

Универзитет у Београду  
Електротехнички факултет

Александра Ј. Крнета

**Функције базиса ултра високог реда и  
сингуларне функције базиса у  
анализи аксијално симетричних  
металних структура**

докторска дисертација

Београд, 2018

University of Belgrade  
School of Electrical Engineering

Aleksandra J. Krneta

**Ultra High Order Basis Functions and  
Singular Basis Functions in Analysis of  
Axially Symmetric Metallic Structures**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018

**Ментор:**

др Бранко Колунџија, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

**Чланови комисије:**

др Драган Олћан, ванредни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Бранка Јокановић, научни саветник  
Универзитет у Београду - Институт за Физику

др Милан Илић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

др Миодраг Тасић, доцент  
Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Датум одбране: \_\_\_\_\_

***Захваљујем се:***

*Свом ментору, професору др Бранку Колунџији, на помоћи и подршци  
током израде дисертације*

*Члановима комисије*

*Својим колегама са Електротехничког факултета у Београду*

# **Наслов: Функције базиса ултра високог реда и сингуларне функције базиса у анализи аксијално симетричних металних структура**

## **Резиме**

Рад електронских уређаја и система, као што су мобилна телефонија, телевизија, рачунари, сателитски комуникациони системи, радарски системи и многи други, базира се на електромагнетским феноменима који су предмет изучавања теорије електромагнетских поља. За разумевање начина рада ових система и за њихово пројектовање потребно је извршити електромагнетску (ЕМ) анализу. У већини случајева ЕМ анализа се спроводи применом неке од метода нумеричке електромагнетике. Једна од најчешће коришћених нумеричких метода за ЕМ анализу је метода момената примењена на решавање површинских интегралних једначина. Применом ове методе струје расподељене по граничним површима домена апроксимирају се сумом познатих функција базиса помножених непознатим коефицијентима, а површинске интегралне једначине трансформишу се у систем линеарних једначина чијим се решавањем одређују ти непознати коефицијенти.

Ова метода се унапређује већ више десетина година, а актуелни технички и технолошки трендови постављају сталне захтеве за повећањем тачности и ефикасности ЕМ моделовања, за анализом све већих и комплекснијих структура, које укључују све ситније детаље, као и за проширењем опсега учестаности, идући од веома ниских до веома високих учестаности. Повећање тачности, ефикасности и домена примене ове методе могу се остварити 1) имплементацијом комплекснијих елемената за прецизно моделовање геометрије проблема, 2) рачунањем елемената системске матрице са великом тачношћу, и 3) коришћењем софистицираних функција базиса за апроксимацију струје.

Циљ ове дисертације је развој нове методе, базиране на методи момената, за анализу аксијално симетричних металних структура коришћењем егзактног језгра интегралне једначине електричног поља и применом све три горе поменуте технике. За прецизно геометријско моделовање проблема коришћени су зарубљени конуси, а струја је иницијално апроксимирана модификованим функцијама базиса вишег реда. Импедансни интегрални, који представљају

елементе системске матрице су, уз помоћ симетрије, редуковани са четвороструких на троструке интеграле, при чему прве две интеграције одговарају интегралима потенцијала. Свака од три интеграције у оквиру импеданских интеграла показује сингуларно или квази-сингуларно понашање у одређеним ситуацијама. У том случају се ови интегрални неефикасно рачунају директном применом Гаус-Лежандрове интеграционе формуле, па су за њихово рачунање предложене нове технике поништавања сингуларитета. Техника поништавања сингуларитета подразумева примену погодне одабране смене којом се интегранд трансформише у споро променљиву функцију па се интеграл затим може ефикасно израчунати нумерички, применом Гаус-Лежандрове интеграционе формуле. Након одабира оптималних смена осмишљене су једноставне формуле за одређивање потребног броја тачака интеграције за остваривање жељене тачности. Рачунање импеданских интеграла са великом тачношћу (до машинске прецизности), као што је показано на низу нумеричких примера, омогућава: а) велику тачност анализе (релативна средња квадратна грешка се спушта до  $10^{-6}$ ), б) стабилност резултата за електрички мале структуре (до  $10^{-6} \lambda$ , где је  $\lambda$  таласна дужина ЕМ таласа у вакууму), в) ефикасну анализу електрички великих структура (до  $100\lambda$ ), и г) добијање веома тачних и стабилних резултата у широком опсегу вредности (до 100 dB).

У наредном делу дисертације анализирана је могућност повећања максимално употребљивог реда развоја струје имплементацијом макс-орто функција базиса. Наиме, са повећањем реда развоја модификованих функција базиса условљеност системске матрице се погоршава, тако да за редове изнад  $n=10$  у обичној, тј.  $n=20$  у дуплој прецизности, резултати нагло почну да дивергирају. За разлику од тога, имплементација макс-орто функција базиса може обезбедити стабилну системску матрицу практично без обзира на коришћени ред развоја, али само уколико се елементи системске матрице прорачунају са довољно великом тачношћу. Показано је да се системска матрица може израчунати са релативном средњом квадратном грешком мањом од  $10^{-11}$  за редове развоја до 128, ако се матрични елементи рачунају као линеарна комбинација импеданских интеграла у којима фигуришу Лежандрови полиноми и њихови изводи. При томе је потребно да се Лежандрови полиноми и њихови изводи у оквиру импеданских интеграла

рачунају помоћу већ познатих рекурентних формула. Тиме је омогућено коришћење ултра високих редова развоја (тестираних до  $n = 128$ ), као и смањење броја непознатих за око 10 пута у односу на модификоване функције базиса.

Могућности методе су додатно проширене применом сингуларних функција базиса које узимају у обзир ивичне ефекте. Наиме, на споју два елемента чије генератрисе заклапају угао мањи од  $180^\circ$ , као и на отвореној ивици структуре, постоји теоријски бесконачно велика густина површинског наелектрисања која се тешко може апроксимирати полиномским функцијама базиса као што су модификоване и макс-орто. Стога је предложена и примена сингуларних функција базиса, чији је извод бесконачан на ивици где је посматрани ивични ефекат. Увођење сингуларних чланова у изразе за функције базиса додатно отежава рачунање импеданских интеграла. Одабиром нових оптималних смена за технику поништавања сингуларитета омогућено је рачунање импеданских интеграла услед сингуларних функција базиса до машинске прецизности. Предности имплементације сингуларних функција базиса илустроване су на примерима биконичне антене дужине крака од  $0,25\lambda$  до  $10\lambda$ , при чему је показано да се за исти број непознатих остварује тачност резултата која је за 3–5 реда величине већа од случаја кад се ове функције базиса не користе.

Нова метода омогућује веома ефикасну ЕМ анализу аксијално симетричних металних структура са великом тачношћу (7–10 цифара тачности) у веома широком опсегу учестаности, тако да се димензије структуре (радијалне и аксијалне) крећу у опсегу од  $10^{-6}\lambda$  до  $100\lambda$ . Искуство и знање стечено при имплементацији макс-орто функција базиса ултра високог реда, сингуларних функција базиса и техника поништавања сингуларитета за нумеричко рачунање импеданских интеграла може се искористити и проширити на анализу произвољних метално-диелектричних структура.

**Кључне речи:** аксијално симетричне металне структуре, егзактно језгро интегралне једначине, ивични ефекти, импедансни интегрални, метод момената, поништавање сингуларитета, функције базиса ултра високог реда.

**Научна област:** Електротехника и рачунарство

**Ужа научна област:** Електромагнетика, антене и микроталаси

**УДК број:** 621.3

# **Title: Ultra High Order Basis Functions and Singular Basis Functions in Analysis of Axially Symmetric Metallic Structures**

## **Abstract**

The operation of electronic devices and systems, such as mobile phone systems, television, computers, satellite communication systems, radar systems and many more, is based on electromagnetic phenomena, the subject of studies of electromagnetic field theory. In order to understand the functionality of these systems and to complete the design, it is necessary to perform electromagnetic (EM) analysis. In most of the cases EM analysis is carried out by applying one of the methods of computational electromagnetics. One of the most frequently used numerical methods for EM analysis is the method of moments applied to solving surface integral equations. By the use of this method, the currents distributed along boundary surfaces of various domains are approximated as the sum of known basis functions multiplied by unknown coefficients, and surface integral equations are transformed into a system of linear equations. The unknown coefficients are determined by solving this system.

The moment method has been growing and improving for more than several decades. Current technological and technical trends are continuously expanding the demands for more accurate and efficient EM modeling to include complex and electrically large structures with very small details. Furthermore, required frequency range is widening, spanning from very low up to very high frequencies. The efficiency, precision, and the application area of the method can be increased 1) by implementing more complex elements for precise geometrical modeling of the problem, 2) by evaluating the system matrix elements more accurately, and 3) by the use of sophisticated basis functions for the current approximation.

The goal of this dissertation is to develop a new method, based on moment methods, for the analysis of axially symmetric metallic structures utilizing exact kernel of electric field integral equation and all three above mentioned techniques. Right-truncated cones are used for precise geometrical modeling of the structures, and the currents are initially approximated by modified higher order basis functions. Impedance integrals, representing the system matrix elements, are reduced from fourfold to threefold integrals, in which the first two integrations correspond to potential integrals. All three



integrations within impedance integrals can potentially be singular or quasi-singular in some situations. In that case, the integrals cannot be efficiently evaluated by directly applying the Gauss-Legendre integration formula. Therefore, new singularity cancellation techniques are proposed in the dissertation for the efficient evaluation of the singular or quasi-singular integrals. By the use of a convenient change of variables, the singularity cancellation technique transforms the integrand into a slowly varying function, after which the integral can be efficiently evaluated numerically using the Gauss-Legendre integration formula. After selecting the optimum variable transforms, simple formulas are determined for estimating required number of integration points needed for prescribed accuracy. As shown on a number of numerical examples, accurate evaluation of the impedance integrals (up to machine precision) enables: a) high precision analysis (relative root-mean square error is brought down to  $10^{-6}$ ), b) obtaining stable results for electrically small structures (with dimensions as small as  $10^{-6}\lambda$ ), c) efficient analysis of electrically big structures (with dimensions up to  $100\lambda$ ), and d) obtaining accurate and stable results with a dynamic range of up to 100 dB.

In the next part of the dissertation, the possibility of increasing maximally applicable expansion order for current distribution is examined by implementing maximally orthogonalized basis functions (max-ortho). Namely, with increasing the expansion order of modified basis functions the stability of system matrix worsens, so that for orders higher than  $n=10$  in single, and  $n=20$  in double precision, the results diverge rapidly. In contrast, the implementation of max-ortho bases provides stable system matrix regardless of the expansion order, but only if the system matrix elements are evaluated with sufficient precision. It is shown that the system matrix due to max-ortho bases can be evaluated with relative root mean square error lower than  $10^{-11}$  for expansion orders up to 128, if the matrix elements are expressed as a linear combination of impedance integrals due to Legendre polynomials and their derivatives. Particularly, Legendre polynomials and their derivatives within impedance integrals should be calculated by the use of the well known recurrent formulas. In this way, ultra high expansion orders (tested up to order 128) can be applied, and the number of unknowns is reduced approximately 10 times with respect to modified basis functions.

The possibilities of the method are further extended by the use of singular basis functions which take into account the edge effect. Namely, at the junction of two

elements whose generatrices form an angle smaller than  $180^\circ$ , as well as at the open edge of the structure, the surface charge density is theoretically infinite. Using polynomial bases, like modified and max-ortho, to approximate infinite charge density is inefficient. The implementation of singular basis functions with infinite derivative at the location of the observed edge effect increases the efficiency of the method. However, the singular terms in the basis functions additionally complicate the evaluation of the impedance integrals. By selecting new optimal variable transforms for the singularity cancellation technique, precise evaluation of the impedance integrals due to singular bases can be performed up to machine precision. The advantages of implementation of singular basis functions are illustrated on several examples of bi-conical antennas with arm lengths spanning from  $0,25\lambda$  to  $10\lambda$ . It is shown that for the same number of unknowns achieved accuracy of the results is 3–5 orders of magnitude higher compared to the case where regular bases are used.

The new method enables very efficient EM analysis of axially symmetric metallic structures with high precision (7–10 significant digits) in a very wide frequency range, so that dimensions of the structure (radial and axial) can span from  $10^{-6}\lambda$  to  $100\lambda$ . The experience and knowledge gained through implementation of maximally orthogonalized ultra high order basis functions, singular basis functions, and singularity cancellation techniques for numerical evaluation of impedance integrals can be extended to arbitrary metallic-dielectric structures.

**Keywords:** axially symmetric metallic structures, edge effect, exact kernel, impedance integral, integral equation, method of moments, singularity cancellation, ultra high order basis functions.

**Scientific area:** Electrical and Computer Engineering

**Scientific subarea:** Electromagnetics, antennas and microwave

**UDC number:** 621.3

# Садржај

<b>1. Увод.....</b>	<b>1</b>
1.1. ПРЕДМЕТ И ЗНАЧАЈ ИСТРАЖИВАЊА .....	2
1.2. ПРЕГЛЕД РЕЛЕВАНТНИХ РАДОВА У ОТВОРЕНОЈ ЛИТЕРАТУРИ .....	4
1.3. ЦИЉЕВИ ДИСЕРТАЦИЈЕ .....	7
1.4. ПОЛАЗНЕ ХИПОТЕЗЕ .....	8
1.5. ОЧЕКИВАНИ НАУЧНИ ДОПРИНОС .....	8
1.6. ПРЕГЛЕД САДРЖАЈА ДИСЕРТАЦИЈЕ ПО ГЛАВАМА .....	10
<b>2. ОПИС МЕТОДЕ ЗА АНАЛИЗУ АКСИЈАЛНО СИМЕТРИЧНИХ МЕТАЛНИХ СТРУКТУРА .....</b>	<b>14</b>
2.1. ИНТЕГРАЛНА ЈЕДНАЧИНА ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА.....	15
2.2. МЕТОД МОМЕНАТА (МОМ).....	19
2.3. ГЕОМЕТРИЈСКО МОДЕЛОВАЊЕ .....	23
2.4. ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА .....	25
2.5. СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА КОЈИ СЕ ДОБИЈА ГАЛЕРКИНОВОМ МЕТОДОМ .....	28
<b>3. НОВА МЕТОДА ЗА РАЧУНАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА ЗАСНОВАНА НА ТЕХНИЦИ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА.....</b>	<b>32</b>
3.1. ИМПЕДАНСНИ ИНТЕГРАЛИ У СЛУЧАЈУ МОДИФИКОВАНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА... 33	
3.1.1. Прва интеграција.....	33
3.1.2. Поређење ефикасности прве интеграције у случају поништавања сингуларитета, екстракције сингуларитета и директне интеграције .....	39
3.1.3. Друга интеграција .....	46
3.1.4. Оптимално коришћење интеграционе формуле за прорачун интеграла потенцијала у анализи аксијално симетричних структура .....	55
3.1.5. Трећа интеграција .....	64
3.1.6. Основни кораци предложене методе.....	70
3.1.7. Тачност рачунања системске матрице .....	71

3.2. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ У СЛУЧАЈУ МОДИФИКОВАНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	73
3.2.1. Поређење са другим методама.....	73
3.2.2. Примери који показују предности рачунања импеданских интеграла са великом тачношћу .....	76
3.2.3. Ефикасност предложеног алгоритма.....	85
<b>4. ЕФИКАСНО КОРИШЋЕЊЕ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА У РАЗВОЈИМА ЗА СТРУЈЕ УЛТРА ВИСОКОГ РЕДА.....</b>	<b>87</b>
4.1. ОПИС МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	88
4.2. ЛИНЕАРНО КОМБИНОВАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У КОЈИМА ФИГУРИШУ СТЕПЕНЕ ФУНКЦИЈЕ У ИМПЕДАНСНЕ ИНТЕГРАЛЕ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА ....	92
4.3. РАЧУНАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У КОЈИМА ФИГУРИШУ ЛЕЖАНДРОВИ ПОЛИНОМИ И ЊИХОВИ ИЗВОДИ .....	95
4.4. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ .....	98
4.5. ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ПУЊЕЊА СИСТЕМСКЕ МАТРИЦЕ У СЛУЧАЈУ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	100
<b>5. СИНГУЛАРНЕ ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА .....</b>	<b>109</b>
5.1. ОПИС СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	112
5.2. ПРВА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	116
5.3. ДРУГА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	121
5.4. ТРЕЋА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА .....	124
5.5. ТАЧНОСТ РАЧУНАЊА СИСТЕМСКЕ МАТРИЦЕ .....	129
5.6. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ .....	130
<b>6. ЗАКЉУЧАК .....</b>	<b>135</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>138</b>
<b>БИОГРАФИЈА АУТОРА .....</b>	<b>147</b>

# 1. УВОД

Саставни део савременог живота чине уређаји и системи као што су мобилна телефонија, телевизија, радио, рачунари, интернет, сателитски комуникациони системи, радарски системи, електрични мотори и генератори, системи за формирање слике у медицини, системи за дистрибуцију електричне енергије и многи други. Рад ових система се базира на електромагнетским феноменима који су предмет изучавања теорије електромагнетског поља. Теорија електромагнетских (ЕМ) поља, или скраћено електромагнетика, се базира на Максвеловим једначинама. Само у малом броју случајева, који најчешће представљају проблеме високе симетрије, постоје аналитичка решења ових једначина [1]-[7]. У осталим случајевима, као што су разни сложени уређаји који се често јављају у пракси, морају се користити апроксимативне методе за решавање ових једначина.

Са појавом рачунара средином 1960-их година и њиховим развојем, појавила се могућност анализе електромагнетских система применом нумеричких метода. Посебно, у случају анализе проблема брзо-променљивог електромагнетског поља, треба поменути пионирске радове Mei-a [8]-[10], Andreasen-a [11]-[13], Richmond-a [14]-[18], Oshiro-a [19], [20], Jee-a [21], Harrington-a [2], [22], [23], Silvester-a [24], [25], Mittra-e [26], [27] и Johns-a [28]. Из ових радова развиле су се три генералне нумеричке методе које се најчешће користе за електромагнетску анализу брзо-променљивих поља: 1) Метода момената (Method of Moment - МоМ), која се по правилу користи за решавање интегралних једначина електромагнетског поља у фреквенцијском домену [29]-[33], 2) Метода коначних елемената (Finite Element Method - FEM), која се по правилу користи за решавање диференцијалних једначина електромагнетског поља у фреквенцијском домену [30], [33]-[37] и 3) Метода коначних разлика у временском домену (Finite Difference Time Domain - FD-TD), која се по правилу користи за решавање диференцијалних једначина електромагнетског поља у временском домену [38]. (Сродне методе FD-TD-у су TLM (Transmission Line Method) [39], [40] и FIT (Finite Integration Technique) [41].)

Свака од метода има своје предности у решавању одређених класа проблема. Метода момената примењена на површинске интегралне једначине је посебно ефикасна у случају ЕМ анализе зрачећих структура у отвореном простору (антена и расејача), које се састоје од савршено проводних и линеарних хомогених и изотропних диелектричних делова. Метода коначних елемената је посебно ефикасна у случају ЕМ анализе структура у затвореном простору које се састоје од линеарних диелектрика, који у општем случају могу бити нехомогени и анизотропни. Метода коначних разлика у временском домену је посебно ефикасна у случају анализе ЕМ структура у широком опсегу учестаности, а материјали од којих су структуре начињене могу бити и нелинеарни.

Циљ свих ових метода је да се утврди расподела струја и наелектрисања по површи и запремини анализираних структура, и расподела електромагнетског поља, како у блиским тако и у далеким тачкама. Таква анализа се назива електромагнетским моделовањем, а нумеричке методе примењене на решавање електромагнетских проблема су предмет изучавања нумеричке електромагнетике (Computational Electromagnetics). Предмет ове дисертације припада широкој области нумеричке електромагнетике.

## **1.1. ПРЕДМЕТ И ЗНАЧАЈ ИСТРАЖИВАЊА**

При анализи ЕМ проблема применом површинских интегралних једначина (Surface Integral Equation - SIE) коришћењем методе момената (MoM) струје расподељене по граничним површима материјала апроксимирају се сумом познатих функција базиса помножених непознатим коефицијентима, а површинске интегралне једначине трансформишу се у систем линеарних једначина чијим се решавањем одређују ти непознати коефицијенти [2], [32].

Иако се ова метода унапређује већ више десетина година и даље постоје стални захтеви за повећањем тачности и ефикасности моделовања, за анализом све већих и комплекснијих структура, које укључују све ситније детаље, као и за проширењем опсега учестаности, идући од веома ниских до веома високих учестаности. Повећање тачности, ефикасности и домена примене ове методе између осталих техника подразумева: а) имплементацију комплекснијих елемената за прецизно моделовање геометрије, б) прецизније рачунање тзв.

импедансних интеграла који представљају елементе системске матрице, и в) коришћење софистицираних функција базиса. У овом раду све ове технике биће разматране у случају аксијално симетричних металних структура напајаних тачкастим напонским генераторима, као што су на пример дебела дипол антена, биконична антена напајана коаксијалним каблом, ниско-пропусни филтар у коаксијалној технологији, итд. Типични примери савремених потреба за ефикасном и веома тачном ЕМ анализом аксијално симетричних структура су 1) дизајн широкопојасних (Ultra Wide Band - UWB) антена ниског профила које раде на учестаностима од ниских VHF (Very High Frequencies) до неколико GHz-a [42], 2) низ са великим добитком који се састоји од две биконичне антене у Ка опсегу са диференцијалном мрежом за напајање уграђеном унутар антене [43], и 3) нископропусни филтар у коаксијалној технологији са резонаторима уграђеним у унутрашњи проводник кабла [44].

Анализа оваквих структура је до сада базирана на тзв. егзактном језгру интегралне једначине, при чему су се за моделовање по правилу користили цилиндрични елементи и функције базиса ниског реда, што и за електрички мале проблеме захтева релативно велики број непознатих коефицијената [45]-[47]. За анализу оваквих структура се такође користило поједностављено, тзв. редуковано језгро. У том случају су се за моделовање употребљавали и елементи у облику зарубљених конуса, као и функције базиса високог реда [48]-[50]. На тај начин омогућена је веома прецизна и ефикасна анализа, али само за проблеме чија је радијална димензија много мања од таласне дужине [51].

Показује се да је у случају електрички дугачких жица анализа утолико ефикаснија, тј. захтева мање непознатих коефицијената, уколико је максимални ред функција базиса које се користе већи. Међутим, у имплементацији максимални ред апроксимације који се може ефикасно применити је лимитиран: 1) бројем тачних цифара са којим су елементи ове матрице израчунати и 2) условљеношћу системске матрице. Тако се у случају обичне/дупле прецизности (6/15 цифара тачности) могу користити тзв. модификоване функције базиса максимално 8/20. реда.

Да би се импедансни интегрални у случају егзактног језгра израчунали са довољним бројем цифара тачности потребно је на одговарајући начин третирати сингуларитете подинтегралне функције. Иако постоје развијене методе за рачунање оваквих интеграла за цилиндричне елементе, ниједна од њих не омогућава ефикасно добијање тачности веће од неколико значајних цифара. За разлику од тих метода у којима се проблем сингуларитета решава екстракцијом, у последњих десет година појавиле су се методе које се базирају на поништавању сингуларитета, којима се може постићи велика тачност погодном одабраним сменама променљивих [52], [53].

На другој страни условљеност системске матрице може се знатно побољшати ако се уместо модификованих функција базиса користе максимално ортогонализоване функције базиса [54]-[56]. Израчунавање одговарајућих импеданских интеграла са великом тачношћу отворило би могућност коришћења функција базиса много вишег реда него што је то до сада био случај, а тиме и повећања тачности и ефикасности ЕМ моделовања. Међутим, у случају израженог ивичног ефекта резултати се релативно споро поправљају са повећањем реда апроксимације. У том случају много је ефикасније да се уместо повећања реда апроксимације користе сингуларне функције базиса које у себи укључују сингуларно понашање расподеле струја у околини ивица [57], [58]. Овакве сингуларне функције базиса се ретко користе, јер још увек нису развијене методе ефикасног рачунања одговарајућих импеданских интеграла.

Да би се у односу на постојеће методе повећале тачност и ефикасност анализе, као и електрична величина решивих проблема, потребно је комбиновати све горе поменуте напредне технике: егзактно језгро интегралне једначине електричног поља за поставку проблема, зарубљени конуси за прецизно моделовање геометрије проблема, технике поништавања сингуларитета за рачунање импеданских интеграла са великом тачношћу, као и функције базиса ултра високог реда и сингуларне функције базиса за апроксимацију површинске струје.

## **1.2. ПРЕГЛЕД РЕЛЕВАНТНИХ РАДОВА У ОТВОРЕНОЈ ЛИТЕРАТУРИ**

Електромагнетско моделовање цилиндричних, и шире, аксијално симетричних структура применом методе момената (МоМ), се интензивно изучава већ више од



50 година. Гледано из угла ове дисертације претходни радови из ове области се могу поделити у две групе. Прву групу чине радови који егзактно рачунају језгро интегралне једначине електричног поља, при чему за моделовање геометрије користе цилиндричне елементе [45]-[47], [52], [59]-[72]. Ови радови по правилу користе функције базиса најнижег реда. (Изузетак је рад у коме се користе полиноми другог реда [68]). Другу групу чине радови који уместо егзактног користе тзв. редуковано језгро, геометрију моделују цилиндрима или зарубљеним конусима, а струје апроксимирају функцијама базиса вишег реда [48]-[50], [73]-[77]. Посебно, сви ови радови уместо егзактног граничног услова користе тзв. гранични услов у проширеном смислу [78].

Најчешће, евалуација (егзактног) језгра у апроксимацији танких жичаних антена као и интеграла потенцијала у анализи цилиндричних жичаних антена је изведена применом метода екстракције сингуларитета [46], [47], [59]-[69]. У свим овим приступима, екстракцијом члана  $1/R$ , сингуларитет је екстрахован из Гринеове функције за слободан простор, али не и из њеног првог извода. Оваква лимитирана екстракција даје добру инжењерску тачност уз помоћ Гаус-Лежандрове интеграционе формуле релативно ниског реда, али се тачност споро побољшава са повећањем броја тачака интеграције. У неколико радова сингуларни интегрални су представљени у виду бесконачног реда, а њихов прорачун је изведен одсецањем бесконачне суме [45], [70], [71]. Међутим, утврђено је да тачке поља које су близу умерено дебелих жица могу у том случају произвести нумеричке нестабилности у оваквим сумама [72]. Заједничко за све поменуте приступе је да су релативно компликовани за имплементацију.

Од скора, метода базирана на поништавању сингуларитета је веома често коришћена за прорачун интеграла потенцијала у случају решења површинске интегралне једначине методом момената [52], [53], [79]-[85]. Основна идеја методе поништавања сингуларитета је да се добије мирна подинтегрална функција применом добро одабране смене променљивих. Само један сет променљивих је предложен за евалуацију сингуларног танког жичаног језгра и интеграла потенцијала [52]. Међутим, комплексност имплементације такве технике поништавања сингуларитета, која укључује прорачун комплетног

елиптичког интеграла прве врсте и Јакобијеве елиптичке функције, је упоредива са тежином имплементације горе поменутих техника екстракције сингуларитета.

У литератури није посвећено превише пажње прорачуну треће интеграције импеданских интеграла. Изузетак је третман реакционих (импеданских) интеграла за функције базиса које су део по део синусоидалне [67]. То се може објаснити чињеницом да интегрални потенцијала, који се добијају после прве две интеграције у оквиру импеданских интеграла, не показују изразито сингуларно понашање, па директна примена Гаус-Лежандрових интеграционих формула на трећу интеграцију обично обезбеђује задовољавајућу тачност. Такође, није се превише пажње обратило на прорачун интеграла потенцијала и импеданских интеграла у случају жица са променљивим полупречником, осим у случају кад се користи редуковано језгро уместо егзактног [32], [48], [49]. У литератури је жица променљивог полупречника обично грубо апроксимирана низом мањих жица константног полупречника [64].

У [32] је показано да  $p$ -рафинација (повећање броја непознатих повећавањем реда апроксимације) резултује бржом конвергенцијом од  $h$ -рафинације (повећање броја непознатих додатном сегментацијом проблема). Међутим, у случају класичних и модификованих функција базиса са повећањем реда апроксимације условљеност системске матрице се погоршава (тј. кондициони број расте), и после одређеног реда апроксимације резултати постају нестабилни и нетачни [54], [86]-[92]. У случају нове методе [93] максимални ред апроксимације који се може користити је  $n = 10$  у обичној прецизности, и  $n = 20$  у дуплој прецизности.

Матрични кондициони број се може значајно смањити ако се користе функције базиса вишег реда са ортогоналним својствима, као што су "near-ortho" [92] и макс-орто [56]. Посебно, у [56] је показано да кондициони број практично не зависи од реда апроксимације који је коришћен за симулације у случају макс-орто функција базиса. Из тог разлога, може се претпоставити да се горе поменуте границе за ред апроксимације могу значајно проширити, али под условом да се одговарајући, нови елементи МоМ системске матрице рачунају довољно тачно.

У случају израженог ивичног ефекта резултати се релативно споро поправљају са повећањем реда апроксимације. Стога је много ефикасније да се уместо

повећања реда апроксимације користе сингуларне функције базиса које у себи укључују сингуларно понашање расподеле струја у околини ивица [32]. Овакве сингуларне функције базиса су до сада коришћене у релативно малом броју радова, а један од разлога је то што још увек нису развијене методе ефикасног рачунања одговарајућих импеданских интеграла [57], [58].

### 1.3. ЦИЉЕВИ ДИСЕРТАЦИЈЕ

На основу увида у литературу може се закључити да егзактно језгро интегралне једначине електричног поља у комбинацији са зарубљеним конусима за геометријско моделовање, као и примена сингуларних функција базиса може знатно повећати тачност ЕМ анализе аксијално симетричних металних структура. На другој страни се може закључити да се повећање ефикасности анализе и електричне величине решивих проблема може остварити коришћењем техника поништавања сингуларитета за рачунање импеданских интеграла и применом макс-орто функција базиса ултра високог реда. Сходно томе су формулисани циљеви ове дисертације:

- 1) Развој нове методе за анализу аксијално симетричних металних структура коришћењем егзактног језгра интегралне једначине електричног поља у комбинацији са зарубљеним конусима за геометријско моделовање и модификованим функцијама базиса вишег реда за апроксимацију струја,
- 2) Развој алгоритама за рачунање импеданских интеграла са произвољно великом тачношћу, до машинске прецизности, заснованог на поништавању сингуларитета коришћењем погодних одабраних смена променљивих,
- 3) Повећање стабилности импедансне матрице коришћењем максимално-ортогонализованих функција базиса и прилагођавање методе анализе тако да се омогући коришћење функција базиса ултра високог реда, и
- 4) Развој сингуларних функција базиса које у себи укључују сингуларно понашање расподеле струја у околини ивица, тако да се омогући добијање резултата са веома великом тачношћу.

## 1.4. ПОЛАЗНЕ ХИПОТЕЗЕ

Истраживање се заснива на следећим хипотезама:

- 1) Применом Гаус-Лежандрових интеграционих формула на импедансне интеграле, чија је подинтегрална функција трансформисана коришћењем погодно одабране смене променљивих, могуће је ефикасно израчунати вредност интеграла са произвољно великом тачношћу, скоро до машинске прецизности,
- 2) Повећањем реда апроксимације за струје постиже се бржа конвергенција резултата него додатном сегментацијом, а при истом броју непознатих коефицијената,
- 3) Већа тачност рачунања импедансних интеграла, а самим тим и одговарајућих елемената системске матрице омогућава коришћење вишег реда апроксимације за струје,
- 4) Коришћењем максимално-ортогонализованих функција базиса могуће је формирати системску матрицу чија стабилност практично не зависи од реда апроксимације за струје,
- 5) Утицај ивичних ефеката на расподелу струја и расподелу површинског наелектрисања може се веома тачно узети у обзир коришћењем погодно дефинисаних сингуларних функција базиса.

С обзиром на то да је свака од хипотеза потврђена на примеру различитих сродних проблема, може се закључити да ове хипотезе представљају добру основу за развој метода за веома тачну и ефикасну ЕМ анализу аксијално симетричних металних структура.

## 1.5. ОЧЕКИВАНИ НАУЧНИ ДОПРИНОС

Полазећи од горе наведених хипотеза извршен је развој више различитих алгоритама у циљу добијања методе за веома тачну и ефикасну ЕМ анализу аксијално симетричних металних структура. Сви ови алгоритми су испитани на великом броју примера показујући не само повећање тачности и ефикасности у односу на постојеће методе него и могућност решавања електрички много већих

проблема него што је то до сада било могуће. Имајући у виду успешност предложених алгоритама, могу се очекивати следећи научни доприноси дисертације:

- 1) Развој нове методе за анализу аксијално симетричних металних структура коришћењем егзактног језгра интегралне једначине, зарубљених конуса за геометријско моделовање и функција базиса вишег реда за апроксимацију струја,
- 2) Смена променљивих оригинално предложена у [52] је примењена за поништавање квази-сингуларитета интегранда при прорачуну интеграла потенцијала услед праве линијске струје,
- 3) Нове смене променљивих су предложене за поништавање квази-сингуларитета у другој и трећој интеграцији импеданских интеграла при анализи танких цилиндричних антена коришћењем егзактног језгра интегралне једначине,
- 4) Генерализација алгорита на анализу произвољних аксијално симетричних металних структура које су сачињене од зарубљених конуса произвољно великог полупречника (тестираног до  $100\lambda$ , где је  $\lambda$  таласна дужина ЕМ таласа у вакууму),
- 5) Формирање једноставних формула за одређивање потребног броја тачака интеграције да би се остварила жељена тачност за произвољно дугачке елементе (тестиране до  $10\lambda$ ),
- 6) Развој једноставног алгорита за евалуацију интеграла потенцијала и импеданских интеграла са прописаном тачношћу до машинске прецизности на основу доприноса 1) до 5),
- 7) Нова техника је предложена за прорачун МоМ системске матрице максимално ортогонализованих функција базиса, где се елементи матрице представљају у виду линеарне комбинације импеданских интеграла у којима фигуришу Лежандрови полиноми и њихови први изводи,

- 8) Развој нове методе за ефикасну анализу аксијално симетричних металних структура базиране на макс-орто функцијама базиса ултра високог реда (тестираног до  $n = 128$ ),
- 9) Развој и имплементација сингуларних функција базиса које у себи укључују сингуларно понашање расподеле струја у околини ивица.

Нова метода треба да омогући прецизну и ефикасну анализу аксијално симетричних металних структура у веома широком опсегу учестаности, тако да се њихове аксијалне и радијалне димензије крећу у опсегу од  $10^{-6}\lambda$  до  $100\lambda$ . Искуства стечена у имплементацији максимално ортогонализованих функција базиса ултра високог реда, сингуларних функција базиса и техника поништавања сингуларитета при рачунању импеданских интеграла, биће веома драгоцене за примену у случају произвољних метално-диелектричних структура.

## **1.6. ПРЕГЛЕД САДРЖАЈА ДИСЕРТАЦИЈЕ ПО ГЛАВАМА**

У другој глави је представљена метода за анализу аксијално симетричних металних антена. Представљена је најпре интегрална једначина електричног поља. Затим је објашњена метода момената и изведени су општи облици за елементе системске матрице (импедансни интегрални) и за векторе слободних чланова. У наредном кораку је објашњено геометријско моделовање проблема коришћењем зарубљених конуса. Затим је представљен општи облик функција базиса, после чега су описане модификоване функције базиса. У следећем поглављу је објашњена Галеркинова тест процедура у оквиру методе момената и, на основу општег облика елемената системске матрице у случају МоМ методе, дато је детаљно извођење за њихов редукован облик у случају аксијално симетричних проблема.

У трећој глави разматрана је интеграција импеданских интеграла у случају кад се користе модификоване функције базиса. Прво је дат општи облик тзв.  $P$ -интеграла чијом се линеарном комбинацијом добијају импедансни интегрални. Затим је предложена једна смена променљивих за методу поништавања сингуларитета за прву интеграцију импеданских интеграла, а резултати за релативну грешку су упоређени са резултатима директне интеграције, а затим и са

результатима методе екстракције сингуларитета. Такође, предложена је формула на основу које се одређује број тачака интеграције за жељену тачност. У следећем поглављу предложене су четири нове смene и смена из [53] за поништавање сингуларитета у случају друге интеграције импеданских интеграла. Резултати за релативну грешку су упоређени са директном интеграцијом, као и међусобно. На основу резултата поређења одабрана је оптимална смена. Као и за прву интеграцију, и у овом случају је дата једноставна формула за одређивање потребног броја тачака интеграције за жељену тачност. У наставку је анализирана ефикасност нумеричког прорачуна друге интеграције у случају кад су симетричност и периодичност интегранда примењене у случају интеграционе формуле реда  $n$  и реда  $2n$ . Упоредна је ефикасност ове две формуле у случају директне интеграције и у случају методе поништавања сингуларитета, па је одабрана оптимална формула. У наредном кораку разматрана је трећа интеграција. Приказане су могуће ситуације које се јављају и предложене су три врсте смene променљивих. Релативна грешка и ефикасност ових смene су разматране у случају сопственог члана као и у случају елемента који су близу, после чега је предложена оптимална смена. Такође, дате су формуле за одређивање броја тачака интеграције за жељену тачност. У наставку је дато јасно упутство где је за сваку интеграцију назначено која метода се користи у ком случају као и како се одређује број тачака интеграције. Затим је разматрана ефикасност предложених смene на глобалном нивоу тј. анализирана је средња релативна квадратна грешка системске матрице. У другом делу дати су бројни нумерички примери где су прво упоређени резултати са постојећим методама, а затим су на примерима обичне дипол и дебеле дипол антене, биконичне антене и коаксијалног вода демонстриране могућности и тачност методе. На крају је разматрана ефикасност осмишљене методе у погледу средњег броја тачака интеграције по елементу системске матрице тако што су дефинисане ситуације које захтевају минимални број интеграционих тачака и изведене су формуле које одређују тај минимални број. На примерима танке дипол антене и биконичне антене процењен је однос захтеваног и минималног броја тачака интеграције по елементу системске матрице.

У четвртој глави анализирана је имплементација макс-орто функција базиса у нову методу. Објашњене су предности коришћења ових ортогонализованих функција базиса, а затим су дате њихове опште карактеристике и представљене су помоћу рекурентних формула где фигуришу Лежандрови полиноми. Анализирана је могућност представе импедансних интеграла макс-орто функција базиса у виду линеарне комбинације  $P$ -интеграла (као и у случају модификованих функција базиса) и у виду линеарне комбинације  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла где фигуришу Лежандрови полиноми и њихови изводи. Показано је да коришћење  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла за рачунање макс-орто импедансних интеграла ефикасно обезбеђује жељену тачност системске матрице за разлику од случаја кад се користе  $P$ -интеграл. Формуле за процену броја тачака интеграције из треће главе су модификоване за примену у случају  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла. У наредном делу четврте главе дати су нумерички примери где су илустроване предности коришћења макс-орто функција базиса, и у оквиру чега је показана могућност коришћења ултра високих редова апроксимације у циљу повећања ефикасности анализе. На крају је анализирано време пуњења матрице као и број тачака интеграције по матричном елементу за разне случајеве  $p$ - и  $h$ -рафинације. Резултати за макс-орто функције базиса су упоређени са резултатима за модификоване функције базиса. Затим су разматрана разна побољшања у алгоритму за рачунање  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла, а након имплементације ових модификација генерисани су нови резултати који су упоређени са старим.

У петој глави је анализирана примена сингуларних функција базиса за апроксимацију ивичних ефеката на споју два (градивна) елемента, као и на отвореној ивици структуре. Прво су илустровани ивични ефекти на два примера антена и објашњен је разлог за увођење сингуларних функција базиса. Предложене су функције базиса које прате сингуларно понашање површинских струја и наелектрисања на ивицама. У наредном делу ове главе анализирани су прва, друга и трећа интеграција импедансних интеграла сингуларних функција базиса и предложене су одговарајуће смене променљивих за поништавање једног или два сингуларитета (у зависности од близине посматрана два елемента) у случају прве и треће интеграције. У случају друге интеграције илустрована је зависност потребног броја тачака интеграције, за добијање жељене тачности, од



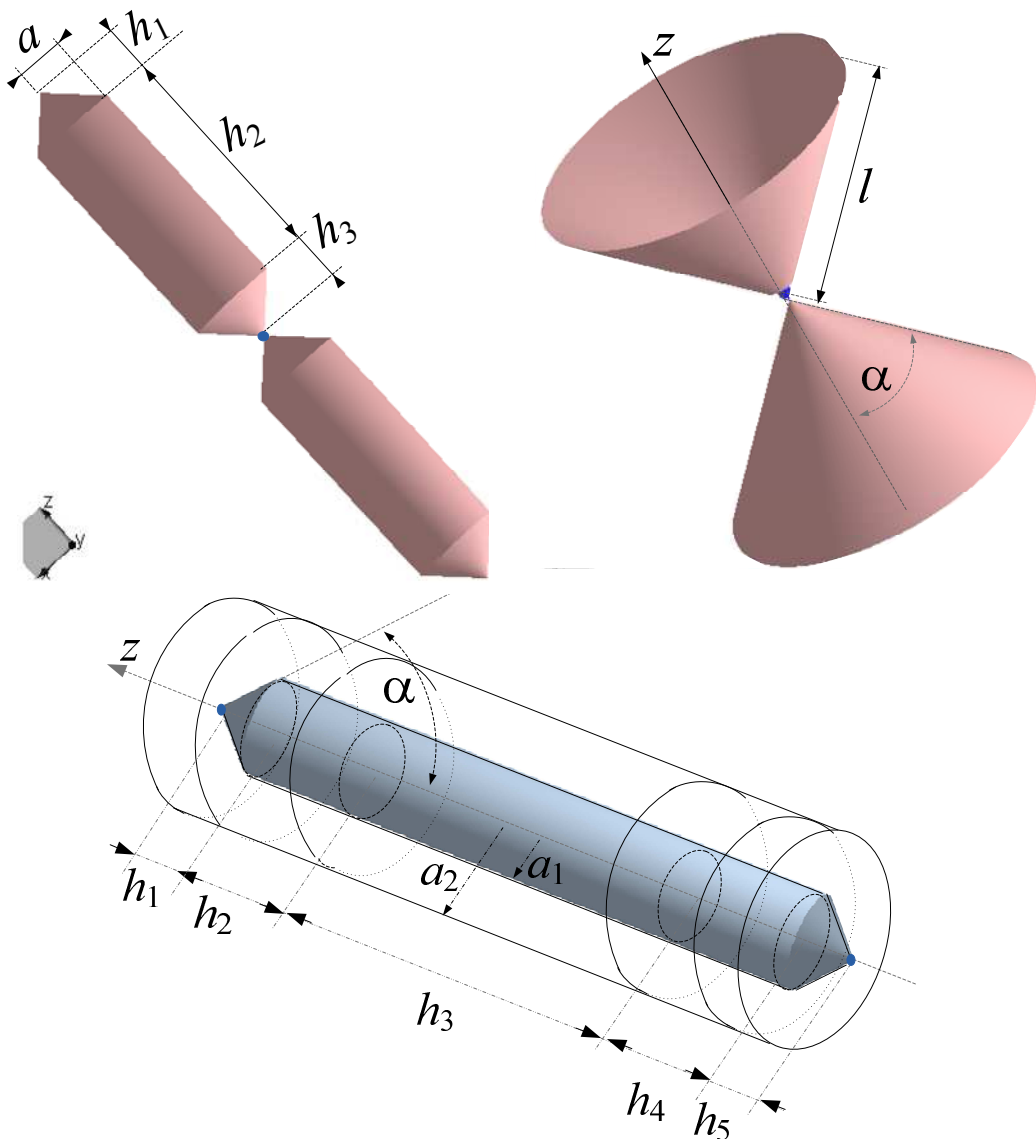
нормализованог растојања између тачке поља и ивице где је посматрани ивични ефекат. За све три интеграције осмишљене су формуле за прорачун потребног броја тачака интеграције у зависности од жељене тачности. Затим је анализирана средња релативна квадратна грешка системске матрице у случају примене сингуларних функција базиса. На крају је на примерима биконичне антене дужине крака од  $0,25\lambda$  до  $10\lambda$  показан утицај сингуларних функција базиса на добијање резултата са већом тачношћу.

