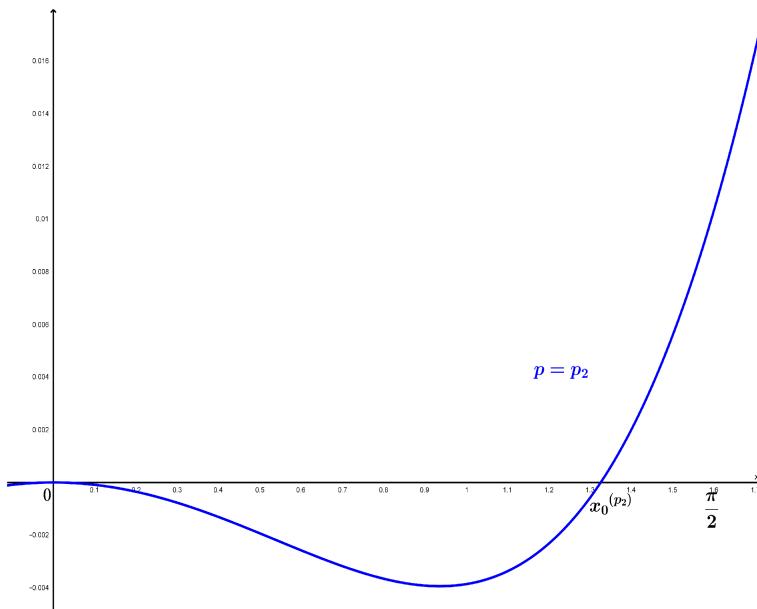
$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{\in [A,B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0036869947\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = \frac{80(\frac{\pi^3}{6} - \sqrt{2}\pi^2 - 8\sqrt{2}\pi + 32\sqrt{2})}{\pi^5} = 0.2409751757\dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 41: Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[\frac{2-\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{\pi^2}, \frac{1}{4} \right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2 \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se ostvaruje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 0.239551919 \dots \quad i \quad x_\infty = 1.007887451 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - **minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p_\infty x^2$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

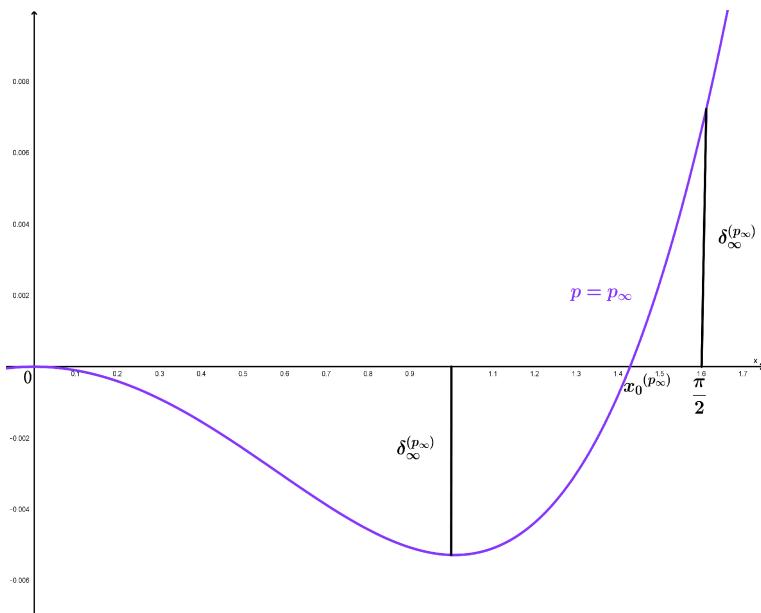
koje numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0052842307 \dots$$

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$.

Za vrednost $p = p_\infty = 0.239551919 \dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0052842307 \dots$ od x -ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ -metriku.



Slika 42: Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p_1 = 0.2424103008 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \approx_1 p_1 x^2$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $\tilde{p}_1 = 0.2424092414 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

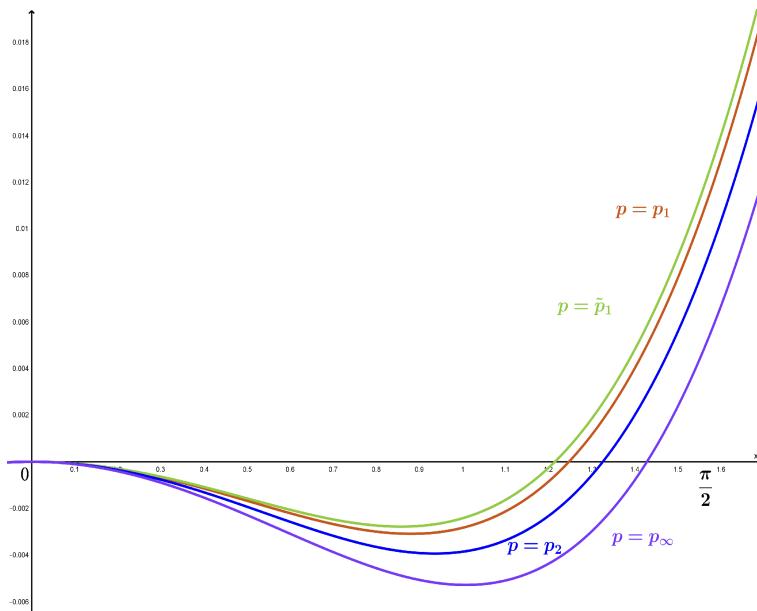
$$2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \approx_{\tilde{1}} \tilde{p}_1 x^2$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p_2 = 0.2409751757 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \approx_2 p_2 x^2$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p_\infty = 0.2395519170 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$2 - \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \approx_\infty p_\infty x^2$$



Slika 43: Funkcija $\varphi_p(x) = -2 + \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} + p x^2$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

5.6 Primena q - odstupanja na neke nejednakosti Becker - Stark tipa

APLIKACIJA 8

Teorema 5.7 (Zhu u [96]) Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ važi

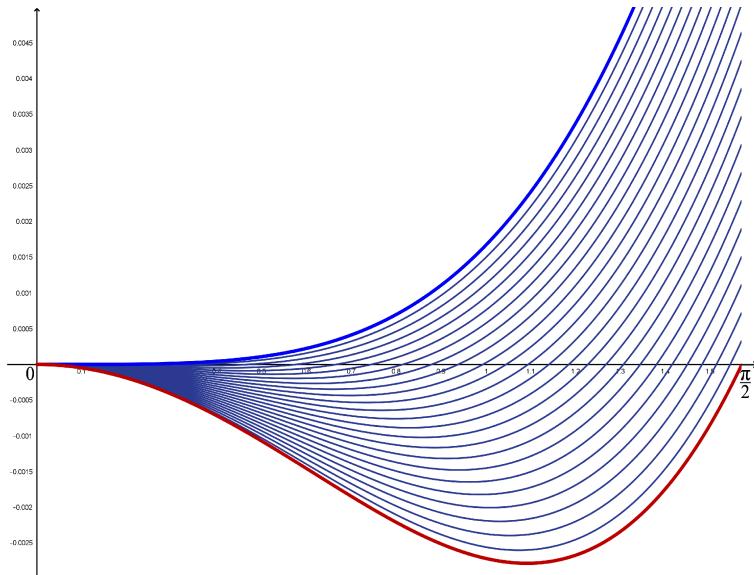
$$\frac{\pi^2 + \frac{4(8 - \pi^2)x^2}{\pi^2}}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x} < \frac{\pi^2 + \frac{(\pi^2 - 12)x^2}{3}}{\pi^2 - 4x^2} \quad (5.45)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \quad (5.46)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i za vrednost parametra $p \in \left[4 - \frac{\pi^2}{3}, \frac{4(\pi^2 - 8)}{\pi^2}\right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0_+) = 0$ i $\varphi_p(\frac{\pi}{2}_-) = \frac{1}{16} \frac{-p\pi^2 + 4\pi^2 - 32}{\pi}$. Stoga za familiju funkcija (5.46) možemo da smatramo da je dodefinisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Slika 44: Familija funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -\frac{x^2 \cos x}{\pi^2 - 4x^2} < 0 \quad (5.47)$$

to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in [A, B] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [96] :

$$A = 4 - \frac{\pi^2}{3} = 0.7101318663 \dots \quad i \quad B = \frac{4(\pi^2 - 8)}{\pi^2} = 0.7577221234 \dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.46), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da za $p \in [A, B]$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 4$

$$\varphi_p^{iv}(x) = \frac{d^4 \varphi_p}{dx^4} > 0 \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(\frac{1}{6} + \frac{-p - \frac{\pi^2}{2} + 4}{\pi^2} \right) x^2 + \left(-\frac{1}{120} + \frac{\frac{p}{2} + \frac{\pi^2}{24} - \frac{2(\pi^2 + 2p - 8)}{\pi^2}}{\pi^2} \right) x^4 + O(x^6)$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) = & -\frac{2}{\pi} - \frac{\frac{p\pi^2}{4} - \pi^2}{4\pi} + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{p\pi - \frac{\pi(p-4)}{4}}{4\pi} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \\ & + \left(-\frac{2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right)}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{\frac{p}{4} - \frac{p\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{6} - 1}{Pi} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 + O \left(\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

postoji leva okolina $\mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}$ tačke $\frac{\pi}{2}$ tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2}, \varphi'''_p(x) = \frac{d^3\varphi_p}{dx^3} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_{\frac{\pi}{2}}).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x(\pi^2 - Ax^2)}{\pi^2 - 4x^2} \leq \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Takođe važi

$$x \in \left(0, x_0^{(p)}\right) \implies \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

i

$$x \in \left(x_0^{(p)}, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{x} > \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \frac{\sin x}{x} > \frac{\cos x(\pi^2 - Bx^2)}{\pi^2 - 4x^2} \geq \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

Takođe, na osnovu "nike" oblika familije funkcija $\varphi_p(x)$ moguće je odrediti 1, 2 i pseudo odstupanje, pa samim tim za familiju funkcija (5.46) određujemo q -odstupanje za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[4 - \frac{\pi^2}{3}, \frac{4(\pi^2 - 8)}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimum:

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right| dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned} \tag{5.48}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) dx + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) dx$$

tada je :

$$F_1(p) = 1 - \frac{p \sin(x_0^{(p)})}{2} + \frac{p}{4} - \frac{p\pi}{16} + \frac{\pi}{4} \quad (5.49)$$

iskazano preko $x_0^{(p)}$.

Iz (5.48) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p(x_0^{(p)}) = \frac{\cos(x_0^{(p)})(\pi^2 - p(x_0^{(p)})^2)}{\pi^2 - 4(x_0^{(p)})^2} - \frac{\sin(x_0^{(p)})}{x_0^{(p)}} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcendentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.49) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 0.7381318663 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.2302299331 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_1$ određen 1-minimaks aproksimant :

$$\varphi_{p_1}(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - p_1 x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0012334518 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 0.7381318663 \dots$ I-minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.2302299331 \dots$. Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x-ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0006796813 \dots$$

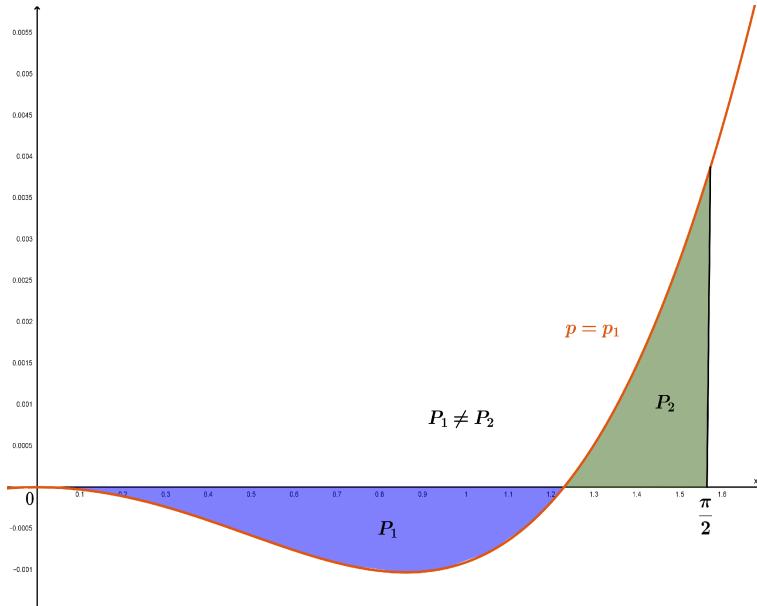
odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.0005537705 \dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0012334518 \dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 45: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x (\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) dx = 0$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 0.7370237594 \dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2070880892 \dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \frac{\cos x (\pi^2 - (\tilde{p}_1 x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 0.7381318663 \dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.2302299331 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = 0.7370237594 \dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2070880892 \dots$$

pri čemu je :

$$\varphi_{p_1}(x) = \frac{\cos x (\pi^2 - (0.7381318663 \dots) x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \frac{\cos x (\pi^2 - (0.7370237594 \dots) x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 0.7370237594\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.2070880892\dots$. Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine ispod i iznad x -ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x -ose na intervalu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

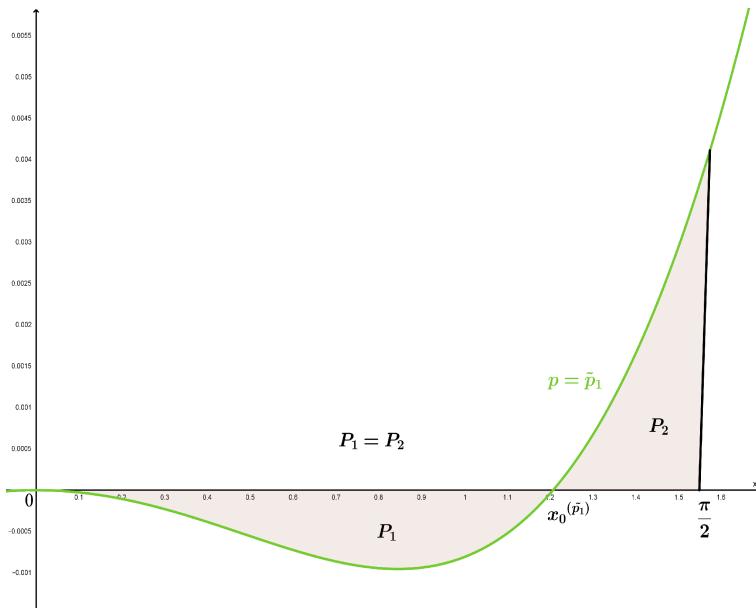
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = -0.0006174471\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x -ose na intervalu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x)dx = 0.0006174471\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 46: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[4 - \frac{\pi^2}{3}, \frac{4(\pi^2-8)}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx} \quad (5.50)$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određuje mo stacionarnu tačku iz uslova :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right) \left(-\frac{x^2 \cos x}{\pi^2 - 4x^2} \right) dx = 0$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 0.7422062605 \dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.0280361224 \dots > 0$$

5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.3109288423 \dots$$

i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_2}(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - p_2 x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

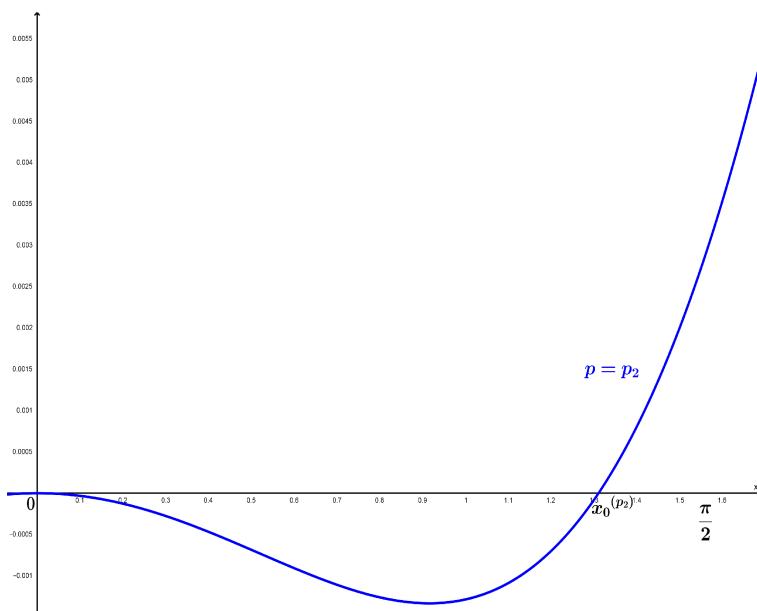
koji numerički iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0012738056 \dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 0.7422062605 \dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 47: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[4 - \frac{\pi^2}{3}, \frac{4(\pi^2 - 8)}{\pi^2}\right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \frac{\cos x (\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se dobija numerički pomoću Maple koda (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$p_\infty = 0.7482674303 \dots$

i

$x_\infty = 0.9901344543 \dots$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija **∞ - minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \frac{\cos x (\pi^2 - p_\infty x^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

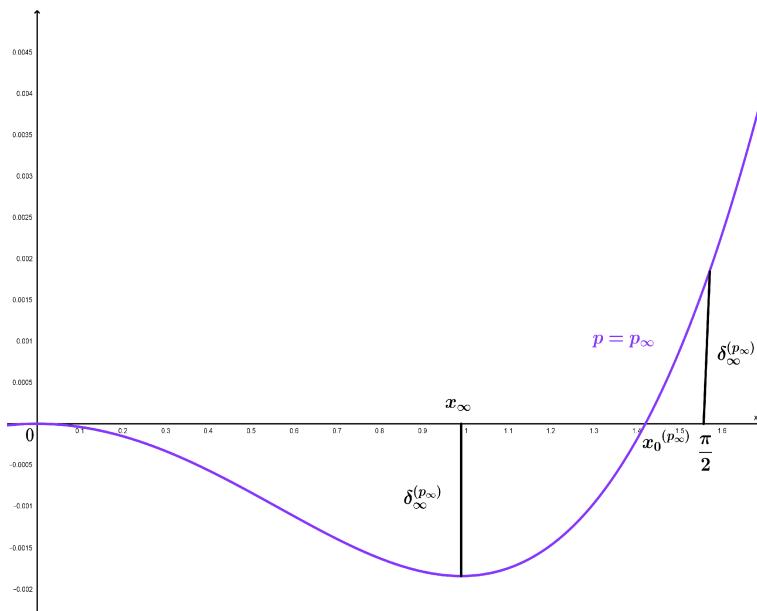
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koja numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.001844503 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 0.7482674303\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.001844503\dots$ od x -ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ -metrike.



Slika 48: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

(a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 0.7381318663 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_1 \frac{\cos x(\pi^2 - p_1 x^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

(b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 0.7370237594 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

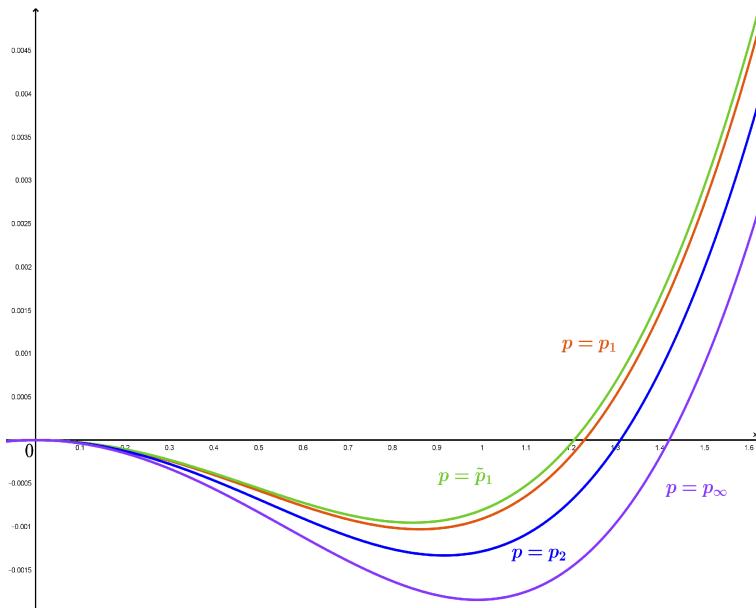
$$\frac{\sin x}{x} \approx_{\tilde{1}} \frac{\cos x(\pi^2 - \tilde{p}_1 x^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

(c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 0.7422062605 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_2 \frac{\cos x(\pi^2 - p_2 x^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$

(d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 0.7482674303 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin x}{x} \approx_\infty \frac{\cos x(\pi^2 - p_\infty x^2)}{\pi^2 - 4x^2}$$



Slika 49: Funkcija $\varphi_p(x) = \frac{\cos x(\pi^2 - px^2)}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{\sin x}{x}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

APLIKACIJA 9

Teorema 5.8 (Bagul, Chesneau u [97]) Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ važi

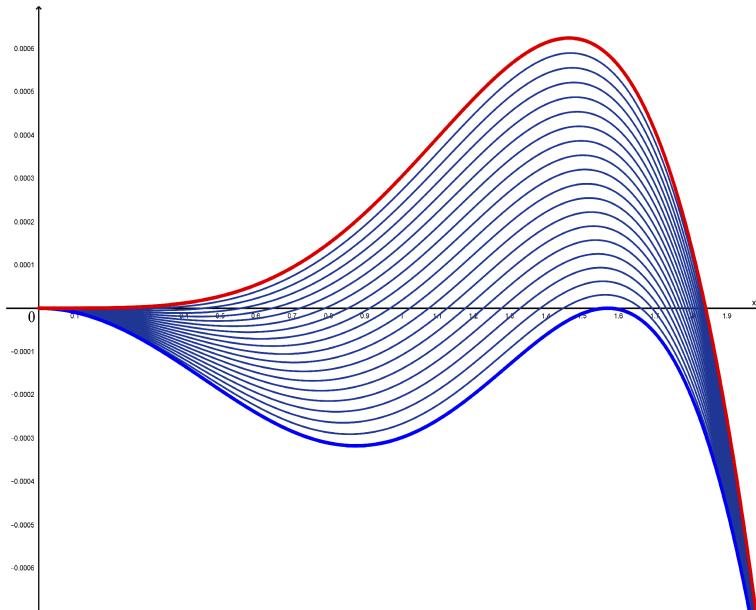
$$\sqrt{1 + \frac{128}{\pi^4} \frac{x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}} < \frac{\tan x}{x} < \sqrt{1 + \frac{2\pi^2}{15} \frac{x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}} \quad (5.51)$$

□

U vezi ove nejednakosti definišemo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (5.52)$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i za vrednost parametra $p \in \left[\frac{128}{\pi^4}, \frac{2\pi^2}{15} \right] \subset R^+$. Napomenimo da postoji $\varphi_p(0_+) = 0$ i $\varphi_p(\frac{\pi}{2}-) = \frac{1}{32} \frac{p\pi^4 - 128}{\pi^2}$. Stoga za familiju funkcija (5.46) možemo da smatramo da je dodefinisana i za vrednost $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



Slika 50: Familija funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = \frac{x^2 \cos^2 x (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} > 0 \quad (5.53)$$

to je familija funkcija rastuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[\frac{128}{\pi^4}, \frac{2\pi^2}{15} \right] \subset R^+$.

Sa Slike 50. uočavamo da posmatrana familija funkcija nije vizuelno u do sada ispitivanoj klasi funkcija koje ispunjavaju uslove Nike teoreme (4.1) na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Međutim, ova familija funkcija je "nike" oblika samo na segmentu $x \in [0, c]$, pri čemu je $c = 1.463840983 \dots$ koji se dobija računom u Maple.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p [97] :

$$A = \frac{128}{\pi^4} = 1.3140457285 \dots \quad i \quad B = \frac{2\pi^2}{15} = 1.3159472534 \dots \dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (5.52), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Primetimo da za $p \in [A, B]$ i na intervalu $x \in (0, c)$ funkcije $\varphi_p(x)$ ispunjavaju uslove Teoreme 4.1 (Nike teorema):

(a) Za $m = 3$

$$\varphi_p'''(x) = \frac{d^3 \varphi_p}{dx^3} > 0 \quad x \in (0, c)$$

(b) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini nule:

$$\varphi_p(x) = \left(\frac{5p}{\pi^2} - \frac{2}{3} \right) x^2 + \left(\frac{13}{45} + \frac{28p}{\pi^4} - \frac{5p}{\pi^2} \right) x^4 + \left(-\frac{13}{315} + \frac{144p}{\pi^6} - \frac{28p}{\pi^4} + \frac{5p}{3\pi^2} \right) x^6 + O(x^8)$$

postoji desna okolina \mathcal{U}_0 tačke 0 tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} < 0 \quad (x \in \mathcal{U}_0).$$

(c) Bazirano na Taylor-ovom razvoju funkcija $\varphi_p(x)$ u okolini c :

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= -0.44995 + 0.3424p + (0.31898 - 0.24239p)(x - c) \\ &+ (0.922691 - 0.703356p)(x - c)^2 + (0.034122 - 0.02866p)(x - c)^3 + O((x - c)^4) \end{aligned}$$

postoji leva okolina \mathcal{U}_c tačke c tako da

$$\varphi_p(x), \varphi'_p(x) = \frac{d\varphi_p}{dx}, \varphi''_p(x) = \frac{d^2\varphi_p}{dx^2} > 0 \quad (x \in \mathcal{U}_c).$$

Možemo da zaključimo da funkcije familije $\varphi_p(x)$, za $p \in [A, B]$ imaju tačno jedan ekstremum, u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $(0, c)$ i tačno jednu nulu, u oznaci $x_0^{(p)}$ na $(0, c)$.

Ovaj zaključak obezbeđuje da je moguće odrediti ∞ - odstupanje, s obzirom da su ispunjeni i uslovi Teoreme 4.5.

**5: PRIMENA Q - ODSTUPANJA NA RASLOJENE FAMILIJE FUNKCIJA
U TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI**

Napominjemo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ na intervalu $x \in (0, c)$ takođe ispunjava i uslove Teoreme 4.6, što je posledica ispunjenosti uslova Teoreme 4.5 i Nike teoreme 4.1 odnosno važi sledeće:

(i) Ako $p \in (0, A]$ onda je

$$x \in (0, c) \implies \frac{\sin^2 x}{x^2} > \cos^2 x \left(1 + \frac{Ax^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) \geq \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

(ii) Ako $p \in (A, B)$, onda $\varphi_p(x)$ ima tačno jednu nulu $x_0^{(p)}$ na $(0, c)$. Takođe važi

$$x \in (0, x_0^{(p)}) \implies \frac{\sin^2 x}{x^2} > \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

i

$$x \in (x_0^{(p)}, c) \implies \frac{\sin^2 x}{x^2} < \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

(iii) Ako $p \in [B, \infty)$ onda

$$x \in (0, c) \implies \frac{\sin^2 x}{x^2} < \cos^2 x \left(1 + \frac{Bx^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) \leq \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

Za familiju funkcija (5.52) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, +\infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = \left[\frac{128}{\pi^4}, \frac{2\pi^2}{15} \right]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_1^{(p_1)} &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right| dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} \left| \cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right| dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right| dx \right) \quad (5.54) \\ &= \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right) dx \right) \\ &= \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \end{aligned}$$

Neka je :

$$F_1(p) = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{x_0^{(p)}} - \left(\cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right) dx \right. \\ \left. + \int_{x_0^{(p)}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x^2 \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2} \right) dx \right) \quad (5.55)$$

Iz (5.54) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga : Familija $\varphi_p(x)$, po Nike teoremi 4.1, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ tj.

$$\varphi_p(x_0^{(p)}) = \cos^2(x_0^{(p)}) \left(1 + \frac{p(x_0^{(p)})^2 (5\pi^2 - 12(x_0^{(p)})^2)}{(\pi^2 - 4(x_0^{(p)})^2)^2} \right) - \frac{\sin^2(x_0^{(p)})}{(x_0^{(p)})^2} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcendentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, \frac{\pi}{2}]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (5.55) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 1.314794094 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 1.103396154 \dots$$

i dostiže se minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_1)})$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_1}(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{p_1 x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0001520038 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 1.314794094\dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 1.103396154\dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina ispod i iznad x -ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x -ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} -\varphi_{p_1}(x)dx = -0.0000819707\dots$$

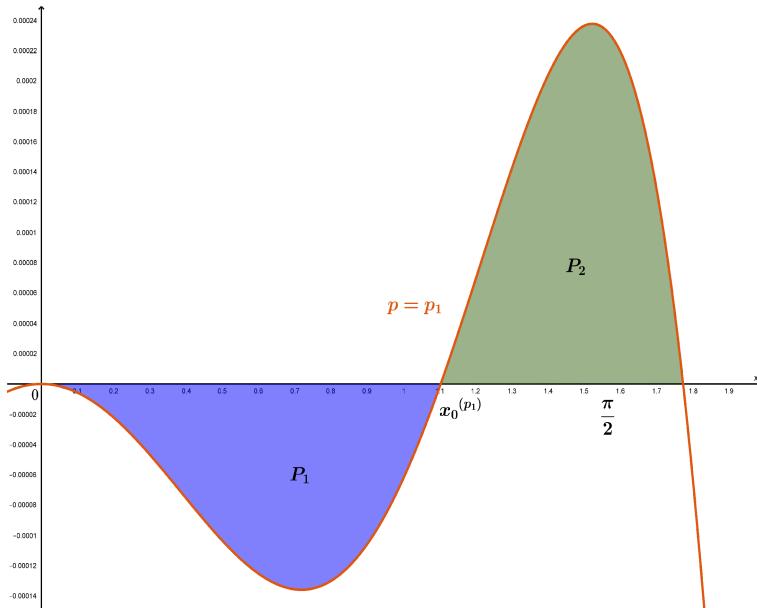
odnosno označena vrednost površine iznad x -ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{p_1}(x)dx = 0.0000704102\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = |P_{int1}| + P_{int2} = 0.0001523809\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x -osu.



Slika 51: Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) dx = 0 \\ & \implies p = \tilde{p}_1 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 \cos^2 x (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} dx} \end{aligned}$$

Kako je integracija komplikovana za simboličko određivanje, vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 1.314829464\dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.085319437\dots$$

i dostiže minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(\tilde{p}_1)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{\tilde{p}_1 x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Ovaj uslov određuje izbor parametra gde su površine ispod i iznad x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = -0.0000762986\dots$$

odnosno označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, \frac{\pi}{2}]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0.0000763034\dots$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 1.314794094 \dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 1.103396154 \dots$$

$$\tilde{p}_1 = 1.314829464 \dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 1.085319437 \dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned}\varphi_{p_1}(x) &= \cos^2 x \left(1 + \frac{(1.314794094 \dots) x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= \cos^2 x \left(1 + \frac{(1.314829464 \dots) x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}\end{aligned}$$

(3) 2 - odstupanje

Primetimo da je familija funkcija $\varphi_p(x)$ oblika (4.20), pa postoji

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[\frac{128}{\pi^4}, \frac{2\pi^2}{15} \right]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\begin{aligned}\delta_2^{(p_2)} &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right|^2 dx} \\ &\quad (5.56)\end{aligned}$$

$$= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^2 dx}$$

Na osnovu **sekcije 4.5** važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \left(\cos^2 x \left(1 + \frac{px^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \left(\frac{x^2 \cos^2 x (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) dx \\ \implies p = p_2 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin^2 x (\pi^2 - 4x^2) - x^2 \cos^2 x (\pi^2 - 4x^2)^2] [x^2 \cos^2 x (5\pi^2 - 12x^2)]}{x^2 (\pi^2 - 4x^2)^4} dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^6 \cos^4 x (5\pi^2 - 12x^2)^2}{x^2 (\pi^2 - 4x^2)^4} dx} \end{aligned}$$

Kako je integracija komplikovana za simboličko određivanje, vrednost parametra $p = p_2$ određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 1.314696172 \dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.1915617807 \dots > 0$$

Za prethodno određenu vrednost parametra $p = p_2$ se dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 1.15278823 \dots$$

i dostiže tačno jedan minimum u tački $t^{(p)} \in (0, x_0^{(p_2)})$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_2$ određen **2-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_2}(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{p_2 x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Za ovakav izbor parametra $p = p_2$ familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

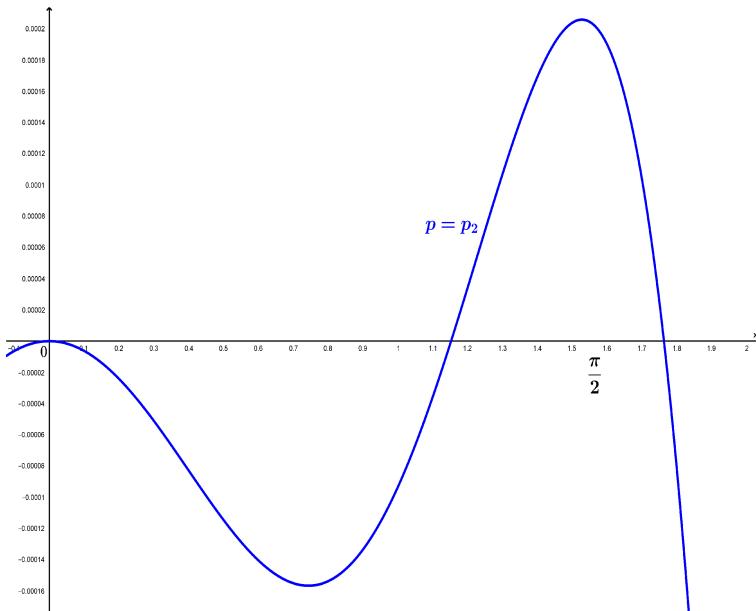
$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

koji iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.0003596796\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 1.314696172\dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 52: Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = \left[\frac{128}{\pi^4}, \frac{2\pi^2}{15}\right]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2}\right) - \frac{\sin^2 x}{x^2} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti $p \in [A, B]$ i tada prema Teoremi 4.5, postoji tačno jedan ekstremum funkcije u oznaci $t^{(p)}$ i to minimum na $[0, \frac{\pi}{2}]$, za svaku funkciju $\varphi_p(x)$.