У шестој глави су дати закључци и истакнуте су могућности предложене методе и техника у оквиру ње. Такође, указане су смернице даљег развоја и начини на које се ова метода може проширити.

Део нових алгоритама и нумеричких резултата, који су настали као резултат рада на овој дисертацији и који су приказани у овој дисертацији, објављени су у радовима [93]-[99].

## 2. ОПИС МЕТОДЕ ЗА АНАЛИЗУ АКСИЈАЛНО СИМЕТРИЧНИХ МЕТАЛНИХ СТРУКТУРА

Посматрајмо аксијално симетричну структуру направљену од савршено проводног материјала (Perfect Electric Conductor - PEC) у вакууму, која је побуђена коришћењем једног или више тачкастих напонских генератора угаоне учестаности  $\omega$ . Типични примери оваквих структура, симетрична дипол антена, биконична антена, и коаксијални кабл, приказани су на слици 2.1. Тачкасти напонски генератори су приказани плавим тачкама

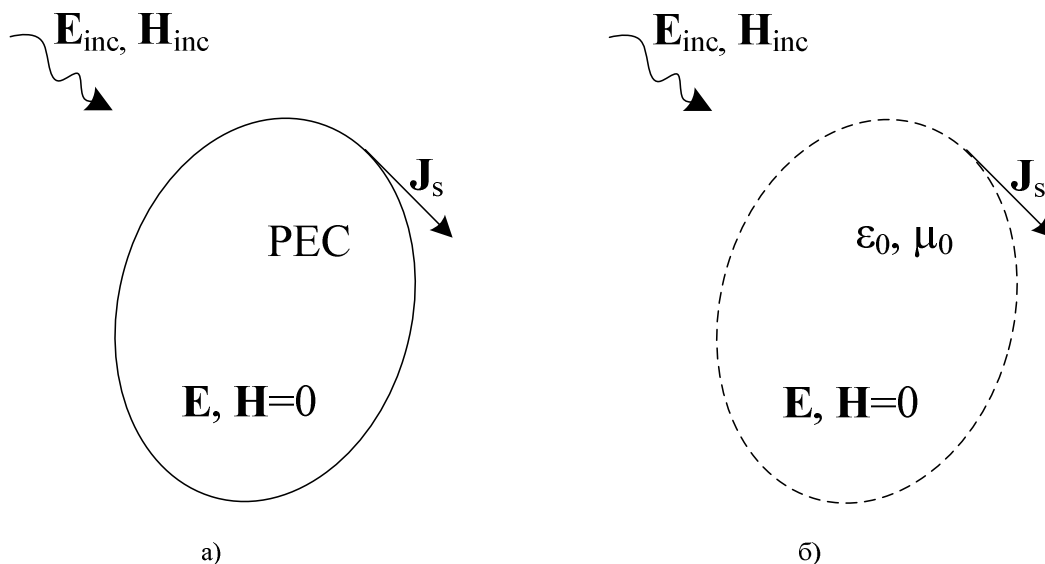


Слика 2.1. Примери аксијално симетричних структура: а) Симетрична дипола антена, б) биконична антена и в) коаксијални вод.

Под дејством тачкастих генератора дуж ових структура индукује се површински расподељена струја, чију расподелу треба одредити. Када се једном одреди расподела ове струје лако се добијају остале величине од интереса, као што су улазна импеданса антена,  $s$ -параметри коаксијалног кабла, расподела блиског и/или далеког поља итд. Са становишта одређивања расподеле струја овај проблем представља специјалан случај општијег проблема одређивања расподеле струја по површи савршено проводних структура у вакууму, које су побуђене произвољним инцидентним електромагнетским пољем. Расподела струја по површи оваквих структура се може одредити решавањем тзв. интегралне једначине електричног поља, која ће бити коришћена и у овом раду. Стога је у наредном поглављу дато детаљно извођење ове интегралне једначине.

## 2.1. ИНТЕГРАЛНА ЈЕДНАЧИНА ЕЛЕКТРИЧНОГ ПОЉА

Посматрајмо савршено проводну структуру у вакууму, која је побуђена простопериодичним електромагнетским пољем,  $\mathbf{E}_{inc}$  и  $\mathbf{H}_{inc}$ , кружне учестаности  $\omega$ . Под дејством овог побудног поља на њеној површи се индукују површинске струје, вектора густине  $\mathbf{J}_s$ , као што је приказано на слици 2.2а.



Слика 2.2. а) Савршено проводна структура у вакууму побуђена инцидентним ЕМ пољем,  $\mathbf{E}_{inc}$  и  $\mathbf{H}_{inc}$ , услед чега се на њеној површи индукују површинске струје  $\mathbf{J}_s$ , б) еквивалентан проблем где је савршено проводна структура замењена вакуумом, а индуковане површинске струје  $\mathbf{J}_s$  су задржане.

Електромагнетско поље које потиче од индукованих струја једнозначно је одређено побудним пољем, и једним од услова на површи проводника: 1) позната је расподела тангенцијалне компоненте електричног поља, и 2) позната је расподела тангенцијалне компоненте магнетског поља. Полазећи од првог услова добија се тзв. интегрална једначина електричног поља (Electric Field Integral Equation - EFIE) [12], [100], док се полазећи од другог услова добија тзв. интегрална једначина магнетског поља (Magnetic Field Integral Equation - MFIE) [20], [100]. Посебно, комбиновањем ова два услова може се добити тзв. комбинована интегрална једначина поља (Combined Field Integral Equation - CFIE) [101], [102].

Интегрална једначина електричног поља по правилу обезбеђује већу тачност резултата у поређењу са осталим интегралним једначинама [32], [103], [104]. Ова карактеристика EFIE је посебно запажена у случају PEC структура у вакууму. Ово се може објаснити чињеницом да EFIE у комбинацији са Галеркиновом тест процедуром аутоматски обезбеђује да је и у нумеричком решењу укупна израчена снага једнака укупној снази генератора [105], што није случај са другим интегралним једначинама и тест процедурама. Са друге стране, интегрална једначина електричног поља има проблем појаве паразитних резонантних електромагнетских поља унутар затворених PEC структура у околини унутрашњих резонантних учестаности ових структура [2], [101], [102], [106]. Ово паразитно поље је повезано са резонантним модовима који се могу успоставити на дискретним учестаностима унутар PEC структуре као резонаторске шупљине.

Као што је горе поменуто MFIE има мању тачност резултата од EFIE [107], [108]. За разлику од EFIE интегрална једначина магнетског поља не захтева коришћење функција базиса које аутоматски задовољавају једначину континуитета [109]. На другој страни показује се да се у случају MFIE условљеност матрице брзо квари са смањењем полупречника жичаних структура [109]. Ова интегрална једначина, као и EFIE, има проблем појаве паразитног резонантног поља унутар PEC структуре у околини резонантних учестаности [20], [101], [102]. Додатно, интегрална једначина магнетског поља се не може применити у случају отворених PEC тела.

Проблем паразитних модова унутар савршено проводних тела се може решити постављањем комбиноване интегралне једначине поља, CFIE . Међутим, пошто представља комбинацију EFIE и MFIE, а због утицаја MFIE, има мању тачност резултата од EFIE и не може се применити у случају отворених PEC структура.

За поставку проблема у овом раду изабрана је интегрална једначина електричног поља. Основни разлог за то је већа тачност коју она обезбеђује у односу на друге интегралне једначине и могућност анализе отворених PEC тела. Додатно, проблем паразитних модова се у случају EFIE може ефикасно минимизирати коришћењем функција базиса вишег реда. Наиме, функције базиса вишег реда веома тачно задовољавају гранични услов за EFIE, чиме се смањује опсег око резонантне учестаности где се ови паразитни модови појављују, а на учестаностима где ови модови постоје практично се елиминише њихов утицај на поље изван PEC тела [32].

Електромагнетско поље изван PEC структуре једнозначно је дефинисано познатом расподелом инцидентног поља  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$  и на основу граничног услова за тангенцијалну компоненту електричног поља на површи структуре

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0. \quad (2.1)$$

Поље у савршено проводном телу је нула, па се посматрано тело може заменити вакуумом задржавајући индуковане површинске струје  $\mathbf{J}_s$ , а у остатку простора се ништа неће променити (слика 2.2б). Стога, електрично поље у свакој тачки простора се може представити као збир електричног поља услед индукованих површинских струја,  $\mathbf{E}(\mathbf{J}_s)$ , и инцидентног поља услед побудног тачкастог генератора,  $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{J}_s) + \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (2.2)$$

Након замене проводне структуре вакуумом проблем је сведен на постојање површинских струја у вакууму, па се електрично поље услед индукованих струја може добити на основу израза [4], [6], [110], [111]

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V, \quad (2.3)$$

где је  $\mathbf{A}$  магнетски вектор-потенцијал,  $V$  електрични скалар-потенцијал, а  $\nabla$  представља тзв. набла оператор. Интегрални изрази за магнетски вектор-

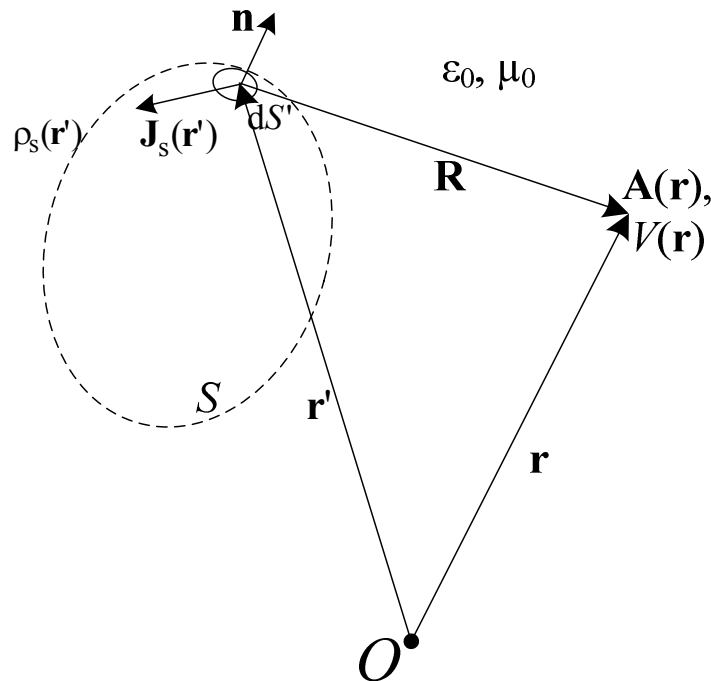
потенцијал  $\mathbf{A}$  и електрични скалар-потенцијал  $V$  услед површинских извора у вакууму су, у складу са сликом 2.3, дати са

$$\mathbf{A} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g(R) dS', \quad (2.4a)$$

$$V = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s(\mathbf{r}') g(R) dS', \quad (2.4b)$$

$$g(R) = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (2.4в,г)$$

где је  $\rho_s$  површинска густина индукованог нагомиланог наелектрисања,  $S$  је површ на којој се налазе извори поља  $\mathbf{J}_s$  и  $\rho_s$  (и по којој се врши интеграција),  $dS'$  је елементарна површ на површи  $S$ ,  $\mathbf{r}'$  је вектор положаја извора поља,  $\mathbf{r}$  је вектор положаја тачке у којој се рачунају потенцијали  $\mathbf{A}$  и  $V$ ,  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  је фазни коефицијент, а  $g(R)$  је Гринава функција у вакууму.



Слика 2.3. Координатни систем за одређивање потенцијала  $\mathbf{A}$  и  $V$ , као и вектора поља  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Површинска густина нагомиланог наелектрисања  $\rho_s$  и линијска густина површинске струје  $\mathbf{J}_s$  су повезани једначином континуитета

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -j\omega\rho_s, \quad (2.5)$$

где је  $\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s$  дивергенција површинске струје  $\mathbf{J}_s$  по површи  $S$ .

На основу једначина (2.3)–(2.5) добија се интегрални израз за вектор електричног поља као

$$\mathbf{E} = -j\beta Z \int_S [\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')g(R) + \frac{1}{\beta^2} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(R)] dS', \quad (2.6)$$

где је  $\nabla$  набла оператор који делује на координате тачке поља  $\mathbf{r}$ ,  $\nabla'_s$  набла оператор који делује на координате извора  $\mathbf{r}'$ , а  $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$  је таласна импеданса вакуума.

Израз за електрично поље (2.6) се може компактније записати као

$$\mathbf{E}(\mathbf{J}_s) = -Z L(\mathbf{J}_s), \quad (2.7a)$$

где је  $L$  линеарни оператор који делује на површинску струју  $\mathbf{J}_s$ , дат са

$$L(\mathbf{J}_s) = j\beta \int_{S'} [\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')g(R) + \frac{1}{\beta^2} \nabla'_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \nabla g(R)] dS'. \quad (2.7b)$$

Сменом израза (2.2) и (2.7a) у гранични услов (2.1) добија се интегрална једначина електричног поља (EFIE)

$$Z L(\mathbf{J}_s)_{\tan} = (\mathbf{E}_{\text{inc}})_{\tan}. \quad (2.8)$$

Интегрална једначина електричног поља (2.8) се по правилу решава методом момената.

## 2.2. МЕТОД МОМЕНАТА (МОМ)

Интегрална једначина електричног поља представља посебан случај линеарне операторске једначине. У општем случају линеарна операторска једначина се може написати у облику

$$L\mathbf{f} = \mathbf{g}, \quad (2.9)$$

где је  $\mathbf{g}$  позната функција (побуда),  $\mathbf{f}$  је непозната функција (одзив), коју желимо да одредимо, а  $L$  је линеарни оператор који делује на функцију  $\mathbf{f}$ . (Посебно, у

случају интегралне једначине електричног поља, (2.8), позната функција  $\mathbf{g}$  је дата тангенцијалном компонентом инцидентног електричног поља,  $\mathbf{g} = (\mathbf{E}_{\text{inc}})_{\text{tan}}$ , непозната функција представља густину површинске струје индуковане по површи проводника,  $\mathbf{f} = \mathbf{J}_s$ , а линеарни оператор је облика  $ZL$ , где је  $L$  дато изразом (2.76.)

Метода момената је општа нумеричка метода за решавање линеарних операторских једначина, и може се применити и у случају интегралних и диференцијалних једначина поља. Међутим, по правилу се под методом момената подразумева метода за решавање интегралних једначина.

Нумеричко решење линеарне операторске једначине се базира на апроксимацији непознате функције  $\mathbf{f}$  у облику

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}_a = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{f}_i, \quad (2.10)$$

где су  $\mathbf{f}_i$  познате међусобно независне функције, које се називају функцијама базиса,  $x_i$  су непознати скаларни коефицијенти који треба да се одреде, а  $N$  је ред апроксимације (ред развоја). Тиме је одређивање бесконачног броја непознатих вредности оригиналне функције  $\mathbf{f}$  смањен на коначан број непознатих коефицијената  $N$ .

Тачност и ефикасност анализе зависе од броја функција базиса и од избора њиховог типа. Избор функције базиса  $\mathbf{f}_i$  подразумева два корака. Прво, посматрана структура се представи као комбинација једноставних типских геометријских елемената (градивних елемената). У другом кораку се дефинишу аналитички изрази функција базиса за сваки од градивних елемената структуре. Први корак се назива геометријско моделовање, а други апроксимација непознате функције у ужем смислу.

Функције базиса  $\mathbf{f}_i$  могу да припадају једном или више елемената. Једна или више функција базиса могу бити дефинисане на истом градивном елементу. Непозната функција је апроксимирана функцијама базиса нижег реда уколико на сваком елементу постоји мали број функција базиса (једна или две). Уколико је више функција базиса дефинисано на сваком елементу, каже се да је непозната



функција апроксимирана функцијама базиса вишег реда. У односу на функције базиса нижег реда, функције базиса вишег реда су теже за имплементацију, али имају знатно већи потенцијал у погледу тачности анализе и брзине симулације.

С обзиром на то да је непозната функција  $\mathbf{f}$  апроксимирана функцијом  $\mathbf{f}_a$ , дејство линеарног оператора је апроксимирано са

$$L\mathbf{f} \approx L\mathbf{f}_a. \quad (2.11a)$$

Пошто је  $L$  оператор линеаран, важи да је

$$L\mathbf{f}_a = \sum_{i=1}^N x_i L\mathbf{f}_i. \quad (2.11b)$$

Имајући у виду (2.11), може се закључити да се апроксимацијом непознате функције  $\mathbf{f}$  линеарна операторска једначина (2.9) не може тачно задовољити у свим тачкама простора, тј. важи да је

$$\sum_{i=1}^N x_i L\mathbf{f}_i \approx \mathbf{g}. \quad (2.12)$$

Стога, постоји разлика између побуде  $\mathbf{g}$  и дејства линеарног оператора на апроксимативну функцију  $\mathbf{f}_a$ . Ова разлика се назива резидијум линеарне операторске једначине и дефинише се као

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N x_i L\mathbf{f}_i - \mathbf{g}. \quad (2.13)$$

Да би се из приближне линеарне операторске једначине (2.12) једнозначно одредило  $N$  непознатих коефицијената потребно је ову једначину трансформисати у систем од  $N$  независних линеарних једначина. Ова трансформација се обавља тако што се поставља услов да је унутрашњи производ резидијума (2.13) и сваке од  $N$  међусобно независних тежинских функција  $\mathbf{w}_j, j = 1, \dots, N$ , једнак нули, тј.

$$\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{R} \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Унутрашњи производ је симболички представљен угластим заградама  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , и у случају векторских комплексних функција дефинише се као

$$\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{R} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{R} d\Omega, \quad (2.15)$$

где \* означава коњуговано-комплексну вредност, а  $\Omega_j$  област дефинисаности тежинске функције  $\mathbf{w}_j$  (где је  $\mathbf{w}_j \neq 0$ ).

Уврштавањем (2.13) у (2.14) добија се систем једначина методе момената у облику

$$\sum_{i=1}^N x_i \langle \mathbf{w}_j, L\mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{g} \rangle, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

Овај начин трансформисања приближне линеарне операторске једначине у систем линеарних једначина се назива тестирање, а тежинске функције  $\mathbf{w}_j$  се још називају и тест функције.

Увођењем ознака

$$z_{ji} = \langle \mathbf{w}_j, L\mathbf{f}_i \rangle, \quad (2.17a)$$

$$g_j = \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{g} \rangle, \quad (2.17b)$$

систем (2.16) постаје

$$\sum_{i=1}^N x_i z_{ji} = g_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.17b)$$

Систем једначина методе момената се може скраћено написати у матричном облику

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} = \mathbf{G}, \quad \mathbf{Z} = [\langle \mathbf{w}_j, L\mathbf{f}_i \rangle]_{N \times N}, \quad (2.18a, b)$$

$$\mathbf{X} = [x_i]_{N \times 1}, \quad \mathbf{G} = [\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{g} \rangle]_{N \times 1}, \quad (2.18b, c)$$

где индекси  $j$  и  $i$ , респективно, означавају ред и колону.

Решавањем система једначина (2.17) тј. (2.18) одређују се вредности непознатих коефицијената  $x_i$ , а тиме и апроксимативно решење  $\mathbf{f}_a$  непознате функције  $\mathbf{f}$ . Након одређивања апроксимативног решења непознате функције, све друге величине од интереса, као што су далеко и блиско електромагнетско поље, улазна импеданса или  $s$ -параметри, могу се једноставно одредити.

Галеркинова тест процедура је једна од тест процедура методе момената чије су тест функције  $\mathbf{w}_j$  једнаке функцијама базиса,  $\mathbf{w}_j = \mathbf{f}_j$ . Галеркинова тест процедура је у великој мери коришћена у случају примене површинских интегралних једначина за решавање ЕМ проблема у фреквенцијском домену јер, у поређењу са осталим тест процедурама, по правилу захтева најмањи број непознатих за исту тачност и веома је робусна [32], [49], [112], [113]. Додатно, као што је поменуто у претходном поглављу, показано је да Галеркинова метода у комбинацији са EFIE код нумеричког решења аутоматски обезбеђује биланс снага (тј. снага коју израче структуре једнака је снази генератора) [105]. Стога је Галеркинова тест процедура коришћена и у овом раду.

### 2.3. ГЕОМЕТРИЈСКО МОДЕЛОВАЊЕ

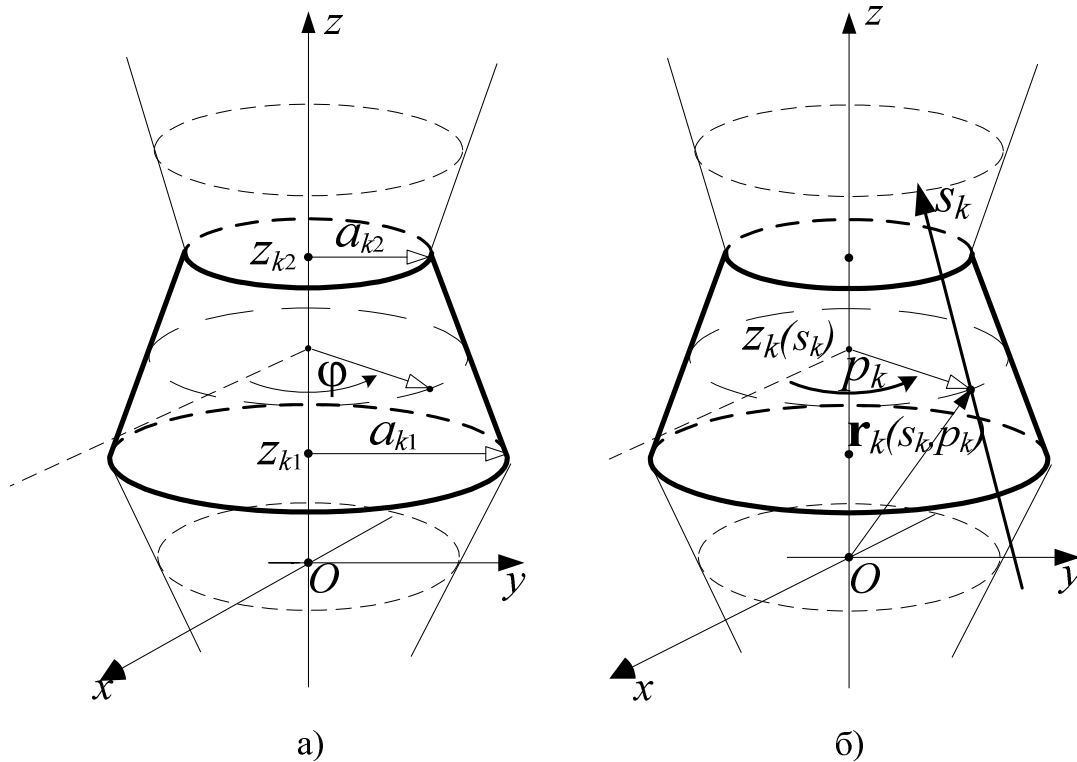
Као што је у претходној глави назначено, у оквиру методе момената први корак при избору функција базиса је геометријско моделовање структуре тј. апроксимација геометрије структуре коришћењем једноставних типских градивних елемената.

Структуре, које су предмет анализе у овом раду, су савршено проводне, аксијално симетричне у односу на  $z$ -осу и налазе се у вакууму. На слици 2.4 дат је пример такве структуре. Структура је моделована помоћу  $n_e$  градивних елемената у облику савршено проводних зарубљених коничних површина, чије се осе симетрије поклапају са  $z$ -осом.  $k$ -ти елемент је дефинисан помоћу почетне и крајње  $z$ -координате  $z_{k1}$  и  $z_{k2}$ , и помоћу почетног и крајњег полупречника  $a_{k1}$  и  $a_{k2}$ .

$z$ -координате почетка и краја могу да се поклопе при чему зарубљени конус дегенерише у прстен, а уколико је још и један од полупречника  $a_{k1}$  или  $a_{k2}$  једнак нули прстен дегенерише у диск. Уколико се  $z$ -координате почетка и краја не поклапају, а један од почетног или крајњег полупречника је нула, зарубљени конус дегенерише у конус.

Два елемента, чије се  $z$ -координате крајева поклапају и чији су одговарајући полупречници једнаки, су електрички повезани. Низ електрички повезаних елемената чини једно тело. Тело је затворено уколико су оба полупречника на његовим крајевима нула, а у супротном је отворено. Систем може да се састоји од

једног или више отворених или затворених тела. Систем је побуђен коришћењем једног или више тачкастих напонских генератора кружне учестаности  $\omega$ , који су постављени између два повезана градивна елемента.



Слика 2.4. Аксијално симетрична метална структура а) у глобалном координатном систему и б) локалном  $ps$ -координатном систему.

Сваки елемент се може, на јединствен начин, описати помоћу  $z$ -координате центра зарубљеног конуса  $z_c$  и његовог полупречника  $a_c$ , и помоћу половине прираштаја дуж  $z$ -осе  $\Delta z_c$ , и половине прираштаја полупречника  $\Delta a_c$

$$z_c = (z_1 + z_2)/2, \quad a_c = (a_1 + a_2)/2, \quad (2.19a, б)$$

$$\Delta z = (z_2 - z_1)/2, \quad \Delta a = (a_2 - a_1)/2. \quad (2.19в, г)$$

Уведимо локалну  $s$ -координату која се простире дуж генератрисе посматраног зарубљеног конуса и која на почетку и крају елемента има, редом, вредности  $s = -1$  и  $s = 1$ . Такође, уведимо и локалну  $p$ -координату по обиму елемента, тако да на почетку и крају обима има вредности  $p = -1$  на  $p = 1$ .  $p$ -координата је сразмерна углу  $\phi$  цилиндричног координатног система,  $p = \phi/\pi$ .

Помоћу локалног  $ps$ -координатног система произвољна тачка на површи  $k$ -тог зарубљеног конуса се може једнозначно одредити са

$$\mathbf{r}_k(p_k, s_k) = z_k(s_k)\mathbf{i}_z + a_k(s_k)\mathbf{i}_\rho(p_k), \quad (2.20a)$$

$$a_k(s_k) = a_{ck} + \Delta a_k s_k, \quad z_k(s_k) = z_{ck} + \Delta z_k s_k, \quad (2.20б,в)$$

где је  $\mathbf{i}_\rho = \cos(\pi p_k)\mathbf{i}_x + \sin(\pi p_k)\mathbf{i}_y$  радијални вектор цилиндричног координатног система. Корисно је дефинисати унитарне векторе  $\mathbf{a}_p$  и  $\mathbf{a}_s$  и одговарајуће јединичне векторе  $\mathbf{i}_p$  и  $\mathbf{i}_s$ , као

$$\mathbf{a}_{pk} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial p_k} = a_k(s_k)\pi \mathbf{i}_\varphi(p_k) = \frac{O(s_k)}{2} \mathbf{i}_\varphi, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{a}_{sk} = \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial s_k} = \Delta z_k \mathbf{i}_z + \Delta a_k \mathbf{i}_\rho(p_k), \quad (2.21б)$$

$$\mathbf{i}_{pk} = \frac{\mathbf{a}_{pk}}{|\mathbf{a}_{pk}|}, \quad \mathbf{i}_{sk} = \frac{\mathbf{a}_{sk}}{|\mathbf{a}_{sk}|}, \quad (2.21в,г)$$

где је  $\mathbf{i}_\varphi = \cos(\pi p_k)\mathbf{i}_x + \sin(\pi p_k)\mathbf{i}_y$  јединични вектор угла  $\varphi$  у цилиндричном координатном систему, а  $O(s_k)$  је обим пресека који одговара локалној  $s_k$  координати.

## 2.4. ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА

Након што је извршено геометријско моделовање структуре, наредни корак у методи момената при избору типа функција базиса је дефинисање њиховог аналитичког израза.

Непозната функција  $\mathbf{f}$  из (2.9) коју треба апроксимирати је вектор густине површинске струје  $\mathbf{J}_s$ . На основу (2.10) непознату површинску струју представљамо у виду суме познатих функција базиса  $\mathbf{F}_m$  помножених непознатим коефицијентима  $x_m$

$$\mathbf{J}_s \approx \sum_{m=1}^N x_m \mathbf{F}_m, \quad (2.22a)$$

где је  $N$  укупан број непознатих. При томе се непозната површинска струја на сваком од  $n_e$  елемента апроксимира помоћу  $n_k$  функција базиса ( $n_k$  се у општем случају разликује од елемента до елемента).

Уколико  $i$ -ту функцију базиса на  $k$ -том елементу означимо локалном ознаком,  $\mathbf{F}_{ki}$ , (уместо глобалном ознаком  $\mathbf{F}_m$ ) и одговарајући непознати коефицијент означимо са  $x_{ki}$  (уместо глобалном ознаком  $x_m$ ) тада површинску струју на  $k$ -том елементу можемо представити као

$$\mathbf{J}_s|_k \approx \sum_{i=0}^{n_k} x_{ki} \mathbf{F}_{ki}, \quad (2.22б)$$

па укупну струју (2.22а) можемо алтернативно представити коришћењем локалних ознака као

$$\mathbf{J}_s \approx \sum_{k=1}^{n_e} \sum_{i=0}^{n_k} x_{ki} \mathbf{F}_{ki}. \quad (2.22в)$$

Услед аксијалне симетрије проблема површинска струја нема  $\phi$ -компоненту (има само аксијалну), а укупна струја  $I$  на месту локалне координате  $s_k$  је са површинском струјом повезана релацијом

$$I(s_k) = J_s(s_k) O(s_k), \quad (2.23)$$

где је  $O(s_k)$  обим  $k$ -тог елемента на месту локалне координате  $s_k$ . Из тог разлога је погодно изабрати функције базиса у облику

$$\mathbf{F}_{ki}(s_k, p_k) = \frac{f_i(s_k)}{O(s_k)} \mathbf{i}_{sk}(p_k), \quad (2.24а)$$

где је  $f_i$  скаларна функција базиса која зависи само од  $s_k$ -координате и представља еквивалентну линијску струју дуж елемента посматране функцији базиса  $\mathbf{F}_{ki}$ , а  $\mathbf{i}_{sk}$  је јединични орт у аксијалном смеру (2.21г). Ако се обим  $O(s_k)$  представи коришћењем унитарног вектора  $\mathbf{a}_{pk}$  као у изразу (2.21а), а јединични орт  $\mathbf{i}_{sk}$  преко израза (2.21г), израз за функције базиса се може написати као

$$\mathbf{F}_{ki} = \frac{f_i \mathbf{a}_{sk}}{2|\mathbf{a}_{pk}||\mathbf{a}_{sk}|} = \frac{f_i \mathbf{a}_{sk}}{2|\mathbf{a}_{pk} \times \mathbf{a}_{sk}|}. \quad (2.24б)$$

При томе се користи једнакост  $|\mathbf{a}_{pk} \times \mathbf{a}_{sk}| = |\mathbf{a}_{pk}| |\mathbf{a}_{sk}|$ , која важи због ортогоналности унитарних вектора  $\mathbf{a}_{sk}$  и  $\mathbf{a}_{pk}$ . Изрази (2.24) се алтернативно могу добити и на основу теорије функција базиса дефинисаних на закривљеним четвороугловима [32].

С обзиром на то да елементи системске матрице у себи садрже и изразе за дивергенцију вектора густине површинске струје, од интереса је и израз за дивергенцију функција базиса [28]

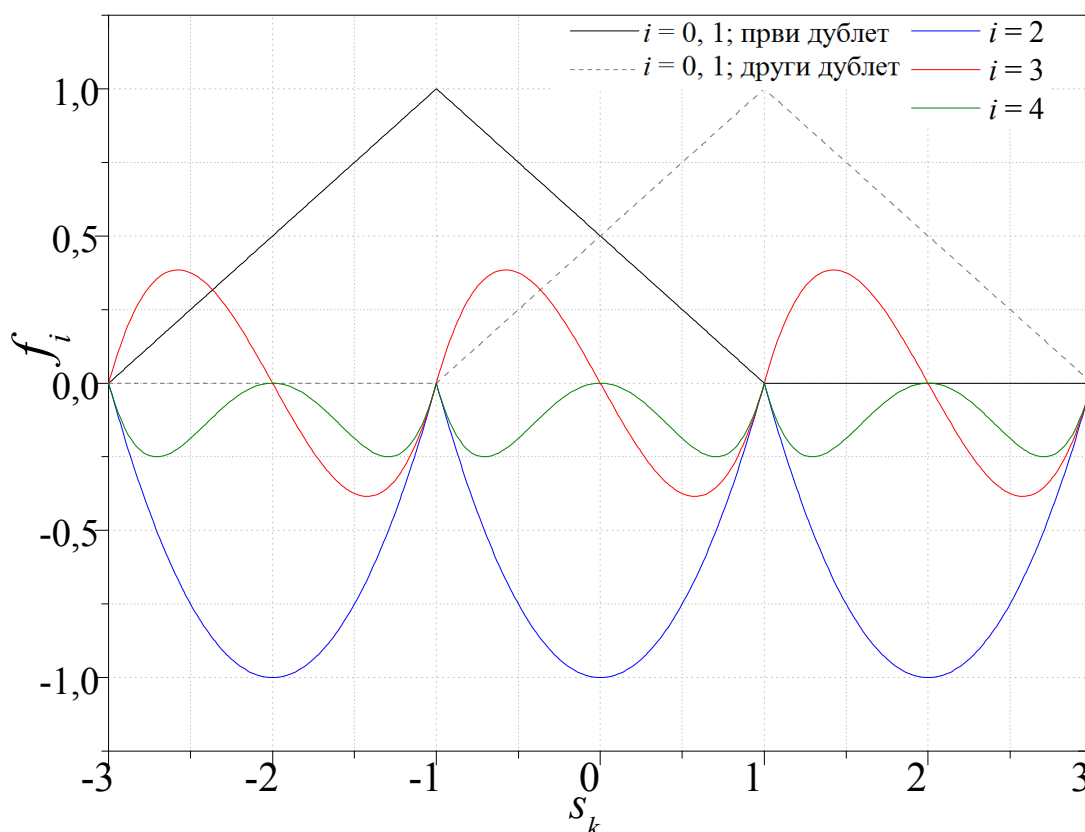
$$\nabla \mathbf{F}_{ki} = \frac{1}{|\mathbf{a}_{pk} \times \mathbf{a}_{sk}|} \frac{\partial}{\partial s_k} \left( \mathbf{F}_{ki} \frac{|\mathbf{a}_{pk} \times \mathbf{a}_{sk}|}{|\mathbf{a}_{sk}|} \right) = \frac{\partial f_i / \partial s_k}{2|\mathbf{a}_{pk} \times \mathbf{a}_{sk}|}. \quad (2.25)$$

Постоје разни облици скаларних функција базиса  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , који се користе за апроксимацију површинске струје [2], [32]. У овом раду, за почетни облик функција базиса  $f_i$  бирају се тзв. модификоване функције базиса [56], [92], које представљају полиномске функције облика

$$f_i(s) = \begin{cases} \frac{1 \mp s}{2}, & i = 0, 1 \\ s^i - s^{i-2}, & i \geq 2 \end{cases}. \quad (2.26)$$

Модификоване функције базиса (2.26) су хијерархијске функције, јер са повећањем реда апроксимације изрази за претходне (ниже) редове остају непромењени. У изразу (2.26) функције базиса за  $i \geq 2$  имају вредност 0 на оба краја елемента и називају се синглетима. Функције базиса  $f_{0,1}$  имају вредност 1 на једном од крајева и заједно са одговарајућом функцијом базиса на суседном елементу формирају нову функцију базиса која се назива дублет (roof-top функције базиса). Овакав сет функција базиса аутоматски задовољава једначину континуитета, а модификоване функције базиса су најједноставније функције вишег реда које то омогућавају. Уколико је аксијална дужина елемента мала (у односу на таласну дужину) довољно је користити ниже редове апроксимације. У том случају могу се изоставити све функције базиса које одговарају синглетима. Са повећањем аксијалне дужине елемента потребно је користити функције базиса вишег реда ( $i \geq 2$ ).

На слици 2.5 приказане су модификоване функције базиса до реда  $i=4$  дуж три повезана елемента. Као што се може видети са слике, нулти и први ред функција базиса ( $i=0, 1$ ) са суседних елемената формирају дублете и они једини могу да моделују струју на споју два елемента. Функције базиса вишег реда ( $i \geq 2$ ) падају на вредност нула на крајевима елемента. Повећањем њиховог степена апроксимације може се само повећати тачност апроксимације у оквиру самог елемента.



Слика 2.5. Модификоване функције базиса до реда  $i=4$  дуж три повезана елемента у локалном  $s_k$ -координатном систему који одговара средишњем елементу.

## 2.5. СИСТЕМ ЈЕДНАЧИНА КОЈИ СЕ ДОБИЈА ГАЛЕРКИНОВОМ МЕТОДОМ

Имајући у виду да су у случају Галеркинове методе тест функције једнаке функцијама базиса,  $\mathbf{w}_m = \mathbf{F}_{lj}$  ( $m$  је редни број тест функције глобално,  $l$  је редни број посматраног елемента, а  $j$  је редни број функције базиса на том елементу), и да интегрална једначина електричног поља представља линеарну операторску једначину (2.9), систем једначина методе момената (2.17) добија облик



$$\sum_{k,i} x_{ki} Z_{ljk_i} = G_{lj}, \quad j = 0, \dots, n_l, \quad l = 0, \dots, n_e, \quad (2.27a)$$

$$Z_{ljk_i} = \int_{S_l} \mathbf{F}_{lj} \cdot L \mathbf{F}_{ki} dS_l, \quad (2.27b)$$

$$G_{lj} = \int_{S_l} \mathbf{F}_{lj} \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}} dS_l, \quad (2.27b)$$

где су  $Z_{ljk_i}$  елементи системске матрице који се називају и импедансним интегралима,  $G_{lj}$  су елементи вектора слободних чланова,  $x_{ki}$  су непознати коефицијенти који треба да се одреде,  $\mathbf{F}_{lj}$  је  $j$ -та функција базиса на  $l$ -том елементу којом тестирамо интегралну једначину, а  $S_l$  је област дефинисаности посматране функције тј. површ одговарајућег ( $l$ -тог) елемента. Из система једначина (2.27) могу се једнозначно одредити непознати коефицијенти струје  $x_{ki}$ .

Генерално, у раду је побуда моделована у виду делта напонских генератора, који се налазе на почетку појединих елемената. За генератор који се налази на почетку  $l$ -тог елемента, инцидентно поље дуж генератрисе тог елемента може се изразити у облику

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = U_l \delta(e_{sl}(s_l + 1)) \mathbf{i}_{sl}, \quad (2.28)$$

где је  $U_l$  напон генератора,  $\delta$  је диракова делта функција, а  $e_{sl}$  је Ламеов коефицијент који одговара  $s$ -параметарској координати  $l$ -тог елемента. Дуж других елемената, инцидентно поље овог генератора једнако је нули. Након уврштавања израза за функције базиса (2.24) и (2.26), и израза за инцидентно поље (2.28) у (2.27b) добија се

$$G_{lj} = \int_{S_l} \frac{f_j(s_l)}{O(s_l)} \mathbf{i}_{sl} \cdot U \delta(e_{sl}(s_l + 1)) \mathbf{i}_{sl} dS_l. \quad (2.29)$$

С обзиром на то да интегранд у (2.29) (након рачунања скаларног производа) зависи само од  $s_l$ -координате,  $dS_l$  се може изразити у облику  $dS_l = O(s_l) e_{sl} ds_l$ . Уврштавањем овог израза за  $dS_l$  у (2.29) добија се да елементи  $G_{lj}$  имају вредност  $G_{lj} = U_l$  уколико се генератор налази на споју два елемента где је  $\mathbf{F}_{lj}$  дублет, а у супротном имају вредност нула,  $G_{lj} = 0$ .