Vrednost parametra p za koji se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ se dobija kao jedinstveno rešenje jednačine

$$|\varphi_p(t^{(p)})| = \varphi_p\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$$

Rešenje ove transcedentne jednačine se ostvaruje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.4), za $p \in [A, B]$, pri čemu se dobijaju sledeće numeričke vrednosti:

$$p_\infty = 1.314613528 \dots \quad i \quad x_\infty = 0.7633037244 \dots$$

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - **minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \cos x^2 \left(1 + \frac{p_\infty x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

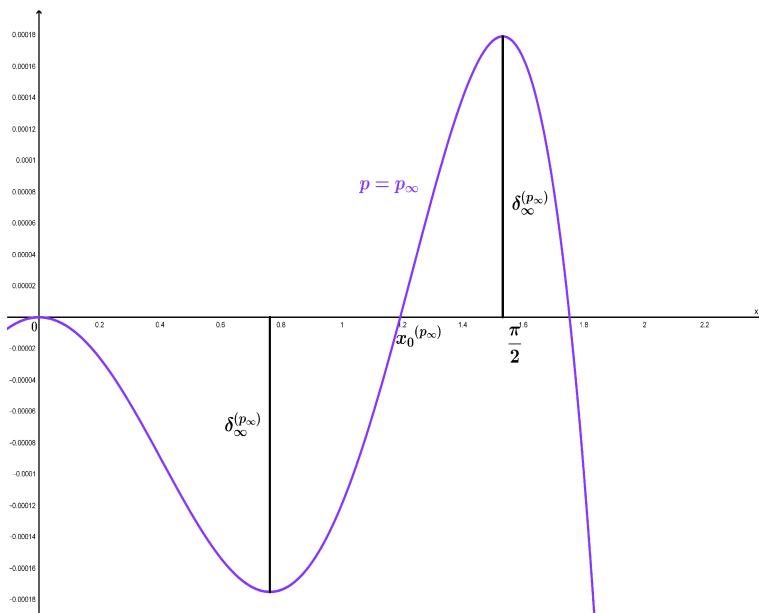
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koja numerički iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0001751631 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 1.314613528 \dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0001751631 \dots$ od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metrike.



Slika 53: Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 1.314794094 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \approx_1 \cos x^2 \left(1 + \frac{p_1 x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 1.3148294641 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

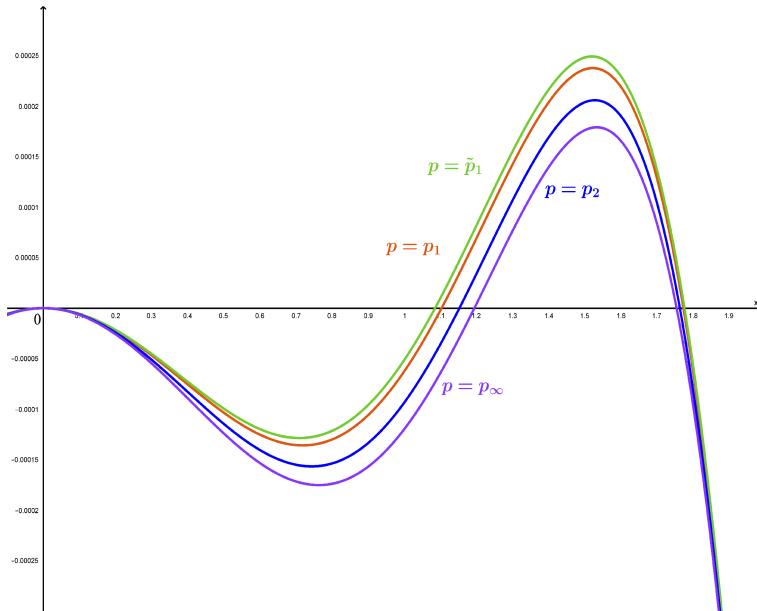
$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \approx_{\tilde{1}} \cos x^2 \left(1 + \frac{p_{\tilde{1}} x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 1.3146961726 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu $\varphi_p(x)$ u smislu D_2 - metrike na segmentu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \approx_2 \cos x^2 \left(1 + \frac{p_2 x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 1.3146130876 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu $\varphi_p(x)$ u smislu D_∞ - na segmentu $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ je data sa :

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \approx_\infty \cos x^2 \left(1 + \frac{p_\infty x^2 (5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right)$$



Slika 54: Funkcija $\varphi_p(x) = \cos^2 x \left(1 + \frac{px^2(5\pi^2 - 12x^2)}{(\pi^2 - 4x^2)^2} \right) - \frac{\sin^2 x}{x^2}$ za $p = p_1, \tilde{p}, p_2, p_\infty$

Primene u elektrotehnici

"The greatest challenge to any thinker is stating the problem in a way that will allow a solution."

Bertrand Russel (1872 - 1970)

6.1 Q - funkcija i funkcija greške erf(·) / erfc(·)

Normalna Gauss - ova raspodela pripada familiji kontinualnih raspodela i kao takva je jedna od najvažnijih u statistici i Teoriji grešaka koju je razvio Gauss. Napomenimo da su O.M. Eidous i R. Abu-Shareefa u [98] naveli značaj primene Gauss - ove funkcije. Navodimo: "Mnoge pojave su normalno ili približno normalno raspoređene, pa i greške u merenju često imaju normalnu raspodelu. Normalna raspodela se može smatrati dobrom aproksimacijom za mnoge druge raspodele. Zbog svojih osobina, veoma je značajna u razmatranju mnogih problema u statistici, dok u verovatnoći, većina teorijskih dokaza zahteva upotrebu normalne raspodele. Pored navedenog, značajno je napomenuti da se normalna raspodela primenjuje i u mnogim drugim naučnim oblastima, pa se njen integral može naći u rešenjima problema vezano za protok toplove, biologiju, finansije, optiku, kvantu mehaniku, pa čak i u socijalnim naukama".

Proizvoljna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem μ i standardnom devijacijom σ ako ima funkciju gustine verovatnoće (tj. gustinu)³⁴

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (6.1)$$

za $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$.

Raspodela proizvoljne promenljive $Z = (X - \mu)/\sigma$ je standardna normalna za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, pri čemu važi :

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx \quad (6.2)$$

gde je $\Phi(z)$ funkcija raspodele slučajne promenljive Z .

³⁴u literaturi se često označava kao : pdf = probability density function.

Q - funkcija se dobija kao komplement standardne normalne raspodele, odnosno :

$$Q(x) = 1 - Q(-x) = 1 - \Phi(x), \quad (6.3)$$

za $x \in R$.

Q - funkcija ima značajnu primenu u brojnim oblastima nauke i inženjerstva. Direktno je povezana sa funkcijom greške erf(\cdot) i njenom komplementarnom funkcijom erfc(\cdot), što je od velikog značaja, posebno u problemima koji se javljaju u oblasti telekomunikacija gde se šum često karakteriše Gauss - ovom raspodelom [99].

Postoji nekoliko numeričkih metoda i izraza sa beskonačnim redovima kojima se može izračunati Q - funkcija. Ova činjenica i dovodi do potrebe za pronalaženjem što bolje aproksimacije za Q - funkciju, kao i konačnih intervala za kvalitetnu aproksimaciju.

G.T.F. de Abreu se u [100], [101] bavio analizom Q - funkcije i pronalaženjem njene primene i aproksimacije, odnosno određivanjem novih familija funkcija koje aproksimiraju Q - funkciju na intervalu sa nanižnim i navišnim granicama. De Abreu je naveo sledeće nejednakosti za Gauss-ovu Q - funkcije :

$$Q(x) \geq \frac{3f_1(x)}{4\pi + \pi f_2(x)} \exp\left(\frac{-2x^2}{2 - f_2(x)}\right) + \frac{4 + (\pi - 2)f_2(x) - 2f_1(x)}{16 + 4(\pi - 2)f_2(x)} \left[\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) + \left(\frac{-2x^2}{f_1^2(x)}\right) \right] \quad (6.4)$$

i

$$Q(x) \leq \frac{f_1(x)}{8 + 2(\pi - 2)f_2(x)} \exp\left(\frac{-2x^2}{f_1^2(x)}\right) + \frac{4\pi + f_2(x)\pi - 6f_1(x)}{8\pi + 2\pi f_2(x)} \exp\left(\frac{-2x^2}{2 + f_1(x)}\right) \quad (6.5)$$

gde su

$$f_1(x) \triangleq \sqrt{(x^2 + 3) - \sqrt{(x^2 - 1)^2 + 8}} \quad (6.6)$$

i

$$f_2(x) \triangleq \sqrt{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 8} - (x^2 - 1)} = \sqrt{4 - f_1^2(x)} \quad (6.7)$$

Za dobijanje ove redukovane aproksimacije primenjena je Shafer - Malešević nejednakost :

$$\frac{3x}{2 + \sqrt{1 - x^2}} \leq \arcsin x \leq \frac{\frac{\pi}{\pi - 2}x}{\frac{2}{\pi - 2} + \sqrt{1 - x^2}} \quad (6.8)$$

za $x \in [0, 1]$, kao primer primene MTP nejednakosti. Prethodna nejednakost je direktno povezana sa Cusa - Huygens familijom funkcija.

U [102] je navedeno :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad i \quad Q(x) \triangleq \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

pri čemu je

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (6.9)$$

Za ovako definisani Q - funkciju važi :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} Q(x) = 1$$

$$Q(0) = 1/2, \quad Q(-x) = 1 - Q(x).$$

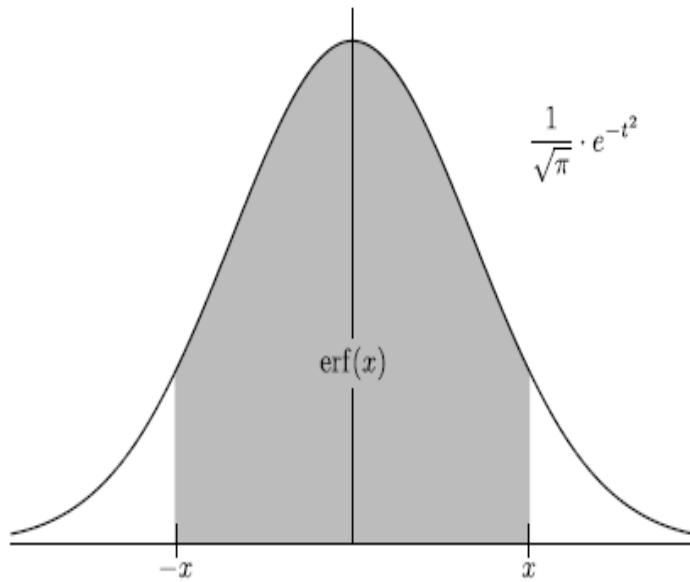
Takođe važi [72] :

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$$

gde je $\text{erf}(x)$: funkcija greške, a $\text{erfc}(x)$: komplementarna funkcija greške, pa je samim tim :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (6.10)$$

Na osnovu svega navedenog dobijamo vezu Q funkcije i funkcije greške :



Slika 55: Vezu Q funkcije i funkcije greške

$$Q(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (6.11)$$

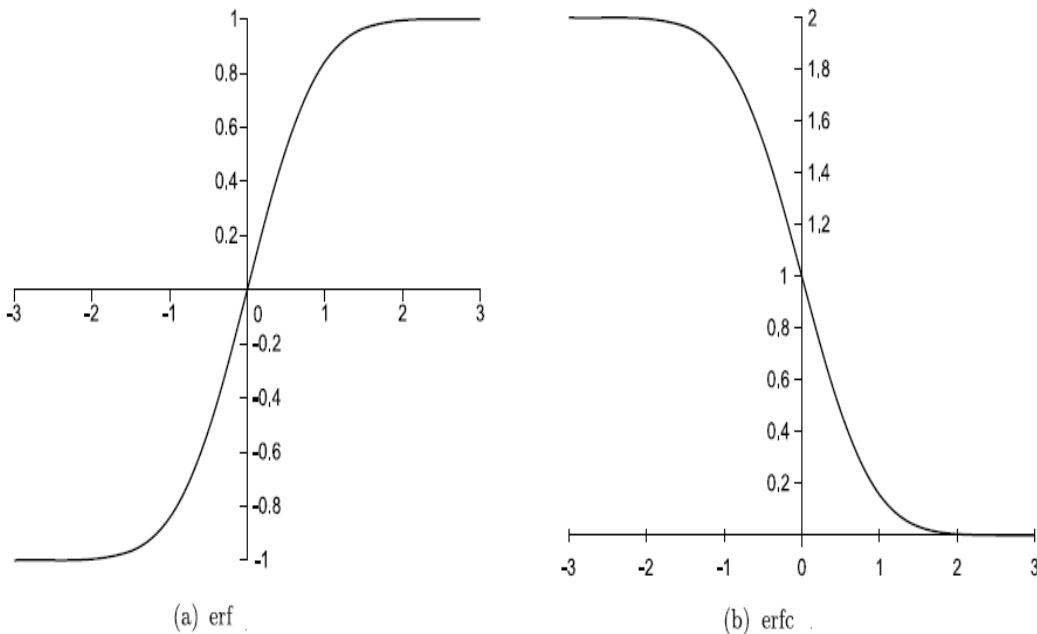
za $x \geq 0$.

6.2 Primena q - odstupanja u aproksimaciji funkcije greške

O.M. Eidous i R. Abu-Shareefa su u pomenutom radu [98] naveli i ukratko analizirali 45 različitih aproksimacionih formula dostupnih u poznatoj literaturi, za funkciju raspodele $\Phi(z)$. Proučavajući pomenute aproksimacije O.M. Eidous i R. Abu-Shareefa su utvrdili da je od najvećeg interesa segment $[0, 3]$, kojim su odredili veličinu greške pri toj restrikciji, pa su tako posmatrane aproksimacije za $\Phi(z)$, definisane na tom segmentu.

A. Shah se takođe bavio procenom aproksimacija funkcije normalne raspodele. Na osnovu istraživanja, u [103] je došao do zaključka da je aproksimacija takve funkcije najbolja na segmentu $[0, 2.6]$ iz razloga što je procenjena maksimalna greška aproksimacije na tom segmentu $0.052(5.2\%)$, pri čemu je to određeno kao dovoljno dobra aproksimacija za rezultate u primenama na konkretnim primerima.