Након уврштавања израза за линеарни оператор  $L$  (2.76) елементи системске матрице  $Z_{ljki}$  из (2.276) постају

$$Z_{ljki} = j\beta Z \int_{S_l} \int_{S_k} [\mathbf{F}_{lj}(s_l) \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k) g(R) + \frac{1}{\beta^2} \nabla_k \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k) \nabla_l g(R) \cdot \mathbf{F}_{lj}(s_l)] dS_k dS_l, \quad (2.30a)$$

где локална координата  $s_k$  одговара тачки на површи  $k$ -тог елемента као извора поља, а  $s_l$  одговара тачки на површи  $l$ -тог елемента у којој се рачуна поље. Применом идентитета  $\mathbf{A} \cdot \nabla b = \nabla \cdot (\mathbf{A}b) - b \nabla \cdot \mathbf{A}$  на производ  $\mathbf{F}_{lj} \cdot \nabla_l g(R)$ , израз (2.30a) се трансформише у

$$Z_{ljki} = j\beta Z \int_{S_l} \int_{S_k} [\mathbf{F}_{lj}(s_l) \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k) - \frac{1}{\beta^2} \nabla_l \cdot \mathbf{F}_{lj}(s_l) \nabla_k \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k)] g(R) dS_k dS_l + \frac{jZ}{\beta} \int_{S_k} [\nabla_k \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k) \int_{S_l} \nabla_l \cdot (\mathbf{F}_{lj}(s_l) g(R))] dS_l dS_k, \quad (2.30b)$$

Коришћењем теореме дивергенције, интеграл по површини  $S_l$  у последњем члану у (2.30b) се може написати у облику

$$\int_{S_l} \nabla_l \cdot (\mathbf{F}_{lj}(s_l) g(R)) dS_l = \oint_{C_l} \mathbf{F}_{lj}(s_l) g(R) dl_l, \quad (2.30в)$$

где је  $C_l$  контура око површи  $S_l$ , која у случају зарубљених конуса представља унију две кружнице на почетку и крају посматраног елемента. Интеграл са десне стране (2.30в) је у случају синглета нула, јер такве функције базиса имају вредност нула на крајевима. Импедансни интеграл функција базиса које се упарују у дублете се сабирају, па се њихове вредности за (2.30в) крате. Стога се израз за импедансне интеграле може редуковати у облик

$$Z_{ljki} = j\beta Z \int_{S_l} \int_{S_k} [\mathbf{F}_{lj}(s_l) \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k) - \frac{1}{\beta^2} \nabla_l \cdot \mathbf{F}_{lj}(s_l) \nabla_k \cdot \mathbf{F}_{ki}(s_k)] g(R) dS_k dS_l. \quad (2.31)$$

На тај начин интеграл поља се своди на интеграл потенцијала, јер за разлику од (2.30a) у (2.31) није потребно диференцирати Гринову функцију. Након уврштавања (2.24) и (2.25) у (2.31), и након изражавања сваке од елементарних површина као  $dS = |\mathbf{a}_p \times \mathbf{a}_s| dp ds$ , за импедансни интеграл се добија израз

$$Z_{ljki} = \frac{j\beta Z}{4} \int_{p_l s_l} \int_{p_k s_k} \int [f_j(s_l) f_i(s_k) \mathbf{a}_{sl} \cdot \mathbf{a}_{sk} + \frac{1}{\beta^2} \frac{df_j(s_l)}{ds_l} \frac{df_i(s_k)}{ds_k}] g(R) ds_k dp_k ds_l dp_l \quad , \quad (2.32)$$

У (2.32) скаларни производ  $\mathbf{a}_{sl} \cdot \mathbf{a}_{sk}$  и растојање  $R$  се могу изразити у функцији локалних координата као

$$\mathbf{a}_{sl} \cdot \mathbf{a}_{sk} = \Delta z_k \Delta z_l + \Delta a_k \Delta a_l \cos(\pi p) \quad , \quad (2.33a)$$

$$R = \sqrt{[z_l(s_l) - z_k(s_k)]^2 + a_l^2(s_l) + a_k^2(s_k) - 2a_l(s_l) a_k(s_k) \cos(\pi p)} \quad . \quad (2.33b)$$

где је  $p = p_k - p_l$ ,  $a_l$  је полупречник  $l$ -тог елемента у тачки поља, а  $a_k$  је полупречник  $k$ -тог елемента у посматраној тачки извора поља. Коришћењем смене променљивих  $p_k = p + p_l$  израз (2.32) се трансформише у

$$Z_{ljki} = \frac{j\beta Z}{2} \int_{-1-1}^{-1+1} \int_{-1-p_l}^{1-p_l} \int_{-1}^1 \left\{ \Delta a_k \Delta a_l f_i(s_k) f_j(s_l) \cos(\pi p) + \Delta z_k \Delta z_l f_i(s_k) f_j(s_l) - \frac{1}{\beta^2} \frac{df_i(s_k)}{ds_k} \frac{df_j(s_l)}{ds_l} \right\} g(R) ds_k dp ds_l dp_l \quad . \quad (2.34)$$

С обзиром да је интегранд у (2.34) периодична функција  $p$ -координате са периодом 2, границе интеграције дуж  $p$ -координате,  $-1-p_l$  и  $1-p_l$ , се могу заменити са  $-1$  и  $1$ . Стога, интегранд у (2.34) више не зависи од променљиве  $p_l$ , па се израз за импедансне интеграле може редуковати у следећи облик

$$Z_{ljki} = \frac{j\beta Z}{2} \int_{-1-1}^1 \int_{-1-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \Delta a_k \Delta a_l f_i(s_k) f_j(s_l) \cos(\pi p) + \Delta z_k \Delta z_l f_i(s_k) f_j(s_l) - \frac{1}{\beta^2} \frac{df_i(s_k)}{ds_k} \frac{df_j(s_l)}{ds_l} \right\} g(R) ds_k dp ds_l \quad . \quad (2.35)$$

Финални облик системске матрице се добија када се импедансни интегрални (2.35) који одговарају функцијама базиса истог дублета саберу у један матрични елемент. Тиме се добија систем једначина са онолико мањим бројем непознатих колико има дублета.

### **3. НОВА МЕТОДА ЗА РАЧУНАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА ЗАСНОВАНА НА ТЕХНИЦИ ПОНИШТАВАЊА СИНГУЛАРИТЕТА**

Главни проблем при имплементацији предложене методе је ефикасно рачунање елемената системске матрице тј. импедансних интеграла (2.35), како у случају модификованих функција базиса (2.26), тако и у случају свих других функција базиса. Наиме, све три интеграције у (2.35) под одређеним условима показују сингуларно или квази-сингуларно понашање У случају прве интеграције интегранд је сингуларан ако је тачка поља на посматраној нити, на које је издељен елемент чије се поље рачуна у тој тачки, а квази-сингуларан ако је тачка поља близу посматране нити. У случају друге интеграције интегранд је квази-сингуларан ако је тачка поља близу или на елементу чије се поље рачуна у посматраној тачки. У случају треће интеграције интегранд је квази-сингуларан уколико је елемент где се врши тестирање исти као (изворни) елемент чије се поље тестира, или ако је близу тог елемента.

Нумеричко рачунање импедансних интеграла који су сингуларни или квази-сингуларни није ефикасно ако се директно примењују стандардне Гаус-Лежандрове квадратурне формуле. Из тог разлога неопходно је применити технике нумеричке интеграције које на неки начин елиминишу утицај сингуларитета. У великом броју радова сингуларитет је елиминисан из интегранда методом екстракције сингуларитета [46], [47], [59]-[69], а од релативно скоро се примењује метода поништавања сингуларитета [52], [53], [114]. У овом раду су све три интеграције импедансних интеграла, у случају сингуларног или квази-сингуларног понашања интегранда, рачунате методом поништавања сингуларитета.

У овој глави предложене су различите нове трансформације координата (тј. смене променљивих) за поништавање сингуларитета. Ове трансформације су детаљно испитане на примеру модификованих функција базиса. На основу оптималног избора типа и параметара трансформација формиран је алгоритам за процену минималног броја тачака интеграције потребног за остваривање жељене

тачности. Предности нове методе илустроване су на већем броју врло захтевних проблема.

### 3.1. ИМПЕДАНСНИ ИНТЕГРАЛИ У СЛУЧАЈУ МОДИФИКОВАНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

С обзиром на то да су модификоване функције базиса (2.26) полиноми онда су и њихови изводи полиноми, па се импедансни интеграл (2.35) могу представити у виду линеарне комбинације  $P$ -интеграла

$$P_{ljk} = \int_{-1}^1 s_l^j \left[ \int_{-1}^1 \cos^\alpha(\pi p) \left( \int_{-1}^1 s_k^i g(R) ds_k \right) dp \right] ds_l, \quad \alpha = 0,1. \quad (3.1)$$

Прва интеграција у (3.1) представља потенцијале услед нити на које је издељен  $k$ -ти зарубљени конус у тачки поља на  $l$ -том елементу. Друга интеграција представља укупан потенцијал који  $k$ -ти елемент прави у посматраној тачки, а који се добија као збир потенцијала услед свих нити  $k$ -тог елемента. То је интеграција по обиму  $k$ -тог елемента тј. дуж  $p$ -координате. Трећа интеграција је интеграција производа тест функције и потенцијала  $k$ -тог елемента као извора поља на  $l$ -том елементу.

#### 3.1.1. Прва интеграција

Прва интеграција у (3.1) је дуж  $s_k$ -координате за фиксиране вредности  $p$ - и  $s_l$ -координате. У том случају се растојање  $R$  између тачке извора и тачке поља, дато са (2.33б), може изразити као

$$R = e_{sk} R', \quad R' = \sqrt{(s_k - s_{k0})^2 + d^2}, \quad (3.2a, б)$$

$$s_{k0} = \frac{\Delta a_k [a_l(s_l) \cos(\pi p) - a_{ck}] + \Delta z_k [z_l(s_l) - z_{ck}]}{e_{sk}^2}, \quad (3.2в)$$

$$d^2 = \left( \frac{D}{e_{sk}} \right)^2 = \frac{(z_{ck} - z_l(s_l))^2 + a_l^2(s_l) + a_{ck}^2 - 2a_l(s_l)a_{ck} \cos(\pi p)}{e_{sk}^2} - s_{k0}^2, \quad (3.2г)$$

где је  $e_{sk} = |\mathbf{a}_{sk}| = \sqrt{\Delta z_k^2 + \Delta a_k^2}$  Ламеов коефицијент дуж  $s_k$ -координате,  $s_{k0}$  је  $s_k$ -координата пројекције тачке поља  $\mathbf{r}_l$  на генератрису дефинисану  $p$ -координатом, а

$D$  је растојање између тачке поља  $\mathbf{r}_l$  и њене пројекције  $s_{k0}$  (видети инсерт слике 3.1).

Коришћењем (3.2) прва интеграција из (3.1) се може написати као

$$I_1(s_l, p) = \frac{1}{4\pi e_{sk}} \int_{-1}^1 s_k^i \frac{e^{-j\beta' R'}}{R'} ds_k, \quad (3.3)$$

где је  $\beta' = \beta e_{sk}$ ,  $i=0,1,\dots,n_k$ , а  $n_k$  је ред апроксимације за струју дуж  $k$ -тог елемента.

За  $|s_{k0}| \gg 1$ , или  $d \gg 1$  интегранд у (3.3) је споро променљива функција  $s_k$ -координате. У том случају се коришћењем Гаус-Лежандрове интеграционе формуле (GL) може ефикасно постићи жељена тачност интеграла (3.3). У супротном интегранд испољава квази-сингуларно понашање због члана  $1/R'$  чија вредност нагло расте када нормализовано растојање  $d$  тежи 0 ( $d \rightarrow 0$ ) и када пројекција  $s_{k0}$  припада или се налази близу интервала  $(-1,1)$ .

Уколико је тачка поља директно на нити дуж које се врши интеграција, тј. важи да је  $d=0$  и  $|s_{k0}| \leq 1$ , тада је интегранд сингуларан у околини тачке  $s_{k0}$ . Овакав случај се, међутим, никад не дешава применом предложене методе. Наиме, положаји посматраних нити (на које се дели зарубљен конус) се одређују током друге интеграције на основу Гаус-Лежандрове формуле, при чему се тачка поља поставља на почетку интервала друге интеграције (који се поклапа са крајем интервала). С обзиром да тачке које се бирају применом Гаус-Лежандрове формуле никад нису на крају интервала, следи да ниједна нит неће бити директно на тачки поља. Стога се применом ове методе случај сингуларитета прве интеграције своди на случај квази-сингуларитета.

Да би се поништило квази-сингуларно понашање уводи се смена променљивих

$$dt = \frac{ds_k}{R'}. \quad (3.4a)$$

Након интеграције леве и десне стране у (3.4a), за променљиву  $t$  се добија израз

$$t = \ln\left(s_k - s_{k0} + \sqrt{(s_k - s_{k0})^2 + d^2}\right) + C, \quad (3.4b)$$

Ефикасност интеграције не зависи од избора константе  $C$ . Да би се добио компактан израз за  $I_1$ , за константу се бира  $C = -\ln d$ . Стога, финални израз за променљиву  $t$  дат је са

$$t = \ln \left( \frac{s_k - s_{k0} + \sqrt{(s_k - s_{k0})^2 + d^2}}{d} \right). \quad (3.4в)$$

На основу (3.2) и (3.4в) променљиве  $s_k$  и  $R'$  се могу изразити у функцији променљиве  $t$  као

$$s_k = d \sinh(t) + s_{k0}, \quad R' = d \cosh(t) \quad (3.4г,д)$$

па се за интеграл  $I_1$  добија израз

$$I_1(s_l, p) = \frac{1}{4\pi e_{sk}} \int_{t(s_k=-1)}^{t(s_k=1)} (d \sinh(t) + s_{k0})^i e^{-j\beta' d \cdot \cosh(t)} dt. \quad (3.5)$$

Пошто је смена променљивих (3.4) елиминисала квази-сингуларан члан  $1/R'$  из подинтегралне функције у  $I_1$ , интеграција (3.5) се може ефикасно извршити коришћењем Гаус-Лежандрових формула. Овакав метод који подразумева примену Гаус-Лежандрових формула на интеграл где је претходно извршена смена назива се метод поништавања сингуларитета.

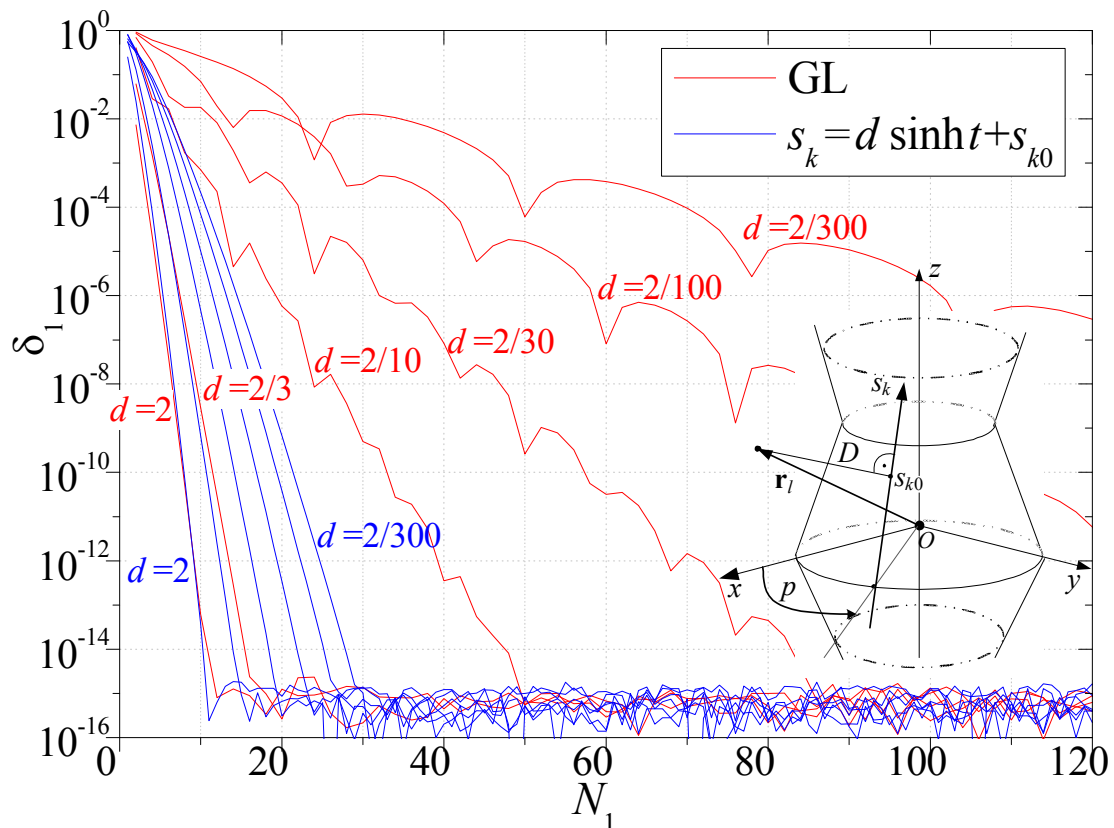
Смена (3.4) је предложена за прву интеграцију импеданских интеграла у [93], на начин као што је описано у овом одељку. Смена која је слична трансформацији (3.4) оригинално је предложена у [52], с тим што је редослед прве две интеграције обрнут. Такође, трансформација (3.4) је разматрана у [95] за рачунање интеграла потенцијала у случају линијске струје, а анализирана је и у [94] за прву интеграцију (од две) у оквиру редукованог језгра МоМ/EFIE методе за анализу цилиндричних жица.

Да бисмо илустровали предност примене методе поништавања сингуларитета у поређењу са директном методом (GL) посматрајмо тачност интеграције  $I_1$  за  $s_{k0} = 0$ ,  $i = 0$  и  $e_{sk} = 0,5\lambda$  (дужина интеграционе путање је  $1\lambda$ ), за неколико вредности нормализованог растојања  $d$ . У дисертацији се релативна грешка  $k$ -те интеграције  $I_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , рачуна као

$$\delta_k = \frac{|I_k - I_{k,\text{ref}}|}{|I_{k,\text{ref}}|}, \quad (3.6)$$

где је  $I_{k,\text{ref}}$  погодно одабрана референтна вредност за  $k$ -ту интеграцију. У случају прве интеграције вредност  $I_{1,\text{ref}}$  је добијена коришћењем GL формуле реда  $N=600$  примењене на (3.5). Слика 3.1 приказује релативну грешку нумеричке интеграције  $I_1$  у зависности од броја тачака интеграције,  $N_1$ . Посебно, ефикасност директне методе је поправљена дељењем интеграционе путање на два дела,  $(-1, s_{k0})$  и  $(s_{k0}, 1)$ , и применом независних GL интеграционих формула на оба дела.

Са слике 3.1 се види да је метод поништавања сингуларитета ефикаснији од директне методе за  $d < 2$ . Са смањивањем вредности  $d$  предност поништавања сингуларитета расте. На пример, у случају  $d=2/300$  релативна грешка од  $10^{-9}$  је постигнута већ са 20 интеграционих тачака у случају методе поништавања сингуларитета, док директна метода захтева око 150 тачака интеграције за исту тачност.



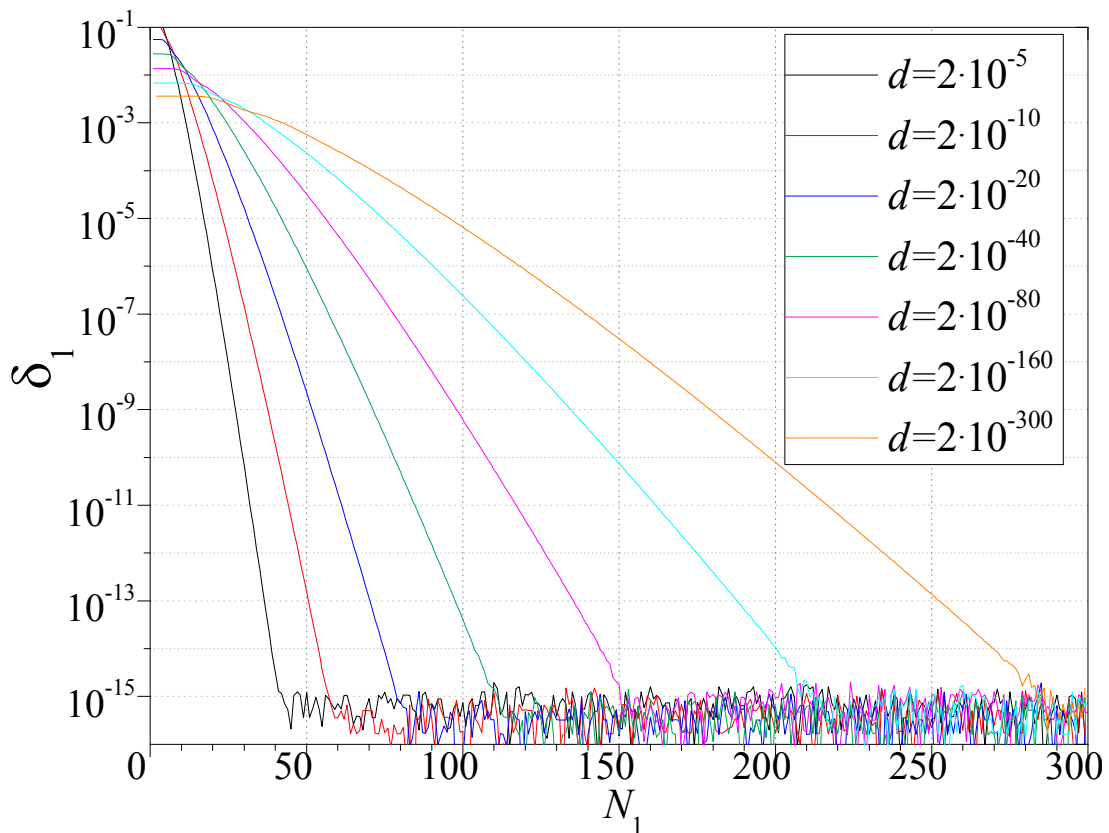
**Слика 3.1.** Релативна грешка  $\delta_1$  за прву интеграцију у случају директне методе (GL) и методе поништавања сингуларитета ( $s_k = d \sinh t + s_{k0}$ ) у зависности од броја тачака интеграције за неколико вредности нормализованог растојања  $d$ , и за  $s_{k0} = 0$ ,  $i = 0$  и за  $e_{sk} = 0,5\lambda$ .



На основу разних резултата за различите положаје тачке поља тако да јој пројекција пада изван посматране генератрисе (тј.  $|s_{k0}| > 1$ ), утврђено је да смена (3.4) даје боље резултате од директне методе (GL) уколико је растојање између тачке поља и ближег краја генератрисе,  $r_{\min}$ , мање од  $2e_{sk}$ , тј. ако важи  $r_{\min}/e_{sk} \leq 2$ . Стога, ако се уведе параметар  $d_0$  као

$$d_0 = \begin{cases} d, & |s_{k0}| \leq 1 \\ r_{\min}/e_{sk}, & |s_{k0}| > 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

може се закључити да се трансформација (3.4) примењује уколико важи  $d_0 \leq 2$ .



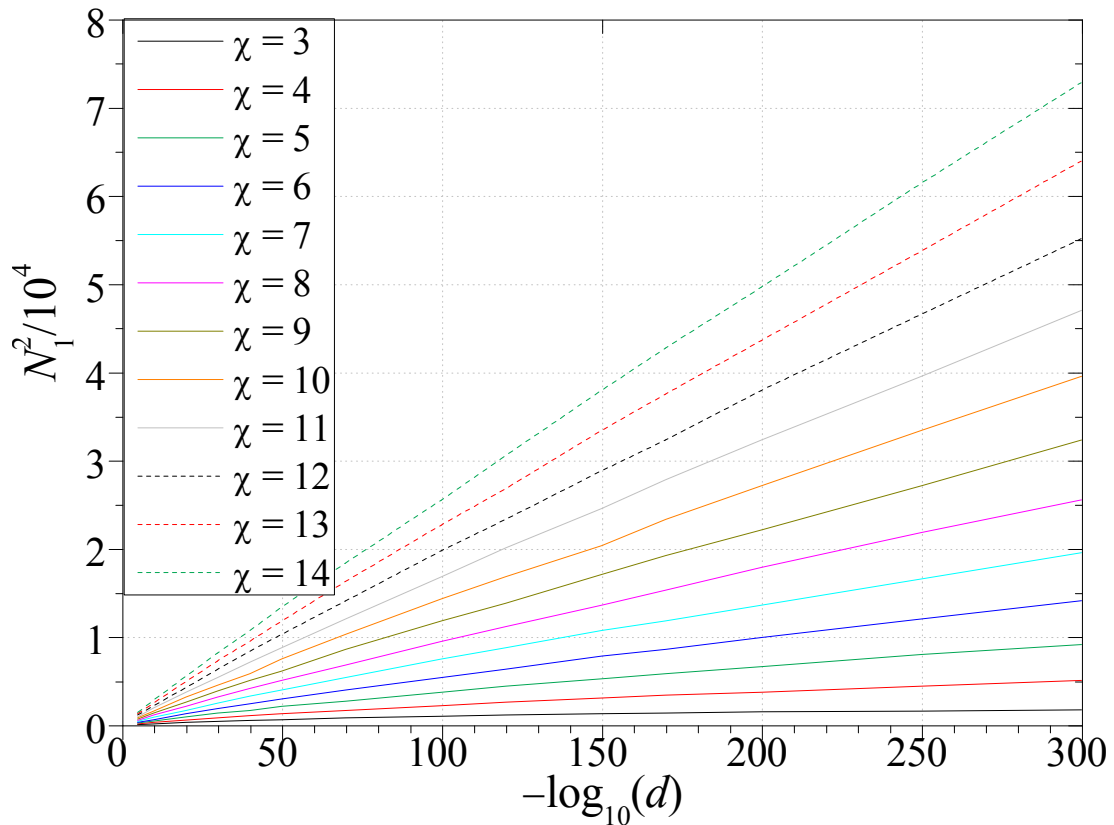
Слика 3.2. Релативна грешка  $\delta_1$  прве интеграције применом методе поништавања сингуларитета ( $s_k = d \sinh t + s_{k0}$ ) у зависности од броја тачака интеграције, за неколико вредности нормализованог растојања  $d$ , и за  $s_{k0} = 0$ ,  $i = 0$ , и за  $e_{sk} = 0,5\lambda$ .

Са слике 3.1 се такође види да чак и за методу поништавања сингуларитета број тачака интеграције потребан за жељену тачност расте са смањењем  $d$ . Слика 3.2 показује релативну грешку нумеричке интеграције  $I_1$  методом поништавања сингуларитета за разне вредности  $d$  идући од  $2 \cdot 10^{-5}$  до  $2 \cdot 10^{-300}$ .

Сви резултати у дисертацији, укључујући оне са слика 3.1 и 3.2, су добијени коришћењем дупле прецизности. Она омогућује представљање бројева са око 16 значајних цифара тачности. Тачност резултата се такође може приказати у зависности од броја цифара тачности  $\chi$  као

$$\chi = -\log_{10}(\delta_k). \quad (3.8)$$

где је  $\delta_k$ ,  $k=1,2,3$ , релативна грешка  $k$ -те интеграције (3.6). Са претходних слика се може видети да се са повећањем броја тачака интеграције  $N_1$ , тачност повећава до  $\chi=15$  значајних цифара тачности за произвољну вредност нормализованог растојања  $d$ . Међутим, за већину практичних примена потребна је много мања тачност. Стога, да би се постигла жељена тачност, од интереса је имати релативно једноставне формуле за процену потребног броја тачака интеграције у функцији жељеног броја цифара тачности  $\chi$ . Да би се омогућило извођење таквих формула, резултати са слике 3.2 су искоришћени за одређивање квадрата броја тачака интеграције у зависности од негативног логаритма нормализованог растојања  $d$  за неколико вредности  $\chi$ , као што је приказано на слици 3.3.



Слика 3.3. Квадрат броја тачака интеграције у зависности од негативног логаритма нормализованог растојања  $d$  за неколико вредности броја значајних цифара  $\chi$ .

Са слике 3.3 може се видети да квадрат броја тачака интеграције  $N_1$  линеарно зависи од негативног логаритма  $d$ , где нагиб  $k_1$  и константан члан  $q_1$  зависе од броја цифара тачности  $\chi$ . На основу тога формуле које предвиђају потребан број тачака интеграције за остваривање жељене тачности у овом случају (за  $i = 0$ ,  $s_{k0} = 0$  и  $e_{sk} = 0,5\lambda$ ) имају облик

$$N_1 = \sqrt{-\log(d) k_1(\chi) + q_1(\chi)}, \quad (3.9a)$$

$$k_1(\chi) = a_2\chi^2 + a_1\chi + a_0, \quad q_1(\chi) = b_1\chi + b_0, \quad (3.9б,в)$$

где су вредности константи  $a_2 = 0,93$ ,  $a_1 = 5,86$ ,  $a_0 = -21,43$ ,  $b_1 = 26,07$  и  $b_0 = 52,01$  одређене на основу слике 3.3.

На бројним примерима потврђено је да формула (3.9) добро предвиђа број тачака интеграције  $N_1$  за произвољно  $s_{k0}$  и произвољну нит краћу од  $\lambda$  (тј. за  $2e_{sk}/\lambda \leq 1$ ). Уколико се дужина нити повећа за  $\lambda$  на разним примерима је утврђено да број тачака интеграције треба повећати за 3. Додатно, ако се користи ред апроксимације  $i > 0$ , број тачака интеграције треба повећати за  $1,5i$ . Финална формула која процењује број тачака интеграције да би се постигла жељена тачност је

$$N_1 = \begin{cases} \sqrt{-\log(d) k_1(\chi) + q_1(\chi) + 6e_{sk} / \lambda + 1,5i} & d < 1 \\ \sqrt{q_1(\chi) + 6e_{sk} / \lambda + 1,5i} & d \geq 1 \end{cases}, \quad (3.10)$$

где су  $k_1(\chi)$  и  $q_1(\chi)$  дати са (3.9б,в).

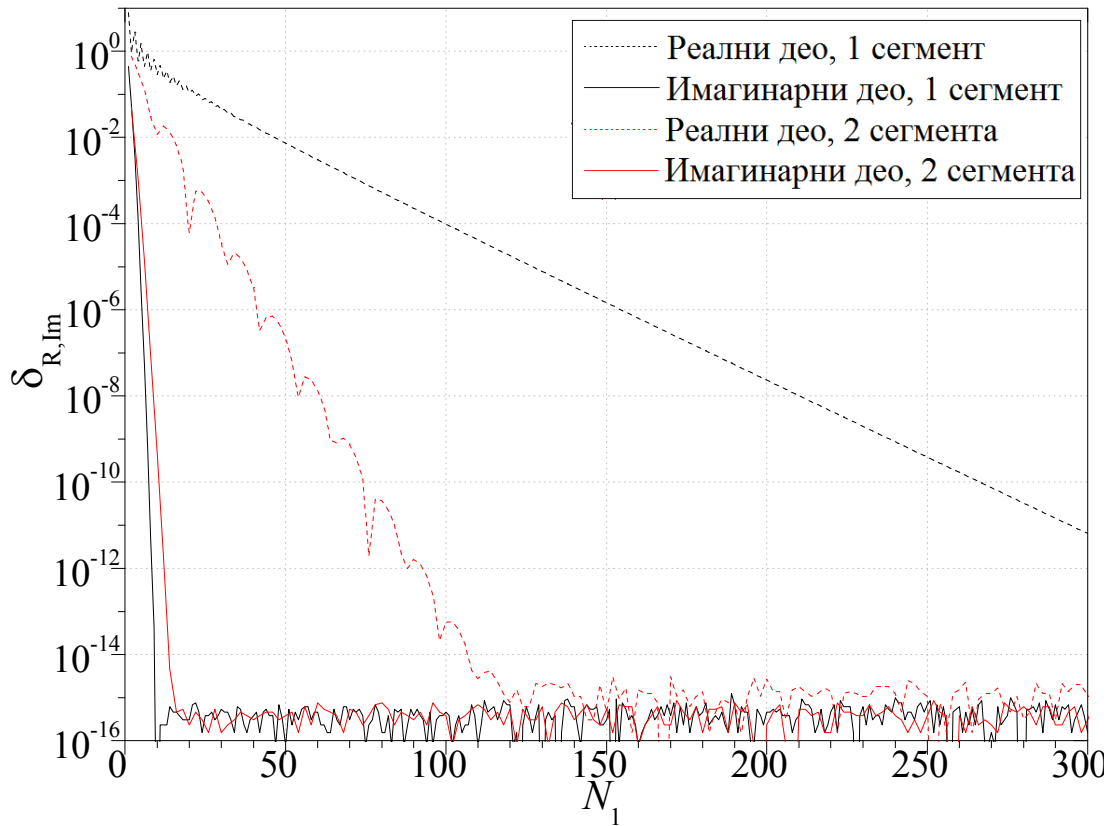
### 3.1.2. Поређење ефикасности прве интеграције у случају поништавања сингуларитета, екстракције сингуларитета и директне интеграције

Интегранд прве интеграције (3.3) за константан струјни члан (за  $i = 0$ ) се може раставити на реалан и имагинаран део као

$$\frac{e^{-j\beta'R'}}{R'} = \frac{\cos(\beta'R')}{R'} - j \frac{\sin(\beta'R')}{R'}. \quad (3.11)$$

Реални део садржи квази-сингуларитет за мале вредности параметра  $d$  из (3.2г), када се локална координата  $s_k$  приближава  $s_{k0}$  (тј. за  $s_k \rightarrow s_{k0}$ ). Са друге стране,

имагинарни део не садржи сингуларитет и представља релативно мирну функцију која се може апроксимирати полиномом ниског реда. Стога се имагинарни део ефикасно нумерички интегралом помоћу Гаус-Лежандрових квадратурних формула са 5–8 тачака интеграције у зависности од жељене тачности. Са друге стране, да би се постигла иста тачност за реални део члана (3.11), осим што је неопходно да се посматрана нит (генератриса) подели на два сегмента интеграције, по правилу је потребно и 10–20 пута више тачака интеграције него за имагинарни део. Овај ефекат је илустрован на наредна два примера.

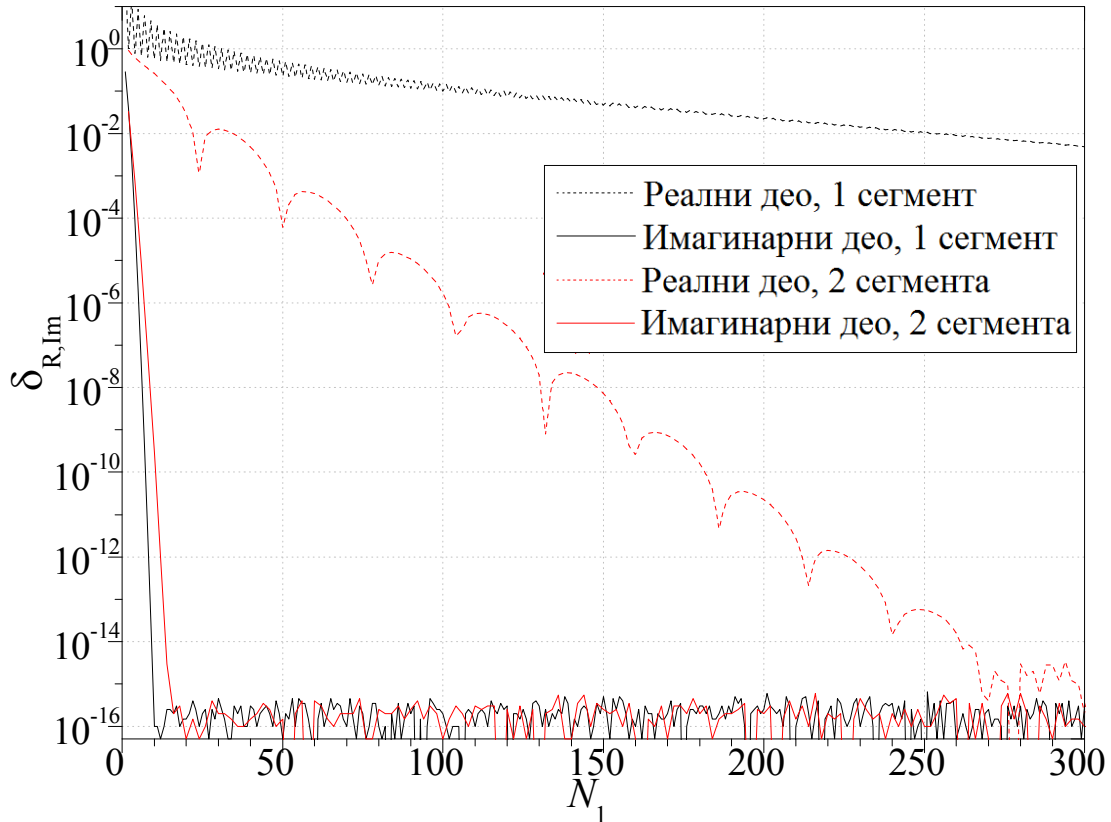


Слика 3.4. Поређење релативне грешке реалног и имагинарног дела прве интеграције када је путања интеграције јединствена и кад је подељена на два дела, за  $i=0$ ,  $s_{k0}=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$  и  $d=0,04$ .

На сликама 3.4 и 3.5 приказан је график релативне грешке интеграције реалног и имагинарног дела интеграла (3.3) у зависности од броја тачака интеграције у случају  $i=0$ ,  $s_{k0}=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$  (путања је дужине  $l=\lambda$ ), за вредности  $d=2/50$  и  $d=2/300$ . Релативне грешке реалног и имагинарног дела рачунате су као

$$\delta_R = \frac{\text{Real}(I_1 - I_{1,\text{ref}})}{|I_{1,\text{ref}}|}, \quad (3.12a)$$

$$\delta_{\text{Im}} = \frac{\text{Imag}(I_1 - I_{1,\text{ref}})}{|I_{1,\text{ref}}|}. \quad (3.126)$$



**Слика 3.5.** Поређење релативне грешке реалног и имагинарног дела интегранда прве интеграције када је путања интеграције јединствена и кад је подељена на два дела, за  $i=0$ ,  $s_{k0}=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$  и  $d=2/300$ .

Са слика 3.4 и 3.5 се види да се релативна грешка мања од  $10^{-6}$  код интеграције имагинарног дела постиже већ са 6 тачака. Може се такође приметити да она не зависи у великој мери од нормализованог растојања  $d$ , нити од тога да ли је путања интеграције подељена на два сегмента или је интеграција одрађена из једног дела. Насупрот томе, тачност интеграције реалног дела интеграла споро расте са порастом броја тачака интеграције. Она је знатно већа ако је путања интеграције подељена на два дела на месту пројекције тачке поља. Такође, може се приметити да брзина конвергенције у великој мери зависи од нормализованог растојања  $d$ . Тако се за  $d=0,04$  релативна грешка мања од  $10^{-6}$  постиже са око 150 тачака интеграције за јединствену путању интеграције, и са око 50 тачака интеграције за путању интеграције подељену на два дела. За  $d=2/300$  иста

тачност се постиже са око 150 тачака ако се путања интеграције не дели, односно са 300 тачака ако се путања интеграције дели.

Метод интеграције базиран на екстракцији сингуларитета се, као и метод поништавања сингуларитета, примењује да би се повећала ефикасност и тачност нумеричке интеграције посматраног интеграла са сингуларитетом или квази-сингуларитетом. Она подразумева да се из интегранда екстрахује сингуларитет или квази-сингуларитет и да се његов интеграл израчуна аналитички. Остатак интегранда је релативно мирна функција која се затим може ефикасно интегралити директном применом Гаус-Лежандрових интеграционих формула.

Сингуларитет се екстрахује тако што се сингуларна или квази-сингуларна функција развије у Тејлоров ред. За првих  $q$  чланова Тејлоровог реда интеграл се одреди аналитички, а остатак интеграла се рачуна нумерички.