U [104] je dat uporedni prikaz grafika funkcije greške i komplementarne funkcije greške :



Slika 56: Funkcije $\text{erf}(x)$ i $\text{erfc}(x)$

Takođe se navodi da za $x \rightarrow \infty$, funkcija greške $\text{erf}(x)$ ima vrednost približno 1, pa je za dovoljno veliko x praktičnije primenjivati komplementarnu funkciju greške $\text{erfc}(x)$.

Na osnovu gore navedenih zaključaka i procene da je od najvećeg interesa posmatrati funkciju greške i njoj srodne funkcije približno na segmentu $[0, 3]$, a što može i da se primeti na datom grafiku, u ovoj disertaciji je razmatrana aproksimacija funkcije greške, kroz dve Aplikacije, na segmentu $[0, 3]$, primenom metrike i pseudo metrike.

APLIKACIJA 10

Jedna od aproksimacija razmatrana u [98] je :

$$\Phi(z) \approx \frac{1}{2} \left(2 - \frac{3e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\sqrt{\pi\frac{z^2}{2}} + \sqrt{\pi\frac{z^2}{2} + 9}} \right) \quad (6.12)$$

koju su definisali C. Ren i A.R. MacKenzie u [8] a na osnovu rezultata koje su dobili za aproksimaciju komplementarne funkcije greške :

$$e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) \approx \frac{a}{(a-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + a^2}} \quad (6.13)$$

U radu [98] se navodi i značajna primena funkcije greške, kao i njoj srodnih funkcija, u matematici i fizici. Takođe u radu [98] je data aproksimaciona forma funkcije greške i komplementarne funkcije greške sa maksimalnim relativnim greškama do 0.8%, za realnu promenljivu $x \in [0, \infty)$ i tačno određene vrednosti parametra a . Dobijena aproksimacija, koja daje analitička rešenja, ima primenu u rešavanju mnogobrojnih problema u atmosferskim naukama (izračunavanje fizike cirus oblaka unutar opšteg modela cirkulacije, kumulativne funkcije normalne raspodele, period ponavljanja atmosferskih pojava radi procene rizika), što je i predmet izučavanja u [8].

Zbog široke primene Q -funkcije, samim tim i sa njom povezane funkcije greške, u elektrotehnici, posebno u oblasti telekomunikacija, razmatramo (6.13) i na osnovu nje formiramo familiju funkcija :

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \\ &= e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

za $x \in [0, 3]$ i za vrednost parametra $p \in [2.7519383938 \dots, 3.1388116904 \dots] \subset R^+$ [98].

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = \frac{\sqrt{\pi x^2} - \sqrt{\pi x^2 + p^2} + \frac{p^2}{\sqrt{\pi x^2 + p^2}}}{((p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2})^2} > 0 \quad (6.15)$$

to je familija funkcija rastuće raslojena u odnosu na parametar:

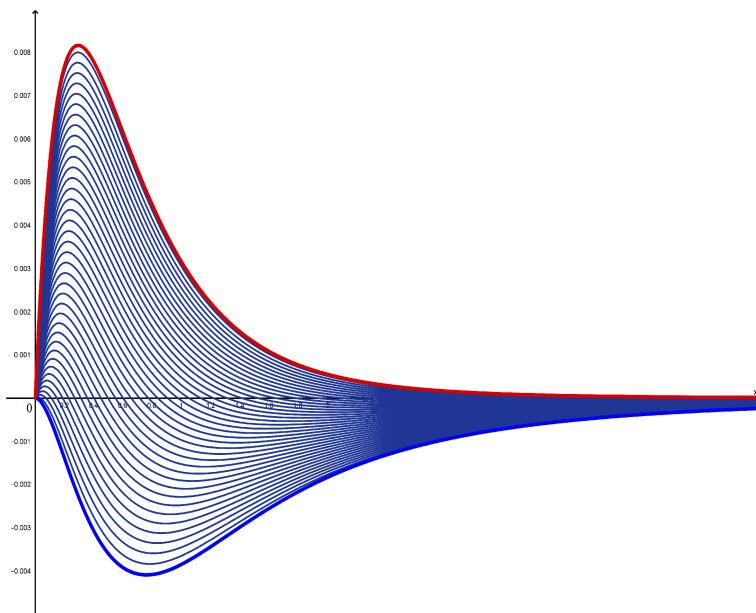
$$p \in [2.7519383938 \dots, 3.1388116904 \dots] \subset R^+$$

. Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p :

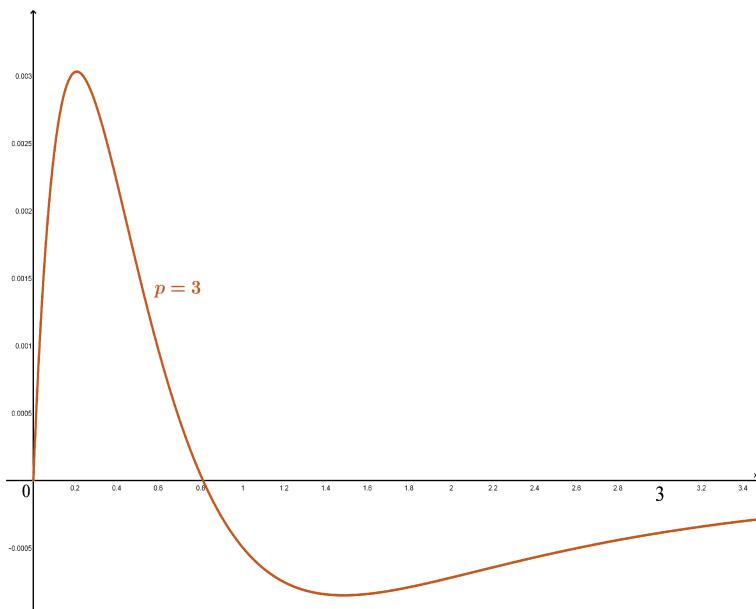
$$A = 2.7519383938 \dots \quad i \quad B = 3.1388116904 \dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (6.14), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Sa Slike 57. uočavamo da posmatrana familija funkcija vizuelno nije u do sada ispitivanoj klasi funkcija koje ispunjavaju uslove Nike teoreme (4.1).



Slika 57: Familija funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}$



Slika 58: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}$, za $p = 3$

Na Slici 58. je dat grafik pojedinačne funkcije iz familije $\varphi_p(x)$, za konkretnu vrednost parametra $p = 3$.

Sa grafika možemo da uočimo da postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[0, 1]$ i to $t_1^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum maksimum. Takođe, postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[1, 3]$ i to $t_2^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum minimum.

Za familiju funkcija (6.14) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, \infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = [2.7519383938 \dots, 3.1388116904 \dots]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^3 \left| e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \right| dx \right) = \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \quad (6.16)$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^3 \left| e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \right| dx \quad (6.17)$$

Iz (6.16) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^3 \left| e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \right| dx$$

nije moguće elementarno rešiti u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga: Posmatrajući grafik funkcije, uočavamo da familija $\varphi_p(x)$, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ na segmentu $x \in [0, 3]$ tj.

$$\varphi_p \left(x_0^{(p)} \right) = e^{x_0^{(p)2}} (1 - \operatorname{erf}(x_0^{(p)})) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x_0^{(p)2}} + \sqrt{\pi x_0^{(p)2} + p^2}} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcedentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, 3]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (6.17) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovano za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 2.92779245 \dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 0.8128788837\dots$$

i dostiže se maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim je za prethodnu vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_1}(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p_1}{(p_1 - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_1^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^3 |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0027513258\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 2.92779245\dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 0.8128788837\dots$. Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina iznad i ispod x - ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je :

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.0013833183\dots$$

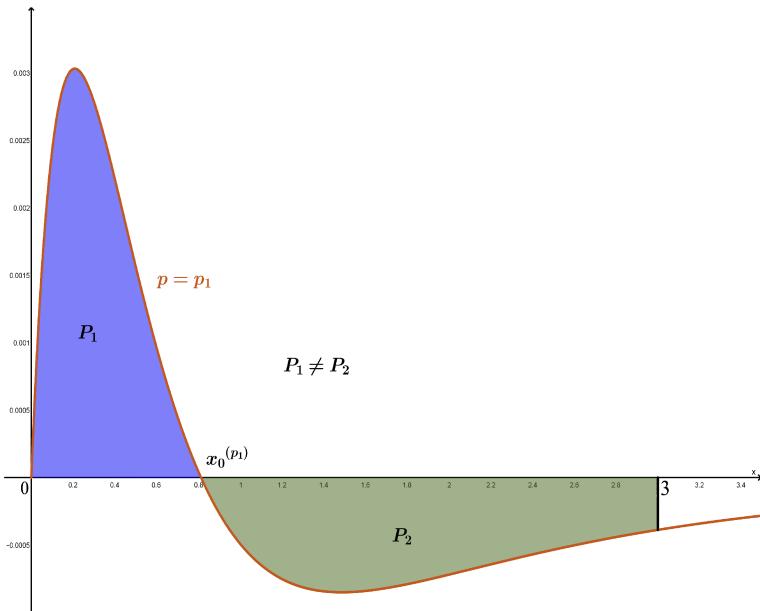
odnosno označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, 3]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^3 -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0013680074\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = P_{int1} + |P_{int2}| = 0.0027513257\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 59: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2}(1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + p^2}}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^3 \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^3 \left(e^{x^2}(1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + p^2}} \right) dx = 0$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$$p = \tilde{p}_1 = 2.927387318\dots$$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$, numerički se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.8102901222\dots$$

i dostiže maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = e^{x^2} (1 - erf(x)) - \frac{\tilde{p}_1}{(\tilde{p}_1 - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + \tilde{p}_1^2}}$$

za $x \in [0, 3]$.

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^3 \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 2.92779245\dots \quad \text{za } x_0^{(p_1)} = 0.8128788837\dots$$

$$\tilde{p}_1 = 2.927387324\dots \quad \text{za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.8102901222\dots$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} \varphi_{p_1}(x) &= e^{x^2} (1 - erf(x)) - \frac{2.92779245\dots}{(1.92779245\dots)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + (2.92779245\dots)^2}} \\ \varphi_{\tilde{p}_1}(x) &= e^{x^2} (1 - erf(x)) - \frac{2.927387324\dots}{(1.927387324\dots)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + (2.927387324\dots)^2}} \end{aligned}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 2.927387324\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.8102901222\dots$ Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine iznad i ispod x - ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

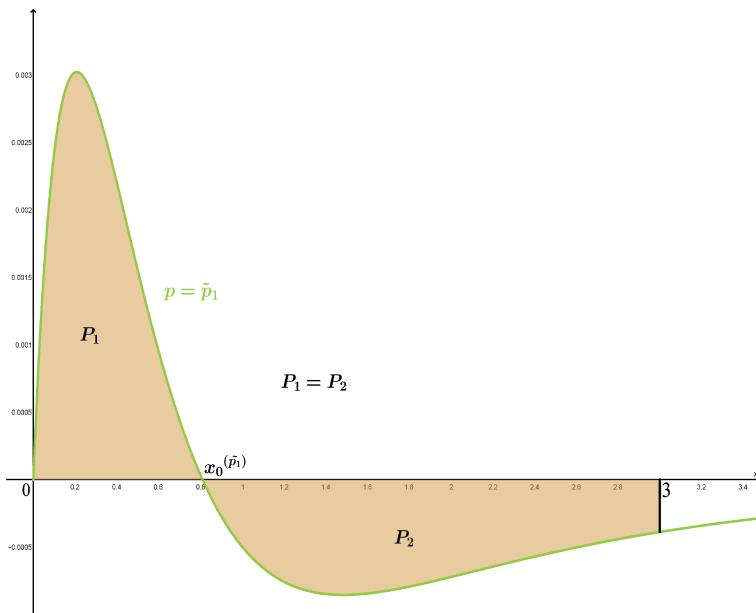
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = \color{blue}{0.0013756742\dots}$$

odnosno označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, 3]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^3 -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = \color{blue}{-0.0013756744\dots}$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 60: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2}(1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = [2.7519383938 \dots, 3.1388116904 \dots]$ iz uslova da se po srednje kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\begin{aligned} \delta_2^{(p_2)} &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^3 \left| e^{x^2}(1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}} \right|^2 dx} \\ &= \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^3 \left(e^{x^2}(1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}} \right)^2 dx} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Na osnovu *sekcije 4.5* važi da funkcija

$$\delta_2^{(p)} = \sqrt{\int_0^3 |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^3 \varphi_p^2(x) dx$$

Pokazaćemo da postoji parametar $p = p_2$ tako da važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^3 \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^3 \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^3 \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^3 2 \left(e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\pi x^2} - \sqrt{\pi x^2 + p^2} + \frac{p^2}{\sqrt{\pi x^2 + p^2}}}{((p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2})^2} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$p = p_2 = 2.897486446\dots$

pri čemu je :

$$F''_2(p_2) = 0.0014401704\dots > 0$$

te se za izračunatu vrednost parametra $p = p_2$ dobija tačno jedan koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 0.6328224184\dots$$

i dostiže maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim se dobija i **2-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_2}(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p_2}{(p_2-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_2^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A,B]} \sqrt{\int_0^3 |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

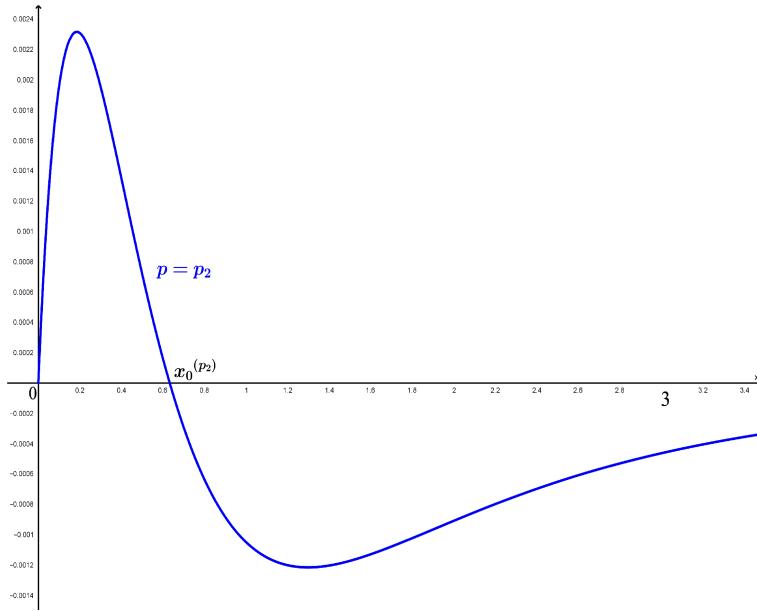
koji iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 0.001852430344\dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 2.897486446\dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 61: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = [2.7519383938\dots, 3.1388116904\dots]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje :

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, 3]} \left| e^{x^2} (1 - \text{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2 + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti parametra $p \in [A, B]$. Kako sa grafika možemo da uočimo, postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[0, 1]$ u oznaci $t_1^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum maksimum, odnosno, postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[1, 3]$ u oznaci $t_2^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum minimum. Tada se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ kao jedinstveno rešenje jednačine

$$\varphi_p(t_1^{(p)}) = |\varphi_p(t_2^{(p)})|$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se ostvaruje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.5) pri čemu dobijamo numeričke vrednosti

$p_\infty = 2.868003144\dots$	i	$x_{\infty,1} = 0.1589400646\dots$	i	$x_{\infty,2} = 1.147704587\dots$
-------------------------------	-----	------------------------------------	-----	-----------------------------------

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - **minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p_\infty}{(p_\infty - 1) \sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_\infty^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

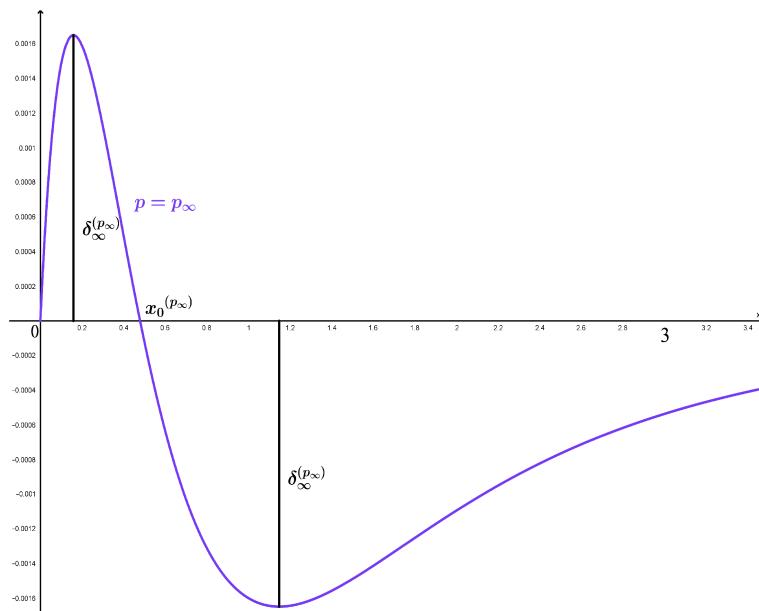
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, 3]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koje iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0016496493 \dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 2.868003144 \dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.0016496493 \dots$ od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metrike.



Slika 62: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2} (1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1) \sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 2.92779245 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) \approx_1 \frac{p_1}{(p_1 - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_1^2}}$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 2.927387324 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - pseudo metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

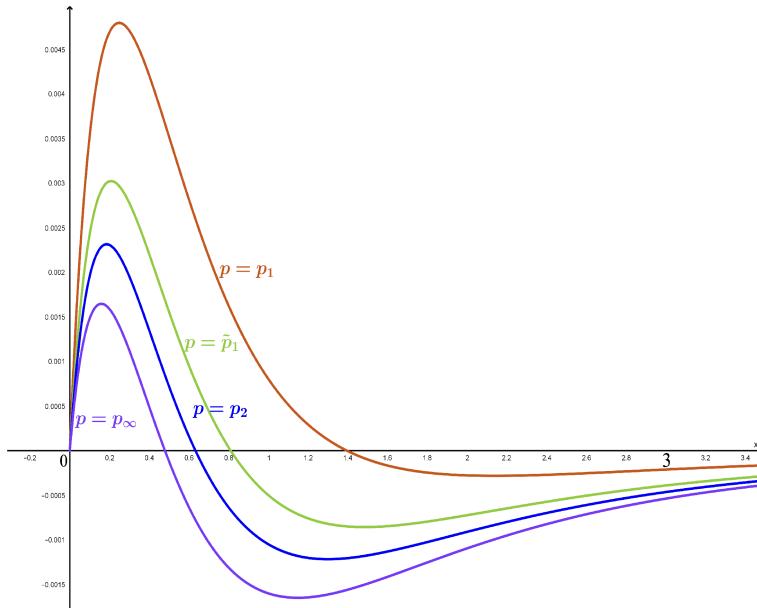
$$e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) \approx_{\tilde{1}} \frac{\tilde{p}_1}{(\tilde{p}_1 - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + \tilde{p}_1^2}}$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 2.897486446 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) \approx_2 \frac{p_2}{(p_2 - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_2^2}}$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 2.868003144 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) \approx_\infty \frac{p_\infty}{(p_\infty - 1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p_\infty^2}}$$



Slika 63: Funkcija $\varphi_p(x) = e^{x^2}(1 - \operatorname{erf}(x)) - \frac{p}{(p-1)\sqrt{\pi x^2} + \sqrt{\pi x^2 + p^2}}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

APLIKACIJA 11

Još jedna aproksimacija funkcije raspodele koja je od velikog interesa, a pominju je O.M. Eidous i R. Abu-Shareefa u [98] je :

$$\Phi(z) \approx 0.5 \left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2z^2}{\pi}}} \right) \quad (6.19)$$

Ova aproksimacija je dobijena na osnovu rezultata vezano za funkciju greške do kojih je došao G. Polya u [105] a koji se smatra začetnikom ideje aproksimiranja funkcije greške i njoj povezanih funkcija. G. Polya tvrdi da važi sledeće :

$$\operatorname{erf}(x) < \sqrt{1 - e^{-4x^2/\pi}} \quad (6.20)$$

za svako $x > 0$.

Primenom ovih rezultata, J.-T. Chu je dokazao u [9] važi :

$$\sqrt{1 - e^{-ax^2}} < \operatorname{erf}(x) < \sqrt{1 - e^{-bx^2}} \quad (6.21)$$

za svako $x > 0$ i za $a \in (0, 1]$ i $b \in [4/\pi, \infty)$.

Ova nejednakost je polazna osnova mnogim istraživačima kojima je cilj da dobiju što bolju aproksimaciju funkcije greške. Na osnovu nejednakosti (6.21) formiramo familiju funkcija :

$$\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \quad (6.22)$$

za $x \in [0, 3]$ i za vrednost parametra $p \in \left[1, \frac{4}{\pi}\right] \subset R^+$.

Kako je :

$$\frac{\partial \varphi_p(x)}{\partial p} = -\frac{1}{2} \frac{x^2 e^{-px^2}}{\sqrt{1 - e^{-px^2}}} < 0 \quad (6.23)$$

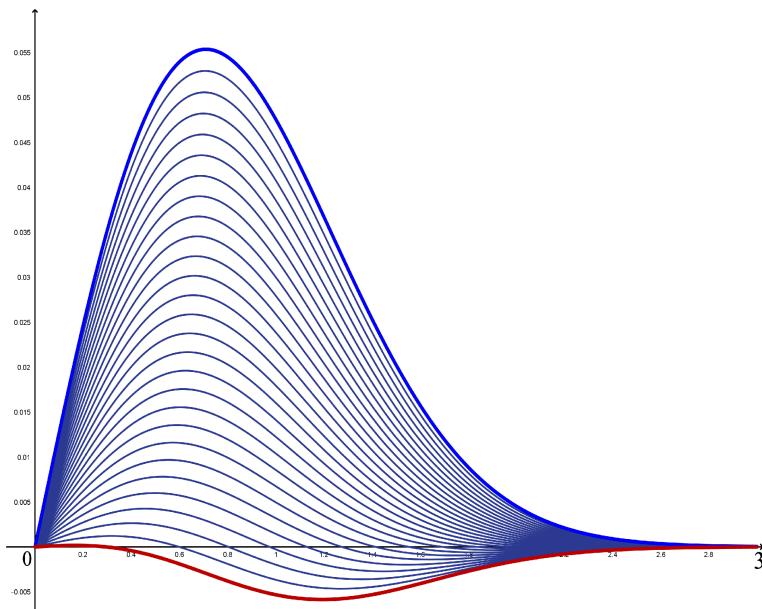
to je familija funkcija opadajuće raslojena u odnosu na parametar $p \in \left[1, \frac{4}{\pi}\right] \subset R^+$.

Uvedimo rubne konstante za vrednosti parametra p :

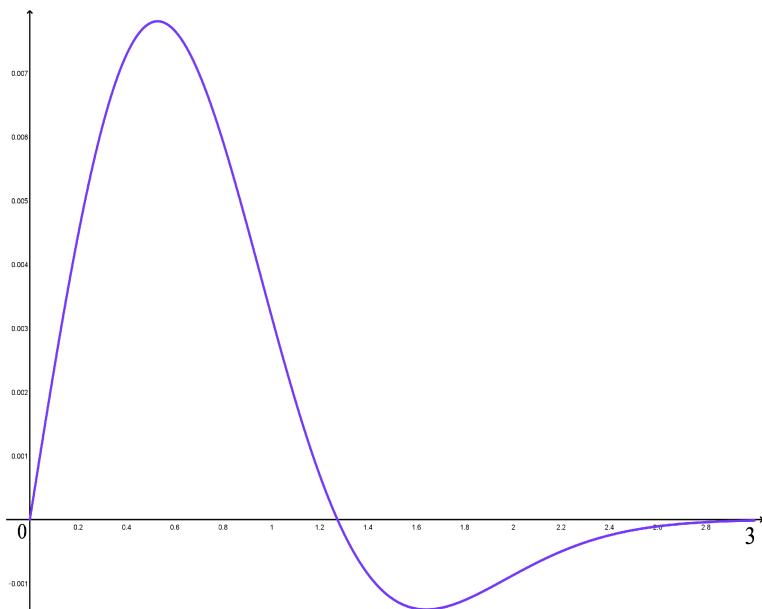
$$A = 1 \quad i \quad B = \frac{4}{\pi} = 1.273239544\dots$$

Na segmentu $[A, B]$ tražimo onu vrednost parametra p za koje dobijamo najbolju moguću aproksimaciju funkcije (6.22), u odnosu na metrike i pseudo metriku koji su razmatrani u Poglavlju 4.

Sa Slike 64. uočavamo da posmatrana familija funkcija vizuelno nije u do sada ispitivanoj klasi funkcija koje ispunjavaju uslove Nike teoreme (4.1).



Slika 64: Familija funkcija $\varphi_p(x) = \text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$



Slika 65: Funkcija $\varphi_p(x) = \text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ (6.26), za $p = 1.22$

Na Slici 65. je dat grafik pojedinačne funkcije iz familije $\varphi_p(x)$, za konkretnu vrednost parametra $p = 1.22$.

Sa grafika možemo vizuelno da uočimo da postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[0, 1]$ i to $t_1^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum maksimum. Takođe, vizuelno postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[1, 3]$ i to $t_2^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum minimum.

Za familiju funkcija (6.22) određujemo **q - odstupanje** za $q = 1, 2, \infty$ kao i pseudo odstupanje u sledećem delu koji navodimo :

(1) 1 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_1 \in [A, B] = [1, \frac{4}{\pi}]$ iz uslova da se dostiže minimum :

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^3 \left| \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \right| dx \right) = \min_{p \in [A, B]} (F_1(p)) \quad (6.24)$$

Neka je :

$$F_1(p) = \int_0^3 \left| \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \right| dx \quad (6.25)$$

Iz (6.24) se može primetiti da integral

$$F_1(p) = \int_0^3 \left| \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \right| dx$$

nije moguće elementarno izračunati u obliku nekog gotovog analitičkog izraza iz sledećeg razloga: Posmatrajući grafik funkcije, uočavamo da familija $\varphi_p(x)$, ima za svako p tačno jedan koren $x_0^{(p)}$ na segmentu $x \in [0, 3]$ tj.

$$\varphi_p \left(x_0^{(p)} \right) = \operatorname{erf} \left(x_0^{(p)} \right) - \sqrt{1 - e^{-p x_0^{(p)} 2}} = 0.$$

Prethodna jednačina je transcedentna i samo za numeričke vrednosti $p \in [A, B]$ moguće je odrediti $x_0^{(p)}$ numerički. Ova činjenica nam govori da postupak deljenja segmenta $[0, 3]$ na dva dela po znaku $\varphi_p(x)$ nije moguća bez numeričkih proračuna.

Simboličko određivanje izraza (6.25) za $F_1(p)$ gde je $p \in [A, B]$ je saglasno Teoremi 4.3 komplikovan za računanje, stoga se minimum funkcije $F_1(p)$, određuje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.1).

Vrednost parametra p za koju $F_1(p)$ dostiže minimum iznosi :

$$p = p_1 = 1.2486357688\dots$$

Za parametar $p = p_1$ koren funkcije $\varphi_{p_1}(x)$ iznosi

$$x_0^{(p_1)} = 0.8275395121\dots$$

i dostiže se maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim je za vrednost parametra $p = p_1$ određen **1-minimaks aproksimant**:

$$\varphi_{p_1}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-p_1 x^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimalno odstupanje:

$$\delta_1^{(p_1)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\int_0^3 |\varphi_p(x)| dx \right)$$

koje numerički iznosi

$$\delta_1^{(p_1)} = 0.0046936238\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_1}(x)$

Za vrednost $p = p_1 = 1.2486357688\dots$ 1 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_1}(x)$ ima koren $x_0^{(p_1)} = 0.8275395121\dots$ Ovaj izbor parametra $p = p_1$ određuje da je zbir površina iznad i ispod x-ose minimalan (pri čemu su te dve površine različite, $P_1 \neq P_2$).

Numeričkim metodama označena vrednost površine iznad x-ose na segmentu $[0, x_0^{(p_1)}]$ je:

$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(p_1)}} \varphi_{p_1}(x) dx = 0.0014994307\dots$$

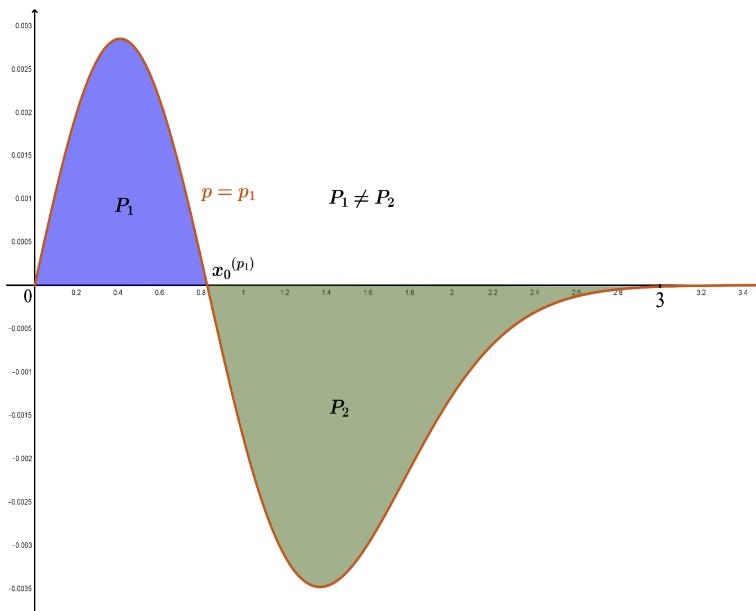
odnosno označena vrednost površine ispod x-ose na segmentu $[x_0^{(p_1)}, 3]$ je

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(p_1)}}^3 -\varphi_{p_1}(x) dx = -0.0031941931\dots$$

Tada je suma površina

$$P_1 + P_2 = P_{int1} + |P_{int2}| = 0.0046936238\dots$$

najmanja površina koju određuje ma koji član familije $\varphi_p(x)$ u odnosu na x-osu.



Slika 66: Funkcija $\varphi_p(x) = \text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_1$

(2) pseudo odstupanje

Neka je $\tilde{\delta}$ - pseudo odstupanje. Vrednost parametra \tilde{p}_1 određujemo iz uslova :

$$\tilde{\delta}(\varphi_{\tilde{p}_1}(x)) = 0 \iff \int_0^3 \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = 0$$

odnosno :

$$\int_0^3 \left(\text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-\tilde{p}_1 x^2}} \right) dx = 0$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = \tilde{p}_1$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.2) :

$p = \tilde{p}_1 = 1.2411451995 \dots$

Za tako određenu vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$, numerički se dobija koren funkcije $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

$$x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.9554346838 \dots$$

i dostiže maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim je za vrednost parametra $p = \tilde{p}_1$ određen **pseudo minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-\tilde{p}_1 x^2}}$$

za $x \in [0, 3]$. Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se postiže :

$$\tilde{\delta}_1^{(\tilde{p}_1)} = 0$$

Upoređujući prethodno dobijene rezultate vidimo da je numerički određena vrednost parametra $p = p_1$ bliska pseudo rešenju koje se dobija za $p = \tilde{p}_1$, pri uslovu :

$$\int_0^3 \varphi_p(x) dx = 0$$

odnosno, za parametre p_1 i \tilde{p}_1 , dobijamo sledeće :

$$p_1 = 1.2486357688\dots \text{ za } x_0^{(p_1)} = 0.8275395121\dots$$

$$\tilde{p}_1 = 1.2411451995\dots \text{ za } x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.9554346838\dots$$

pri čemu je :

$$\varphi_{p_1}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-(1.2486357688\dots)x^2}}$$

$$\varphi_{\tilde{p}_1}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-(1.2411451995\dots)x^2}}$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$

Za vrednost $p = \tilde{p}_1 = 1.2411451995\dots$ pseudo minimaks aproksimant $\varphi_{\tilde{p}_1}(x)$ ima koren $x_0^{(\tilde{p}_1)} = 0.9554346838\dots$ Ovaj izbor parametra $p = \tilde{p}_1$ određuje da su površine iznad i ispod x-ose jednake, $P_1 = P_2$.