У циљу екстракције сингуларитета посматрајмо прво развој функције  $\cos(\beta' R')$  у Тејлоров ред у околини сингуларитета  $s_k = s_{k0}$

$$\cos(\beta' R') = \cos(\beta' \sqrt{\Delta s^2 + d^2}) \approx A_0 + A_2 \Delta s^2 + A_4 \Delta s^4 + \sigma(\Delta s^5), \quad (3.13a)$$

$$A_0 = \cos(\beta' d), \quad A_2 = -\beta' \sin(\beta' d)/(2d), \quad (3.13б,в)$$

$$A_4 = -\beta'^2 \cos(\beta' d)/(8d^2) + \beta' \sin(\beta' d)/(8d^3), \quad (3.13г)$$

где је  $\Delta s = s_k - s_{k0}$ . У случају екстракције првог члана из интегранда у (3.3), за решење дела интеграла (3.3) који се рачуна аналитички добија се

$$I_{10} = \int_{-1}^1 \frac{A_0 ds_k}{R'} = A_0 \cdot \ln \left( \frac{\Delta s_2 + R'_2}{\Delta s_1 + R'_1} \right), \quad (3.14a)$$

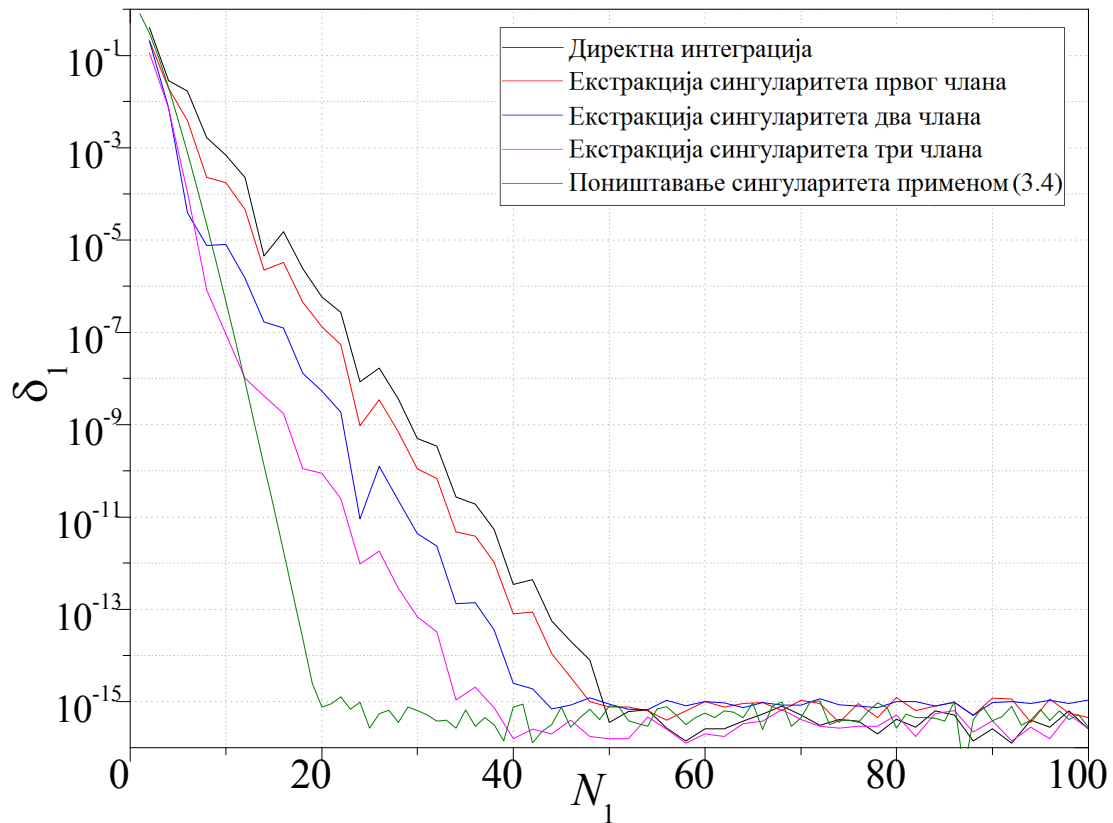
где је  $\Delta s_1 = -1 - s_{k0}$ ,  $\Delta s_2 = 1 - s_{k0}$ ,  $R'_1 = \sqrt{\Delta s_1^2 + d^2}$ , а  $R'_2 = \sqrt{\Delta s_2^2 + d^2}$ . У случају екстракције првог и другог члана, аналитички део решења интеграла је

$$I_{12} = I_{10} + \int_{-1}^1 \frac{A_2 \Delta s^2 ds}{R'} = I_{10} + A_2 \frac{\Delta s_2 R'_2 - \Delta s_1 R'_1}{2} + A_2 \frac{d^2}{2} \cdot \ln \left( \frac{\Delta s_2 + R'_2}{\Delta s_1 + R'_1} \right). \quad (3.14б)$$

У случају интеграције прва три члана развоја (3.13), за аналитички део решења интеграла се добија

$$I_{14} = I_{12} + \int_{-1}^1 \frac{A_4 \Delta s^4 ds}{R} = I_{12} + A_4 \left( \frac{\Delta s_2^3 R'_2 - \Delta s_1^3 R'_1}{4} \right) + A_4 \left( -\frac{3d^2}{8} [\Delta s_2 R'_2 - \Delta s_1 R'_1] + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{\Delta s_2 + R'_2}{\Delta s_1 + R'_1} \right) \right) \quad (3.14в)$$

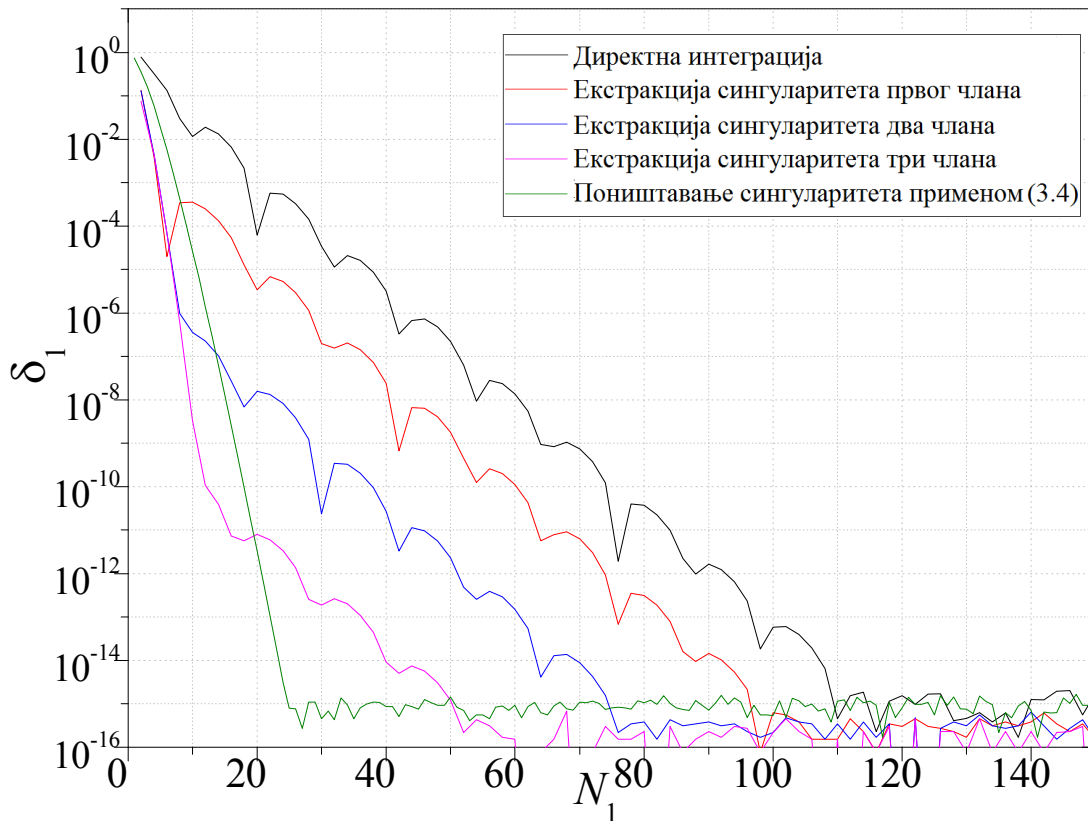
Интеграл остатка функције се у сва три случаја нумерички много ефикасније рачуна применом Гаус-Лежандрових формула него што је то био случај пре екстракције.



Слика 3.6. Релативна грешка прве интеграције  $\delta_1$  у зависности од броја тачака интеграције за директну интеграцију, методу екстракције сингуларитета и поништавања сингуларитета ( $dt = ds_k/R'$ ), за случај  $i=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$ ,  $s_{k0}=0$  и  $d=0,2$ .

На сликама 3.6–3.9 упоређени су резултати за релативну грешку прве интеграције  $I_1$  (3.3) у зависности од броја тачака интеграције за директну методу (GL), методу екстракције сингуларитета и методу поништавања сингуларитета

( $dt = ds_k/R$ ). Ефикасности ове три методе анализирани су за случај  $i=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$ ,  $s_{k0}=0$ , за четири вредности нормализованог растојања  $d=1/5, 2/50, 1/50, 2/300$ .

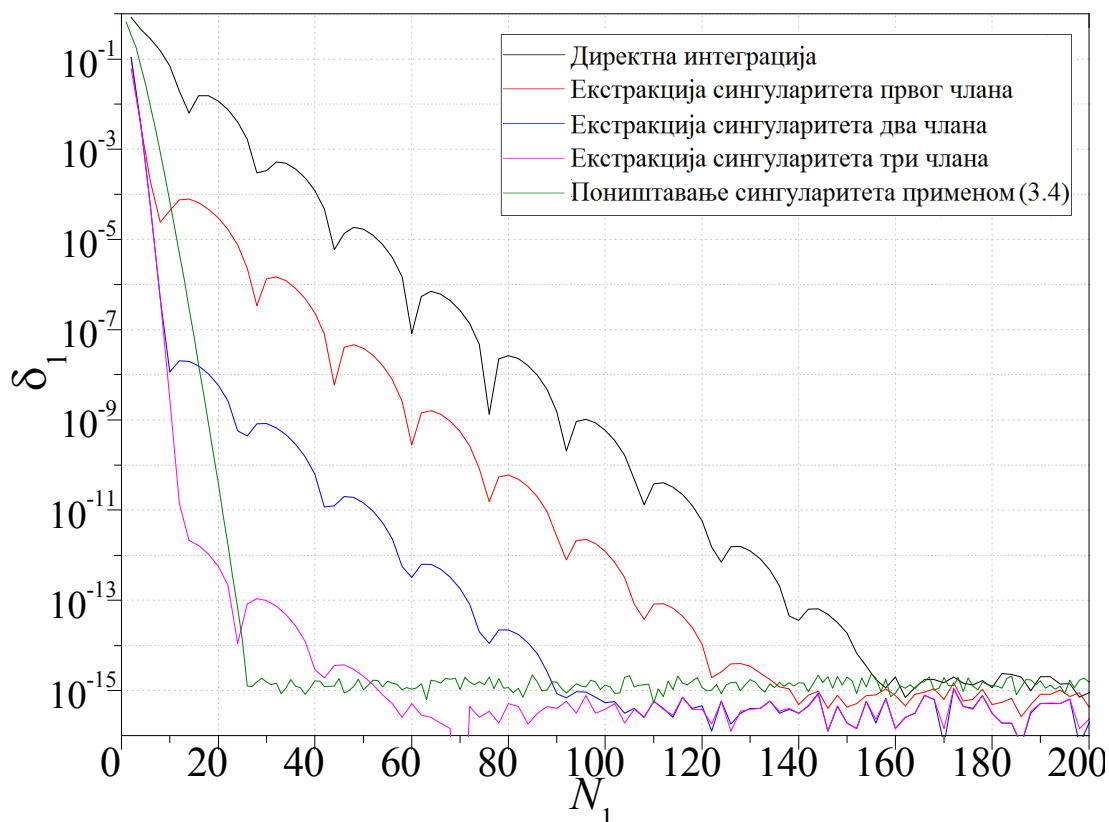


Слика 3.7. Релативна грешка прве интеграције  $\delta_1$  у зависности од броја тачака интеграције за директну интеграцију, методу екстракције сингуларитета и поништавања сингуларитета ( $dt = ds_k/R$ ), за случај  $i=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$ ,  $s_{k0}=0$  и  $d=0,04$ .

Са слика 3.6–3.9 се види да су методе екстракције сингуларитета и метода поништавања сингуларитета знатно ефикасније од директне интеграције. На пример, у случају нормализованог растојања  $d=2/300$  за релативну грешку од  $10^{-6}$  потребно је око 40 тачака интеграције за случај екстракције првог сингуларног члана, око 10 тачака интеграције за случај екстракције два и три сингуларна члана и око 15 тачака интеграције у случају примене методе поништавања сингуларитета. Насупрот томе, директној интеграцији је потребно око 100 тачака интеграције за остваривање исте тачности. Стога је за постизање исте тачности директној методи потребно 2–10 пута више тачака интеграције од случаја кад се користи техника поништавања сингуларитета или екстракције сингуларитета. Такође се може приметити да са смањењем нормализованог растојања  $d$  (за исту



дужину генератрисе елемента) релативна грешка за исти број тачака интеграције расте за све три методе интеграције.

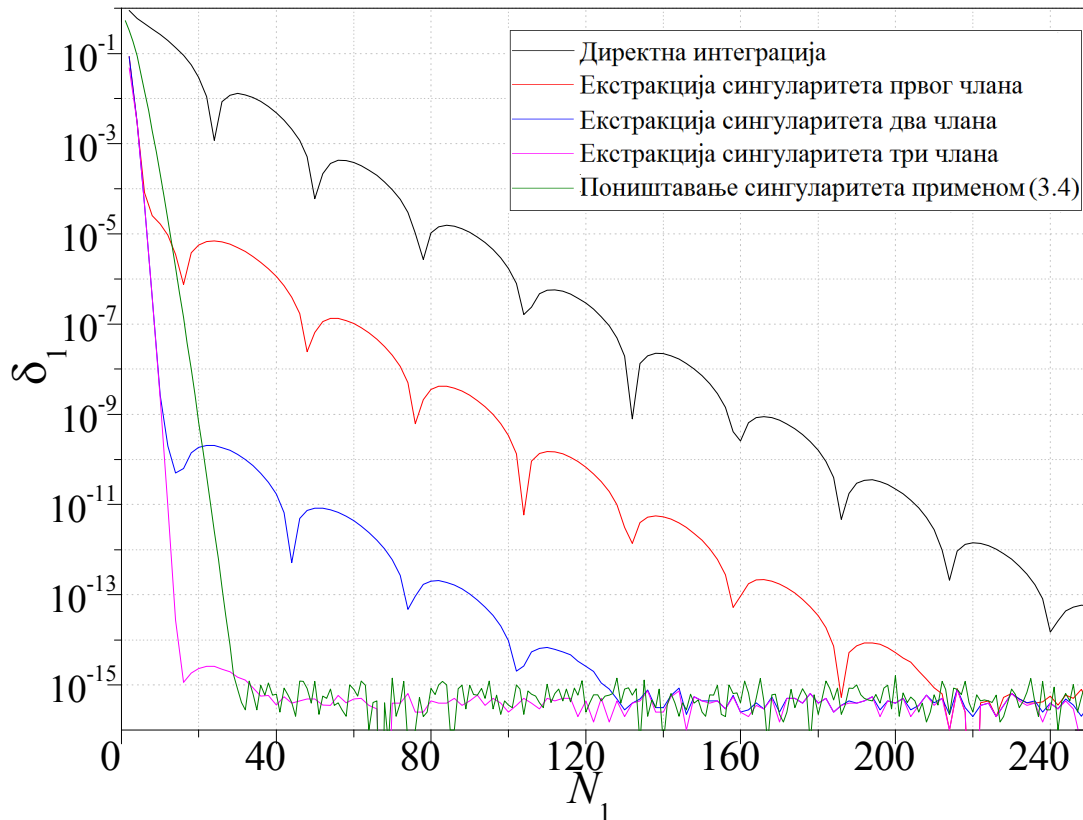


**Слика 3.8.** Релативна грешка прве интеграције  $\delta_1$  у зависности од броја тачака интеграције за директну интеграцију, методу екстракције сингуларитета и поништавања сингуларитета базирану на смени  $dt = ds_k/R'$ , за случај  $i=0$ ,  $e_{sk}=0,5\lambda$ ,  $s_{k0}=0$  и  $d=0,02$ .

Са слика 3.6–3.9 такође се може видети да је у случају методе екстракције сингуларитета релативна грешка  $\delta_1$  мања уколико је већи број екстрахованих чланова. Може се приметити да ову методу интеграције карактерише велика брзина конвергенције резултата са порастом броја тачака интеграције  $N_1$  до неке вредности, а да са даљим повећањем броја тачака  $N_1$  брзина конвергенције нагло пада и изједначава се са случајем примене директне методе (GL). Стрмина оба дела графика је иста без обзира на број екстрахованих чланова, само је тачка где долази до прелома различита и зависи од тог броја.

Једна од предности методе поништавања сингуларитета у поређењу са методом екстракције сингуларитета је та што није потребно делити путању интеграције на више сегмената при интеграцији. Она нуди универзалан приступ без обзира на различит облик функција базиса за апроксимацију струје, док је код методе

екстракције сингуларитета потребно изнова налазити аналитичке изразе за вредности интеграла екстрахованих чланова при свакој новој функцији базиса што веома компликује саму процедуру екстракције у случају коришћења функција базиса вишег реда или сингуларних (неполиномских) функција базиса.



Слика 3.9. Релативна грешка прве интеграције  $\delta_1$  у зависности од броја тачака интеграције за директну интеграцију, методу екстракције сингуларитета и поништавања сингуларитета базирану на смени  $dt = ds_k/R'$ , за случај  $i=0$ ,  $e_{sk} = 0,5\lambda$ ,  $s_{k0} = 0$  и  $d = 2/300$ .

### 3.1.3. Друга интеграција

Друга интеграција у (3.1) представља интеграцију дуж  $p$ -координате и може се изразити као

$$I_2(s_l) = \int_{-1}^1 I_1(s_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp \quad \alpha = 0,1, \quad (3.15)$$

где је  $I_1$  прва интеграција дата са (3.3) или (3.5). Због симетрије интегранда у односу на тачке  $p=0$  и  $p=1$ , вредност интеграла се неће променити ако се интеграција врши унутар интервала  $p \in (0,2)$ . Такође, вредност интеграла се може добити као дупла вредност интеграције извршене на интервалу  $p \in (0,1)$ .

Ако се тачка поља (која се налази на површи  $l$ -тог елемента) налази релативно далеко од изворних тачка које се налазе на површи  $k$ -тог елемента, директном интеграцијом (GL) се ефикасно може постићи жељена тачност. У наредном одељку биће показано да се коришћењем интеграционе формуле реда  $2n$  на пуном интервалу,  $p \in (-1,1)$  или  $p \in (0,2)$ , остварује већа тачност у поређењу са формулом реда  $n$  примењеном на пола интервала  $p \in (0,1)$ . У првом случају интегранд се рачуна само у првих  $n$  тачака које одговарају првој половини укупног интервала, док се вредности у другој половини интервала добијају коришћењем симетрије. Стога је нумеричка комплексност у оба случаја иста. У наставку је ова манипулација коришћена увек у случају директне интеграције  $I_2$ .

Ако се тачка поља на површи  $l$ -тог елемента налази близу  $k$ -тог елемента као извора поља, интегранд од  $I_2$  испољава квази-сингуларно понашање у околини  $p=0$ . Посматрајмо тачку извора која је најближа тачки поља. Ако је  $|s_{k0}(p=0)| \leq 1$ , где је  $s_{k0}$  дато са (3.2в), локалне координате посматране тачке извора су  $p=0$  и  $s_{k00}=s_{k0}(p=0)$ . Ако је  $s_{k0}(p=0) < -1$  или  $s_{k0}(p=0) > 1$ ,  $s_{k00}$  добија вредности  $-1$  или  $1$ , респективно. Посматрајмо кружницу која припада  $k$ -том елементу и која садржи најближу тачку поља  $s_{k00}$  (тј. која се добија варијацијом координате  $p$  од  $-1$  до  $1$  за фиксну вредност  $s_k$ -координате  $s_k=s_{k00}$ ). Растојање између тачке поља и произвољне тачке на посматраној кружници може се добити из (2.33б) као

$$R = \sqrt{\Delta z_{lk}^2 + \Delta a_{lk}^2 + 4a_l(s_l)a_k(s_{k00})\sin^2(\pi p/2)}, \quad (3.16)$$

где је  $\Delta z_{lk} = |z_l(s_l) - z_k(s_{k00})|$  и  $\Delta a_{lk} = |a_l(s_l) - a_k(s_{k00})|$ . Коришћењем апроксимације  $\sin x \approx x$  у околини  $x=0$ , растојање из (3.16) може се апроксимирати са

$$R = \pi \sqrt{a_l(s_l)a_k(s_{k00})} \sqrt{p^2 + a'^2}, \quad (3.17a)$$

$$a' = \sqrt{\frac{\Delta z_{lk}^2 + \Delta a_{lk}^2}{a_l(s_l)a_k(s_{k00})\pi^2}}. \quad (3.17б)$$

Показује се да је квази-сингуларно понашање интегранда у другој интеграцији облика  $1/R$ , где је  $R$  дато са (3.16). Овај тип сингуларног понашања може се, по аналогiji са првом интеграцијом, елиминисати коришћењем смене

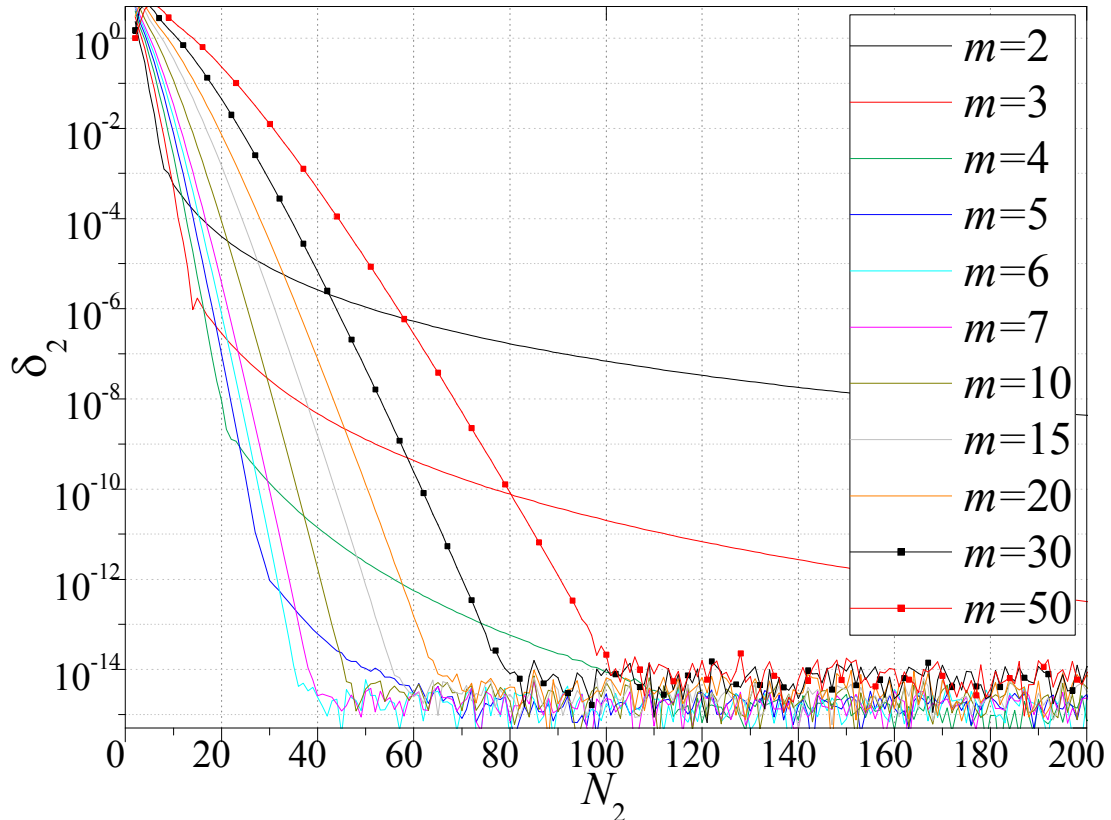
$dt = dp / \sqrt{p^2 + a'^2}$ . Међутим, ова смена се не може применити уколико је тачка поља лоцирана на површи  $k$ -тог елемента, јер у том случају је  $a' = 0$ . Да би се омогућило поништавање сингуларитета и за случај  $a' = 0$ , за смену променљивих је неопходно користити функцију од  $p$  која тежи 0 спорије од  $p$  (када  $p \rightarrow 0$ ). Стога, у случају пуног интервала  $p \in (0, 2)$  смена се може усвојити у облику  $dt = dp / \sqrt{p(2-p)}$ , док у случају полу-интервала за смену променљивих се може изабрати  $dt = dp / mp^{1-1/m}$ ,  $m > 1$ . Да би се последња смена боље прилагодила у случају  $a' > 0$  променљива  $p$  се замењује са  $p + a'$ . Детаљи битни за апликацију свих предложених смена налазе се у Табели I. У последњој колони Табеле I свуда где су границе интеграције дате у виду пуног интервала,  $p \in (-1, 1)$  или  $p \in (0, 2)$ , подразумева се примена манипулације која користи формулу реда  $2n$  (што ће детаљно бити разматрано у одељку 3.1.4.).

ТАБЕЛА I  
СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ ЗА ДРУГУ ИНТЕГРАЦИЈУ ДАТУ СА (3.15).

No.	$dt =$	$t =$	$p =$	$I_2 =$
1.	$\frac{dp}{\sqrt{p^2 + a'^2}}$	$\ln \frac{p + \sqrt{p^2 + a'^2}}{a'}$	$a' \sinh t$	$\int_{t(p=-1)}^{t(p=1)} I_1(s_l, p(t)) a' \cosh t dt$
2.	$\frac{dp}{\sqrt{p(2-p)}}$	$\arcsin(p-1)$	$1 + \sin t$	$\int_{t(p=0)}^{t(p=2)} I_1(s_l, p(t)) \cos t dt$
3.	$\frac{dp}{mp^{1-1/m}}$	$p^{1/m}$	$t^m$	$2m \int_{t(p=0)}^{t(p=1)} I_1(s_l, p(t)) t^{m-1} dt$
4.	$\frac{dp}{m(p+a')^{1-1/m}}$	$(p+a')^{1/m}$	$t^m - a'$	$2m \int_{t(p=0)}^{t(p=1)} I_1(s_l, p(t)) t^{m-1} dt$

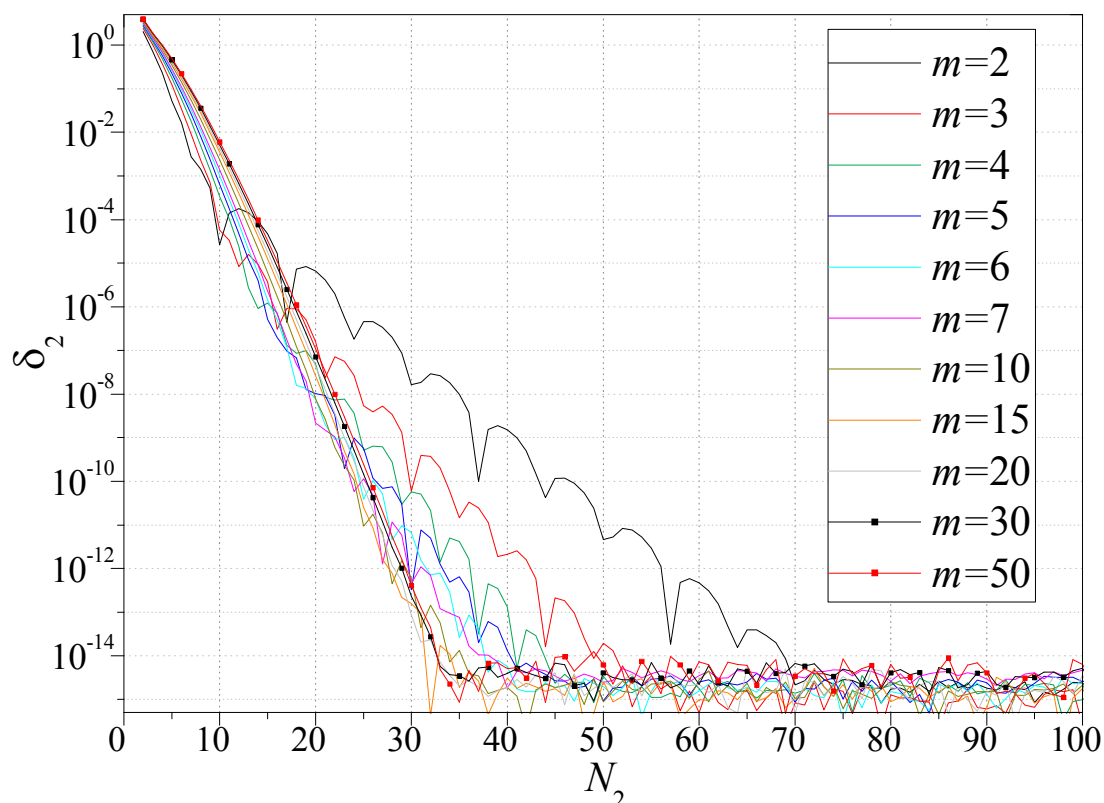
У циљу одређивања оптималне вредности параметра  $m$  за четврту трансформацију ( $p = t^m - a'$ ), посматрајмо конус димензија  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$  и  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . На слици 3.10 приказана је релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за неколико

вредности параметра  $m$ , када је тачка поља позиционирана на средини површи конуса (координате тачке поља су  $z_l = z_{ck}$ ,  $a_l = a_{ck}$ ).



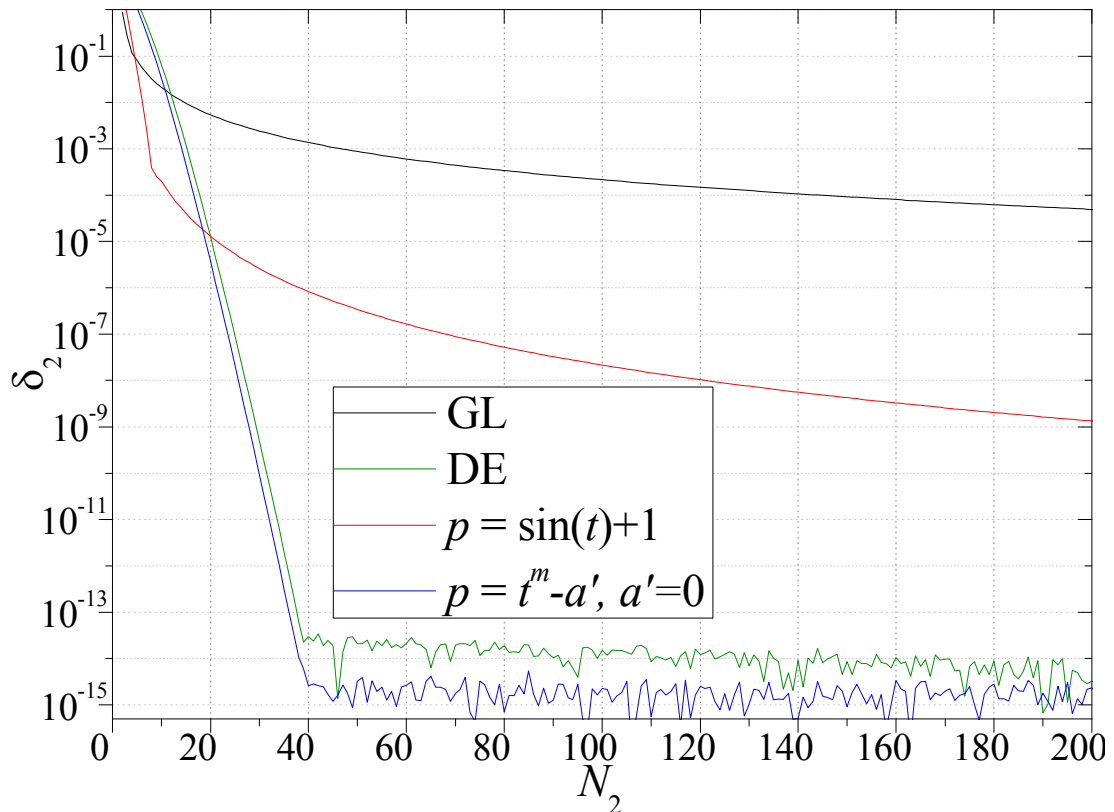
**Слика 3.10.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију, коришћењем смене  $p = t^m - a'$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за неколико вредности  $m$ . (Димензије конуса:  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља су  $z_l = z_{ck}$  и  $a_l = a_{ck}$ .)

Слика 3.11 приказује исту зависност релативне грешке од броја тачака интеграције за ситуацију где је све идентично као и у претходној само што је тачка поља померена за  $0,005\lambda$  на горе, тако да су њене нове координате  $z_l = z_{ck} + 0,005\lambda$  и  $a_l = a_{ck}$ . Са слике се види да се максимална тачност постиже најбрже за  $5 \leq m \leq 10$ . Слично понашање је примећено на великом броју других тест случајева. На основу свих резултата изабрано је  $m = 7$  као оптимална вредност.



**Слика 3.11.** Релативне грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију, коришћењем смене  $p = t^m - a'$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за неколико вредности  $m$ . (Димензије конуса:  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља су  $z_l = z_{ck} + 0,005\lambda$  и  $a_l = a_{ck}$ .)

Слика 3.12 приказује зависност релативне грешке  $\delta_2$  од броја тачака интеграције  $N_2$  за смене променљивих 2, 3 и 4 из Табеле I за исти случај као и за слику 3.10. Слика 3.13 приказује релативну грешку  $\delta_2$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за све смене променљивих из Табеле I за исти случај као и за слику 3.11. Такође, на сликама 3.12 и 3.13 нове смене из Табеле I упоређене су са директном интеграцијом (GL) и дуплом експоненцијалном формулом (DE) [53], [114].

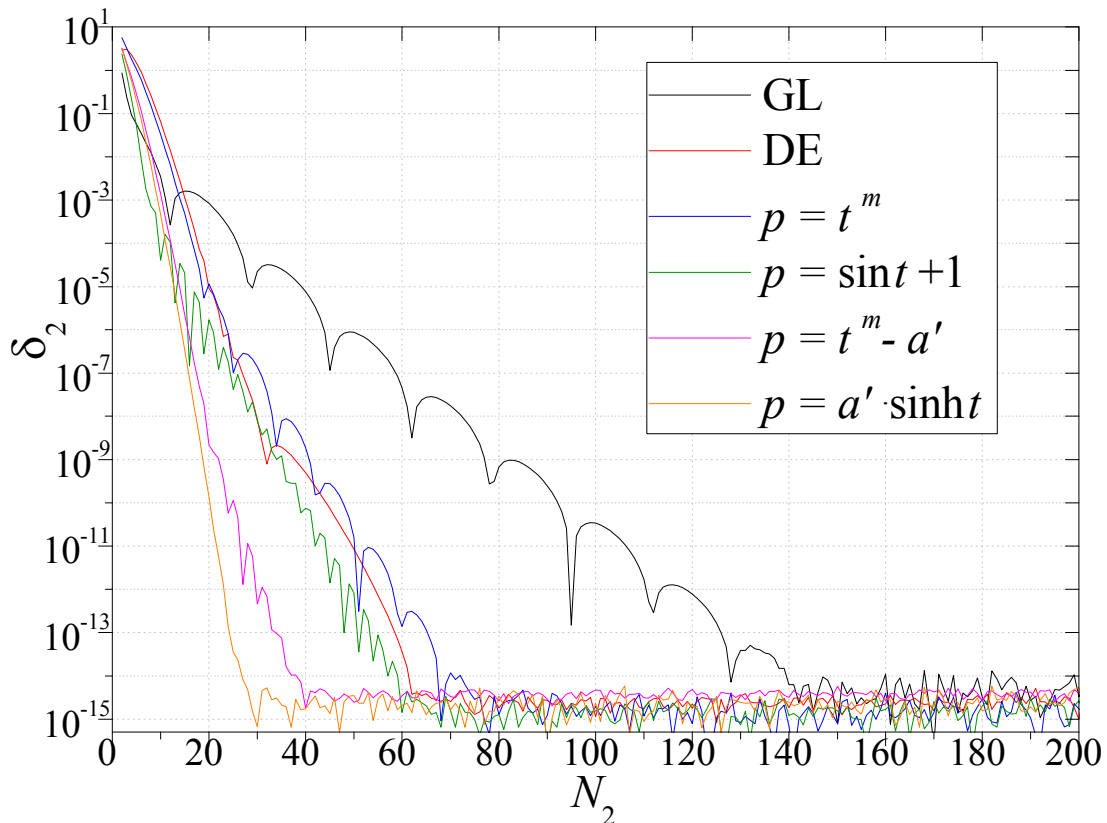


**Слика 3.12.** Релативна грешка  $\delta_2$  у зависности од  $N_2$  за неколико смена променљивих. (Димензије конуса:  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља су  $z_l = z_{ck}$  и  $a_l = a_{ck}$ .)

Са слика 3.12 и 3.13 може се видети да су трансформације  $p = t^m - a'$  ( $a'=0$ ) и DE формула оптималне за случај кад се тачка поља налази на површи елемента, док су трансформације  $p = t^m - a'$  и  $p = a' \sinh t$  оптималне у случају када се тачка поља помери изван површи. С обзиром да се смена  $p = t^m - a'$  може ефикасно применити у оба случаја она представља први избор за другу интеграцију. У том случају интеграл (3.15) се може изразити као

$$I_2(s_l) = 2m \int_{t_1}^{t_2} I_1(s_l, p(t)) \cos^\alpha[\pi(t^m - a')] t^{m-1} dt, \quad (3.18)$$

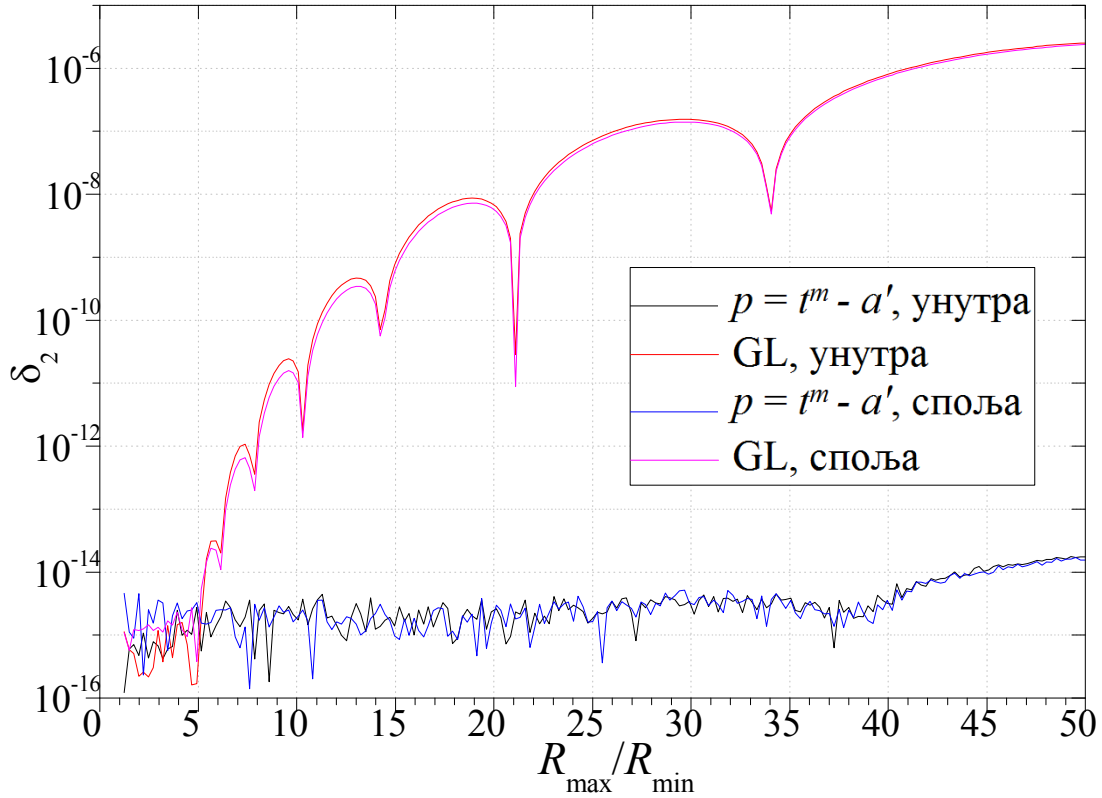
где је  $t_1 = a'^{1/m}$  и  $t_2 = (1 + a')^{1/m}$ .



**Слика 3.13.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$ , за неколико смена променљивих. (Димензије конуса:  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља су  $z_l = z_{ck} + 0,005\lambda$  и  $a_l = a_{ck}$ .)

Ако је однос максималног и минималног растојања,  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$ , од кружнице која садржи тачку  $s_{k00}$  довољно мало, техника поништавања сингуларитета даје исте резултате као и директна метода (GL). Да бисмо илустровали ефикасност ове две методе у зависности од односа  $R_{\max}/R_{\min}$  посматрајмо цилиндар димензија  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$  и  $\Delta a_k = 0$  и тачку поља постављену на висини  $z_l = 0,5\lambda$  док се њен радијус мења у границама  $0 < a_l < \infty$ . У том случају однос  $R_{\max}/R_{\min}$  се мења од 1 до  $\infty$  када 1)  $a_l$  расте од 0 до  $a_{ck}$  (тачка поља је унутар цилиндра) или када 2)  $a_l$  опада од  $\infty$  до  $a_{ck}$  (тачка поља је изван цилиндра). На слици 3.14 приказана је релативна грешка друге интеграције у зависности од односа  $R_{\max}/R_{\min}$  за тачке поља унутар и изван цилиндра, при чему се користи  $N_2 = 30$  тачака интеграције. Са слике се може видети да се поништавање сингуларитета не мора примењивати уколико је однос  $R_{\max}/R_{\min} < 5$ .



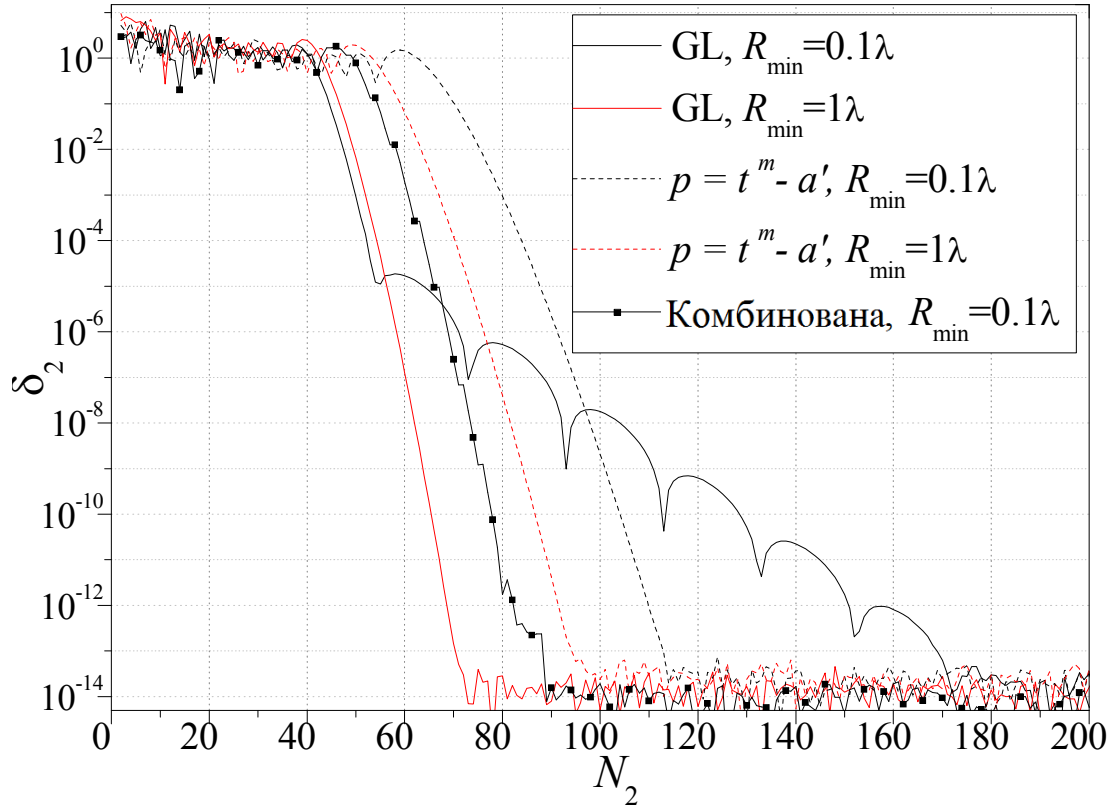


**Слика 3.14.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од односа  $R_{\max}/R_{\min}$  у случају директне интеграције (GL) и технике поништавања сингуларитета ( $p = t^m - a'$ ) коришћењем  $N_2 = 30$  тачака интеграције. (Димензије цилиндра:  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,5\lambda$  и  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља:  $z_l = 0,5\lambda$ ,  $0 < a_l < \infty$ .)