Numeričkim metodama označena vrednost površine iznad x-ose na intervalu $[0, x_0^{(\tilde{p}_1)}]$:

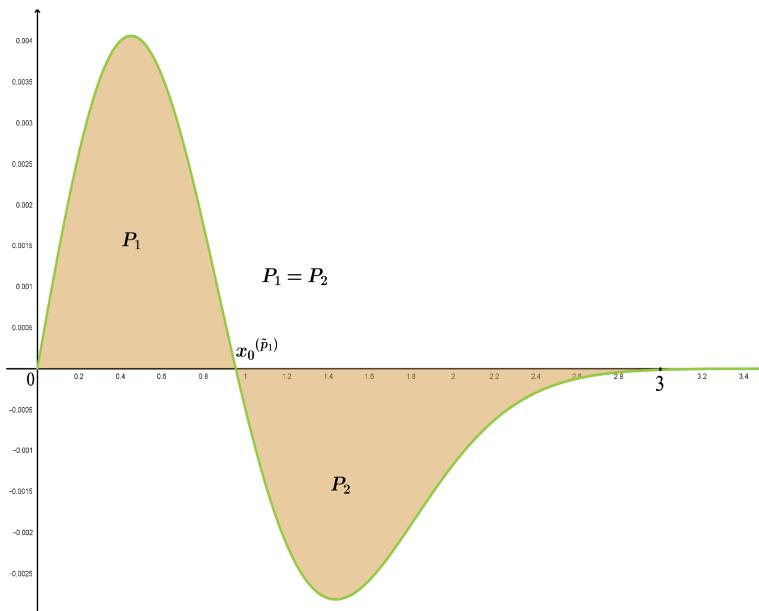
$$P_{int1} = \int_0^{x_0^{(\tilde{p}_1)}} \varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = \color{blue}{0.0024368838\dots}$$

odnosno označena vrednost površine ispod x-ose na intervalu $[x_0^{(\tilde{p}_1)}, 3]$

$$P_{int2} = \int_{x_0^{(\tilde{p}_1)}}^3 -\varphi_{\tilde{p}_1}(x) dx = \color{blue}{-0.0024368846\dots}$$

Tada je suma

$$P_{int1} + P_{int2} = 0$$



Slika 67: Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = \tilde{p}_1$

(3) 2 - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_2 \in [A, B] = \left[1, \frac{4}{\pi}\right]$ iz uslova da se po srednjem kvadratnom odstupanju dostiže minimum :

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^3 |erf(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}|^2 dx} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^3 (\operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}})^2 dx} \quad (6.26)$$

Na osnovu [sekcije 4.5](#) važi da funkcija

$$\delta_2^{(p_2)} = \sqrt{\int_0^3 |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

ima minimum u tački $p = p_2$ ako i samo ako u toj tački ima minimum funkcija:

$$F(p) = (\delta_2^{(p)})^2 = \int_0^3 \varphi_p^2(x) dx$$

odnosno za parametar $p = p_2$ važe uslovi :

$$F'(p_2) = \int_0^3 \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \quad i \quad F''(p_2) = \int_0^3 \Phi_{p_2}(x) dx > 0$$

određujemo stacionarnu tačku iz uslova :

$$\begin{aligned} F'(p_2) &= \int_0^3 \Psi_{p_2}(x) dx = 0 \\ \iff \int_0^3 2 \left(\operatorname{erfc}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2 e^{-px^2}}{\sqrt{1 - e^{-px^2}}} \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Kako je dobijena jednačina komplikovana za simboličko rešavanje po parametru $p = p_2$, tu vrednost određujemo numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.3) :

$$p = p_2 = 1.2475055038 \dots$$

pri čemu je :

$$F''(p_2) = 0.0646751816 \dots > 0$$

te se za vrednost parametra $p = p_2$ dobija koren funkcije $\varphi_{p_2}(x)$

$$x_0^{(p_2)} = 0.8476828174 \dots$$

i dostiže maksimum u tački $t_1^{(p)} \in [0, x_0^{(p_1)}]$, odnosno minimum u tački $t_2^{(p)} \in [x_0^{(p_1)}, 3]$. Ovim se dobija i **2-minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_2}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-p_2 x^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije $\varphi_p(x)$ se dostiže minimum:

$$\delta_2^{(p_2)} = \min_{p \in [A, B]} \sqrt{\int_0^3 |\varphi_p(x)|^2 dx}$$

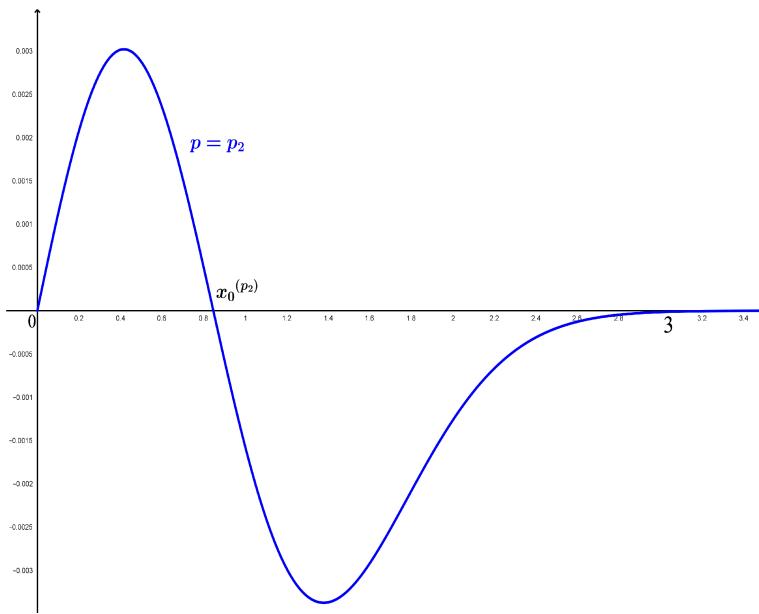
koji iznosi

$$\delta_2^{(p_2)} = 1.4839549013 \dots$$

Napomenimo da familija funkcija $\varphi_p(x)$ nije oblika (4.20) i pri tome $F(p)$ ima (vizuelno) jedinstven minimum $p = p_2$, određen uz pomoć Maple.

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_2}(x)$

Za vrednost $p = p_2 = 1.2475055038 \dots$ 2 - minimaks aproksimant $\varphi_{p_2}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_2 - metriku.



Slika 68: Funkcija $\varphi_p(x) = \text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_2$

(4) ∞ - odstupanje

Određujemo parametar $p = p_\infty \in [A, B] = [1, \frac{4}{\pi}]$ iz uslova da se dostiže minimaks odstupanje:

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, 3]} \left| \text{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}} \right| \right)$$

Familija funkcija $\varphi_p(x)$ se razmatra za vrednosti parametra $p \in [A, B]$. Kako sa grafika možemo da uočimo, postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[0, 1]$ u oznaci $t_1^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum maksimum, odnosno, postoji tačno jedan ekstremum funkcije na segmentu $[1, 3]$ u oznaci $t_2^{(p)}$, pri čemu je taj ekstremum minimum. Tada se dostiže minimaks odstupanje po parametru $p \in [A, B]$ kao jedinstveno rešenje jednačine

$$\varphi_p(t_1^{(p)}) = \left| \varphi_p(t_2^{(p)}) \right|$$

Rešenje ove transcendentne jednačine se ostvaruje numerički uz pomoć Maple (Prilog B/B.5) pri čemu dobijamo numeričke vrednosti

$p_\infty = 1.2461010105 \dots$	i	$x_{\infty,1} = 0.4252233558 \dots$	i	$x_{\infty,2} = 1.3916269216 \dots$
---------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	-------------------------------------

Za vrednost $p = p_\infty$ se dobija ∞ - **minimaks aproksimant** :

$$\varphi_{p_\infty}(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-p_\infty x^2}}$$

Za ovakav izbor parametra familije funkcija $\varphi_p(x)$ se dostiže minimaks odstupanje

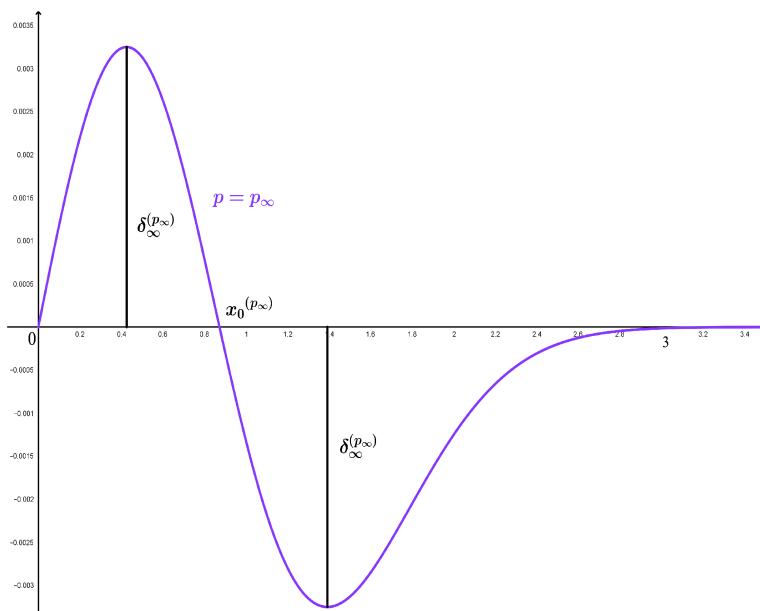
$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = \min_{p \in [A, B]} \left(\max_{x \in [0, 3]} |\varphi_p(x)| \right)$$

koje iznosi

$$\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.00324924\dots$$

Geometrijsko tumačenje $\varphi_{p_\infty}(x)$

Za vrednost $p = p_\infty = 1.2461010105\dots$ minimaks aproksimant $\varphi_{p_\infty}(x)$ ima osobinu da je njegovo odstupanje $\delta_\infty^{(p_\infty)} = 0.00324924\dots$ od x - ose najmanje moguće u odnosu na D_∞ - metrike.



Slika 69: Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-p x^2}}$ za $p = p_\infty$

Zaključak

- (a) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_1 = 1.2486357688 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_1 - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$\operatorname{erf}(x) \approx_1 \sqrt{1 - e^{-p_1 x^2}}$$

- (b) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = \tilde{p}_1 = 1.2411451995 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu \tilde{D}_1 - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

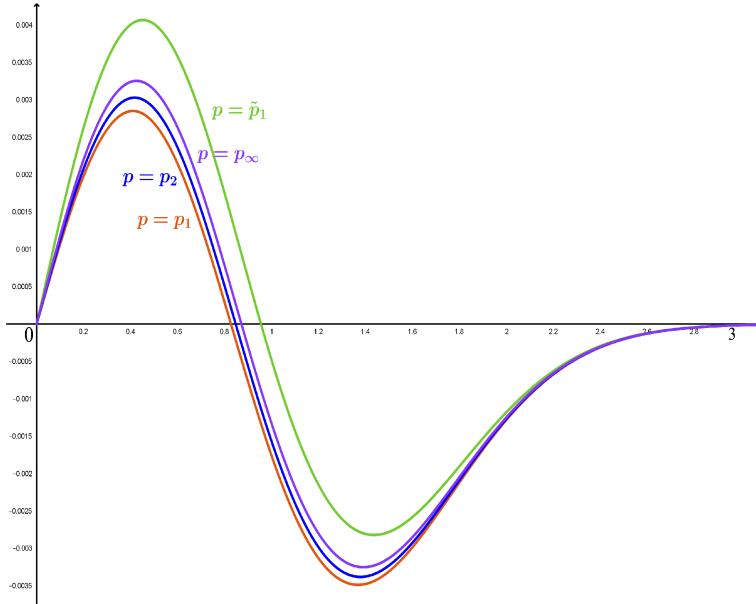
$$\operatorname{erf}(x) \approx_{\tilde{1}} \sqrt{1 - e^{-\tilde{p}_1 x^2}}$$

- (c) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_2 = 1.2475055038 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_2 - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$\operatorname{erf}(x) \approx_2 \sqrt{1 - e^{-p_2 x^2}}$$

- (d) Za familiju funkcija $\varphi_p(x)$ i vrednost parametra $p = p_\infty = 1.2461010105 \dots$ najbolja aproksimacija u smislu D_∞ - metrike na segmentu $x \in [0, 3]$ je data sa :

$$\operatorname{erf}(x) \approx_\infty \sqrt{1 - e^{-p_\infty x^2}}$$



Slika 70: Funkcija $\varphi_p(x) = \operatorname{erf}(x) - \sqrt{1 - e^{-px^2}}$ za $p = p_1, \tilde{p}_1, p_2, p_\infty$

Zaključak i dalji pravci istraživanja

*"If the facts don't fit the theory
change the facts."*

Albert Einstein (1879 - 1955)

U ovoj disertaciji glavni predmet izučavanja su raslojene familije funkcija u Teoriji analitičkih nejednakosti. Ostvareni su početni, zadati ciljevi, odnosno, dobijanje nekih novih rezultata u Teoriji analitičkih nejednakosti, kao i njihova primena u nekim oblastima elektrotehnike.

Pre razmatranja raslojenih familija, u drugom i trećem poglavlju, razmatrani su pojmovi koji su bliski ovoj tematiki i kojima se autorka disertacije bavila u toku svog istraživanja.

U drugom poglavlju proučavane su Miksovane trigonometrijske polinomske (MTP) funkcije i odgovarajuće nejednakosti koje iz njih proističu. U trećem poglavlju proučavani su Dupli Tajlor-ovi razvoji (DTR) i odgovarajuće nejednakosti vezano za njih.

U drugom poglavlju su navedena i neka poboljšanja poznatih nejednakosti, primenom MTP funkcija, pri čemu su u 2.3.1 [4] razmatrane neke nove aproksimacije izraza zasnovanih na trigonometrijskim funkcijama i data poboljšanja rezultata koje je postigao C. Mortici za nejednakosti Wilker - Cusa - Huygens tipa. U 2.3.2 [5] su data neka poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti.

U trećem poglavlju su takođe navedena neka poboljšanja poznatih nejednakosti, pri čemu su u 3.2.1 [5] data poboljšanja Jordan - Stečkin i Becker - Stark nejednakosti primenom DTR, a u 3.2.2 [6] su date nove procene preciznosti Huygens-ove aproksimacije primenom DTR.

Četvrto poglavlje predstavlja matematičku osnovu vezano za predmet disertacije. Pojam raslojenosti koji je prethodno razmatran u [7] se proširuje na širu klasu metričkih prostora i posebno se razmatra pojam minimaks aproksimanta u odnosu na metrike D_1 , D_2 i D_∞ , pri čemu je definisan pojam q - odstupanja za $q = 1, 2, \infty$. Pored toga, uvedeno je pseudo odstupanje, kao jedan pristup procene kvaliteta minimaks aproksimanta.

Pomoću ∞ - odstupanja su dobijeni bazični rezultati vezano za Cusa - Huygens i Sandor nejednakosti iz [7].

U disertaciji je posebno naveden uslov kada postoji 2 - odstupanje, korišćenjem integracije po parametru.

Navedeni su i uslovi merenja odstupanja pomoću površine (1 - odstupanje), a pored toga je uvedeno i merenje pomoću pseudo odstupanja, pri čemu su dobijeni rezultati i za takav pristup.

Na osnovu matematičkih osnova izloženih u četvrtom poglavlju formirano je peto poglavlje koje se odnosi na primenu q - odstupanja na razne raslojene familije funkcija kroz niz aplikacija (sekcije 5.1 - 5.6).

U petom poglavlju je određen kvalitet nejednakosti (Stečkin, Cusa - Huygens, Sandor, D'Aurizio, Becker - Stark), primenom q - odstupanja, za $q = 1, 2, \infty$, kao i pseudo odstupanja. U ovim sekcijama razmatrane su familije oblika "nike" [7]. Od posebnog interesa je Becker - Stark nejednakost razmatrana u Aplikaciji 9. koja nije oblika "nike", osim na konkretnom intervalu, čime se oblast istraživanja ove disertacije proširila i na neke nove klase nejednakosti, što će biti i predmet daljeg istraživanja.

Svi dobijeni rezultati u ovoj disertaciji, za 1, 2 i pseudo odstupanje, nisu razmatrani u do sada poznatoj literaturi.

Rezultati za ∞ - odstupanje za Cusa - Huygens i Sandor nejednakosti (iz sekcija 5.3 i 5.4) su razmatrani u [7].

Rezultati za ∞ - odstupanje koji se odnose na nejednakosti tipa D'Aurizio i Becker - Stark (iz sekcija 5.5 i 5.6) nisu do sada razmatrani u poznatoj literaturi.

Šesto poglavlje se odnosi na različite primene raslojenih familija funkcija u eletrotehnici. Posebno se razmatra Gauss - ova funkcija greške (sekcije 6.1 i 6.2) za koju su formirane odgovarajuće familije funkcija na osnovu aproksimacija koje su postigli C. Ren, A. R. MacKenzie [8] i J. - T. Chu [9].

Kvalitet dobijenih aproksimacija je razmatran, kao i u petom poglavlju, određivanjem 1, 2, ∞ i pseudo odstupanja. Dobijeni rezultati nisu do sada razmatrani u poznatoj literaturi.

Posebno je bitno istaći da su u šestom poglavlju prvi put razmatrane raslojene familije funkcija koje nisu oblika "nike", te će opšta teorija i primena vezano za ove funkcije biti predmet budućeg istraživanja.

Za Aplikacije koje su razmatrane u petom i šestom poglavlju, za simbolička i numerička računanja, korišćen je programski paket Maple.

Kad god je Maple dozvoljavao, rezultati su prikazivani u simboličkom a potom i numeričkom obliku.

U slučajevima gde Maple, u realnom vremenu, nije davao simboličke rezultate, formirane su odgovarajuće numeričke implementacije, takođe, u programskom paketu Maple, te su u tom slučaju dobijeni rezultati samo numerički određeni.

Na kraju, napomenimo da, iz poznate literature, je jasno da postoji veliki broj analitičkih nejednakosti koji dopuštaju formiranje sličnih aplikacija koje su razmatrane u petom i šestom poglavlju.

Očekuje se da se svakom takvom aplikacijom mogu dobiti potencijalno novi rezultati za razmatrane nejednakosti i samim tim da se postignu novi doprinosi u Teoriji analitičkih nejednakosti.

Takođe, očekujemo i dalju primenu raslojenih familija funkcija u raznim oblastima elektrotehnike i računarstva.

Prilog A

Opšta matematička pravila primenjena u disertaciji

LAJBNIC - OVO INTEGRALNO PRAVILO [106], [107]

Lajbnic - ovo³⁵ integralno pravilo za diferenciranje pod znakom integrala važi za integral oblika :

$$\int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(p, x) dx$$

pri čemu je $-\infty < \alpha(p), \beta(p) < \infty$, a integral su funkcije zavisne po p . Tada se izvod tog integrala može izračunati po sledećem pravilu :

Neka je data funkcija $f(p, x)$ takva da važi da su i $f(p, x)$ i njen parcijalni izvod $f_p(p, x)$ neprekidni po x i p , na nekom definisanom intervalu u px - ravni, pri čemu je $\alpha(p) \leq x \leq \beta(p)$ i $p_1 \leq p \leq p_2$. Prepostavimo da su i funkcije $\alpha(p)$ i $\beta(p)$ takođe neprekidne i imaju neprekidne izvode za $p_1 \leq p \leq p_2$. Tada važi :

$$\frac{d}{dp} \left(\int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(p, x) dx \right) = f(p, \beta(p)) \cdot \frac{d}{dp} \beta(p) - f(p, \alpha(p)) \cdot \frac{d}{dp} \alpha(p) + \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial}{\partial p} f(p, x) dx \quad (A.1)$$

Ova jednakost je opšti oblik Lajbnic - ovog integralnog pravila i može se izvesti primenom fundamentalne teoreme računa, za poseban slučaj jednačine (7), kada je $\alpha(p) = \alpha \in R$, $\beta(p) = p$ i $f(p, x) = f(p)$.

Takođe, kao poseban slučaj se izdvaja i uslov da su $\alpha(p) = \alpha$ i $\beta(p) = \beta$, konstante koje ne zavise od p . Tada važi :

$$\frac{d}{dp} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(p, x) dx \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial p} f(p, x) dx \quad (A.2)$$

³⁵Gottfried Wilhelm (von) Leibniz (1646 - 1716) : nemački matematičar, filozof, diplomata. Poreklom lužički Srbin.

Prilog B

Implementacija u programskom paketu Maple

B.1. IMPLEMENTACIJA FUNKCIJE ZA RAČUNANJE 1 - ODSTUPANJA

```
> h := 0.01 :  
p1 := A + h :  
x0 := fsolve(f(x, p1) = 0, x = a .. b) :  
P_sum_1 := abs(int(f(x, p1), x = a .. x0)) + int(f(x, p1), x = x0 .. b) :  
while (h > Eps) do  
p2 := p1 + h :  
x0 := fsolve(f(x, p2) = 0, x = a .. b);  
P_sum_2 := abs(int(f(x, p2), x = a .. x0)) + int(f(x, p2), x = x0 .. b) :  
if (P_sum_2 ≤ P_sum_1) then  
p1 := p2 : P_sum_1 := P_sum_2 :  
else h := h/2 :  
end if;  
p1 := (p1 + p2)/2 :  
F_min := (P_sum_1 + P_sum_2)/2 :  
end do:
```

B.2. IMPLEMENTACIJA FUNKCIJE ZA RAČUNANJE PSEUDO - ODSTUPANJA

```
> Fps := p → evalf(Int(f(x, p), x = a .. b));  
h := 0.01 :  
p1 := A : P_sum_1 := Fps(p1) :  
while (h > Eps) do  
p2 := p1 + h : P_sum_2 := Fps(p2) :  
if (P_sum_2 * P_sum_1 > 0) then  
p1 := p2 : P_sum_1 := P_sum_2 :  
else h := h/2 :  
end if;  
pps := (p1 + p2)/2 :  
F_min := (P_sum_1 + P_sum_2)/2 :  
end do:
```

B.3. IMPLEMENTACIJA FUNKCIJE ZA RAČUNANJE 2 - ODSTUPANJA

```

> F2 := p → evalf(Int(abs(f(x, p))^2, x = a .. b));
h := 0.01 :
p1 := A : P_sum_1 := F2(p1) :
while (h > Eps) do
p2 := p1 + h : P_sum_2 := F2(p2) :
if (P_sum_2 ≤ P_sum_1) then
p1 := p2 : P_sum_1 := P_sum_2 :
else p1 := p2 - 2 * h : P_sum_1 := F2(p1) : h := h / 2
end if ;
p2 := (p1 + p2) / 2 :
F_min := (P_sum_1 + P_sum_2) / 2 :
end do:

```

B.4. IMPLEMENTACIJA FUNKCIJE ZA RAČUNANJE ∞ - ODSTUPANJA (ZA FAMILIJE "NIKE OBLIKA")

```

> fsolve( {diff(f(x, p), x) = 0, -f(x, p) = f(b, p)}, {x = a .. b, p = A .. B}) ;
> delta_infty := evalf(f(b, p_infty));

```

B.5. IMPLEMENTACIJA FUNKCIJE ZA RAČUNANJE ∞ - ODSTUPANJA (ZA FAMILIJE KOJE NISU "NIKE OBLIKA")

```

> fsolve( {diff(f(x1, p), x1) = 0, diff(f(x2, p), x2) = 0, f(x1, p) = -f(x2, p)}, {x1 = a .. x0, x2
    = x0 .. b, p = A .. B}) ;
> delta_infty := evalf(f(x1, p_infty));

```

U predstavljenim Maple implementacijama numerička računanja se vrše sa konkretnim navedenim inicijalnim vrednostima za h i mogu se mogu se istim postupcima preneti na vrednosti $h = \varepsilon$ za ma koje konkretno zadano proizvoljno malo $\varepsilon > 0$.

Literatura

- [1] SINGH D.G., BANGA V.K., “Kinematics and Trajectory Planning Analysis Based On Hybrid Optimization Algorithms for an Industrial Robotic Manipulators,” *Soft Computing*, vol. 26, pp. 11339–11372, 2022.
- [2] MALESEVIC B., BANJAC B., “One method for proving polynomial inequalities with real coefficients,” *28th Telecommunications forum TELFOR conference*, November 2020.
- [3] BANJAC B., “Sistem za automatsko dokazivanje nekih klasa analitickih nejednakosti - doktorska disertacija,” *Elektrotehnicki fakultet, Univerzitet u Beogradu*, 2019.
- [4] NENEZIC M., MALESEVIC B., MORTICI C., “New approximations of some expressions involving trigonometric functions ,” *Applied Mathematics and Computation* , vol. 283, pp. 299–315, 2016.
- [5] NENEZIC M., ZHU L., “Some improvements of Jordan-Steckin and Becker-Stark inequalities ,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 12, no. 1, pp. 244–256, 2018.
- [6] MALESEVIC B., NENEZIC M., ZHU L., BANJAC B., PETROVIC M., “Some new estimates of precision of Cusa-Huygens and Huygens approximations,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 243–259, 2021.
- [7] MALESEVIC B., MIHAJOVIC B., “A minimax approximant in the theory of analytic inequalities,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 15, pp. 486–509, 2021.
- [8] REN C., MACKENZIE A.R., “Closed-form approximations to the error and complementary error functions and their applications in atmospheric science ,” *Atmospheric Science Letters*, vol. 8, no. 3, 2007.
- [9] CHU, J.-T., “On bounds for the normal integral,” *Biometrika*, vol. 42, pp. 263–265, 1955.
- [10] KENNEDY J. (ED), “Interpreting gödel : Critical essays,” 2014.
- [11] RICHARDSON D., “Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable,” *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 33, no. 4, pp. 514–520, 1968.
- [12] WANG P.-S., “The undecidability of the existence of zeros of real elementary functions,” *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 21, pp. 586–589, 1974.

- [13] LACZKOVICH M., “The removal of π from some undecidable problems involving elementary functions,” *Proceedings Of The American Mathematical Society*, vol. 131, pp. 2235–2240, 2003.
- [14] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E., PÓLIA G., “Inequalities,” 1934.
- [15] BECKENBACH E., BELLMAN R., “Inequalities,” 1961.
- [16] MITRINOVIC D.S., “Analytic Inequalities,” 1970.
- [17] DONG B., YU B., YU Y., “A symmetric homotopy and hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems,” *Mathematics of computation*, vol. 83, no. 288, pp. 1847–1868, 2014.
- [18] DONG B., YU B., “A hybrid polynomial system solving method for mixed trigonometric polynomial systems,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 46, no. 3, pp. 1503–1518, 2008.
- [19] HENTENRYCK P. VAN, McALLESTER D, KAPUR D., “Solving polynomial systems using a branch and prune approach,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, no. 2, pp. 797–827, 1997.
- [20] HONG H., STAHL V., “Safe starting regions by fixed points and tightening,” *Computing*, vol. 53, no. 3-4, pp. 323–335, 1994.
- [21] MORGAN A., SOMMESE A., “Computing all solutions to polynomial systems using homotopy continuation,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 24, no. 2, pp. 115–138, 1987.
- [22] MORGAN A., SOMMESE A., “A homotopy for solving general polynomial systems that respects m-homogeneous structures,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 24, no. 2, pp. 101–113, 1987.
- [23] FANG Y., HU J., QI J., LIU W., WANG W., PENG Y., “Planning trigonometric frequency central pattern generator trajectory for cyclic tasks of robot manipulators,” *Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 1–18, 2018.
- [24] GUZMÁN-GIMÉNEZ J., VALERA FERNÁNDEZ Á., MATA AMELA V., ÁNGEL DÍAZ-RODRÍGUEZ M., “Synthesis of the Inverse Kinematic Model of Non-Redundant Open-Chain Robotic Systems Using Groebner Basis Theory,” *Applied Science*, vol. 10, p. 2781, 2020.
- [25] CRAIG J. J., “Introduction to Robotics Mechanics and Control, third edition,” *Pearson Education International*, 2005.
- [26] MALESEVIC B., MAKRAGIC M., “A Method for Proving Some Inequalities on Mixed Trigonometric Polynomial Functions,” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 10, no. 3, pp. 849–876, 2016.
- [27] MALESEVIC B., BANJAC B., SESUM-CAVIC V., KOROLIJA N., “One algorithm for testing annulling of mixed trigonometric polynomial functions on boundary points,” pp. 1–3, November 2022.
- [28] MALESEVIC B., BANJAC B., “Automated Proving Mixed Trigonometric Polynomial Inequalities,” *27th Telecommunications forum TELFOR conference*, pp. 1–4, November 2019.
- [29] MILOVANOVIC, G. V., RASSIAS M. T., “Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions, Chapter: G. D. Anderson, M. Vuorinen, X. Zhang: Topics in Special Functions III,” *Springer*, pp. 297–345, 2014.

- [30] LUTOVAC T., MALESEVIC B., MORTICI C., “The natural algorithmic approach of mixed trigonometric-polynomial problems,” *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 116, pp. 1–16, 2017.
- [31] SHIPIN C., ZHONG L., “Automated proof of mixed trigonometric-polynomial inequalities ,” *Journal of Symbolic Computation*, vol. 101, pp. 318–329, 2020.
- [32] SHIPING C., XINYU G., “Automated Proof of Mixed Trigonometric-polynomial Inequalities in the Unbounded Case,” *arXiv:2204.01481*, 2022.
- [33] AHARONOV D., ELIAS D., “Improved inequalities for trigonometric functions via Dirichlet and Zeta functions,” *Mathematical Inequalities and Applications*, vol. 16, no. 3, pp. 851–859, 2013.
- [34] ALIREZAEI G., “A Sharp Double Inequality for the Inverse Tangent Function,” *arXiv:1307.4983*, 2013.
- [35] BANJAC B., MAKRAGIC M., MALESEVIC B., “Some notes on a method for proving inequalities by computer,” *Results Math.*, 2015.
- [36] BHAYO B.A., SÁNDOR J., “On Carlson’s and Shafer’s inequalities,” *Probl. Anal. Issues Anal.*, vol. 3, no. 21, pp. 3–15, 2014.
- [37] CHEN C.P., “Sharp Wilker and Huygens type inequalities for inverse trigonometric and inverse hyperbolic functions,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 23, no. 12, pp. 865–873, 2.
- [38] CHEN C.P., CHEUNG W.S., “ Sharpness of Wilker and Huygens type inequalities,” *J. Inequal. Appl.*, vol. 72, pp. 1–11, 2012.
- [39] CHEN C.P., SÁNDOR J., “Sharp inequalities for trigonometric and hyperbolic functions,” *J. Inequal. Appl.*, vol. 9, no. 1, pp. 203–217, 2015.
- [40] D’AURIZIO J., “Refinements of the Shafer-Fink inequality of arbitrary uniform precision,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 17, no. 4, pp. 1487–1498, 2014.
- [41] DEBNATH L., MORTICI C., ZHU L., “Refinements of Jordan-Stečkin and Becker-Stark Inequalities,” *Results Math.*, vol. 67, pp. 207–215, 2015.
- [42] GUO B.-N., QI F., “Alternative proofs for inequalities of some trigonometric functions,” *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, vol. 39, no. 3, pp. 384–389, 2008.
- [43] GUO B.-N., QIAO B.-M., QI F., LI W., “On new proofs of Wilker’s inequalities involving trigonometric functions,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 6, no. 1, pp. 19–22, 2003.
- [44] GUO B.N., LUO Q.M., QI F., “Sharpening and generalizations of Shafer-Fink’s double inequality for the arc sine function ,” *Filomat*, vol. 27, no. 2, pp. 261–265, 2013.
- [45] GUO B.N., LUO Q.M., QI F., “Monotonicity results and inequalities for inverse hyperbolic sine function,” *J. Inequal. Appl.*, vol. 536, pp. 1–6, 2013.
- [46] HU Y., MORTICI C., “ A lower bound on the sinc function and its application,” *TSWJ - The Scientific World Journal*, pp. 1–4, 2014.