Такође, показано је да се поништавање сингуларитета не мора примењивати ако је однос минималног растојања и таласне дужине већи од 1,  $R_{\min}/\lambda > 1$ . Посебно, ако је  $R_{\max}/R_{\min} > 5$ ,  $R_{\min}/\lambda < 1$  и  $R_{\max}/\lambda > 1$  оптимално је поделити кружницу (која садржи тачку  $s_{k00}$ ) на два дела где први део садржи све тачке које су од тачке поља на мањем растојању од  $\lambda$ , а други део садржи све тачке које су од тачке поља на већем растојању од  $\lambda$ .  $p$ -координате тачака где се посматрана кружница дели,  $p_{1,2}$ , могу се наћи на основу (3.16) (када се постави да је  $R = \lambda$ ) при чему се добија  $p_{1,2} = \pm p_0$ , где је

$$p_0 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{(\Delta z_{lk}^2 + a_l^2(s_l) + a_k^2(s_{k00}) - \lambda^2)}{2a_l(s_l)a_k(s_{k00})}. \quad (3.19)$$

Када се изврши дељење кружнице, техника поништавања сингуларитета се примењује на први део (где је  $p \in (0, p_0)$ ), а директна интеграција се примењује на други део (где је  $p \in (p_0, 1)$ ).



**Слика 3.15.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$ , за директну методу (GL), поништавање сингуларитета ( $p = t^m - a'$ ) и комбиновану методу. (Димензије цилиндра:  $z = 0,25\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,25\lambda$ ,  $a_{ck} = 10\lambda$  и  $\Delta a_k = 0,5\lambda$ . Координате тачке поља:  $z_l = 0,5\lambda$ ,  $a_l = \{10,1\lambda, 11\lambda\}$ .)

Да бисмо илустровали предност методе која комбинује директну интеграцију и технику поништавања сингуларитета, посматрајмо цилиндар димензија  $z_{ck} = 0,25\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,25\lambda$ ,  $a_{ck} = 10\lambda$  и  $\Delta a_k = 0$  и тачку поља на висини  $z_l = 0,5\lambda$  чији је радијус  $a_l = 10,1\lambda$  у првом, и  $a_l = 11\lambda$  у другом случају. Корисно је приметити да за мањи радијус тачке поља ( $a_l = 10,1\lambda$ ) важи  $R_{\max} = 20,1\lambda$  и  $R_{\min} = 0,1\lambda$ , а за већи радијус ( $a_l = 11\lambda$ ) је  $R_{\max} = 21\lambda$  и  $R_{\min} = 1\lambda$ . Слика 3.15 приказује зависност релативне грешке  $\delta_2$  од броја тачака интеграције  $N_2$  за директну интеграцију (GL), методу поништавања сингуларитета базирану на

смени  $p = t^m - a'$  и методу која комбинује обе технике. Са слике се види да је за  $R_{\min} = 1\lambda$  директна интеграција ефикаснија од поништавања сингуларитета, док је за случај  $R_{\min} = 0,1\lambda$  неопходна комбинована метода за ефикасно постизање велике тачности. (Згодно је приметити да је у овом примеру интеграциона путања електрички много дужа него у било ком претходном случају, због чега је неопходно користити много више тачака интеграције да би се постигла жељена тачност.)

На сличан начин као и у случају прве интеграције, број тачака интеграције  $N_2$  потребан за жељену тачност интеграла  $I_2$  може се проценити у функцији броја цифара тачности  $\chi$ , као

$$N_2 = k_2(\chi)\Delta R' + q_2(\chi), \quad \Delta R' = (R_{\max} - R_{\min})/\lambda, \quad (3.20a,б)$$

$$k_2 = c_1 \chi + c_0, \quad q_2 = d_1 \chi + d_0, \quad (3.20в,г)$$

где константе  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $d_0$  и  $d_1$  зависе од примењеног метода интеграције. У случају директне методе њихове вредности су  $c_0 = 2,20$ ,  $c_1 = 0,07$ ,  $d_0 = 8,23$  и  $d_1 = 1,35$ , док у случају технике поништавања сингуларитета њихове вредности су  $c_0 = 11,73$ ,  $c_1 = 0,59$ ,  $d_0 = 0,96$  и  $d_1 = 2,70$ . Посебно, ове формуле се примењују на сваки од делова кружнице понаособ у случају комбиноване методе.

### 3.1.4. Оптимално коришћење интеграционе формуле за прорачун интеграла потенцијала у анализи аксијално симетричних структура

Посматрајмо интеграл (3.15) у коме се интеграција врши дуж  $p$ -координате. Како је  $p$ -координата сразмерна са углом  $\varphi$  цилиндричног координатног система,  $p = \varphi/\pi$ , следи да је интегранд у (3.15) периодичан са периодом  $2\pi/\pi = 2$ , па важи наредни идентитет

$$I_2(\mathbf{r}_l) = \int_{p=-1}^1 I_1(\mathbf{r}_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp = \int_{p=0}^2 I_1(\mathbf{r}_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp. \quad (3.21a)$$

Са друге стране, систем је симетричан у односу на раван која садржи осу структуре (тј.  $z$ -осу) и тачку поља. Без губитка општости, поставимо тачку поља у

$xOz$ -раван. У том случају интегранд из (3.15) је симетричан у односу на тачке  $p=0$  и  $p=1$ , па важи и наредна једнакост

$$I_2(\mathbf{r}_l) = \int_{p=-1}^1 I_1(\mathbf{r}_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp = 2 \int_{p=0}^1 I_1(\mathbf{r}_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp. \quad (3.216)$$

Стога се нумеричка интеграција (3.15) може извршити на два начина коришћењем симетрије и периодичности. Први начин подразумева коришћење интеграционе формуле реда  $n$  на половини интервала  $p \in (0,1)$ , а финална вредност за  $I_2$  је дупло већа. У том случају је нумерички прорачун интеграла  $I_2$  дат са

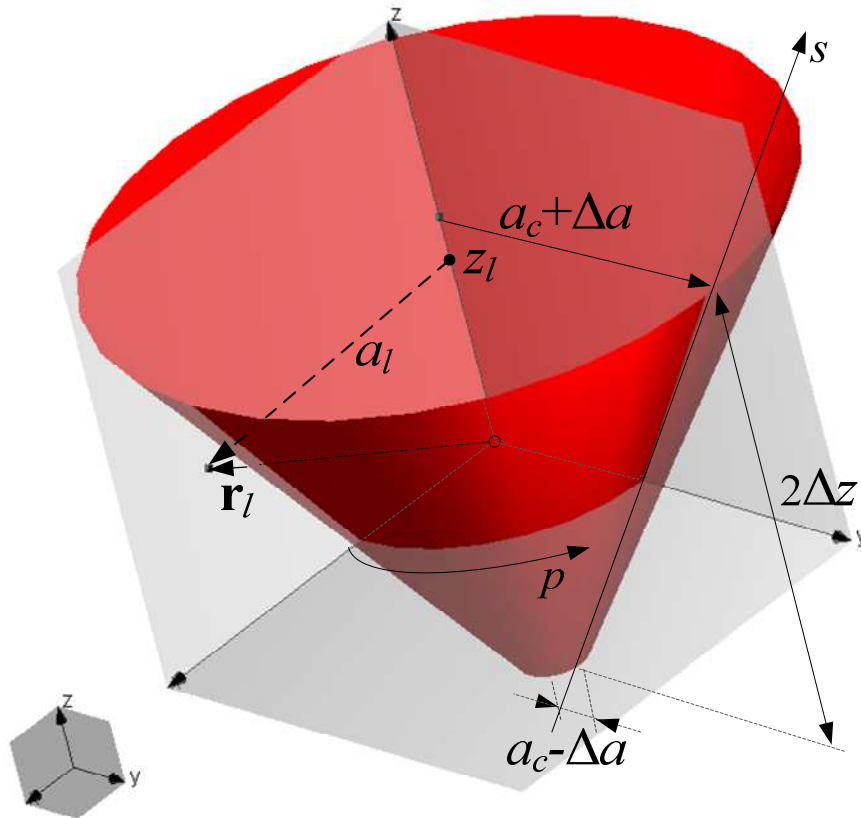
$$I_2 = 2 \sum_{k=1}^n I_1(p_k^{(n)}) \cos^\alpha(\pi p_k^{(n)}) w_k^{(n)}, \quad (3.22)$$

где је  $w_k^{(n)}$   $k$ -ти тежински коефицијент за примењену интеграциону формулу реда  $n$ , а  $p_k^{(n)}$  је  $k$ -та тачка интеграције (од њих  $n$ ) дуж  $p$ -координате у интервалу  $p \in (0,1)$ .

Други начин користи интеграциону формулу реда  $2n$  на целом интервалу (тј. на  $p \in (-1,1)$  или  $p \in (0,2)$ ). С обзиром да је интегранд симетричан, он се може рачунати само у  $n$  тачака дуж једне половине интервала (на пример дуж  $p \in (0,1)$ ). Вредности интегранда у другој половини интервала су исте као одговарајуће вредности из прве половине интервала тј. важи  $I_1(p_k^{(2n)}) \cos^\alpha(\pi p_k^{(2n)}) = I_1(p_{2n-k+1}^{(2n)}) \cos^\alpha(\pi p_{2n-k+1}^{(2n)})$  за  $k = n+1, \dots, 2n$ . Стога се вредност интеграла  $I_2$  може добити као

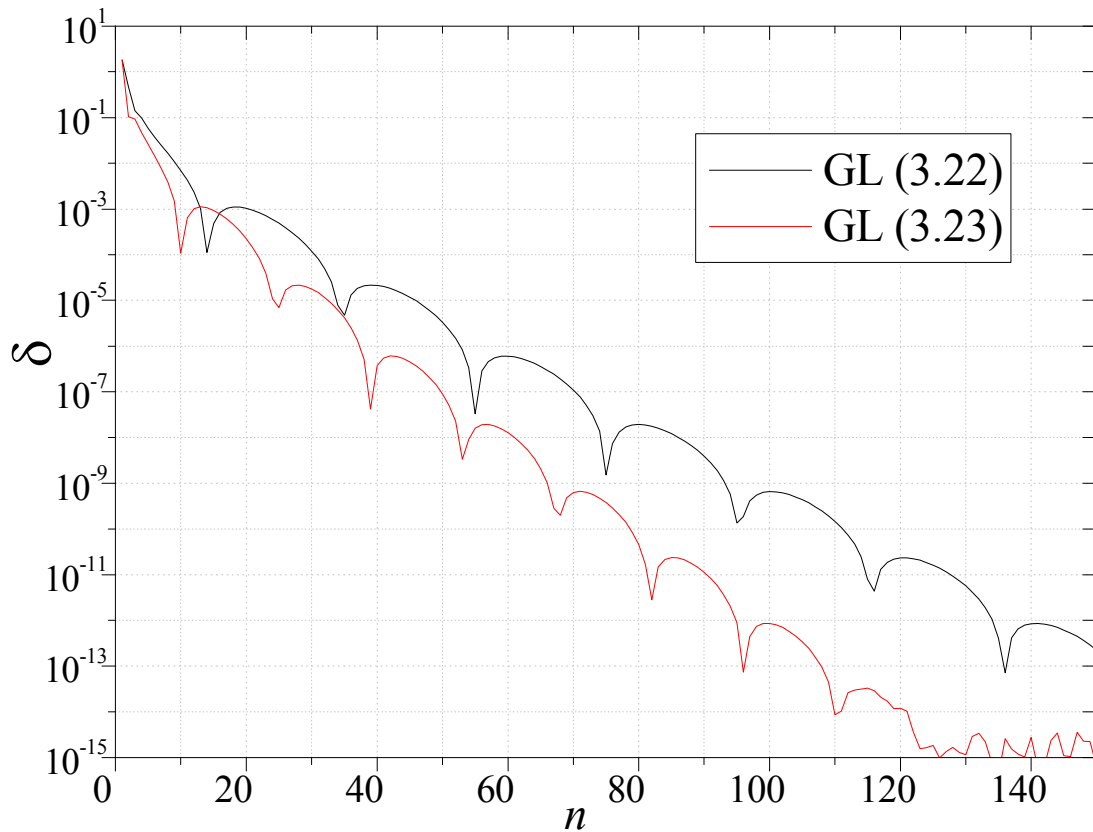
$$I_2 = 2 \sum_{k=1}^n I_1(p_k^{(2n)}) \cos^\alpha(\pi p_k^{(2n)}) w_k^{(2n)}, \quad (3.23)$$

где је  $w_k^{(2n)}$   $k$ -ти тежински коефицијент за примењену интеграциону формулу реда  $2n$ , а  $p_k^{(2n)}$  је  $k$ -та тачка интеграције (од њих  $2n$ ) дуж  $p$ -координате у интервалу  $p \in (0,2)$  или  $p \in (-1,1)$  (при чему се узимају у обзир само  $n$  тачака из једне половине интервала).



**Слика 3.16.** Пример зарубљеног конуса димензија  $z_c = 0$ ,  $a_c = 0,275\lambda$ ,  $\Delta z = 0,25\lambda$  и  $\Delta a = 0,225\lambda$  на коме је анализирана ефикасност формула (3.22) и (3.23). Тачка поља је у  $xOz$ -равни на висини  $z_l = 0,125\lambda$ , и полупречника  $a_l = 0,3875\lambda$  (директно на површи елемента) или  $a_l = 0,3975\lambda$  (близу површи).

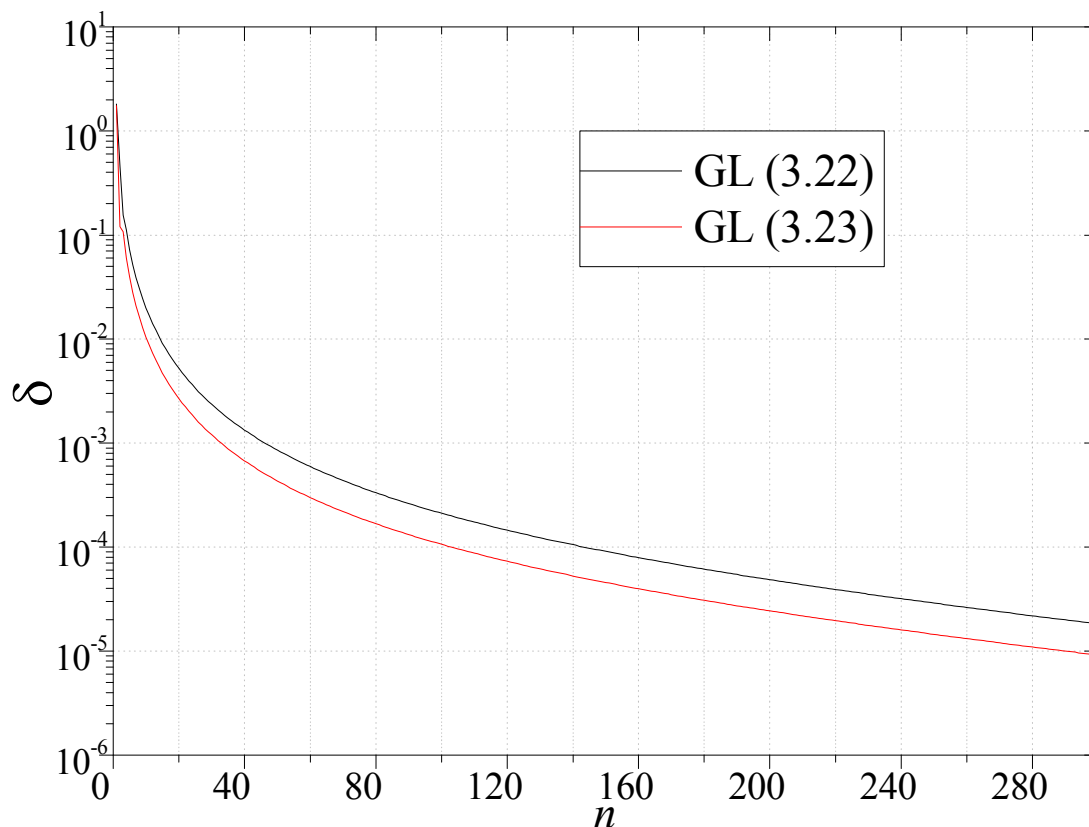
У наставку је ефикасност формула (3.22) и (3.23) анализирана на примеру савршено проводне структуре у облику зарубљеног конуса димензија  $z_c = 0$ ,  $a_c = 0,275\lambda$ ,  $\Delta z = 0,25\lambda$  и  $\Delta a = 0,225\lambda$  (слика 3.16). Тачка поља  $r_l$  је у  $xOz$ -равни. У првом случају је постављена близу зарубљеног конуса  $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3925\lambda$ , док је у другом случају постављена директно на површи зарубљеног конуса  $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3875\lambda$ . Резултати за нумеричку интеграцију (3.15) су приказани само за случај  $\alpha = 0$ .



Слика 3.17. Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.22) и (3.23) у случају кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3925\lambda$ ).

Нумеричка интеграција (3.15) је прво извршена директном применом Гаус-Лежандрових формула. Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  коришћењем (3.22) и (3.23) приказана је на слици 3.17 за случај кад је тачка поља близу површи елемента, а на слици 3.18 за случај кад је тачка поља директно на површи елемента.

Са слика 3.17 и 3.18 се види да GL формуле реда  $2n$  у (3.23) резултују тачнијим прорачуном друге интеграције (3.15) у поређењу са (3.22). GL формуле реда  $n$  из (3.22) захтевају око 40 интеграционих тачака више од (3.23) за исту тачност.



**Слика 3.18.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.22) и (3.23) у случају кад је тачка поља на површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3875\lambda$ ).

С обзиром на то да технике поништавања сингуларитета могу значајно побољшати ефикасност рачунања друге интеграције (3.15), од интереса је анализирати ефикасност интеграционих формула (3.22) и (3.23) и у тим ситуацијама. У том циљу разматране су три смене променљивих из претходног поглавља, за које се могу применити и (3.22) и (3.23).

Наиме, након произвољне трансформације интеграл (3.15) се може написати у општем облику

$$I_2(s_l) = \int_{t_1}^{t_2} I_1(s_l, p(t)) \cos^\alpha(\pi p(t)) p'(t) dt, \quad \alpha = 0,1, \quad (3.24)$$

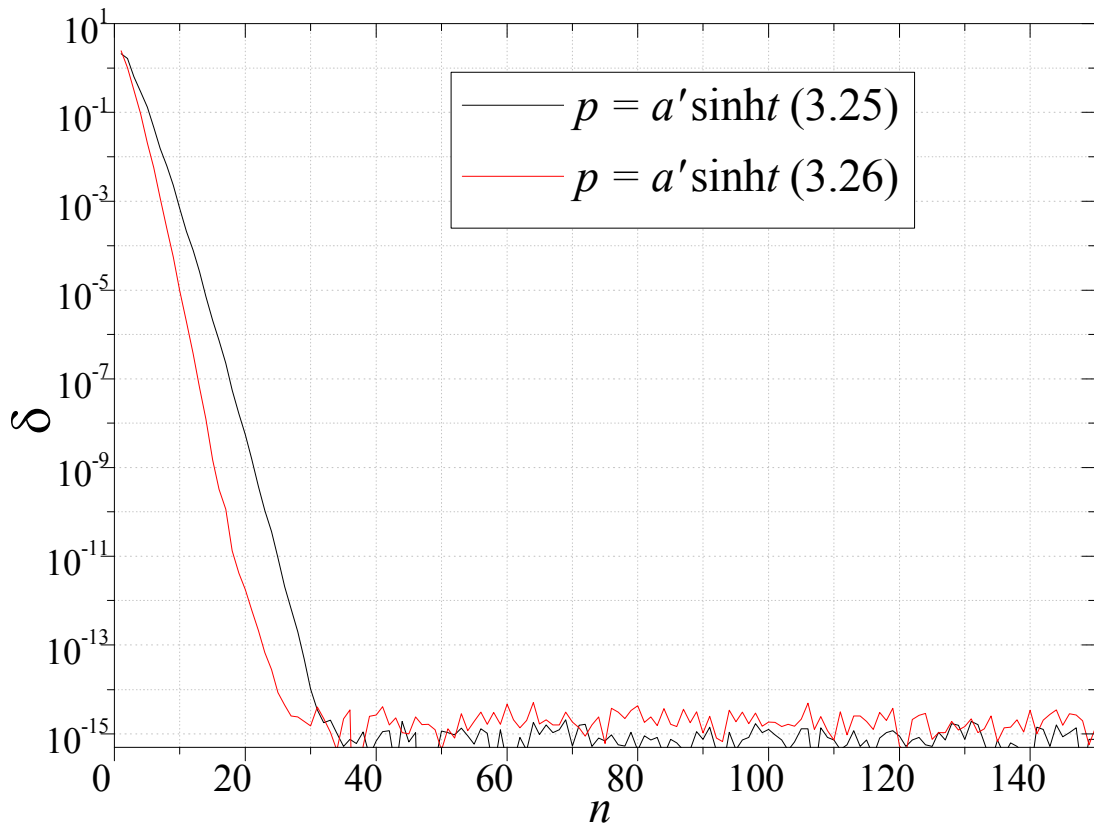
где је  $p'(t) = dp/dt$ . Ако се примени формула реда  $n$  за нумерички прорачун (3.24) добија се

$$I_2 = 2 \sum_{k=1}^n I_1(p(t_k^{(n)})) \cos^\alpha(\pi p(t_k^{(n)})) p'(t_k^{(n)}) w_k^{(n)}, \quad (3.25)$$

где је сада  $t_k^{(n)}$   $k$ -та интеграциона тачка (од  $n$ ) дуж  $t$ -координате у интервалу  $t \in (t_1, t_2)$ , за  $t_1 = t(p=0)$  и  $t_2 = t(p=1)$ . У случају примене формуле реда  $2n$  за нумерички прорачун (3.24) добија се

$$I_2 = 2 \sum_{k=1}^n I_1(p(t_k^{(2n)})) \cos^\alpha(\pi p(t_k^{(2n)})) p'(t_k^{(2n)}) w_k^{(2n)}, \quad (3.26)$$

где је  $t_k^{(2n)}$   $k$ -та интеграциона тачка (од  $2n$ ) дуж  $t$ -координате у интервалу  $t \in (t_1, t_2)$ , за  $t_1 = t(p=0)$  и  $t_2 = t(p=2)$ , или  $t_1 = t(p=-1)$  и  $t_2 = t(p=1)$ . При томе се  $I_2$  рачуна само у првих  $n$  тачака. Формула (3.26) може се применити само уколико је и  $p'(t)$  симетрично у односу на половину интервала интеграције у (3.24).



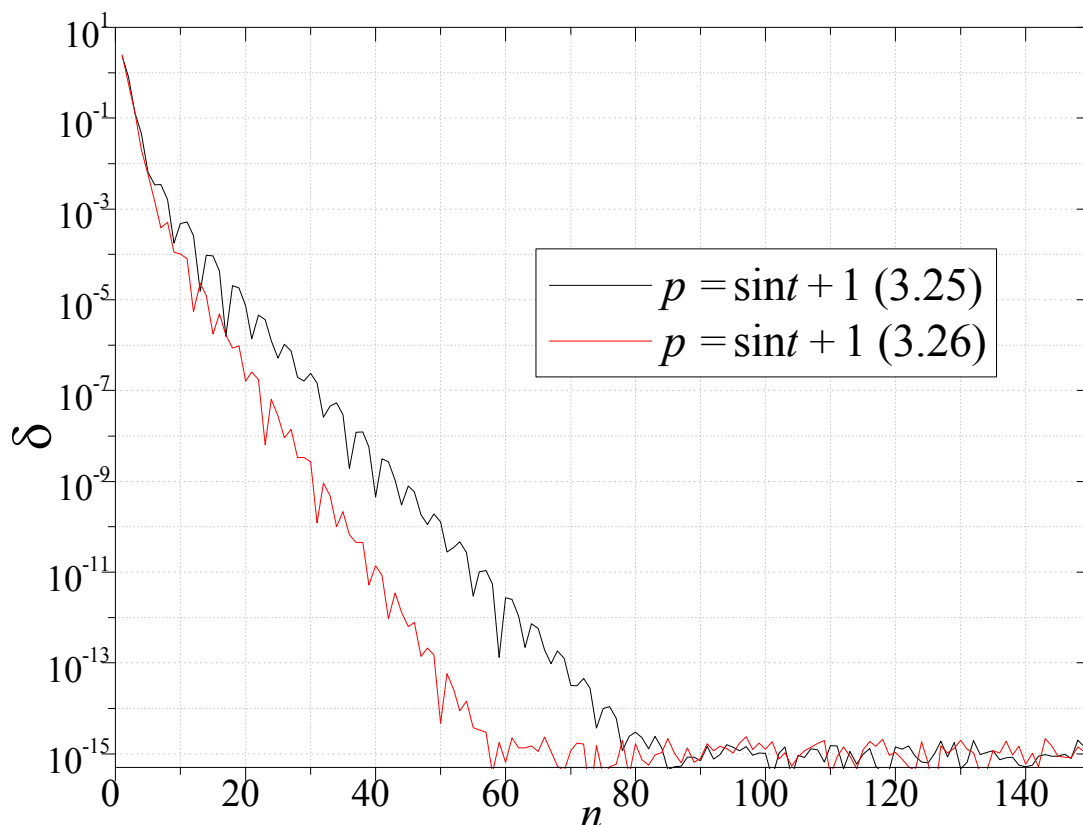
**Слика 3.19.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.25) и (3.26) у случају смене  $p(t) = a' \sinh t$  кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3925\lambda$ ).

Формуле (3.25) и (3.26) су прво анализиране у комбинацији са сменом бр. 1 из Табеле I,  $p(t) = a' \sinh t$ . Како се ова смена не може применити у случају кад је



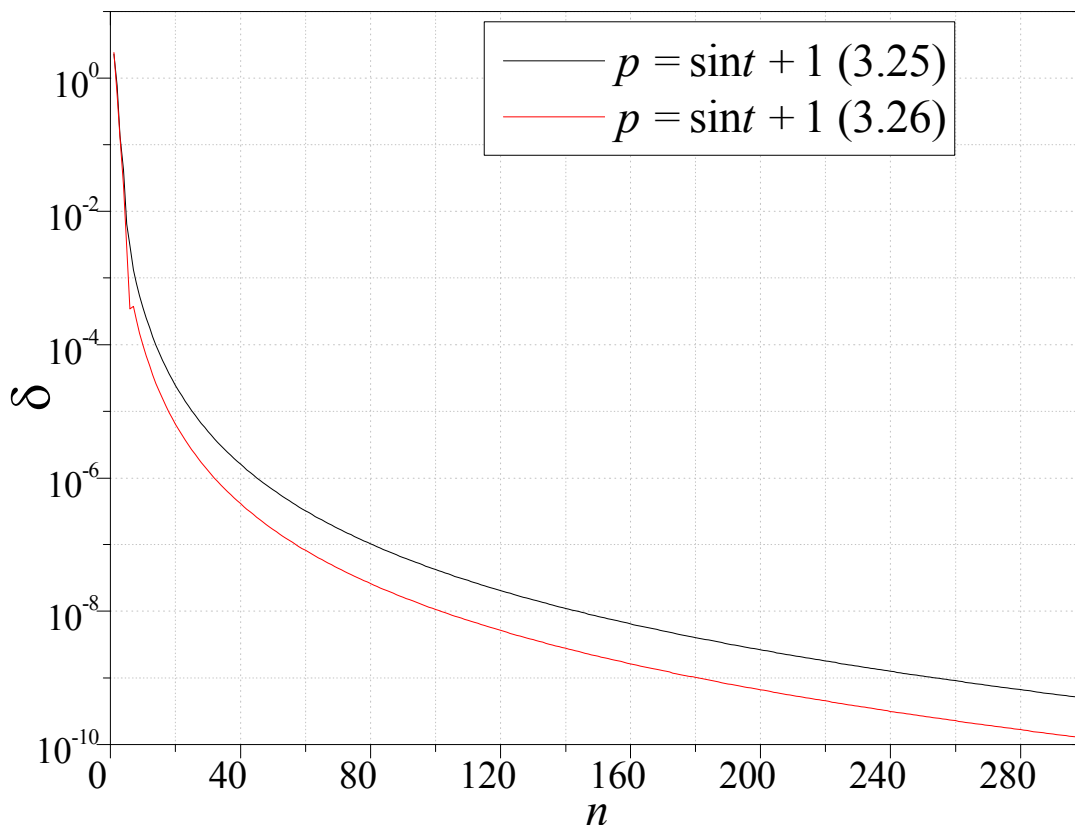
тачка на површи зарубљеног конуса, формирани су резултати само у случају кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса (слика 3.19).

На сликама 3.20 и 3.21 приказана је релативна грешка друге интеграције  $I_2$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.25) и (3.26) кад је коришћена смена 2 из Табеле I,  $p = 1 + \sin t$ . На слици 3.20 приказани су резултати у случају кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса, а на слици 3.21 у случају кад је тачка поља директно на површи зарубљеног конуса.



Слика 3.20. Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.25) и (3.26) у случају смене  $p = 1 + \sin t$  кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3925\lambda$ ).

Са слика 3.19–3.21 може се закључити да интеграциона формула реда  $2n$  (3.26) обезбеђује већу тачност при рачунању друге интеграције  $I_2$  од интеграционе формуле реда  $n$  (3.25) за исти број тачака интеграције.



**Слика 3.21.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  за (3.25) и (3.26) у случају смене  $p = 1 + \sin t$  кад је тачка поља на површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3875\lambda$ ).

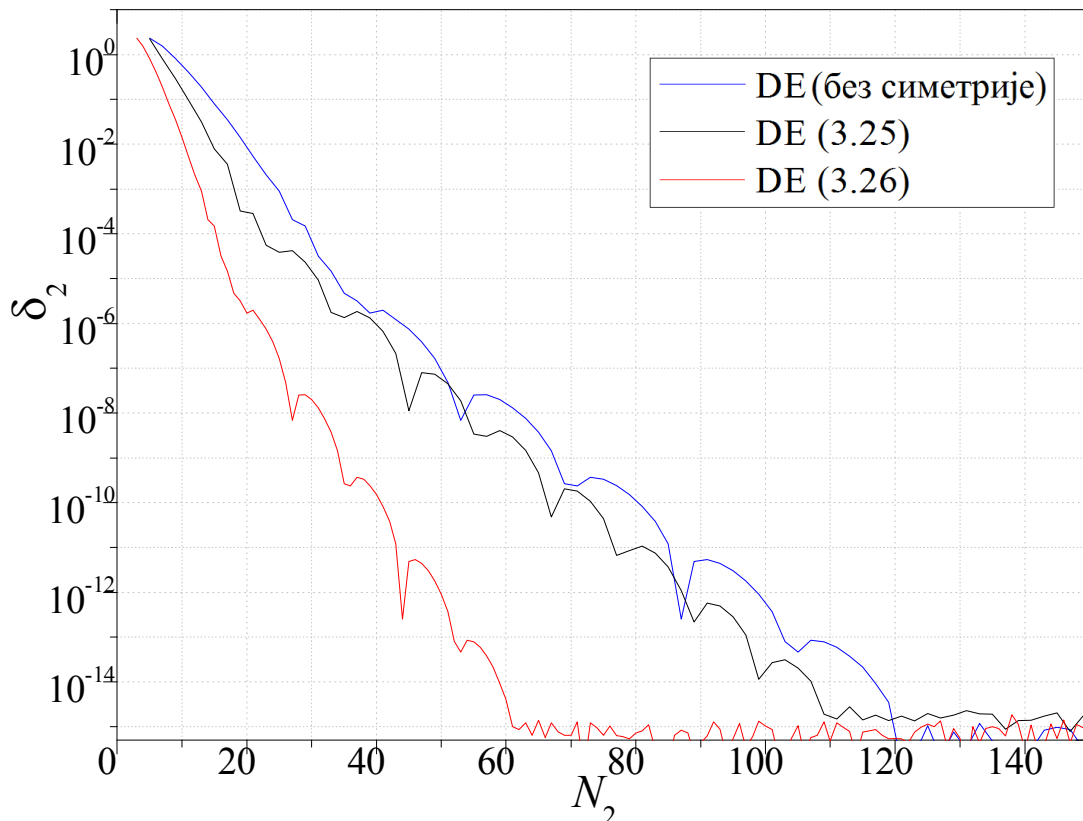
Ефикасност формула (3.25) и (3.26) разматрана је и у случају DE формуле [53], [114]. Смена променљивих која одговара DE формули дата је са

$$p(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \cosh t\right) + 1, \quad p'(t) = \frac{\frac{\pi}{2} \cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)}, \quad (3.27a, б)$$

где је  $p \in (0,2)$ . Применом (3.27) добијају се бесконачне границе интеграције  $t_{1,2} \rightarrow \mp\infty$  у (3.24), па је извршено одсецање на  $t_{1,2} = \mp 3,17$ . На основу [53], [114] за интеграцију је примењено трапезоидно правило интеграције уместо GL формула.

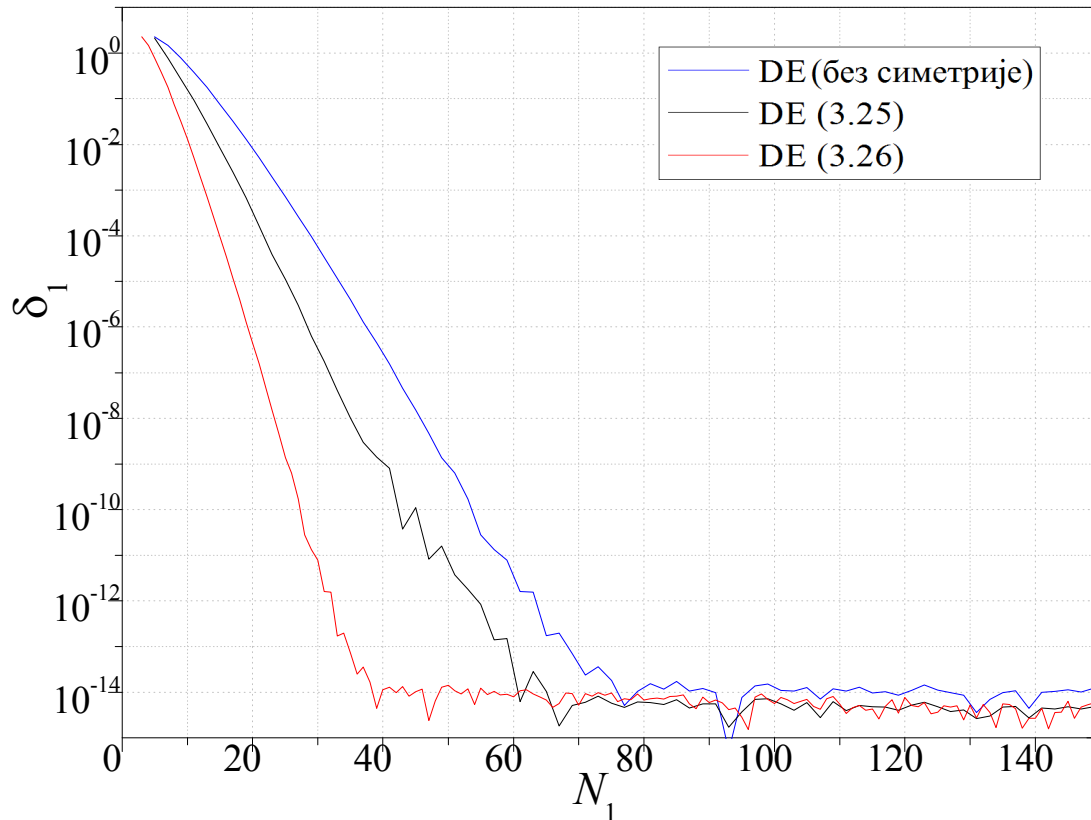
На сликама 3.22 и 3.23 приказана је релативна грешка друге интеграције  $I_2$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  применом (3.25) и (3.26) када је коришћена DE формула (3.27). На слици 3.22 приказани су резултати у случају кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса, а на слици 3.23 у случају кад је тачка поља директно на његовој површи. С обзиром на то да је DE формула намењена за интеграцију подинтегралних функција које имају сингуларитете на

оба краја интервала интеграције, ефикасност формуле (3.25) је дискутабилна јер подразумева интеграцију на интервалу  $(0,1)$  где интегранд има сингуларитет само на једном крају  $p=0$ , док је на другом крају  $p=1$  функција мирна. Из тог разлога на сликама 3.22 и 3.23 приказани су и резултати за релативну грешку интеграције у случају кад симетрија није коришћена (тј. кад нису примењене манипулације ни (3.25) ни (3.26)).



**Слика 3.22.** Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  применом DE формуле кад је коришћена симетрија (3.25), (3.26), и без ње, у случају кад је тачка поља близу површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3925\lambda$ ).

Са слика 3.22 и 3.23 може се закључити да је интеграциона формула реда  $2n$  (3.26) ефикаснија при одређивању друге интеграције  $I_2$  у поређењу са интеграционом формулом реда  $n$  било да је симетрија коришћена (3.25) или не (у ком случају је интеграција извршена на целом интервалу  $p \in (0,2)$ ).



Слика 3.23. Релативна грешка  $\delta_2$  за другу интеграцију у зависности од броја тачака интеграције  $N_2$  применом DE формуле кад је коришћена симетрија (3.25), (3.26) и без ње, у случају кад је тачка поља на површи зарубљеног конуса ( $z_l = 0,125\lambda$ ,  $a_l = 0,3875\lambda$ ).

Стога, имајући у виду слике 3.17–3.23, може се закључити да директна метода (GL) и све методе поништавања сингуларитета са сменама за које је извод  $p'(t)$  симетричан у односу на половину интервала интеграције у (3.24), се у случају друге интеграције најефикасније примењују уз помоћ формуле реда  $2n$  коришћењем симетрије, тј. применом (3.23) или (3.26). Смене променљивих из одељка 3.1.3. које се могу примењивати уз помоћ (3.26) су смене бр. 1 и 2 из Табеле I и DE формула.

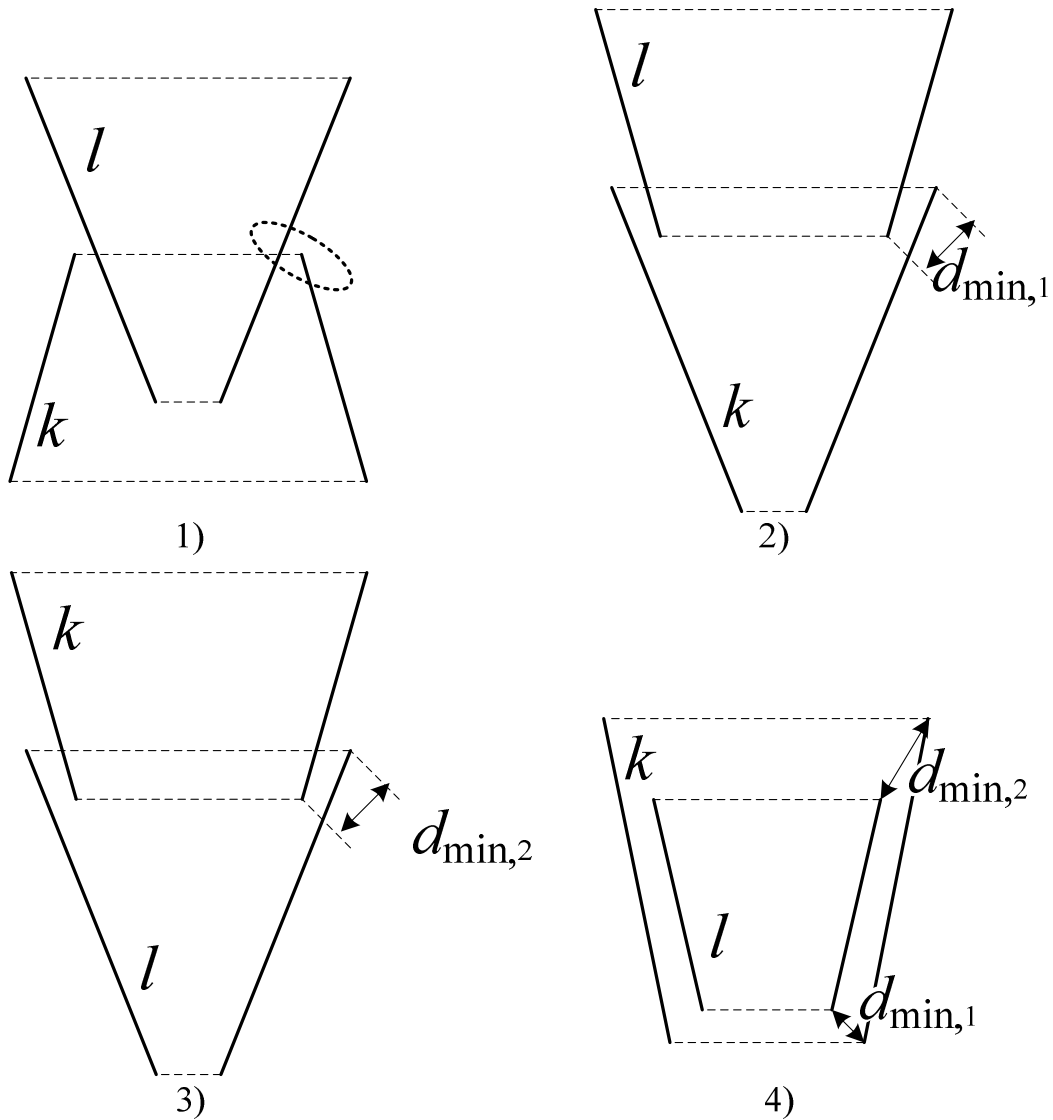
### 3.1.5. Трећа интеграција

Трећа интеграција из (3.1) се може написати у облику

$$I_3 = \int_{-1}^1 s_l^j I_2(s_l) ds_l, \quad (3.28)$$

где  $I_2$  представља интеграл потенцијала  $k$ -тог елемента у тачки поља  $\mathbf{r}_l$  (3.15).  $I_2$  је брзо променљива функција у близини крајева  $k$ -тог елемента. Ако су ови крајеви

релативно далеко од  $l$ -тог елемента директна интеграција (GL) је довољна. У супротном  $I_2$  испољава квази-сингуларно понашање дуж интервала  $s_l \in (-1,1)$ , и неопходно је користити технику поништавања сингуларитета за ефикасни прорачун треће интеграције.



Слика 3.24. Минимална растојања,  $d_{\min,1}$  и  $d_{\min,2}$ , између  $k$ -тог и  $l$ -тог елемента у четири типична случаја.

Посматрајмо случајеве када је барем један крај  $k$ -тог елемента релативно близу  $l$ -тог елемента. Слика 3.24 показује минимална растојања  $d_{\min,i}$ ,  $i=1,2$  између крајева  $l$ -тог и  $k$ -тог елемента у четири типична случаја:

- 1) један крај  $k$ -тог елемента је релативно близу  $l$ -тог елемента, али је далеко од његових крајева (слика 3.24.1),

- 2) један крај  $k$ -тог елемента је релативно близу првог краја  $l$ -тог елемента (слика 3.24.2),
- 3) један крај  $k$ -тог елемента је релативно близу другог краја  $l$ -тог елемента (слика 3.24.3) и
- 4) оба краја  $k$ -тог елемента су релативно близу оба краја  $l$ -тог елемента (слика 3.24.4).

У првом случају струја дуж  $l$ -тог елемента се брзо мења у близини краја  $k$ -тог елемента. Тако брзе варијације се не могу добро апроксимирати полиномским експанзијама. Да би се омогућила ефикасна апроксимација такве струје  $l$ -ти елемент се мора поделити на два мања елемента дуж кружног пресека који је најближи посматраном крају  $k$ -тог елемента. На овај начин први случај се редукује на један од остала три случаја. Интегранд испољава квази-сингуларно понашање око првог краја  $l$ -тог елемента у случају 2), око другог краја  $l$ -тог елемента у случају 3) и око оба краја  $l$ -тог елемента у случају 4).

Најкритичнија ситуација је случај 4) за  $d_{\min,1} = d_{\min,2} = 0$ , која се дешава када су  $k$ -ти и  $l$ -ти елемент исти (интеграција сопственог члана). У оваквим случајевима где постоје квази-сингуларитети на оба краја препоручује се DE формула [53], [114]. За интеграцију (3.28) додатно су предложене смене променљивих бр. 1 и бр. 2 из Табеле II. Посебно, смена бр. 2а је дефинисана на интервалу  $(-1,0)$ , а бр. 2б на интервалу  $(0,1)$ . Слично као и у случају друге интеграције, на основу бројних примера утврђено је да за смену бр. 2 оптимална вредност параметра  $m$  износи  $m = 5$  за трећу интеграцију.

Трансформација бр. 1 је оригинално коришћена у [94] за другу интеграцију импеданских интеграла у случају редукованог језгра (MoM/EFIE методе за анализу жичаних антена), а затим је у [93] примењена и испитивана у случају треће интеграције егзактног језгра као што је описано у овом одељку.

Да бисмо упоредили ефикасност директне методе и технике поништавања сингуларитета за сопствени члан, посматрајмо цилиндар димензија  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$  и  $\Delta a_l = 0$ . На слици 3.25 приказана је релативна грешка треће интеграције  $\delta_3$  у зависности од броја тачака интеграције,  $N_3$ . Са слике се

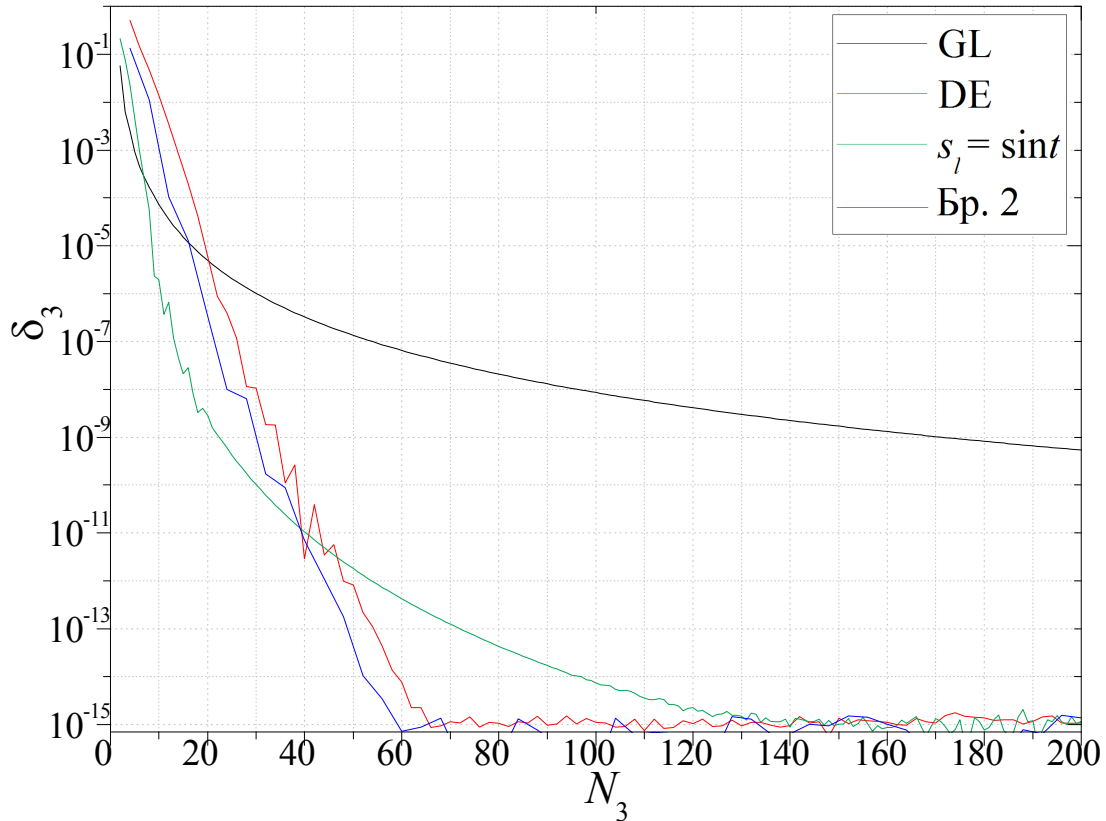
може видети да је, за остваривање максималне тачности, интеграција базирана на трансформацији бр. 2 ефикаснија од осталих техника, јер захтева мање од 60 тачака интеграције (за релативну грешку од  $\delta_3 = 10^{-15}$ ). Насупрот томе директна интеграција, која се обично користи за трећу интеграцију, захтева више од 200 тачака интеграције.

ТАБЕЛА II  
СМЕНЕ ПРОМЕНЉИВИХ КОРИШЋЕНЕ  
ЗА ТРЕЋУ ИНТЕГРАЦИЈУ (3.28)

Бр.	$dt =$	$s_l =$
1	$\frac{ds_l}{\sqrt{1-s_l^2}}$	$\sin t$
2а	$\frac{ds_l}{m(1+s_l)^{1-1/m}}$	$-1+t^m$
2б	$\frac{ds_l}{m(1-s_l)^{1-1/m}}$	$1-(-t)^m$
3а	$\frac{ds_l}{m(1+h'_1+s_l)^{1-1/m}}$	$-(1+h'_1)+t^m$
3б	$\frac{ds_l}{m(1+h'_2-s_l)^{1-1/m}}$	$1+h'_2-(-t)^m$

Следеће критичне ситуације су случај 2) за  $d_{\min,1} = 0$  и случај 3) за  $d_{\min,2} = 0$  (у оба случаја  $k$ -ти и  $l$ -ти елемент имају један заједнички крај). У случају 2) смена бр. 2а се примењује на цео интервал  $(-1,1)$ , док у случају 3) смена бр. 2б се примењује на целом интервалу.

Смена бр. 2 се може користити и када  $d_{\min,1} > 0$  или  $d_{\min,2} > 0$ . На разним примерима утврђено је да се у овим случајевима ефикасност методе може додатно повећати додавањем нормализованих растојања  $h'_1 = d_{\min,1}/e_{sl}$  и  $h'_2 = d_{\min,2}/e_{sl}$  трансформацији бр. 2. На тај начин се добија нова трансформација бр. 3, као што је приказано у Табели II.

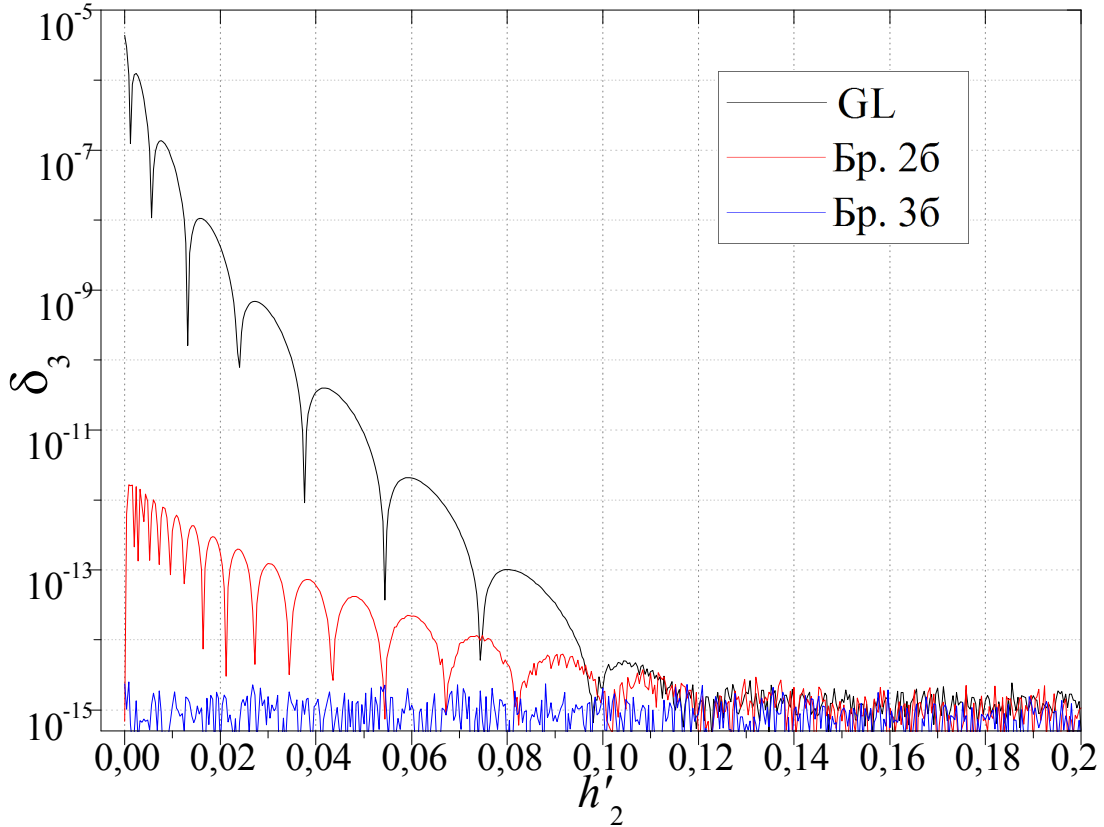


Слика 3.25. Релативна грешка  $\delta_3$  треће интеграције у зависности од броја тачака интеграције  $N_3$ , за неколико интеграционих метода. (Димензије цилиндра:  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$  и  $\Delta a_l = 0$ .)

Ефикасност трансформација бр. 2 и бр. 3 (из Табеле II) упоређена је са ефикасношћу директне интеграције за  $d_{\min 2} > 0$  у случају два цилиндра истих дужина  $l = \lambda$ , чије су димензије  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $z_{ck} = 1,5\lambda$  и  $\Delta z_l = \Delta z_k = 0,5\lambda$  ( $k$ -ти елемент се надовезује на  $l$ -ти).  $l$ -ти елемент има радијус  $a_{cl} = 0,05\lambda$ , а радијус  $k$ -тог елемента се мења од  $a_{ck} = a_{cl}$  до  $a_{ck} = 3a_{cl}$ , тако да нормализовано растојање варира од  $h'_2 = 0$  до  $h'_2 = 0,2$ . На слици 3.26 је приказана релативна грешка треће интеграције у зависности од нормализованог растојања  $h'_2$ , коришћењем 40 тачака интеграције. Са слике се види да све методе интеграције имају релативну грешку мању од  $10^{-14}$  за  $h'_2 > 0,12$ . Са даљим смањивањем нормализованог растојања  $h'_2$  ова грешка се практично не мења у случају трансформације бр. 3б, расте до око  $10^{-12}$  у случају трансформације бр. 2б и расте до око  $10^{-5}$  у случају директне методе (GL). Имајући у виду ове и њима сличне резултате закључено је да је у случају  $h'_1, h'_2 > 0,12$  довољна директна метода (GL)



док за мање вредности  $h'_1$  или  $h'_2$  жељена тачност се најефикасније постиже коришћењем трансформације бр. 3.



**Слика 3.26.** Релативна грешка  $\delta_3$  за трећу интеграцију у зависности од нормализованог растојања  $h'_2$ , коришћењем 40 тачака интеграције, за неколико интеграционих метода.

(Димензије цилиндара:  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $z_{ck} = 1,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = \Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  
 $a_{cl} = 0,05\lambda$  и  $\Delta a_l = \Delta a_k = 0$  и  $a_{cl} \leq a_{ck} \leq 3a_{cl}$ )

Пошто се у случају квази-сингуларног понашања трансформација бр. 3 може ефикасно користити у свим ситуацијама, она представља први избор за трећу интеграцију. У том случају интеграл (3.28) се може представити као

$$I_{3a} = m \int_{t_{1a}}^{t_{2a}} (-1 - h'_1 + t^m)^j I_2(s_l(t)) t^{m-1} dt, \quad (3.29a)$$

$$I_{3b} = m \int_{t_{1b}}^{t_{2b}} (1 + h'_2 - (-t)^m)^j I_2(s_l(t)) (-t)^{m-1} dt, \quad (3.29b)$$

где је у случају 2)  $I_3 = I_{3a}$ ,  $t_{1a} = h_1^{1/m}$  и  $t_{2a} = (2 + h_1')^{1/m}$ , у случају 3)  $I_3 = I_{3b}$ ,  $t_{1b} = -(2 + h_2')^{1/m}$  и  $t_{2b} = -h_2'^{1/m}$ , а у случају 4)  $I_3 = I_{3a} + I_{3b}$ ,  $t_{1a} = h_1^{1/m}$ ,  $t_{2a} = (1 + h_1')^{1/m}$ ,  $t_{1b} = -(1 + h_2')^{1/m}$  и  $t_{2b} = -h_2'^{1/m}$ .

На сличан начин као и за прву и другу интеграцију, број тачака интеграције  $N_3$  потребан за остваривање жељене тачности треће интеграције је добијен на основу разних нумеричких примера и може се проценити као

$$N_3 = \max[3, (3,5\chi - 5,5 + 6e_{sl} / \lambda + 1,5j)]. \quad (3.30)$$

### 3.1.6. Основни кораци предложене методе

Прва интеграција дата са (3.3) се, у зависности од вредности нормализованог растојања  $d_0$  из (3.7), извршава на два начина:

- $d_0 \geq 2$  - директна интеграција
- $d_0 < 2$  - поништавање сингуларитета базирано на трансформацији (3.4) после чега интеграл добија облик (3.5)

У оба случаја потребан број тачака интеграције да би се остварила жељена тачност се одређује на основу (3.9).

Друга интеграција, која је дата са (3.15), се прорачунава на три различита начина у зависности од вредности  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$ :

- $R_{\max} / R_{\min} < 5$  или  $R_{\min} > \lambda$  - директна интеграција
- $R_{\max} / R_{\min} \geq 5$  и  $R_{\min}, R_{\max} \leq \lambda$  - поништавање сингуларитета базирано на трансформацији бр. 4 из Табеле I, после чега интеграл добија облик (3.18)
- $R_{\max} / R_{\min} \geq 5$ ,  $R_{\min} \leq \lambda$  и  $R_{\max} > \lambda$  - интеграциона путања  $p \in (0,1)$  се дели на два дела,  $p \in (0, p_0)$  и  $p \in (p_0, 1)$ , где је  $p_0$  дато са (3.19). Поништавање сингуларитета базирано на трансформацији бр. 4 из Табеле I се примењује на први део, а директна интеграција се примењује на други део.

Број тачака интеграције потребан за остваривање жељене тачности дуж сваке од интеграционих путања је дат са (3.20).

Трећа интеграција дата са (3.28) извршава се на четири различита начина у зависности од вредности нормализованих растојања  $h'_1$  и  $h'_2$ :

- $h'_1, h'_2 > 0,12$  - директна интеграција,
- $h'_1 \leq 0,12$  и  $h'_2 > 0,12$  - поништавање сингуларитета базирано на смени бр. За из Табеле II, после чега интеграл добија облик (3.29а),
- $h'_1 > 0,12$  и  $h'_2 \leq 0,12$  - поништавање сингуларитета базирано на смени бр. 3б из Табеле II, после чега интеграл добија облик (3.29б),
- $h'_1, h'_2 > 0,12$  - интеграциона путања се дели на два једнака дела,  $s_l \in (-1,0)$  и  $s_l \in (0,1)$ . Технике поништавања сингуларитета базиране на сменама бр. За и 3б из Табеле II примењују се редом на први и други део, после чега интеграл добија облик (3.29).

Број тачака интеграције потребан за остваривање жељене тачности се процењује на основу (3.30).

### 3.1.7. Тачност рачунања системске матрице

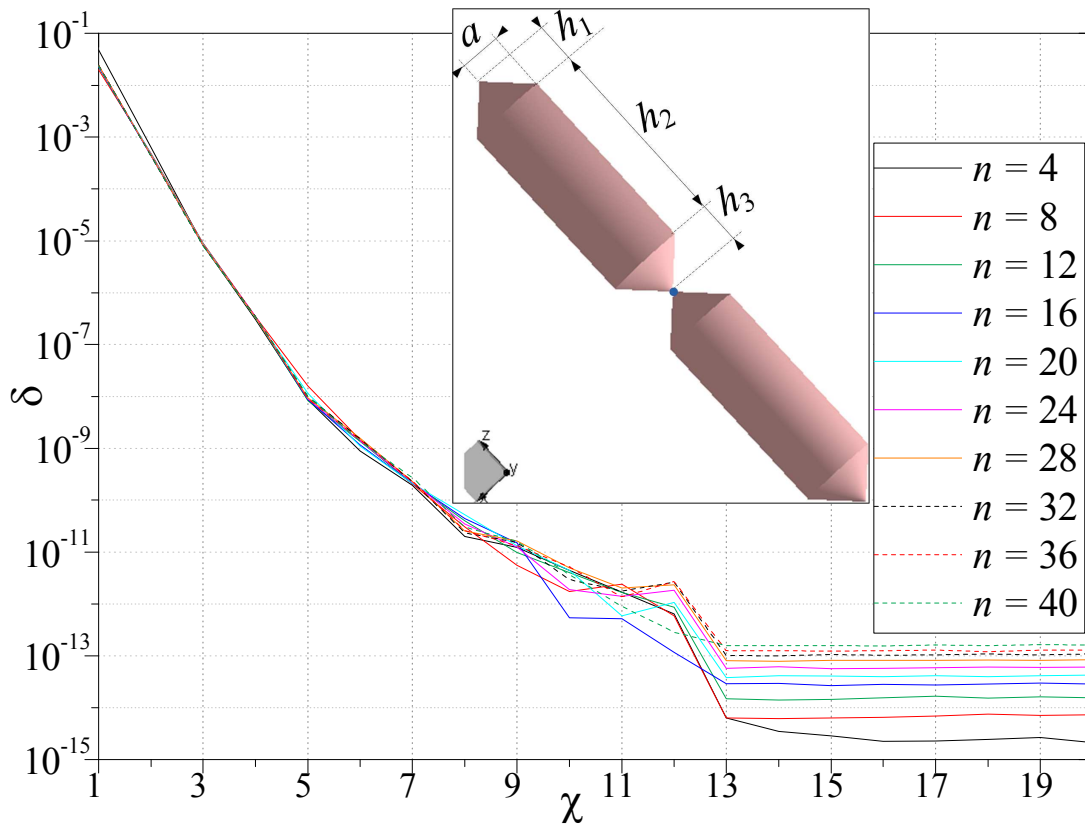
Тачност предложене методе за рачунање елемената импедансне (системске) матрице биће илустрована на примеру дебеле дипол антене и биконичне антене. Посматрајмо дебелу дипол антену моделовану од  $n_e=6$  елемената, као што је приказано у инсерту слике 3.27. Димензије антене са слике су  $h_{1,3} = a = 0,15 \lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2} \lambda$ . Слика 3.27 приказује релативну средњу квадратну грешку (Root Mean Square - RMS) импедансне матрице у зависности од прописаног (жељеног) броја цифара тачности  $\chi$  за неколико степена апроксимације  $n$ . Релативна средња квадратна грешка импедансне матрице дефинисана је као

$$\delta = \frac{\|Z - Z_{\text{ref}}\|_F}{\|Z_{\text{ref}}\|_F}, \quad (3.31a)$$

где је  $Z_{\text{ref}}$  референтна системска матрица добијена коришћењем интеграционе формуле максималног реда, а  $\|\cdot\|_F$  Фробениусова норма дата изразом

$$\|Z_{\text{ref}}\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |Z_{ji}|^2}. \quad (3.316)$$

Са слике 3.27 види се да алгоритам за рачунање елемената системске матрице обезбеђује жељену тачност (са специфицираним или већим бројем цифара тачности), без обзира на коришћени степен апроксимације. Такође, види се да се са повећавањем степена апроксимације смањује максимална тачност која може да се постигне.

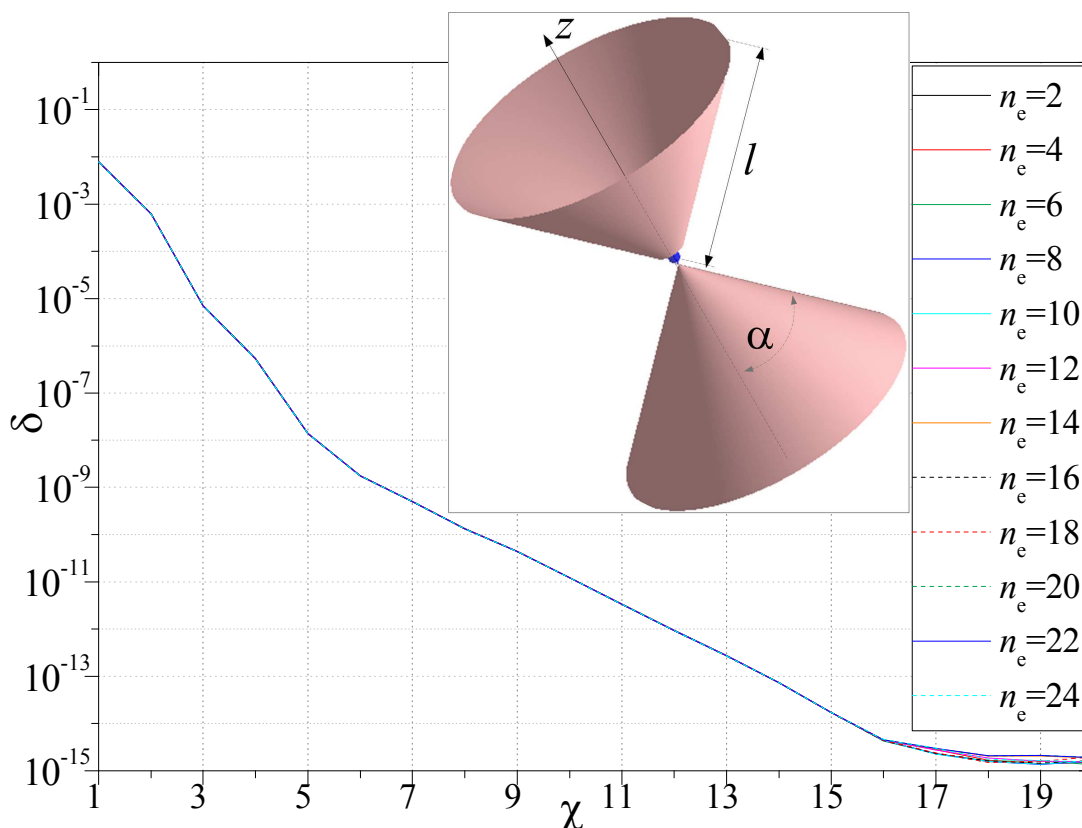


Слика 3.27. Релативна RMS грешка  $\delta$  импедансне матрице за дебелу дипол антену у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$  за неколико вредности степена апроксимације  $n$ . (Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

Тачност рачунања импедансне матрице је такође разматрана на примеру биконичне антене. Угао између генератрисе и осе антене је  $\alpha = 66,774^\circ$ . Антена је моделована од  $n_e$  елемената где је сваки дужине  $2,5\lambda$  (тотална дужина крака је  $l = n_e 2,5\lambda$ ), као што је приказано у инсерту слике 3.28. Степен апроксимације за

сваки елемент је  $n = 10$ . На слици 3.28 приказана је релативна средња квадратна грешка  $\delta$  импедансне матрице посматране антене у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$ , за неколико вредности броја елемената  $n_e$ .

Са слике 3.28 се види да се жељена тачност постиже применом предложеног алгоритма за процену броја тачака интеграције. Максимална тачност која може да се постигне (од око  $10^{-15}$ ) је иста за све случајеве без обзира на број елемената  $n_e$ .



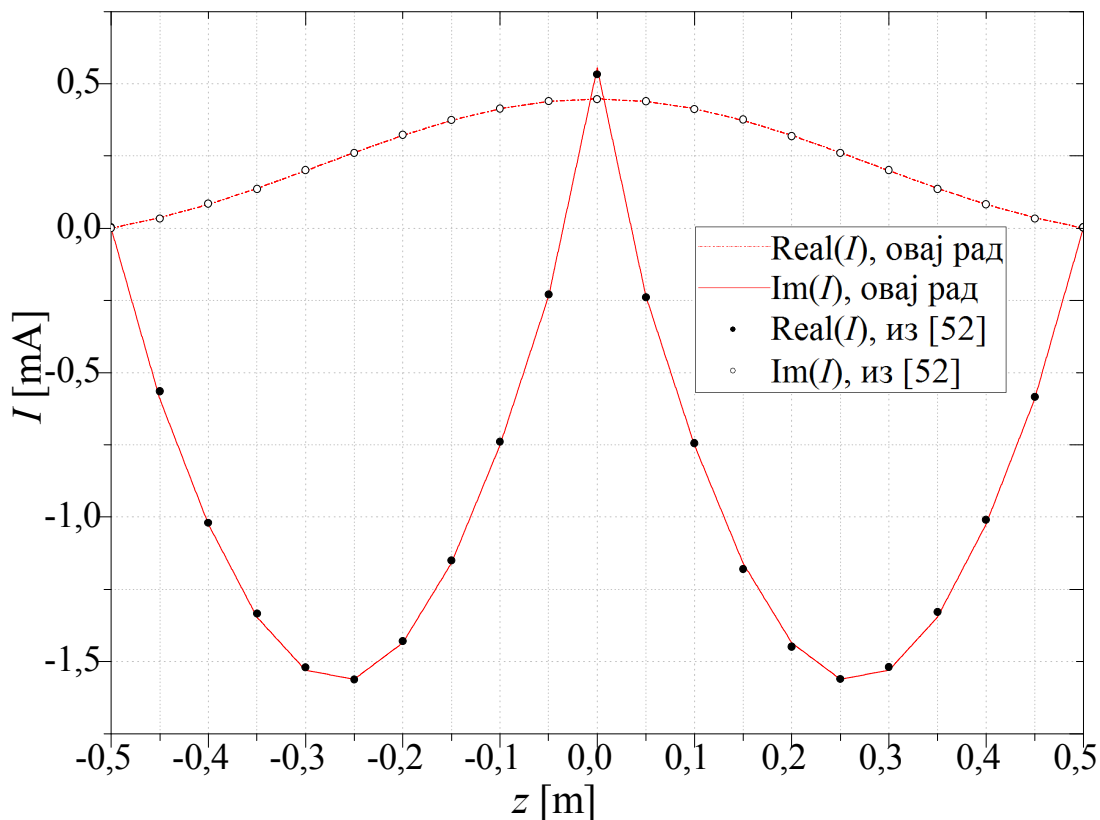
Слика 3.28. Релативна RMS грешка  $\delta$  импедансне матрице биконичне антене у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$  за неколико вредности броја елемената  $n_e$  и степен апроксимације  $n = 10$ . (Димензије антене:  $l = n_e 2,5 \lambda$  и  $\alpha = 66,774^\circ$ .)

## 3.2. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ У СЛУЧАЈУ МОДИФИКОВАНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

### 3.2.1. Поређење са другим методама

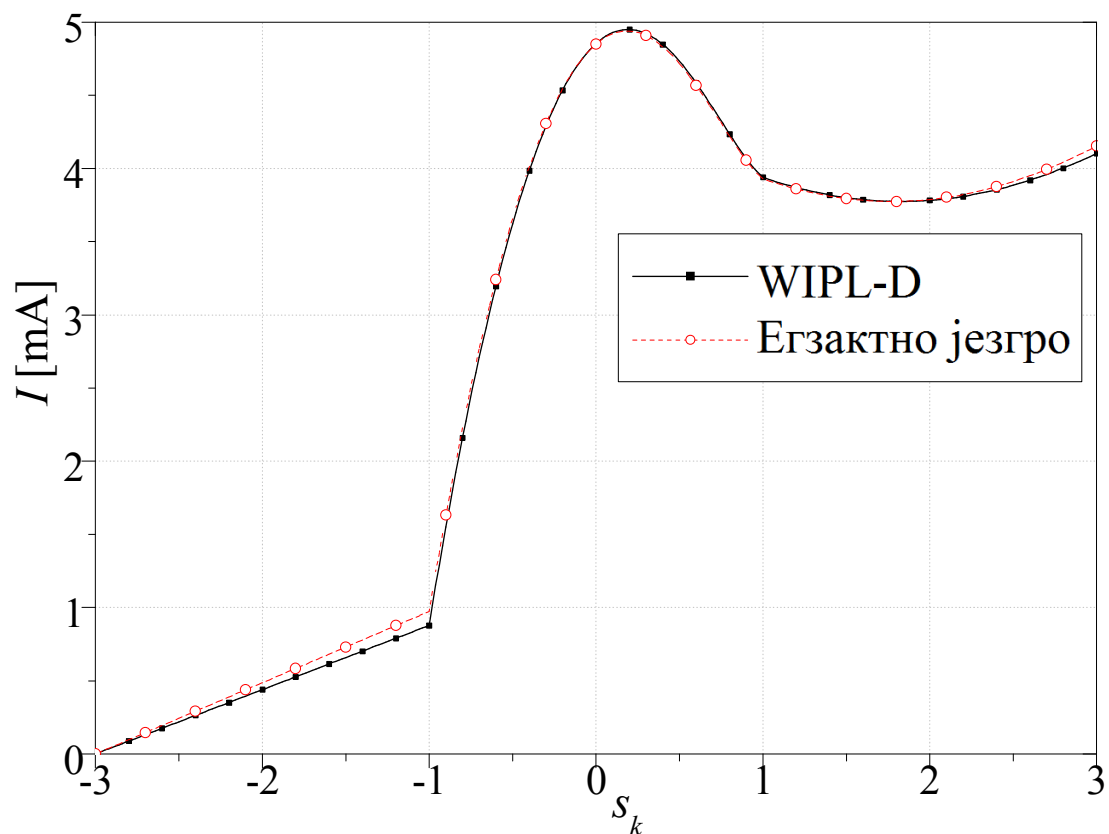
На слици 3.29 нумерички резултати за струју дуж дипол антене дугачке 1 m, упоређени су са резултатима методе из [52]. Дипол антена, полупречника 1 mm, побуђена је у свом центру са тачкастим напонским генератором учестаности  $f = 300$  MHz. Дипол је моделован помоћу  $n_e = 20$  цилиндричних елемената

коришћењем степена апроксимације  $n=1$  за струју, као у [52]. Резултати су добијени за  $\chi=2$  цифре тачности и практично се преклапају са резултатима из [52].



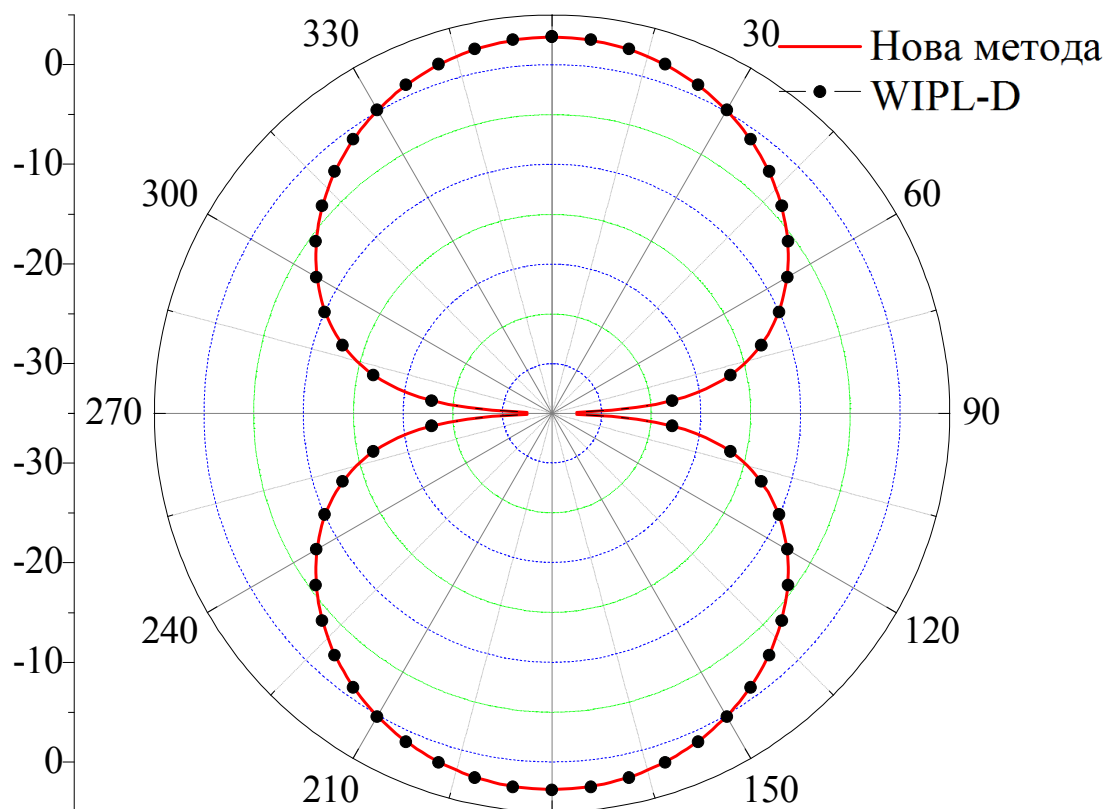
Слика 3.29. Резултати за струју дуж дипол антене упоређени са [52]. Дужина, полупречник и број елемената дипол антене су  $l = 1 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$  и  $n_e = 20$ .

Следећи пример који је анализиран је симетрична танка дипол антена приказана у инсерту слике 3.27. Побуђена је тачкастим напонским генератором напона  $U=1 \text{ V}$ . Дипол је моделован помоћу  $n_e=6$  елемената, а његове димензије са слике су  $h_{1,3} = 0,03 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0,3 \text{ m}$  и  $a = 3 \text{ mm}$ . Степен апроксимације за коничне елементе је  $n=1$ , а за цилиндричне је  $n=2$ . На слици 3.30 резултати за струју дипола дуж локалне  $s$ -координате која одговара средишњем елементу крака, упоређени су са резултатима WIPL-D програма [115]. На слици 3.31 упоређени су дијаграми зрачења за ове две методе у равни која садржи осу дипола.



Слика 3.30. Струја дипол антене дуж локалне  $s$ -координате средишњег (другог) елемента упоређена са резултатима WIPL-D софтвера.

Са слика 3.30 и 3.31 може се видети да се резултати нове методе јако добро поклапају са резултатима симулација WIPL-D софтвера. Мања одступања резултата постоје због различитих кернела које користе посматране методе (егзактно насупротив редукованог језгра).

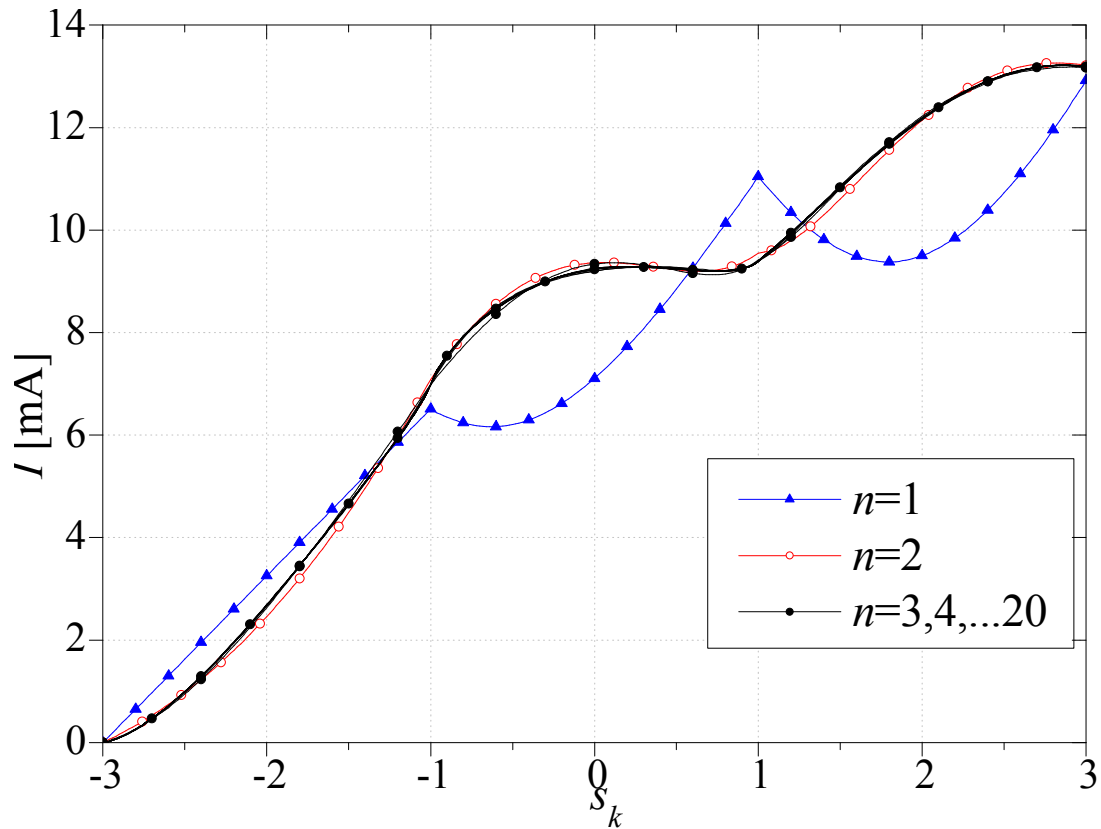


Слика 3.31. Поларни дијаграм за добитак  $G$  [dB] дипол антене упоређен са резултатима WIPL-D софтвера, у равни која садржи осу дипола.

### 3.2.2. Примери који показују предности рачунања импедансних интеграла са великом тачношћу

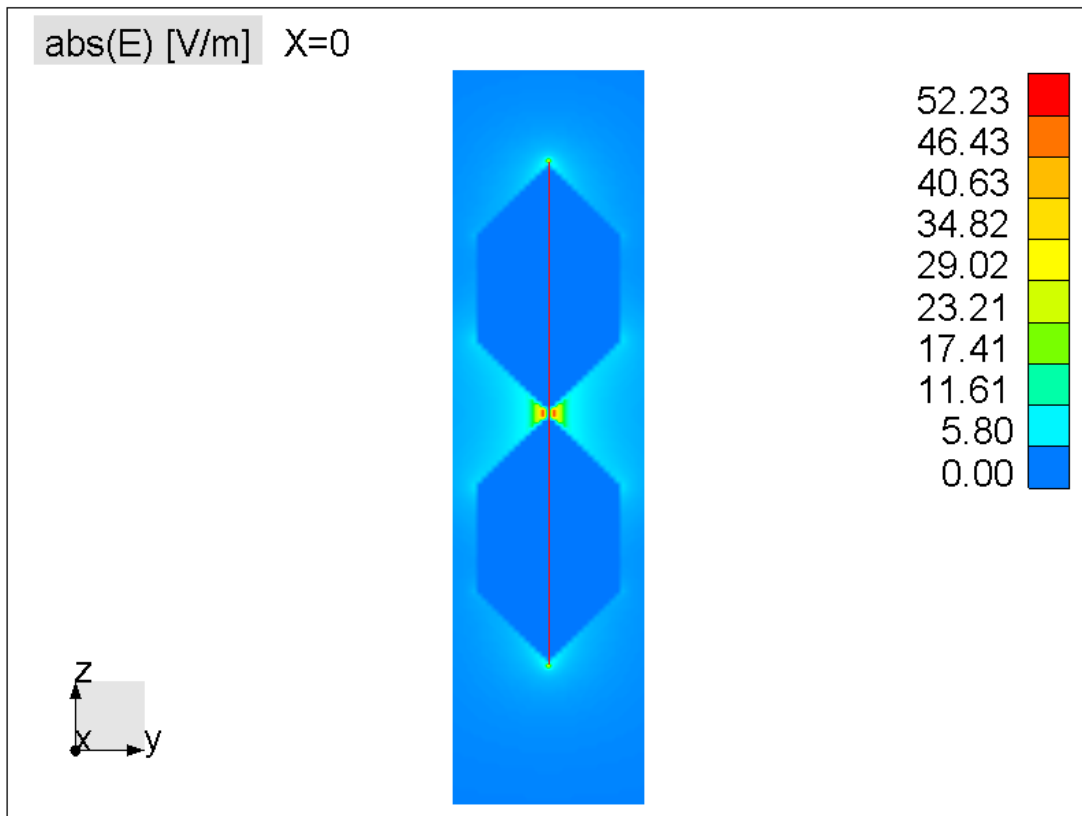
Предност рачунања импедансних интеграла са жељеном тачношћу је илустрована на неколико примера. Посматрајмо прво дебелу дипол антену из прилога слике 3.27, чије су димензије са слике  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$  (укупна дужина антене је  $l = 0,512\text{ m}$ ). На слици 3.32 међусобно су упоређени резултати за расподелу струје дуж крака дипола (локална  $s_k$ -координата одговара средишњем елементу крака) за неколико вредности степена апроксимације  $n$ . Са слике се може уочити да резултати конвергирају са повећањем реда апроксимације и да је већ са трећим редом релативна грешка мања од 1,4%.