- [47] JIANG W.-D., LUO Q.-M., QI F., “Refinements and Sharpening of some Huygens and Wilker Type Inequalities,” *TJANT - Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 2, no. 4, pp. 134–139, 2014.
- [48] JIANG W.-D., QI F., “Some sharp inequalities involving Seiffert and other means and their concise proofs,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 15, no. 4, pp. 1007–1017, 2012.
- [49] MALESEVIC B., BANJAC B., JOVOCIC I., “A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions,” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 11, no. 1, pp. 151–162, 2017.
- [50] MORTICI C., “The Natural Approach of Wilker-Cusa-Huygens Inequalities,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 14, no. 3, pp. 535–541, 2011.
- [51] MORTICI C., “A subtly analysis of Wilker inequality,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 231, pp. 516–520, 2014.
- [52] MORTICI C., SRIVASTAVA H. M., “Estimates for the arctangent function related to Shafer’s inequality,” *Colloq. Math.*, vol. 136, no. 2, pp. 263–270, 2014.
- [53] NEUMAN E., SÁNDOR J., “On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic functions with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 13, no. 4, pp. 715–723, 2010.
- [54] NEUMAN E., SÁNDOR J., “Optimal inequalities for hyperbolic and trigonometric functions,” *Bull. Math. Anal. Appl.*, vol. 3, pp. 177–181, 2011.
- [55] OZBAN A.Y., “A new refined form of Jordan’s inequality and its applications,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 19, pp. 155–160, 2006.
- [56] QI F., LUO Q.-M., GUO B.-N., “A simple proof of Oppenheim’s double inequality relating to the cosine and sine functions,” *J. Math. Inequal.*, vol. 6, no. 4, pp. 645–654, 2012.
- [57] QI F., NIU D.-W., GUO B.-N., “Refinements, generalization and applications of Jordan’s inequality and related problems,” *Journal of Inequalities and Applications*, pp. 1–52, 2009.
- [58] KLEN R., VISURI M., VUORINEN M., “On Jordan Type Inequalities for Hyperbolic Functions,” *J. Inequal. Appl.*, pp. 1–14, 2010.
- [59] SÁNDOR J., “On new refinements of Kober’s and Jordan’s trigonometric inequalities ,” *NNTDM - Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* , vol. 19, no. 1, pp. 73–83, 2013.
- [60] SUN Z.-J., ZHU L., “On New Wilker-Type Inequalities,” *ISRN Math. Anal.*, pp. 1–7, 2011.
- [61] SUN Z.-J., ZHU L., “Some Refinements of Inequalities for Circular Functions,” *J. Appl. Math.*, 2011.
- [62] SUN Z.-J., ZHU L., “ Simple proofs of the Cusa-Huygens-type and Becker-Stark-type inequalities,” *J. Math. Inequal.*, vol. 7, no. 4, pp. 563–567, 2013.
- [63] WU S., “On extension and refinement of Wilker’s inequality,” *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 39, no. 2, pp. 683–687, 2009.

- [64] YANG Z.-H., “Refinements of a two-sided inequality for trigonometric functions ,” *J. Math. Inequal.*, vol. 7, no. 4, pp. 601–615, 2013.
- [65] YANG Z.-H., “New sharp Jordan type inequalities and their applications,” *Gulf J. Math.*, vol. 2, pp. 1–10, 2014.
- [66] YANG Z.-H., “The sharp inequalities related to Wilker type,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 17, no. 3, pp. 1015–1026, 2014.
- [67] YANG Z.-H., CHU Y.-M., “A Note on Jordan, Adamovic-Mitrinovic, and Cusa Inequalities,” *Abstr. Appl. Anal.*, pp. 1–13, 2014.
- [68] ZHANG L., ZHU L., “A new elementary proof of Wilker’s inequalities,” *Math. Inequal. Appl.*, vol. 11, no. 1, pp. 149–151, 2007.
- [69] ZHU L., “A New Simple Proof of Wilker’s Inequality,” *Math. Inequal. Appl.* , vol. 8, no. 4, pp. 749–750, 2005.
- [70] ZHU L., “Sharpening Jordan’s inequality and the Yang Le inequality I,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 19, pp. 240–243, 2006.
- [71] ZHU L., “Sharpening Jordan’s inequality and the Yang Le inequality II,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 19, pp. 990–994, 2006.
- [72] BERCU G., “New Refinements for the Error Function with Applications in Diffusion Theory,” *Symmetry*, vol. 12, no. 12, pp. 1–13, 2020.
- [73] WILKER J.B., “Problem E-3306,” *Am. Math. Monthly*, vol. 96, p. 55, 1989.
- [74] SUMNER J.S., JAGERS A. A., VOWE M. , ANGLESIO J., “Inequalities involving trigonometric functions,” *Am. Math. Monthly*, vol. 98, no. 3, pp. 264–267, 1991.
- [75] MALESEVIC B., LUTOVAC T., BANJAC B., “A proof of an open problem of Yusuke Nishizawa,” *Journal of Mathematical Inequalities*, vol. 12, no. 2, pp. 473–485, 2017.
- [76] DEBNATH L. , MORTICI C., ZHU L., “Refinements of Jordan-Stečkin and Becker-Stark inequalities,” *Results. Math.*, vol. 67, pp. 1–9, 2015.
- [77] GRADSHTEYN I. , RYZHIK I., “Table of Integrals Series and Products , 8-th Edition,” *Academic Press*, 2015.
- [78] MALESEVIC B., RASAJSKI M., LUTOVAC T., “: Double-Sided Taylor’s Approximations and Their Applications in Theory of Analytic Inequalities,” *Andrica D., Rassias T. (eds) Differential and Integral Inequalities. Springer Optimization and Its Applications*, vol. 151.
- [79] WU S., DEBNATH L., “A generalization of L’Hospital-type rules for monotonicity and its application,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, pp. 284–290, 2009.
- [80] LUTOVAC T. , MALESEVIC B. ,RASAJSKI M., “A new method for proving some inequalities related to several special functions ,” *Results in Mathematics*, vol. 73, no. 100, pp. 1–10, 2018.
- [81] MAKRGIC M., “A method for proving some inequalities on mixed hyperbolic-trigonometric polynomial functions ,” *J. Math. Inequal.*, vol. 11, no. 3, pp. 817–829, 2017.

- [82] MALESEVIC B., LUTOVAC T., RASAJSKI M., MORTICI C., “Extensions of the natural approach to refinements and generalizations of some trigonometric inequalities ,” *Adv. Difference Equ.* , vol. 90, pp. 1–15, 2018.
- [83] RASAJSKI M., LUTOVAC T., MALESEVIC B., “Sharpening and Generalizations of Shafer-Fink and Wilker Type Inequalities : a New Approach ,” *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 11, pp. 885–893, 2018.
- [84] MALESEVIC B., LUTOVAC T., RASAJSKI M., BANJAC B., “Double-sided Taylor’s Approximations and Their Applications in Theory of Trigonometric Inequalities,” *Raigorodskii, A., Rassias, M. (eds) Trigonometric Sums and Their Applications, Springer*, pp. 1–9, 2020.
- [85] SÁNDOR J., “On D’aurizio’s trigonometric inequality,” *J. Math. Inequal.*, vol. 10, no. 3, pp. 885–888, 2016.
- [86] MALESEVIC B., LUTOVAC T., BANJAC B., “One Method for Proving Some Classes of Exponential Analytical Inequalities,” *Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, Filomat*, vol. 32, no. 20, pp. 6921–6925, 2018.
- [87] VELICKOV M., “Metricki i generalizovani metricki prostori, master rad,” *Prirodno matematicki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu*, 2010.
- [88] SEARCÓID M., “Metric Spaces,” *Springer Undergraduate Mathematics Series*, 2007.
- [89] MENG Q., LI H., LI T., “Pseudo-metric Space and Its Properties,” *International Journal of Applied Science and Mathematics*, vol. 3, no. 5, pp. 170–172, 2016.
- [90] DROBNJAK D., “Primeri metrickih prostora, maturski rad,” *Matematicka gimnazija, Beograd*, 2014.
- [91] KORNER T. W., “Metric and topological spaces (syllabus),” 2021.
- [92] JEVТИЋ M., МATEЉЕВИЋ M., ЈОВАНОВИЋ I., “Matematička analiza 2,” *Matematički fakultet, Beograd*, 2008.
- [93] CLOUD M.J. , DRACHMAN B.C., LEBEDEV L. P., “Inequalities with Applications to Engineering ,” *Springer*, 2015.
- [94] BANJAC B., LUTOVAC T., MALESEVIC B., “Kuzina Minimaks Aproksimacija ,” *Zbornik Radova, The Second Conf. on Mathematics in Engineering : Theory and Applications, Novi Sad*, pp. 128–133, 2017.
- [95] MALESEVIC B., MIHAJLOVIC B., NENEZIC JOVIC M., MILINKOVIC L., “Some minimax approximants of D’Aurizio trigonometric inequalities,” *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica (na recenziji)*, 2022.
- [96] ZHU L., “New Sharp Double Inequality of Becker-Stark Type,” *Mathematics* , vol. 10, no. 4, pp. 1–8, 2022.
- [97] BAGUL Y. J. , CHESNEAU C., “New sharp bounds for tangent function ,” *Bull. Alla. Math. Soc.*, vol. 34, pp. 277–282, 2020.
- [98] EIDOUS O.M., ABU-SHAREEEFA R., “New approximations for standard normal distribution function,” *Communication in Statistics- Theory and Methods*, p. 18, 2019.

- [99] SIMON M. K., “Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists,” *Springer, Boston, MA: Kluwer*, 2002.
- [100] ABREU DE G.T.F., “Arbitrary Tugt Upper and Lower Bounds on the Gaussian Q-Function and Related Functions,” *IEEE International Conference on Communications*, 2009.
- [101] ABREU DE G.T.F., “Jensen-Cotes upper and lower bounds on the gaussian Q-function and related functions ,” *IEEE Transactions on Communications* , vol. 57, no. 11, pp. 3328–3338, 2009.
- [102] PERIC Z., MARKOVIC A., KONTREC N., NIKOLIC J., PETKOVIC M., JOVANOVIC A., “Two Interval Upper-Bound Q-Function Approximations with Applications,” *Mathematics*, vol. 10, p. 19, 2022.
- [103] SHAH A., “A Simpler Approximation for Areas Under the Standard Normal Curve,” *The American Statistician*, vol. 39, no. 1, p. 80, 1985.
- [104] CHEVILLARD S., “The functions erf and erfc computed with arbitrary precision and explicit error bounds,” *Information and Computation*, vol. 216, pp. 72–95, 2012.
- [105] PÓLYA, G., “Remarks on computing the probability integral in one and two dimensions,” *Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, Berkely* , vol. 1, pp. 63–78, 1949.
- [106] ANIKET K., “Leibniz Integral Rule,” *University of Cambridge*: <http://aniket.co.uk/teaching/notes/Leibniz.pdf>.
- [107] FRANTZ M., “Visualizing Leibniz’s Rule ,” *Mathematical Association of America*, vol. 74, no. 2, pp. 143–145, 2001.

Biografija



Marija Nenezić Jović, master inženjer elektrotehnike i računarstva rođena je 31. jula 1984. godine u Beogradu. Osnovnu školu "Starina Novak" u Beogradu, završila je 1999. godine, sa Vukovom diplomom. Gimnaziju "Peta Beogradska gimnazija" u Beogradu, završila je 2003. godine, takođe sa odličnim uspehom i odbranjenim maturskim radom na temu : "Primena lasera u medicini". Tokom školovanja osvajala je i brojne nagrade na takmičenjima iz matematike, srpskog i ruskog jezika.

Osnovne studije na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer "Signali i sistemi", završila je 2011. godine. Diplomski rad na temu "Primena logičkih agenata u sistemima veštačke inteligencije" pod mentorstvom Prof. dr Milana Milosavljevića, odbranila je ocenom 10,00.

Odmah nakon diplomiranja, upisala je master studije na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na modulu "Primenjena matematika". Master studije je završila 2012. godine, sa prosečnom ocenom 9,83 i master radom na temu "Neke primene Remez-ovog algoritma" pod mentorstvom Prof. dr Branka Maleševića, koji je ocenjen ocenom 10,00.

U toku master studija, počela je da se interesuje za naučnu karijeru te je odmah 2012. godine i započela istu učešćem na 3. Simpozijumu "Matematika i primene" sa temom "Neki elementi analize sa primenama, realizovani u programskom paketu GeoGebra", kao i učešćem na 3th International Conference on Geometry and Graphics "MonGeometrija 2012" sa temom "Some interactive visualisations in electronics signals using program GeoGebra", oba pod mentorstvom Prof. dr Branka Maleševića.

Po formirajući modula "Primenjena matematika" i na doktorskim studijama Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, kao prvi master inženjer sa tog modula, upisuje 2013. godine i doktorske studije, pod mentorstvom Prof. dr Branka Maleševića.

Trenutno je zaposlena u Preduzeću za izgradnju železničkog čvora Beograd doo, gde obavlja poslove na funkciji Pomoćnika direktora za tehničke poslove.

Karijeru u tom preduzeću je započela na poziciji Glavnog inženjera, 2017. godine, gde se bavila organizacijom u oblasti projektovanja, pripreme i građenja kao i nadzorom nad objektima većeg obima i investicione vrednosti, iz oblasti telekomunikacionih i signalnih instalacija. Takođe je imenovana za rukovodioca kvaliteta i rukovodioca poslova sertifikacionog tela Preduzeća.

Prethodna zaposlenja :

- * Glavni inženjer, rukovodilac kvaliteta u "TSCmeter" doo
- * Stručni saradnik za pitanja iz delokruga ministarstva u Ministarstvu energetike, razvoja i zaštite životne sredine
- * Stručni saradnik za pitanja iz delokruga ministarstva u Ministarstvu građevinarstva, saobraćaja i infrastrukture, Sektor za inspekcijski nadzor
- * Republički inspektor železničkog saobraćaja za železničku elektrotehničku infrastrukturu u Ministarstvu građevinarstva, saobraćaja i infrastrukture, Sektor za inspekcijski nadzor

Poseduje licencu Inženjerske komore Srbije (IKS) za odgovornog projektanta telekomunikacionih mreža i sistema, položen Državni stručni ispit, Stručni ispit za rad na železnici, kao i brojne sertifikate.

U Institutu za standardizaciju Srbije (ISS) je, od 2015. godine, član Komisije za standarde i srodne dokumente KSN009 iz oblasti "Električna oprema i sistemi na železnici", gde aktivno učestvuje u donošenju standarda za navedenu oblast.

U dosadašnjem radu, autor je brojnih naučno - istraživačkih radova, objavljenih u međunarodnim časopisima, zbornicima konferencija, saopštenih na naučnim skupovima. Značajan naučni doprinos su četiri rada objavljena u međunarodnim časopisima sa SCI liste (tri M21 i jedan M22), od kojih se na dva vodi kao prvi autor.

Oblast dosadašnjeg istraživanja obuhvata primenjenu matematiku, veštačku inteligenciju, obradu signala, primenu računarske tehnike i programiranja u matematici i elektrotehnici.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Марија Ненезић Јовић

Број индекса 13/5035

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Раслојене фамилије функција у теорији аналитичких неједнакости са применама

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 24.02.2023.



Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марија Ненезић Јовић
Број индекса 13/5035
Студијски програм Примењена математика
Наслов рада Раслојене фамилије функција у теорији аналитичких неједнакости са применама
Ментор др. Бранко Малешевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 24.02.2023.



Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Раслојене фамилије функција у теорији аналитичких неједнакости са применама

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
- 3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 24.02.2023.

М. Т. Ђорђевић

- 1. Ауторство.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
- 2. Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
- 3. Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
- 4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
- 5. Ауторство – без прерада.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
- 6. Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцима, односно лиценцима отвореног кода.