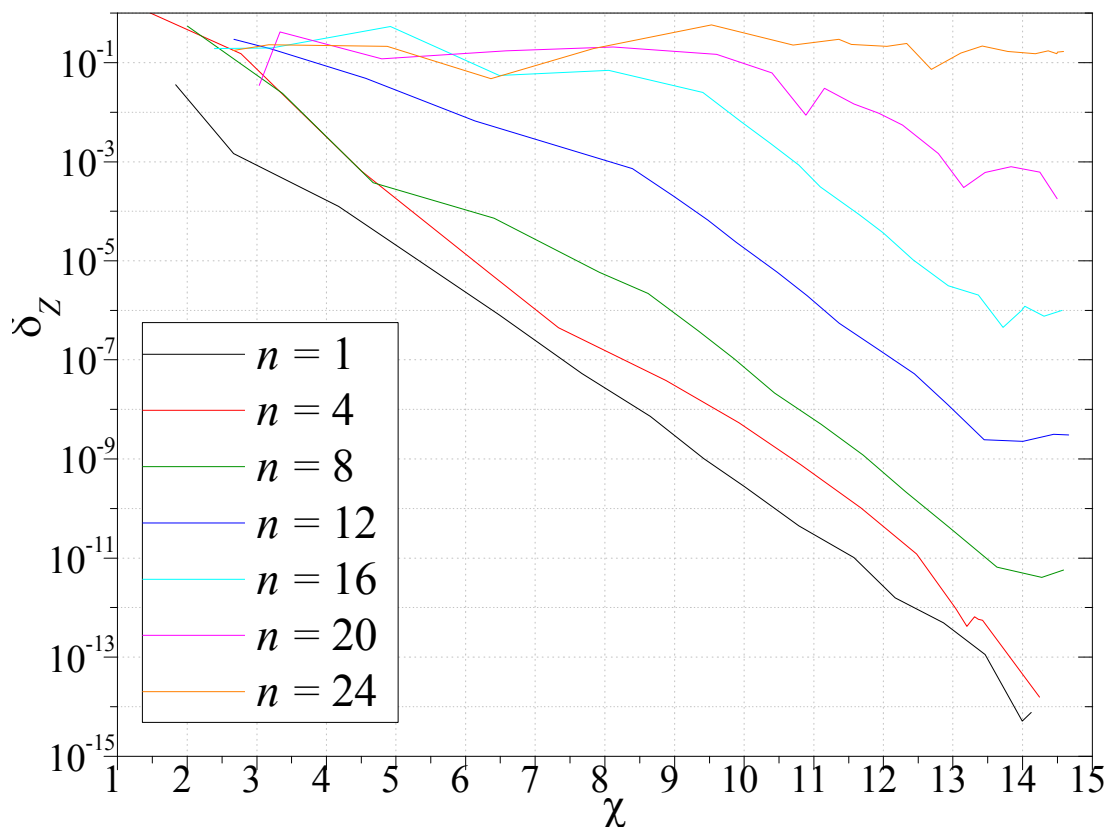
Слика 3.32. Струја дуж крака дебеле дипол антене (локална  $s_k$ -координата одговара средишњем елементу крака) за неколико вредности степена апроксимације  $n$ .  
(Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

На слици 3.33 приказано је блиско поље дипол антене на уздужном пресеку који садржи њену осу симетрије. С обзиром на то да је поље у савршеном проводнику нула, прорачунато поље унутар проводника може се употребити као мера квалитета решења. У овом случају електрично поље унутар дипола је око  $0,5 \text{ V/m}$  што је занемарљиво мало у поређењу са максималном вредношћу електричног поља на дијаграму.



Слика 3.33. Блиско поље дипол антене на уздужном пресеку који садржи њену осу симетрије.  
(Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

Као следећи пример посматрајмо биконичну антену чији је крак дужине  $l = 60\lambda$ , а угао отвора  $\alpha = 66,774^\circ$ , као што је приказано у инсерту слике 3.28. Улазна импеданса  $Z_\chi$  је рачуната са  $\chi$  постигнутих цифара тачности системске матрице. Релативна грешка од  $Z_\chi$  је рачуната према  $Z_{15}$ , односно за референтну вредност улазне импедансе узет је случај кад је постигнут максималан број цифара тачности,  $\chi = 15$ . На слици 3.34 приказана је релативна грешка  $\delta_Z = |Z_\chi - Z_{15}| / |Z_{15}|$  у зависности од  $\chi$ , за неколико случајева  $p$ - и  $h$ -рафинације. У свим ситуацијама број непознатих је  $N = 479$ . Коришћени редови развоја су  $n = 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24$  (и једнаки су за све елементе), а број елемената се добија на основу  $n_e = 480/n$ .



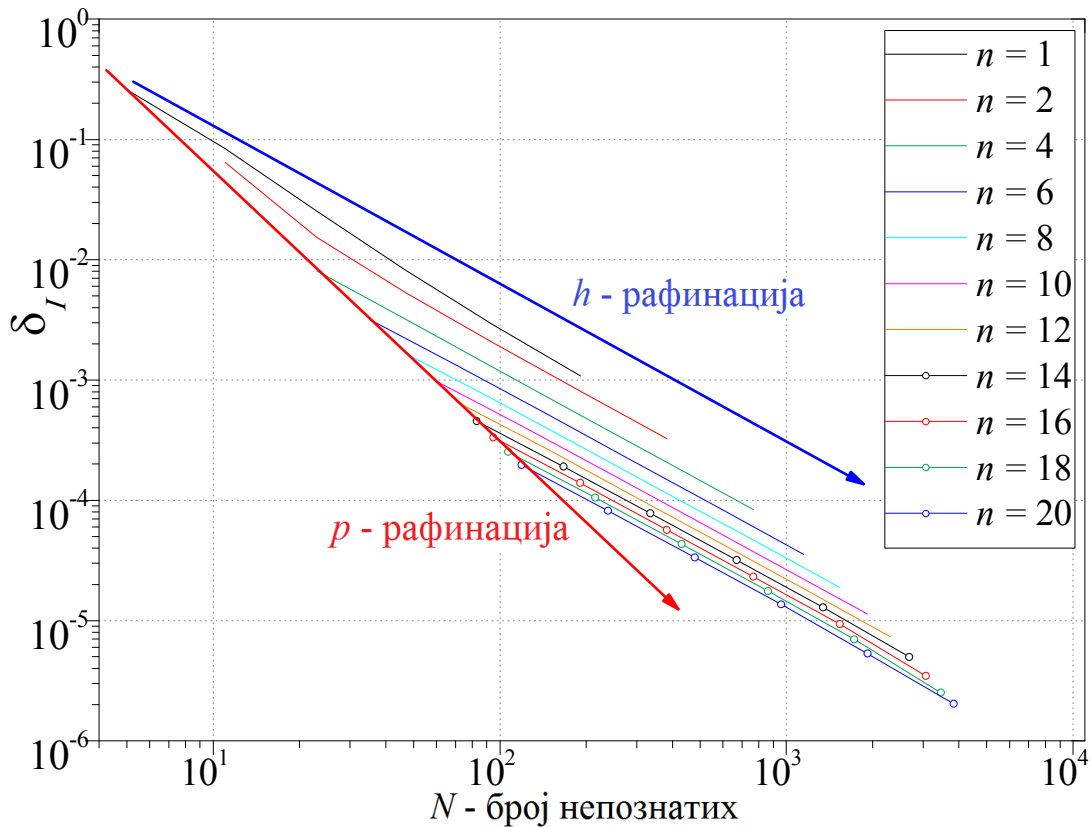
**Слика 3.34.** Релативна грешка улазне импедансе биконичне антене (приказане у инсерту слике 3.28) у зависности од постигнутог броја цифара тачности  $\chi$  системске матрице, за неколико вредности степена апроксимације  $n$  и броја елемената  $n_e = 480/n$ . (Димензије антене:  $l = 60\lambda$ ,  $\alpha = 66,774^\circ$ .)

Резултати са слике показују да, после решавања система једначина, одређен број цифара тачности се губи осим за степен апроксимације  $n=1$ . За степен апроксимације  $n=4$  само 0,5 цифара тачности се губи. Са сваки повећањем степена апроксимације за  $\Delta n = 4$  у просеку се губи додатних 2,5 цифара тачности. Губитак цифара тачности се објашњава чињеницом да је условљеност системске матрице лошија (кондициони број се повећава) са повећањем реда развоја који се користи у анализи. Са слике такође можемо закључити да је максимални ред апроксимације који се може користити за прецизну ЕМ анализу у обичној прецизности једнак  $n = 10$ , док је у случају дупле прецизности максималан ред једнак  $n = 20$ .

На слици 3.35 приказана је релативна средња квадратна грешка  $\delta_I$  расподеле струје дуж дебеле дипол антене (приказане у инсерту слике 3.27) у зависности од броја непознатих  $N$  за неколико редова експанзије  $n$ .  $\delta_I$  се рачуна као

$$\delta_I = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n_e} e_{sk} \int_{-1}^1 |I(s_k) - I_{\text{ref}}(s_k)|^2 ds_k}{\sum_{k=1}^{n_e} e_{sk} \int_{-1}^1 |I_{\text{ref}}(s_k)|^2 ds_k}}, \quad (3.32)$$

где је  $I_{\text{ref}}$  је референтна вредност за струју. Број непознатих  $N$  се повећава дељењем сваког од почетних 6 елемената на  $n_s = 2^k$ ,  $k=0,1,2,3,4,5$ , мањих елемената (подсегмената). Референтно решење за расподелу струје  $I_{\text{ref}}$  је добијено коришћењем реда апроксимације  $n = 20$  и броја подсегмената  $n_s = 64$ .

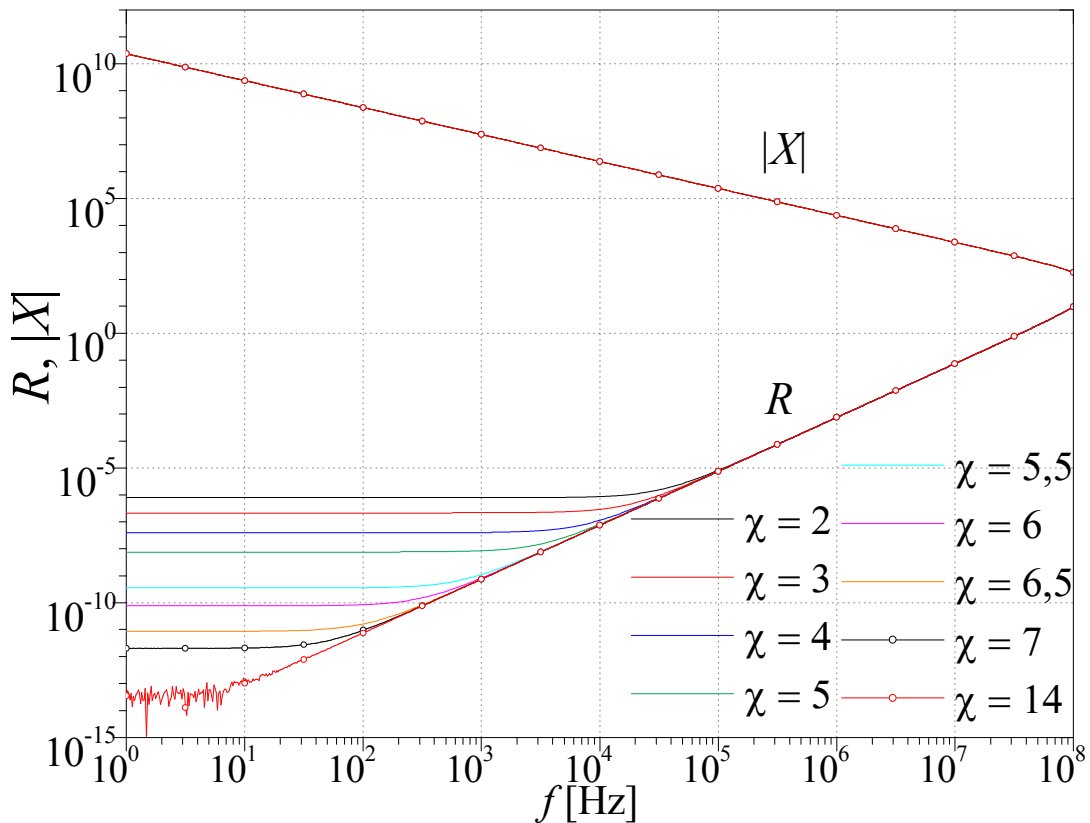


Слика 3.35. Релативна средња квадратна грешка расподеле струје дуж дебеле дипол антене (приказане у инсерту слике 3.27) у зависности од броја непознатих  $N$ .  
(Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

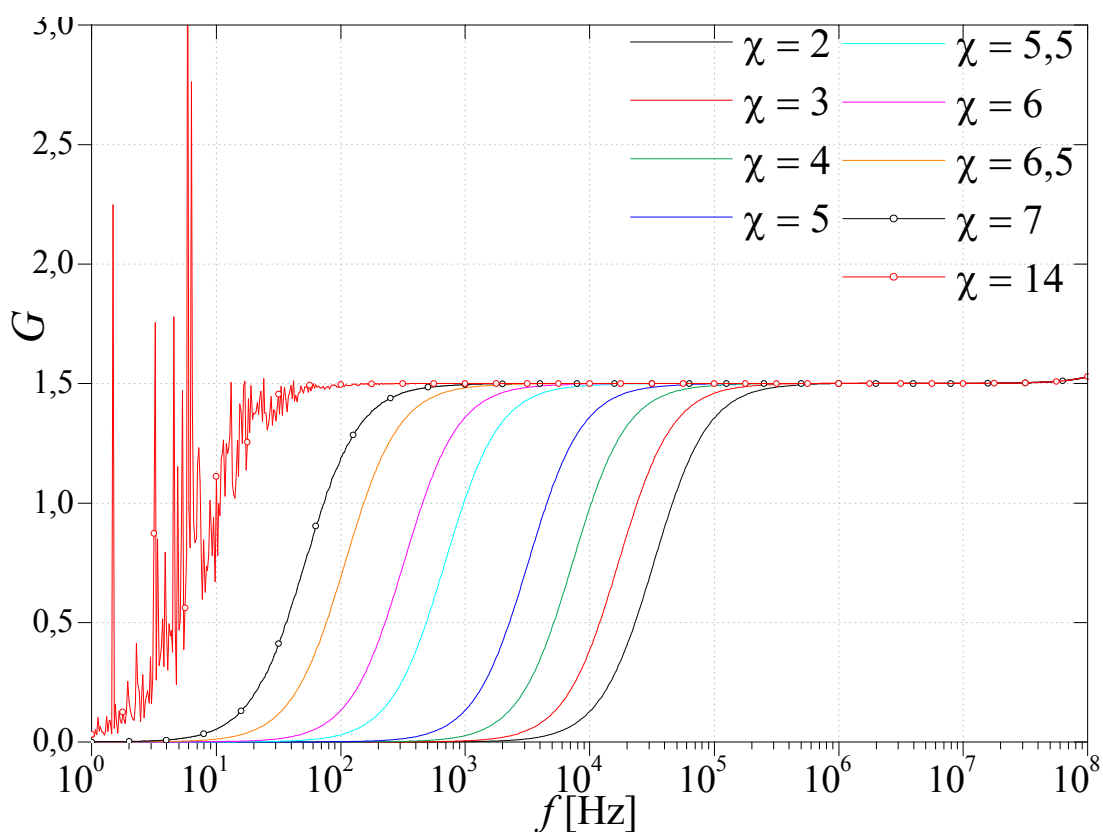
Са слике 3.35 се може видети да се тачност резултата повећава практично линеарно у логаритамској скали са повећањем броја непознатих  $N$ , добијеног или са повећањем степена апроксимације  $n$  ( $p$ -рафинација) или са повећањем броја подсегмената  $n_s$  ( $h$ -рафинација). Да би се грешка  $\delta_I$  смањила за ред величине (10 пута) број непознатих  $N$  треба повећати а) око 2,7 пута у случају  $p$ -рафинације или б) око 5 пута у случају  $h$ -рафинације. Са слике 3.35 се такође може уочити да се

због рачунања системске матрице са великом тачношћу релативна средња квадратна грешка струје може лако спустити на  $\sim 10^{-6}$  коришћењем реда апроксимације  $n=20$ .

Утицај тачности рачунања импеданских интеграла на ефекат краха на ниским учестаностима (low-frequency breakdown) је анализиран на примеру умерено дебеле дипол антене димензија  $h_{1,3} = a = 0,03 \text{ m}$  и  $h_2 = 0,3 \text{ m}$  (приказане у инсерту слике 3.27). Степен апроксимације  $n=3$  је коришћен за свих шест елемената. На сликама 3.36 и 3.37 приказане су улазна импеданса и добитак антене у зависности од учестаности (у логаритамској скали од 1 Hz до  $10^8$  Hz) за разне вредности постигнутог броја цифара тачности  $\chi$  системске матрице. Добитак антене је рачунат у смеру који одговара углу азимута  $\varphi=0$  и углу елевације  $\theta=0$  у сферном координатном систему.

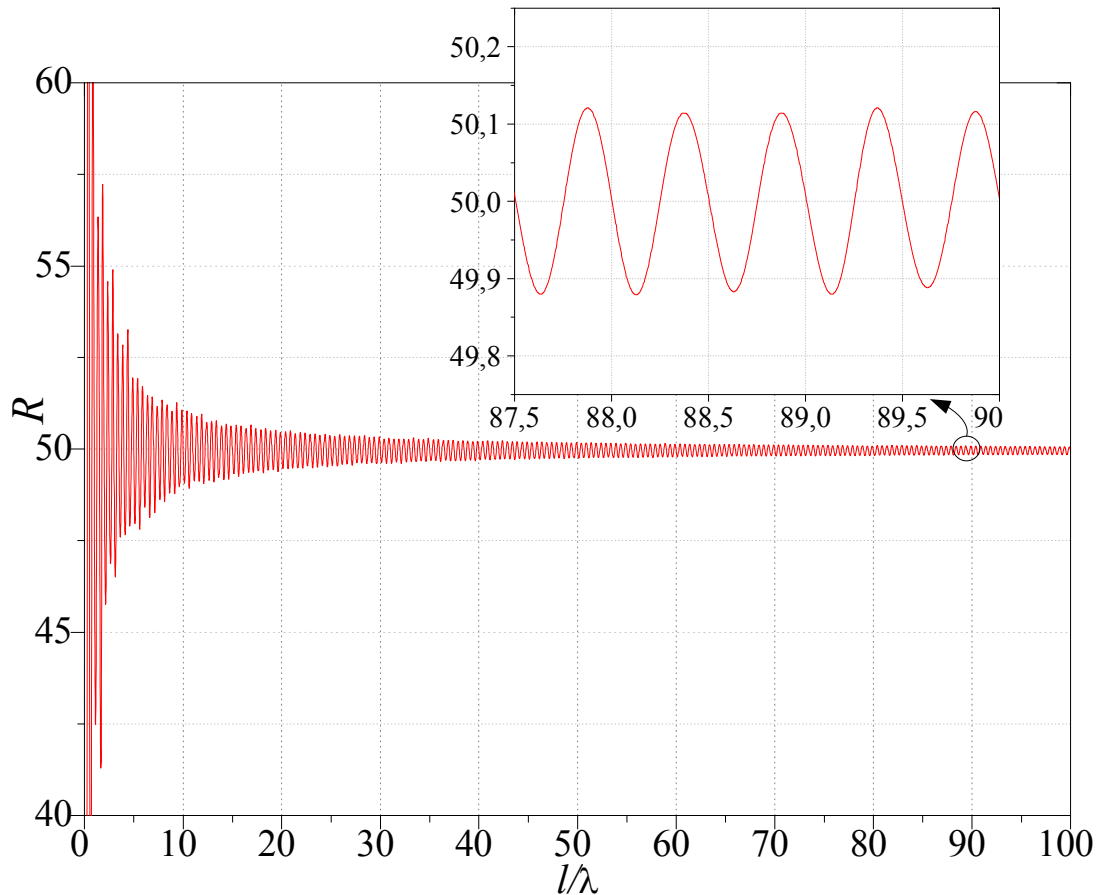


Слика 3.36. Улазна импеданса  $Z = R + jX$  у зависности од учестаности  $f$  (у логаритамској скали) за умерено дебелу дипол антену (приказану у инсерту слике 3.27).  
(Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,3 \text{ m}$  и  $h_2 = 0,03 \text{ m}$ .)



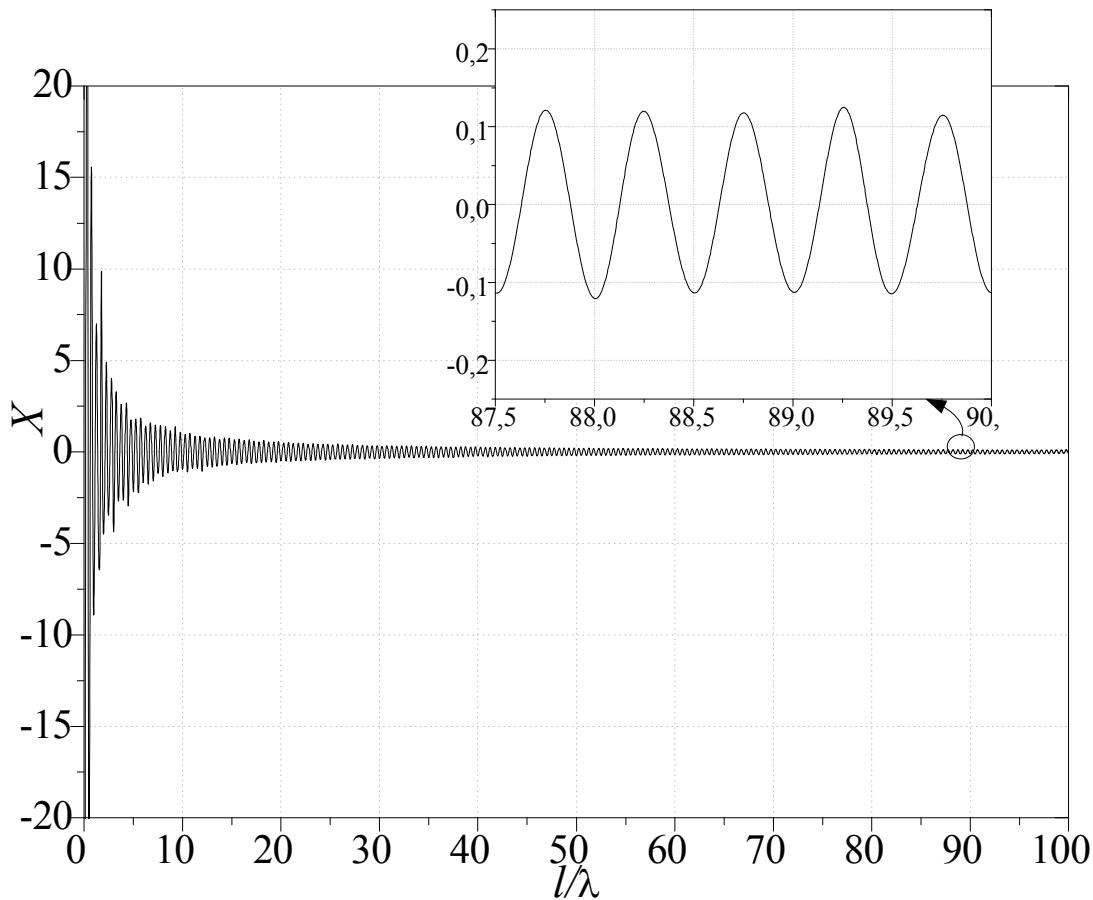
Слика 3.37. Добитак умерено дебеле дипол антене (приказане у инсерту слике 3.27) у смеру  $\varphi=0, \theta=0$  у зависности од учестаности  $f$ . (Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,3 \text{ m}$  и  $h_2 = 0,03 \text{ m}$ .)

Са слике се види да се са смањењем учестаности смислени резултати за улазну импедансу и добитак могу добити повећањем броја постигнутих цифара тачности  $\chi$  системске матрице. Најнижа учестаност где долази до краха резултата је  $f=30 \text{ MHz}$  и постигнута је за  $\chi > 8$ .



**Слика 3.38.** Улазна резистанса  $R$  биконичне антене угла отвора  $\alpha = 66,774^\circ$  (приказане у инсерту слике 3.28) у зависности од електричне дужине  $l/\lambda$ .

Слике 3.38 и 3.39 приказују резултате за реални и имагинарни део улазне импедансе биконичне антене,  $Z = R + jX$ , у зависности од електричне дужине крака  $l/\lambda$ . Биконична антена има угао отвора  $\alpha = 66,774^\circ$  (видети прилог слике 3.28). Са повећањем електричне дужине  $l$  до  $100\lambda$  број елемената расте до 100, тако да се коришћењем реда апроксимације  $n=10$  за све елементе број непознатих по таласној дужини одржава већим или једнаким од 5. Теоријски, улазна импеданса бесконачно дугачке биконичне антене угла отвора  $\alpha = 66,774^\circ$  је  $Z = 50,00 \Omega$ . Са слика се види да са повећањем електричне дужине крака биконичне антене  $l/\lambda$  1) реални и имагинарни део осцилују око  $50,00 \Omega$  и  $0,00 \Omega$ , и да 2) се амплитуде осцилација смањују од  $\sim 20 \Omega$  до  $\sim 0,1 \Omega$ .

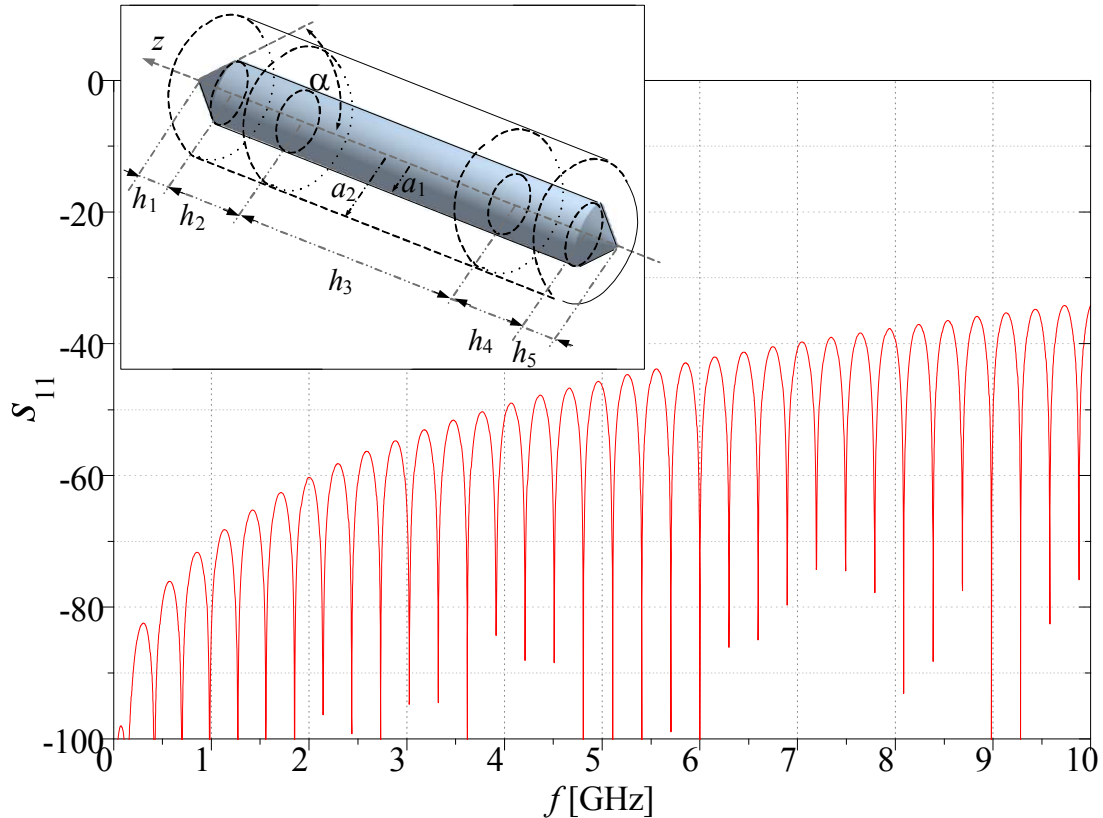


Слика 3.39. Улазна реактанса  $X$  биконичне антене угла отвора  $\alpha = 66,774^\circ$  (приказане у инсерту слике 3.28) у зависности од електричне дужине  $l/\lambda$ .

На слици 3.40  $s_{11}$  параметар за коаксијални кабл је анализиран у зависности од учестаности (од 10 MHz до 10 GHz). Коаксијални кабл је приказан у инсерту слике 3.40. Полупречници унутрашњег и спољашњег проводника су  $a_1 = 1 \text{ mm}$  и  $a_2 = 2,30 \text{ mm}$ , чиме је остварена карактеристична импеданса вода од  $Z_c = 50 \Omega$ . Коаксијални кабл је моделован помоћу 12 елемената (5 елемента за унутрашњи проводник и 7 за спољашњи, што се може видети у инсерту слике 3.40). Два елемента представљају регију напајања и формирају угао  $\alpha = 50^\circ$  са  $z$ -осом (њихова дужина је  $h_{1,5} = 0,84 \text{ mm}$ ). Димензије равног дела коаксијалног кабла са слике су  $h_{2,4} = 1 \text{ mm}$  и  $h_3 = 497,65 \text{ mm}$  (укупна дужина кабла је  $l = 501,33 \text{ mm}$ ). Ред апроксимације за све елементе је  $n = 5$ , осим за два дугачка цилиндрична елемента (дужине  $h_3$ ) за које је  $n = 10$ . Са повећањем учестаности два дуга цилиндрична елемента се додатно деле на мање делове, тако да је број непознатих по таласној дужини минимално 6. Резултати са слике 3.40 показују да се,



коришћењем коничне регије напајања са оптималним углом  $\alpha$ , вредност параметра  $s_{11}$  може спустити и на  $-100$  dB. Са повећањем учестаности вредност  $s_{11}$  параметра расте, јер се повећава електрична дужина регије напајања, а и рефлексије постају изражене.



Слика 3.40.  $s_{11}$  параметар коаксијалног кабла са коничном регијом напајања на оба краја, у зависности од учестаности. (Димензије коаксијалног кабла су:  $h_{1,5} = 0,84$  mm ,  $h_{2,4} = 1$  mm ,  $h_3 = 497,65$  mm ,  $a_1 = 1$  mm ,  $a_2 = 2,3$  mm и  $\alpha = 50^\circ$  .)

### 3.2.3. Ефикасност предложеног алгоритма

Ефикасност метода за нумерички прорачун импеданских интеграла може се мерити на основу средњег броја тачака интеграције по једном елементу системске матрице,  $N_p$ . Минимални број тачака интеграције је потребан за матричне елементе који представљају спрегу функција базиса које припадају удаљеним елементима (где важи  $d_0 \gg 2$  из (3.7) и  $\Delta R' \rightarrow 0$  из (3.20б)), па је довољна директна интеграција. Ако узмемо у обзир да се за све функције базиса на истом елементу користе исте тачке интеграције, средњи минимални број тачака

интеграције за сваку од три интеграције се може проценити из (3.10), (3.20) и (3.30) као

$$N_{1,\min} = (\sqrt{26,07\chi + 52,01} + 6e_s / \lambda) / n + 1,5, \quad (3.33a)$$

$$N_{2,\min} = 1,35\chi + 8,23, \quad (3.33b)$$

$$N_{3,\min} = \max[3, (3,5\chi - 5,5 + 6e_s / \lambda + 1,5n)] / n, \quad (3.33b)$$

где је  $e_s$  средња вредност за Ламеове коефицијенте  $e_{sl}$  и  $e_{sk}$ , а  $n$  средња вредност за редове апроксимација  $n_k$  и  $n_l$ . Просечан број тачака интеграције по елементу системске матрице се добија као  $N_{p,\min} = N_{1,\min} N_{2,\min} N_{3,\min}$ . Ефикасност предложених трансформација, која се рачуна као  $\eta[\%] = 100N_{p,\min} / N_p$ , је илустрована на два карактеристична примера.

Први пример је дипол антена дугачка 1 m (која је такође анализирана и у одељку 3.2.1.), која се састоји од  $n_e = 20$  кратких цилиндричних елемената ( $e_s = 0,025$  m) са малим полупречником ( $a = 1$  mm) [52]. Учестаност анализе је  $f = 300$  MHz. Коришћен је најнижи ред апроксимације  $n = 1$ . Резултати приказани на слици 3.29 су добијени коришћењем  $\chi = 2$  цифре тачности са ефикасношћу од  $\eta = 27,7$  % ( $N_p = 1382$ ). За  $\chi = 15$  ефикасност је  $\eta = 45,1$  % ( $N_p = 69034$ ).

Други пример је биконична антена из прилога слике 3.28 чија је дужина крака  $l = 100\lambda$ . Моделована је помоћу  $n_e = 100$  елемената, тако да је сваки елемент дугачак  $2\lambda$ . Степен апроксимације за струју је  $n = 10$  за сваки елемент. Резултати са слика 3.38 и 3.39 су добијени коришћењем  $\chi = 5$  цифара тачности са ефикасношћу од  $\eta = 9,1$  % ( $N_p = 1874$ ). За  $\chi = 15$  цифара тачности ефикасност је  $\eta = 12,6$  % ( $N_p = 6464$ ). Пад у ефикасности у поређењу са првим примером се објашњава чињеницом да за већину елемената системске матрице у случају биконичне антене није испуњен услов  $\Delta R' \rightarrow 0$  и да електрична дужина путање за другу интеграцију иде и до вредности  $\sim 289\lambda$ .

#### **4. ЕФИКАСНО КОРИШЋЕЊЕ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА У РАЗВОЈИМА ЗА СТРУЈЕ УЛТРА ВИСОКОГ РЕДА**

У претходној глави је предност  $p$ -рафинације над  $h$ -рафинацијом потврђена и у случају нове методе, коришћењем реда апроксимације од  $n = 1$  до  $n = 20$ . Међутим,  $p$ -рафинација је у случају модификованих функција базиса ограничена максимално на ред  $n = 10$  у обичној прецизности, а у дуплој прецизности на ред  $n = 20$  (слика 3.34).

Ово се објашњава чињеницом да са повећањем реда развоја преко ових граница системска матрица методе момената постаје лоше условљена (кондициони број је превелик), па резултати постају нестабилни и нетачни. У [54], [86]-[92] је утврђено да у случају модификованих функција базиса кондициони број системске матрице расте веома брзо са порастом реда развоја, а да се може значајно спустити ако се користе функције базиса са ортогоналним својствима, као што су "near-ortho" функције базиса [92] и макс-орто функција базиса [56]. Посебно, у случају макс-орто функција базиса кондициони број практично не зависи од реда апроксимације коришћеног за симулације [56]. Из тог разлога може се претпоставити да би примена макс-орто функција базиса у новој методи (уместо модификованих) проширила горе поменуте границе за максимални ред апроксимације, под условом да се елементи нове системске матрице (импедансни интегрални) рачунају са довољно великом тачношћу.

Да би се омогућило рачунање системске матрице са великом тачношћу, матрични елементи су представљени у виду линеарне комбинације импеданских интеграла у којима фигуришу Лежандрови полиноми и њихови изводи, а ови интегрални су у случају сингуларног или квази-сингуларног понашања рачунати применом методе поништавања сингуларитета. Посебно, Лежандрови полиноми и њихови изводи су рачунати коришћењем добро познатих рекурентних формула. На овај начин омогућена је примена ултра високих редова апроксимације, који су тестирани до  $n = 128$ . Предности коришћења ултра високих редова развоја илустроване су на неколико нумеричких примера.

#### 4.1. ОПИС МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА

Две функције базиса су ортогоналне ако је њихов унутрашњи производ једнак нули, тј.

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-1}^1 f_i \cdot f_j ds = 0, \quad (4.1)$$

за  $i \neq j$ . Потпуна ортогоналност полиномских функција базиса које аутоматски задовољавају једначину континуитета није могућа због захтева да све функције базиса имају нулте вредности у  $s = \pm 1$ , сем  $f_0$  која има ненулту вредност у  $s = -1$ , и  $f_1$  која има ненулту вредност у  $s = 1$ . Максимална ортогоналност која се може постићи је да услов ортогоналности (4.1) буде задовољен за унутрашњи производ свих парова функција базиса осим за пар  $\langle f_1, f_0 \rangle$ . Функције базиса са овим својством се називају макс-орто или максимално ортогонализоване функције базиса.

У поступку добијања макс-орто функција базиса може се поћи од различитих полиномских функција базиса које аутоматски задовољавају једначину континуитета струја. Показује се да се у свим случајевима добијају макс-орто функције базиса истог облика. Оне се једноставно могу изразити коришћењем рекурентних формула у функцији Лежандрових полинома,  $L_i(s)$ , [56]

$$f_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_0(s) \mp L_1(s)) + \sum_{k=2}^n D_{ik} f_k(s), & i = 0, 1 \\ L_2(s) - L_0(s), & i = 2, \\ L_3(s) - L_1(s), & i = 3 \\ L_i(s) - L_{i-2}(s) + D_i f_{i-2}(s), & i = 4, \dots, n \end{cases} \quad (4.2a)$$

$$D_i = \frac{2}{(2i-3)\langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle}, \quad i = 4, \dots, n, \quad (4.2b)$$

$$D_{ik} = \frac{\langle L_0 \mp L_1, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle}, \quad i = 0, 1, \quad k = 2, \dots, n. \quad (4.2b)$$

Треба уочити да се код примене ове формуле прво рачунају функције базиса за  $i = 2, \dots, n$  (синглети), па тек онда за  $i = 0, 1$  (дублети).

У табели III представљени су синглети макс-орто функције базиса закључно са редом  $n=8$ , у виду линеарне комбинације Лежандрових полинома, а у табели VI представљени су дублети ових функција базиса.

ТАБЕЛА III  
МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА ДО РЕДА  $n = 8$  У СЛУЧАЈУ СИНГЛЕТА,  
ПРЕДСТАВЉЕНЕ КАО ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ЛЕЖАНДРОВИХ ПОЛИНОМА

$i$	$f_i$
2	$L_2 - L_0$
3	$L_3 - L_1$
4	$\frac{1}{6}(6L_4 - 5L_2 - L_0)$
5	$\frac{1}{10}(10L_5 - 7L_3 - 3L_1)$
6	$\frac{1}{15}(15L_6 - 9L_4 - 5L_2 - L_0)$
7	$\frac{1}{21}(21L_7 - 11L_5 - 7L_3 - 3L_1)$
8	$\frac{1}{28}(28L_8 - 13L_6 - 9L_4 - 5L_2 - L_0)$

ТАБЕЛА IV  
МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА ДО РЕДА  $n = 8$  У СЛУЧАЈУ ДУБЛЕТА,  
ПРЕДСТАВЉЕНЕ КАО ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ЛЕЖАНДРОВИХ ПОЛИНОМА

$n$	$f_{0,1}^{(n)}$
1	$\mp \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_0$
2	$\frac{5}{12} L_2 \mp \frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{12} L_0$
3	$\mp \frac{7}{20} L_3 + \frac{5}{12} L_2 \mp \frac{3}{20} L_1 + \frac{1}{12} L_0$
4	$\frac{3}{10} L_4 \mp \frac{7}{20} L_3 + \frac{1}{6} L_2 \mp \frac{3}{20} L_1 + \frac{1}{30} L_0$
5	$\mp \frac{11}{42} L_5 + \frac{3}{10} L_4 \mp \frac{1}{6} L_3 + \frac{1}{6} L_2 \mp \frac{1}{14} L_1 + \frac{1}{30} L_0$
6	$\frac{13}{56} L_6 \mp \frac{11}{42} L_5 + \frac{9}{56} L_4 \mp \frac{1}{6} L_3 + \frac{5}{56} L_2 \mp \frac{1}{14} L_1 + \frac{1}{56} L_0$
7	$\mp \frac{5}{24} L_7 + \frac{13}{56} L_6 \mp \frac{11}{72} L_5 + \frac{9}{56} L_4 \mp \frac{7}{72} L_3 + \frac{5}{56} L_2 \mp \frac{1}{24} L_1 + \frac{1}{56} L_0$
8	$\frac{17}{90} L_8 \mp \frac{5}{24} L_7 + \frac{13}{90} L_6 \mp \frac{11}{72} L_5 + \frac{1}{10} L_4 \mp \frac{7}{72} L_3 + \frac{1}{18} L_2 \mp \frac{1}{24} L_1 + \frac{1}{90} L_0$

Лежандров полином  $i$ -тог реда,  $L_i(s)$ , дат је изразом

$$L_i(s) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{ds^i} [(s^2 - 1)^i] = 2^i \sum_{k=0}^i s^k \binom{i}{k} \binom{i+k-1}{i}. \quad (4.3)$$

Максимална вредност Лежандрових полинома на интервалу  $[-1, 1]$  једнака је један ( $|L_i(\pm 1)| = 1$ ). Унутрашњи производ два Лежандрова полинома има вредност

$$\langle L_i, L_j \rangle = \begin{cases} 2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (4.4)$$

Унутрашњи производ две исте функције базиса,  $\langle f_i, f_i \rangle$  за  $i \geq 2$ , који фигурише у (4.2б,в), може се представити компактним изразом применом (4.4). За  $i=2$  и  $i=3$  унутрашњи производ се добија директно из (4.2), и износи  $\langle f_2, f_2 \rangle = 12/5$  и  $\langle f_3, f_3 \rangle = 20/21$ . Уколико се за  $i \geq 4$  функција базиса  $f_i$  изрази као у (4.2), добија се

$$\langle f_i, f_i \rangle = \langle L_i - L_{i-2} + D_i f_{i-2}, L_i - L_{i-2} + D_i f_{i-2} \rangle. \quad (4.5а)$$

Разлагањем унутрашњег производа (4.5а) на појединачне чиниоце добија се

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_i \rangle = & \langle L_i, L_i \rangle - 2\langle L_i, L_{i-2} \rangle + 2D_i \langle L_i, f_{i-2} \rangle + \langle L_{i-2}, L_{i-2} \rangle \\ & - 2D_i \langle L_{i-2}, f_{i-2} \rangle + D_i^2 \langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle. \end{aligned} \quad (4.5б)$$

С обзиром на то да на основу (4.4) и (4.2) важи да је  $\langle L_i, L_{i-2} \rangle = 0$  и  $\langle L_i, f_{i-2} \rangle = 0$ , израз (4.5б) се редукује на

$$\langle f_i, f_i \rangle = \langle L_i, L_i \rangle + \langle L_{i-2}, L_{i-2} \rangle - 2D_i \langle L_{i-2}, f_{i-2} \rangle + D_i^2 \langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle. \quad (4.5в)$$

Имајући у виду то да је  $\langle L_{i-2}, f_{i-2} \rangle = \langle L_{i-2}, L_{i-2} \rangle$  и након уврштавања вредности за  $\langle L_i, L_i \rangle$  и  $\langle L_{i-2}, L_{i-2} \rangle$  (на основу (4.4)) добија се

$$\langle f_i, f_i \rangle = \frac{2}{2i+1} + \frac{2(1-2D_i)}{2i-3} + D_i^2 \langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle. \quad (4.5г)$$

Применом (4.2б), унутрашњи производ  $\langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle$  се може изразити преко коефицијента  $D_i$  као  $\langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle = 2/(D_i(2i-3))$ , па последњи члан у (4.5г) постаје  $D_i^2 \langle f_{i-2}, f_{i-2} \rangle = 2D_i/(2i-3)$ . Стога се израз (4.5г) редукује на

$$\langle f_i, f_i \rangle = \frac{2}{2i+1} + \frac{2(1-D_i)}{2i-3}, \quad i=4, \dots, n. \quad (4.5д)$$

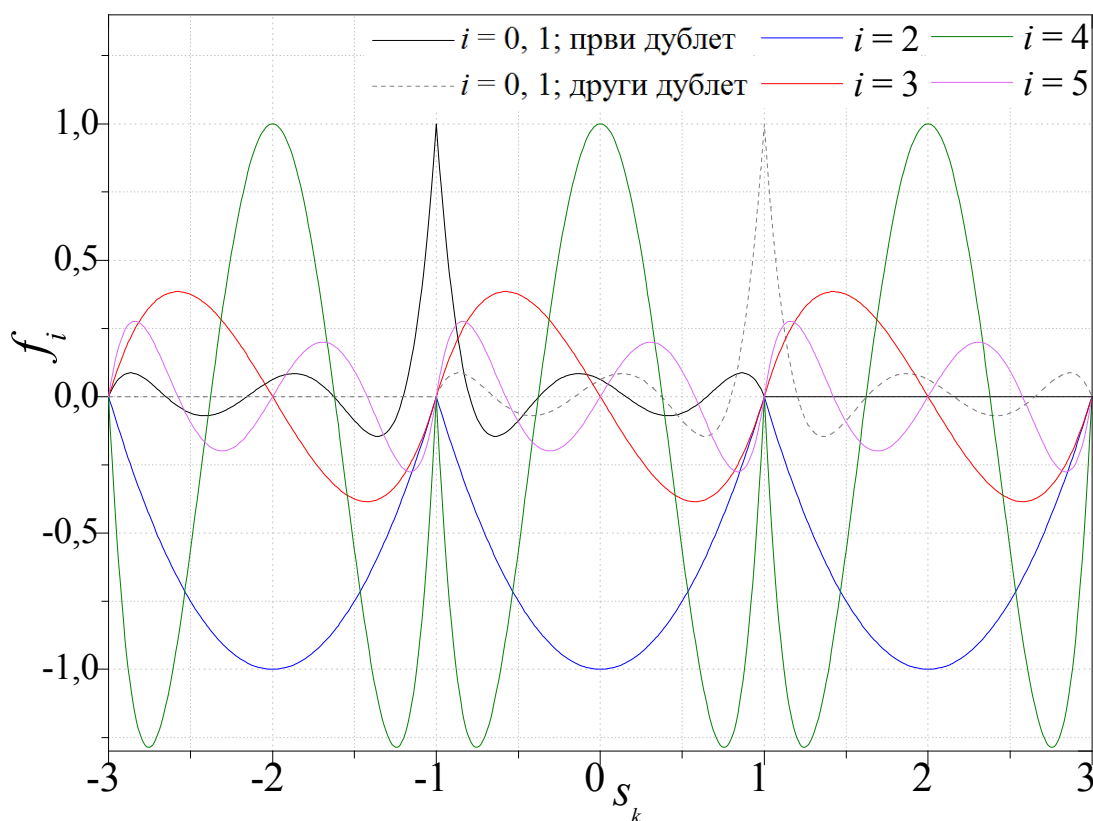
Унутрашњи производ  $\langle L_0 \mp L_1, f_k \rangle$  из (4.2в), за  $k=2$  и  $k=3$  износи  $\langle L_0 \mp L_1, f_2 \rangle = -2$  и  $\langle L_0 \mp L_1, f_3 \rangle = \pm 2/3$ . За  $k \geq 4$ , уврштавањем израза за функције базиса  $f_k$  из (4.2а), унутрашњи производ се може преставити као

$$\langle L_0 \mp L_1, f_k \rangle = \langle L_0 \mp L_1, L_k - L_{k-2} + D_k f_{k-2} \rangle. \quad (4.6а)$$

Растављањем (4.6а) на чиниоце и применом (4.4) добија се рекурентна релација за унутрашњи производ

$$\langle L_0 \mp L_1, f_k \rangle = D_k \langle L_0 \mp L_1, f_{k-2} \rangle. \quad (4.6б)$$

На слици 4.1 приказан је сет макс-орто функција базиса који одговара реду развоја  $n=5$  дуж три повезана елемента.



Слика 4.1. Сет макс-орто функција базиса који одговара реду развоја  $n=5$  дуж три повезана елемента у локалном  $s_k$ -координатном систему средишњег елемента.

## 4.2. ЛИНЕАРНО КОМБИНОВАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У КОЈИМА ФИГУРИШУ СТЕПЕНЕ ФУНКЦИЈЕ У ИМПЕДАНСНЕ ИНТЕГРАЛЕ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА

У изразу за импедансне интеграле макс-орто функција базиса (2.35) фигуришу производи макс-орто функција базиса и производи њихових извода. Полазећи од израза (4.2) ове функције базиса се могу изразити као линеарна комбинација Лежандрових полинома, а њихови изводи као линеарна комбинација извода Лежандрових полинома. С обзиром на то да се Лежандрови полиноми и њихови изводи могу представити преко степених функција применом формуле (4.3), може се закључити да се и макс-орто функције базиса и њихови изводи могу представити као линеарна комбинација степених функција. Стога се и импедансни интеграл (2.35) макс-орто функција базиса могу изразити као линеарна комбинација импедансних интеграла у којима фигуришу степене функције. Ови интеграл се скраћено називају *P*-интеграл (3.1), и првобитно су коришћени за добијање импедансних интеграла модификованих функција базиса.

У табели V представљени су синглети макс-орто функција базиса закључно са редом  $n=8$  у виду линеарне комбинације степених функција, а у табели VI представљени су дублети ових функција базиса.

ТАБЕЛА V  
МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА ДО РЕДА  $n = 8$  У СЛУЧАЈУ СИНГЛЕТА,  
ПРЕДСТАВЉЕНЕ У ВИДУ ЛИНЕАРНЕ КОМБИНАЦИЈЕ СТЕПЕНИХ ФУНКЦИЈА

i	$f_i$
2	$s^2 - 1$
3	$s^3 - s$
4	$7s^4 - 8s^2 + 1$
5	$3s^5 - 4s^3 + s$
6	$33s^6 - 51s^4 + 19s^2 - 1$
7	$\frac{143}{15}s^7 - \frac{253}{15}s^5 + \frac{25}{3}s^3 - s$
8	$143s^8 - 286s^6 + 176s^4 - 34s^2 + 1$



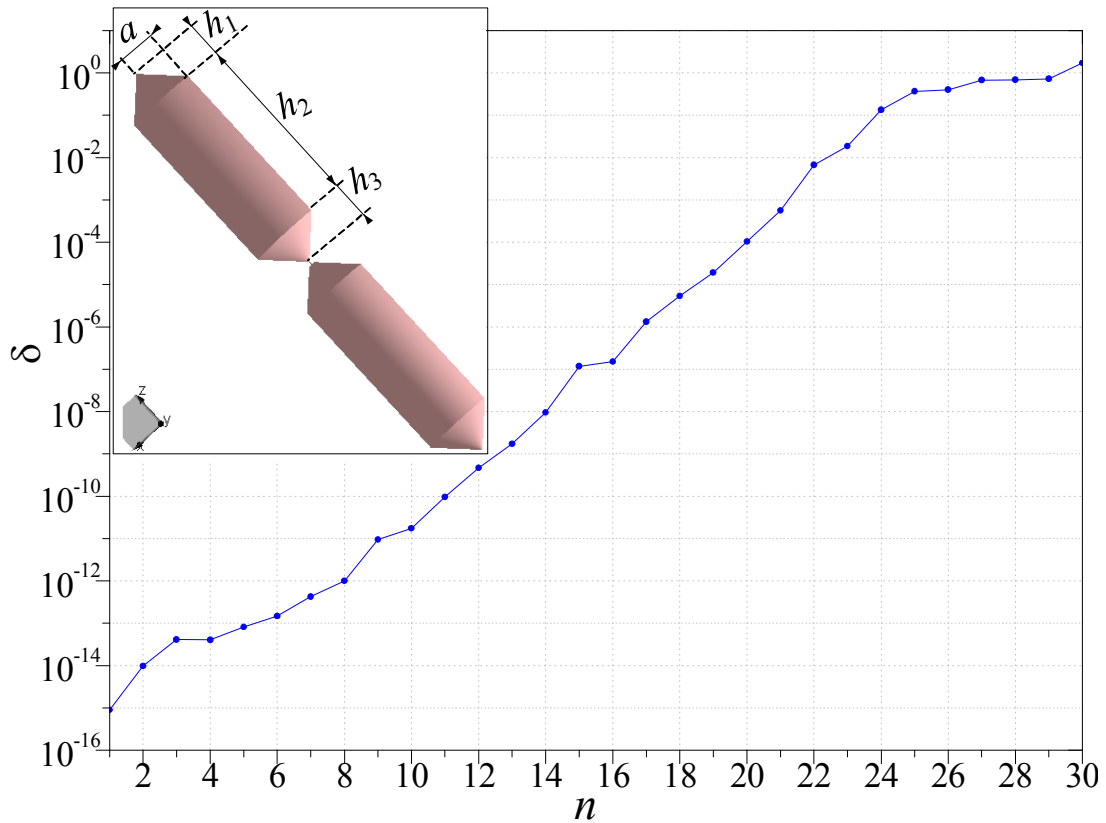
ТАБЕЛА VI  
 МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА ДО РЕДА  $n = 8$  У СЛУЧАЈУ ДУБЛЕТА,  
 ПРЕДСТАВЉЕНЕ У ВИДУ ЛИНЕАРНЕ КОМБИНАЦИЈЕ СТЕПЕНИХ ФУНКЦИЈА

n	$f_{0,1}^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}(1 \mp s)$
2	$\frac{1}{8}(5s^2 \mp 4s - 1)$
3	$\frac{1}{8}(\mp 7s^3 + 5s^2 \pm 3s - 1)$
4	$\frac{1}{16}(21s^4 \mp 14s^3 - 14s^2 \pm 6s + 1)$
5	$\frac{1}{16}(\mp 33s^5 + 21s^4 \pm 30s^3 - 14s^2 \mp 5s + 1)$
6	$\frac{5}{128}(\frac{429}{5}s^6 \mp \frac{264}{5}s^5 - 99s^4 \pm 48s^3 + 27s^2 \mp 8s - 1)$
7	$\frac{5}{128}(\mp 143s^7 + \frac{429}{5}s^6 \pm \frac{1001}{5}s^5 - 99s^4 \mp 77s^3 + 27s^2 \pm 7s - 1)$
8	$\frac{7}{256}(\frac{2431}{7}s^8 \mp \frac{1430}{7}s^7 - 572s^6 \pm 286s^5 + 286s^4 \mp 110s^3 - 44s^2 \pm 10s + 1)$

Међутим, коришћењем овог приступа максимално употребљив ред апроксимације за струје, која се базира на макс-орто функцијама базиса, остаје исти као у случају апроксимације за струје, која се базира на модификованим функцијама базиса,  $n=10$  у обичној и  $n=20$  у дуплој прецизности. Ово се објашњава чињеницом да линеарно комбиновање  $P$ -интеграла у импедансне интеграле макс-орто функција базиса резултује великим губитком цифара тачности, као што се може видети на следећем примеру.

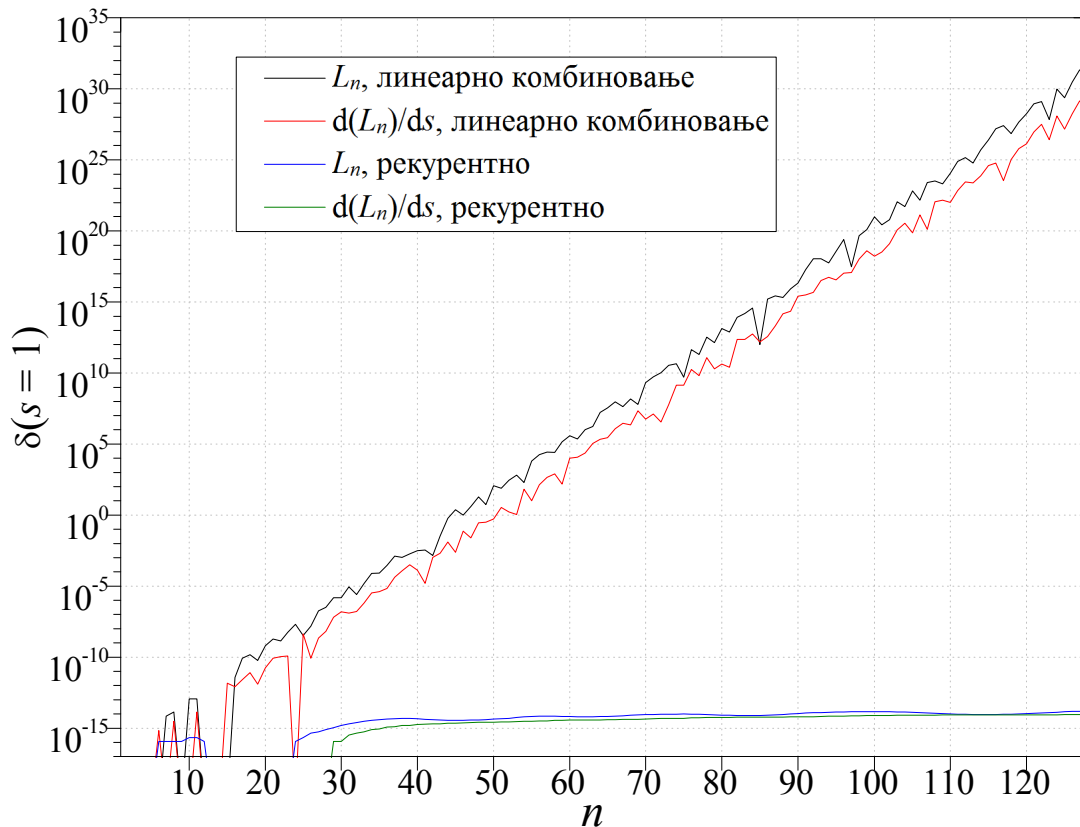
Посматрајмо дебелу дипол антену приказану у инсерту слике 4.2 (која је разматрана и у 3. глави, и приказана је у инсерту слике 3.27). Састоји се од  $n_e=6$  елемената, чије су димензије са слике  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ . Анализа је спроведена на учестаности  $f=300$  MHz.  $P$ -интегрални су рачунати са максималном тачношћу близу машинске прецизности од око 15 цифара тачности. На слици 4.2 приказана је релативна средња квадратна грешка импедансне (системске) матрице (3.31) у зависности од реда апроксимације  $n$ . Са слике се може видети да са

повећањем реда апроксимације релативна средња квадратна грешка такође расте, тако да су за ред  $n=25$  све цифре тачности изгубљене.



**Слика 4.2.** Релативна RMS грешка  $\delta$  импедансне матрице за дебелу дипол антену (приказану у инсерту) у зависности од степена апроксимације  $n$ , у случају када се  $P$ -интеграли рачунају са максималном тачношћу,  $\chi = 15$ . Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .

Разлог за овакво понашање је недовољно тачно рачунање Лежандрових полинома  $L_i$  и њихових извода  $dL_i/ds$  линеарним комбиновањем степених функција. Да би се илустровао овај ефекат, на слици 4.3 је приказана релативна грешка рачунања Лежандрових полинома и њихових извода у тачки  $s=1$  у зависности од степена апроксимације  $n$ . Може се видети да са повећањем степена апроксимације релативна грешка такође расте, тако да се за  $n=25$  губи осам цифара тачности (пола од максималног броја). У случају импедансних интеграла (2.35) за  $n=25$  губе се све цифре тачности, што се објашњава чињеницом да они садрже производ Лежандрових полинома и производ њихових извода.



Слика 4.3. Релативна грешка  $\delta$  Лежандрових полинома и њихових извода у зависности од степена апроксимације, који се рачунају 1) линеарним комбиновањем степених функција и 2) применом рекурентних формула (4.4).

### 4.3. РАЧУНАЊЕ ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У КОЈИМА ФИГУРИШУ ЛЕЖАНДРОВИ ПОЛИНОМИ И ЊИХОВИ ИЗВОДИ

На основу приказаних резултата из претходног поглавља може се закључити да је један од кључних елемената за ефикасан и тачан прорачун макс-орто импеданских интеграла (2.35) рачунање Лежандрових полинома и њихових извода са довољном великом тачношћу. Њихов веома тачан прорачун се може постићи директном применом рекурентних формула

$$L_i(s) = \frac{1}{i} [(2i-1)sL_{i-1}(s) - (i-1)L_{i-2}(s)], \quad (4.7a)$$

$$L'_i(s) = L'_{i-2}(s) + (2i-1)L_{i-1}(s), \quad (4.7b)$$

где је  $L_0(s)=1$ ,  $L_1(s)=s$  и  $L'_i(s)=dL_i(s)/ds$ . Са слике 4.3 може се видети да рекурентне формуле (4.7) обезбеђују релативну релативну грешку од око  $10^{-15}$  за редове апроксимације до  $n=128$ .

Да би се искористила могућност изузетно тачног рачунања Лежандрових полинома и њихових извода уз помоћ (4.7), импедансни интеграл (2.35) макс-орто функција базиса треба да се представе као линеарна комбинација импедансних интеграла у којима фигуришу Лежандрови полиноми и њихови изводи, тј.  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла

$$Q_{ljk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 L_j(s_l) L_i(s_k) \cos^\alpha(\pi p) g(R) ds_k dp ds_l, \quad \alpha = 0,1, \quad (4.8a)$$

$$Q'_{ljk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dL_j(s_l)}{ds_l} \frac{dL_j(s_k)}{ds_k} g(R) ds_k dp ds_l. \quad (4.8b)$$

Ефикасно рачунање  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла са великом тачношћу може се извршити на исти начин као и за  $P$ -интеграле (3.1), тј. тако да се сингуларитети и квази-сингуларитети пониште предложеним сменама из поглавља 3.1, и да се затим нумеричка интеграција изврши применом Гаус-Лежандрове интеграционе формуле. Једина разлика је у томе што се уместо степених функција под знаком интеграла рачунају Лежандрови полиноми и њихови први изводи коришћењем формула (4.7).

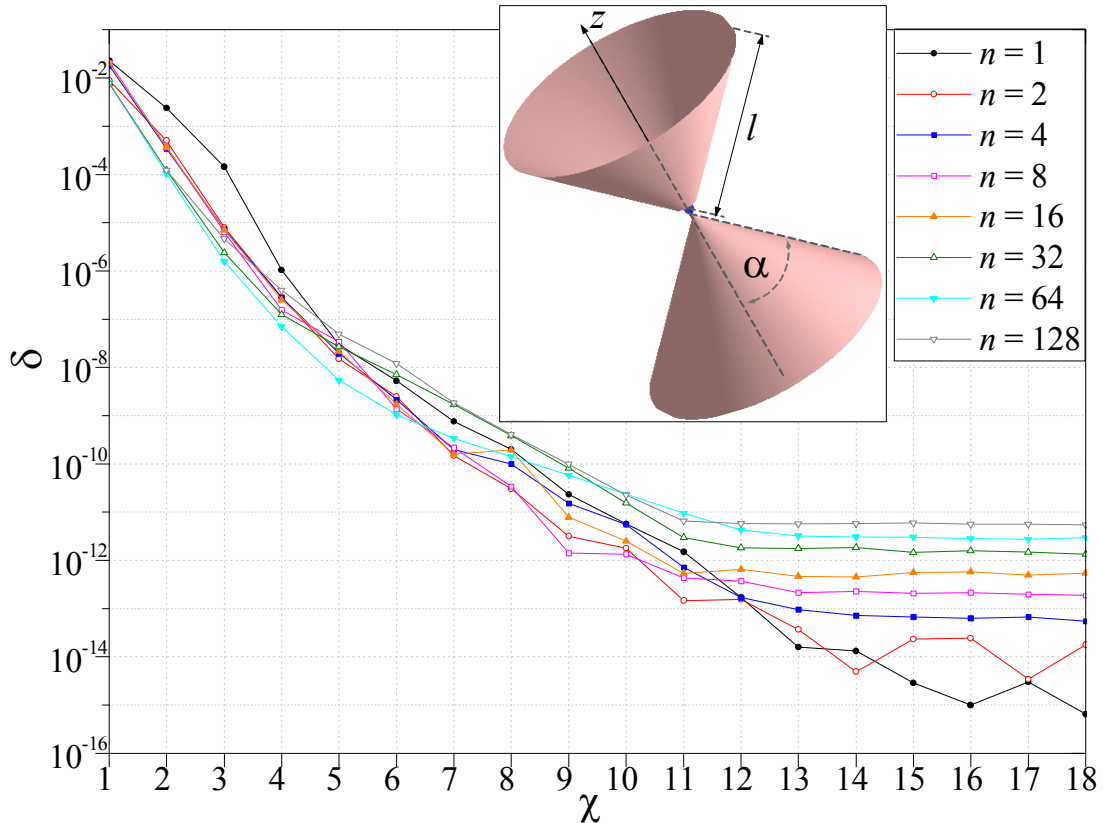
Посебно, у глави 3 су за  $P$ -интеграле развијене формуле (3.10), (3.20) и (3.30) које процењују потребан број тачака интеграције за жељену тачност у функцији броја цифара тачности  $\chi$ . У случају  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла утврђено је на разним примерима да редови интеграционих формула треба да се повећају, односно да формуле (3.10), (3.20) и (3.30) треба да се модификују. Уочено је да се формуле за процену броја тачака интеграције у случају све три интеграције могу кориговати увођењем коефицијента  $c$  и, у случају прве и треће интеграције, додавањем квадратног члана степена апроксимације. На тај начин формуле за процену броја тачака интеграције за  $Q$ - и  $Q'$ -интеграле добијају облик

$$c = \begin{cases} \frac{15}{15 - n/50 \cdot \ln n}, & n < 40 \\ \frac{15}{12}, & 40 \leq n < 100 \\ \frac{30}{27}, & 100 \leq n \end{cases}, \quad (4.9a)$$

$$N_1 = \begin{cases} \left( \sqrt{-\log(d) k_1(\chi) + q_1(\chi) + 6e_{sk} / \lambda} \right) \cdot c + 1,5i + i^2 / 70 & d < 1, \\ \left( \sqrt{q_1(\chi) + 6e_{sk} / \lambda} \right) \cdot c + 1,5i + i^2 / 70 & d \geq 1 \end{cases}, \quad (4.96)$$

$$N_2 = (k_2(\chi)\Delta R' + q_2(\chi)) \cdot c, \quad (4.9B)$$

$$N_3 = \max \left[ 3, (3,5\chi - 5,5 + 6e_{sl} / \lambda) \cdot c + 1,5j + j^2 / 70 \right]. \quad (4.9Г)$$



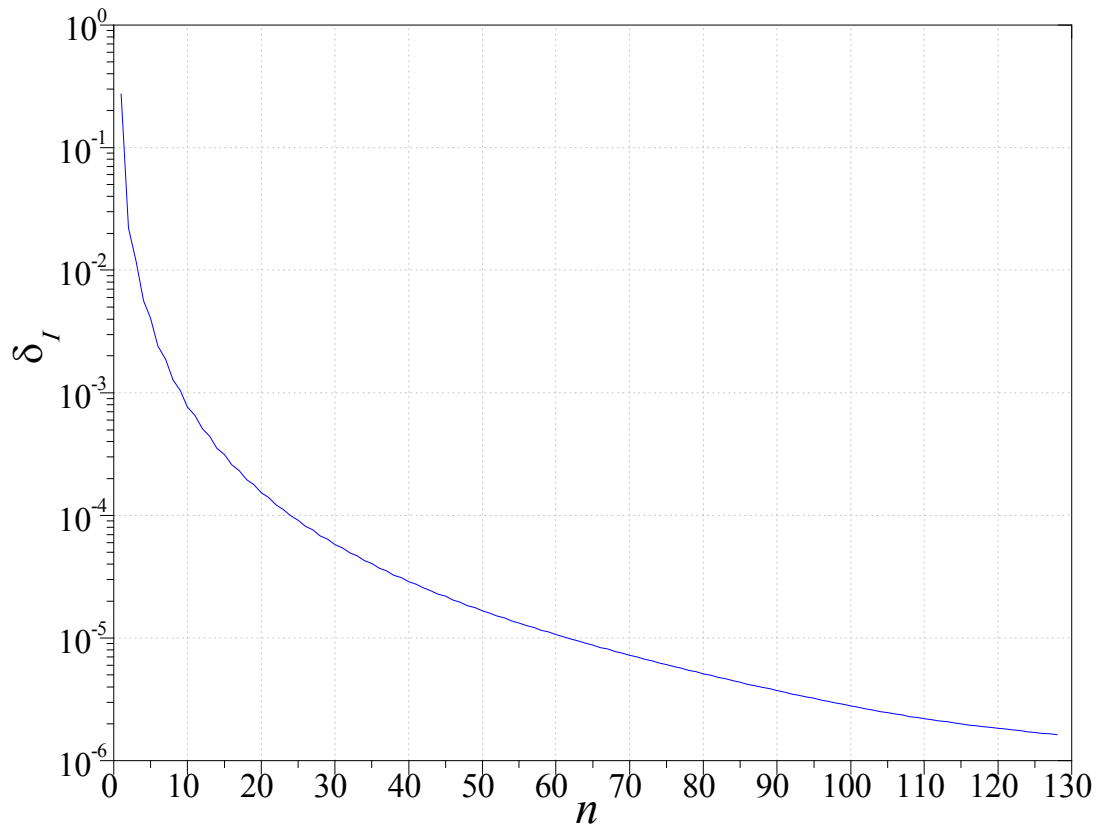
**Слика 4.4.** Релативна средња квадратна грешка  $\delta$  импедансне матрице биконичне антене (приказане у инсерту слике) у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$  за редове апроксимације  $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ . Димензије антене:  $l = 0,25\lambda$  и  $\alpha = 66,774^\circ$ .

У циљу посматрања ефикасности новог приступа посматрајмо биконичну антену дужине  $l = 0,25\lambda$  и угла отвора  $\alpha = 66,774^\circ$ , која је моделована помоћу  $n_e = 2$  елемента, као што је приказано у инсерту слике 4.4. Слика 4.4 приказује релативну средњу квадратну грешку импедансне матрице посматране антене, која је анализирана на учестаности  $f = 300$  MHz, у зависности од прописаног броја цифара тачности  $\chi$  за редове развоја  $n = 2^k$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . На основу резултата може се закључити да до  $\chi = 11$  релативна средња квадратна грешка је мало испод  $10^{-\chi}$  за све редове апроксимације  $n$ . Међутим, са даљим повећањем жељеног броја

цифара тачности  $\chi$ , релативна средња квадратна грешка се не може значајно спустити за све степене апроксимације. Уколико имамо у виду да су сви прорачуни спроведени у дуплој прецизности, може се закључити да се при прорачуну системске матрице изгуби мање од 4 цифре тачности за све редове апроксимације закључно са  $n = 128$ .

#### 4.4. НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ

Велика тачност при одређивању импедансне матрице у случају макс-орто функција базиса омогућава ефикасну примену ултра високих редова апроксимације. Ово ће бити илустровано на примеру дебеле дипол антене приказане у инсерту слике 4.2 и димензија дефинисаних у претходном поглављу.

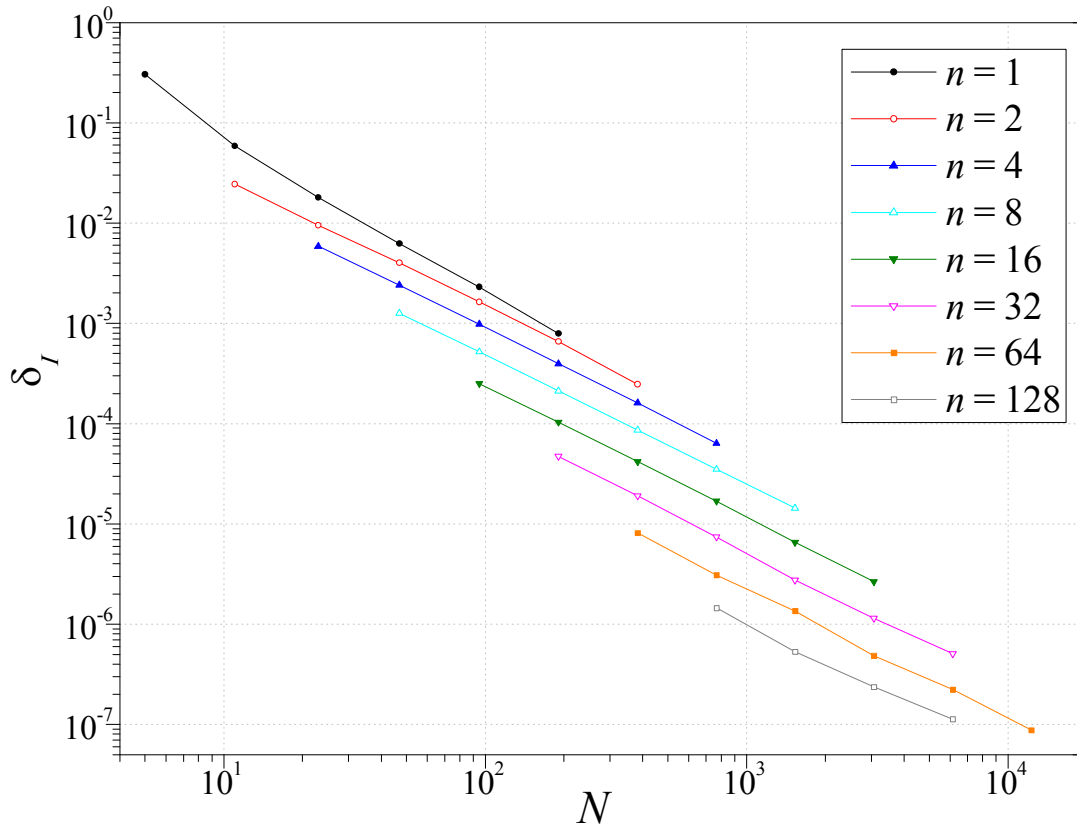


Слика 4.5. Релативна средња квадратна грешка расподеле струје  $\delta_I$  дуж крака дебеле дипол антене (приказане у инсерту слике 4.2) у зависности од реда апроксимације  $n$ .

Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .

На слици 4.5 приказана је релативна средња квадратна грешка расподеле струје  $\delta_I$  у зависности од реда апроксимације  $n$ . Референтно решење за свако  $n$  је добијено дељењем сваког од  $n_e = 6$  елемената на  $n_s = 2$  мања елемента. При томе се

користи исти ред апроксимације  $n$  на оба мања елемента, тако да се број непознатих удвостручи. Са графика се може уочити да релативна средња квадратна грешка опада до  $\sim 10^{-6}$  на стабилан монотон начин када се ред апроксимације  $n$  повећава од 1 до 128.



**Слика 4.6.** Релативна средња квадратна грешка  $\delta_I$  расподеле струје дуж крака дебеле дипол антене (приказане у инсерту слике 4.2) у зависности од броја непознатих  $N$  у случају реда апроксимације  $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ . (Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

Слика 4.6 приказује релативну средњу квадратну грешку расподеле струје исте дебеле дипол антене као у претходном примеру, у зависности од броја непознатих  $N$  за редове апроксимације  $n = 2^k$ ,  $k = 1, \dots, 7$ . Број непознатих  $N$  се повећава дељењем сваког од  $n_e = 6$  елемената на  $n_s = 2^l$ ,  $l = 1, \dots, 5$  мањих елемената, а применом истог реда апроксимације на сваки од нових, мањих елемената. Референтно решење за свако  $n$  се добија дељењем сваког од иницијалних 6 елемената на  $n_s = 64$  мања елемента. За  $n = 1, 2, 4, 8$  и 16 резултати су практично исти као и у случају модификованих функција базиса (слика 3.35). Додатно стабилно монотono опадање релативне средње квадратне грешке до  $10^{-7}$  је показано за ултра високе редове апроксимација,  $n = 32, 64$  и 128. Може се

приметити да се коришћењем 128. реда апроксимације уместо 16. реда релативна средња квадратна грешка смањила 10 пута за исти број непознатих. Иста тачност се може постићи и коришћењем реда  $n=16$ , али са око 6 пута већим бројем непознатих.

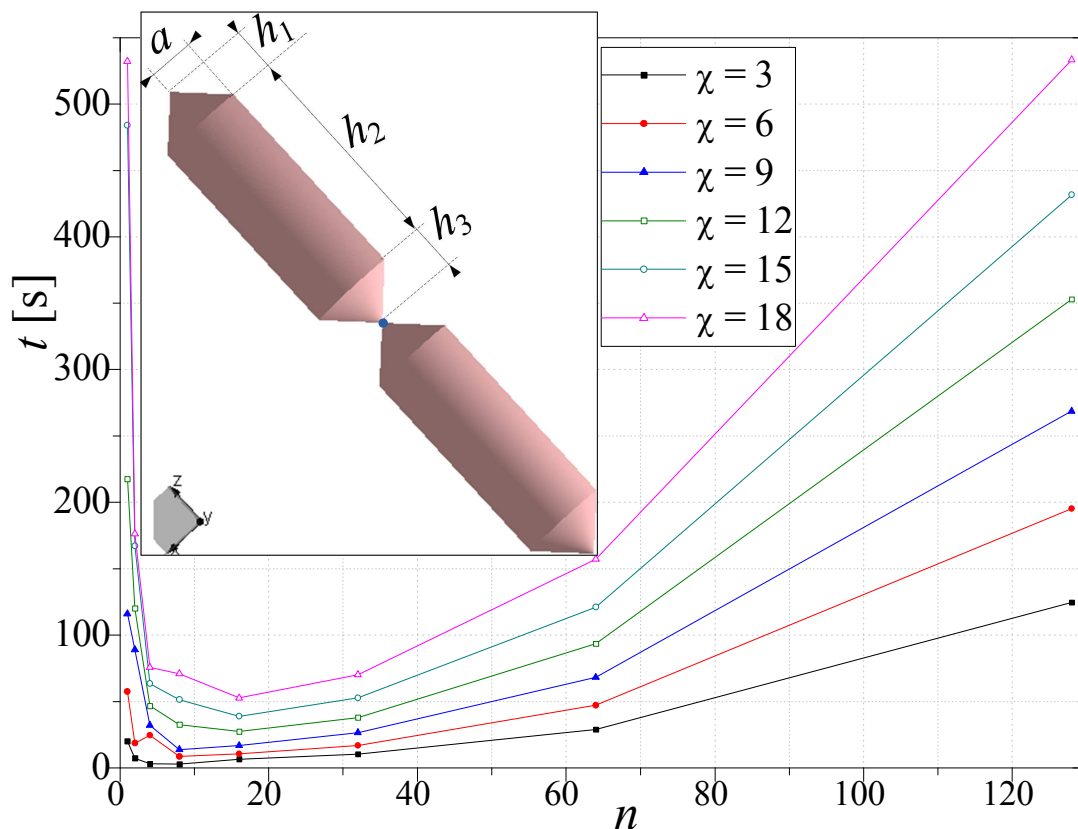
#### **4.5. ПОБОЉШАЊЕ ЕФИКАСНОСТИ ПУЊЕЊА СИСТЕМСКЕ МАТРИЦЕ У СЛУЧАЈУ МАКС-ОРТО ФУНКЦИЈА БАЗИСА**

Са повећањем електричне величине структура или њихове комплексности ЕМ анализа захтева све више меморијских и временских ресурса. Из тог разлога, корисно је анализирати временске и процесорске ресурсе које заузима метода и размотрити алтернативне начине којима се може убрзати алгоритам.

На следећим примерима дебеле дипол антене, приказане у инсерту слике 4.7, разматрана је ефикасност методе у случају модификованих и макс-орто функција базиса. Димензије антене са слике су  $h_{1,3} = a = 0,15 \text{ m}$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2} \text{ m}$ . Анализа је спроведена на учестаности  $f=300 \text{ MHz}$ . Број непознатих је исти у свим случајевима и износи  $N=767$ , а коришћени редови апроксимације (који су исти за све елементе) су  $n=1,2,4,8,16,32,64,128$ . Дипол се оригинално састоји од  $n_e=6$  елемената који се даље деле на  $n_s = 128/n$  мањих елемената.

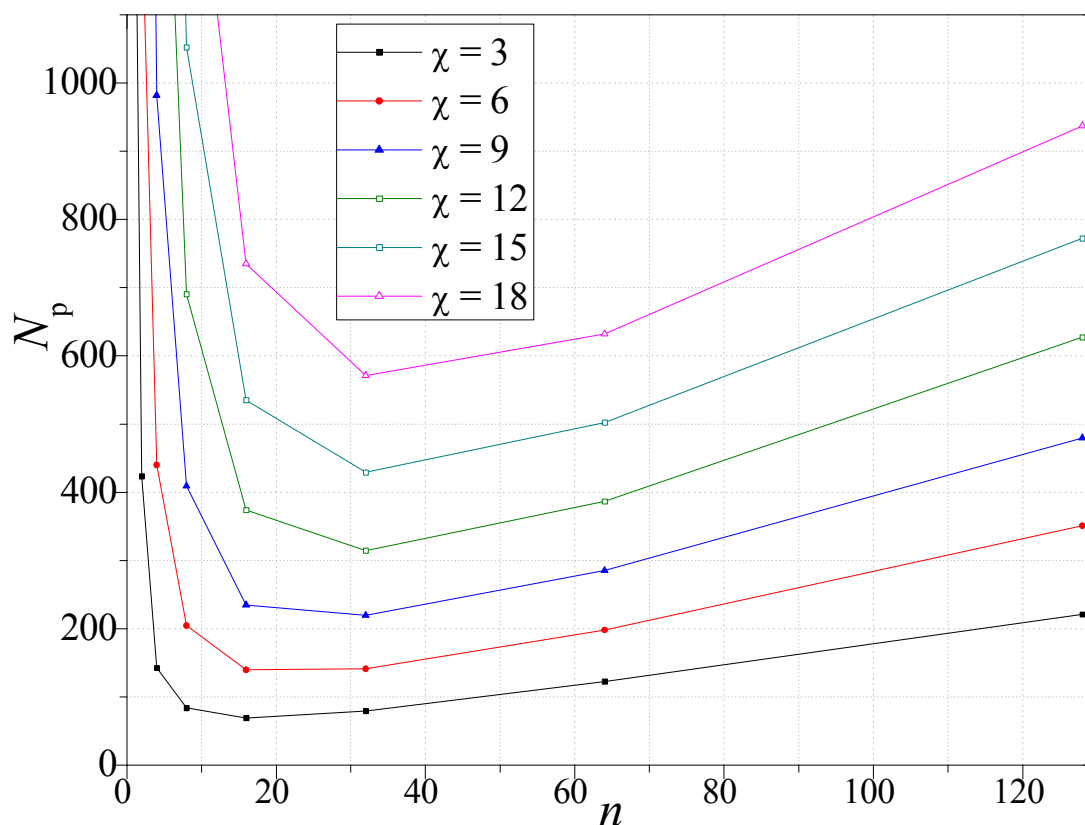
Слике 4.7 и 4.8 приказују време пуњења системске матрице  $t$  и средњи број тачака интеграције по елементу системске матрице  $N_p$  (у случају макс-орто функција базиса) у зависности од реда апроксимације  $n$  за неколико случаја жељеног броја цифара тачности  $\chi$ . Процесор Intel(R) Core(TM) i5-2320 CPU @ 3,00 GHz са 4 језгра је коришћен за анализе, при чему су симулације паралелизоване на сва 4 језгра.





Слика 4.7. Време пуњења  $t$  системске матрице у случају макс-орто функција базиса у зависности од реда апроксимације  $n$  за дебели дипол за неколико случаја жељеног броја цифара тачности  $\chi$ . (Димензије антене:  $h_{1,3} = a = 0,15\lambda$  и  $h_2 = 0,15\sqrt{2}\lambda$ .)

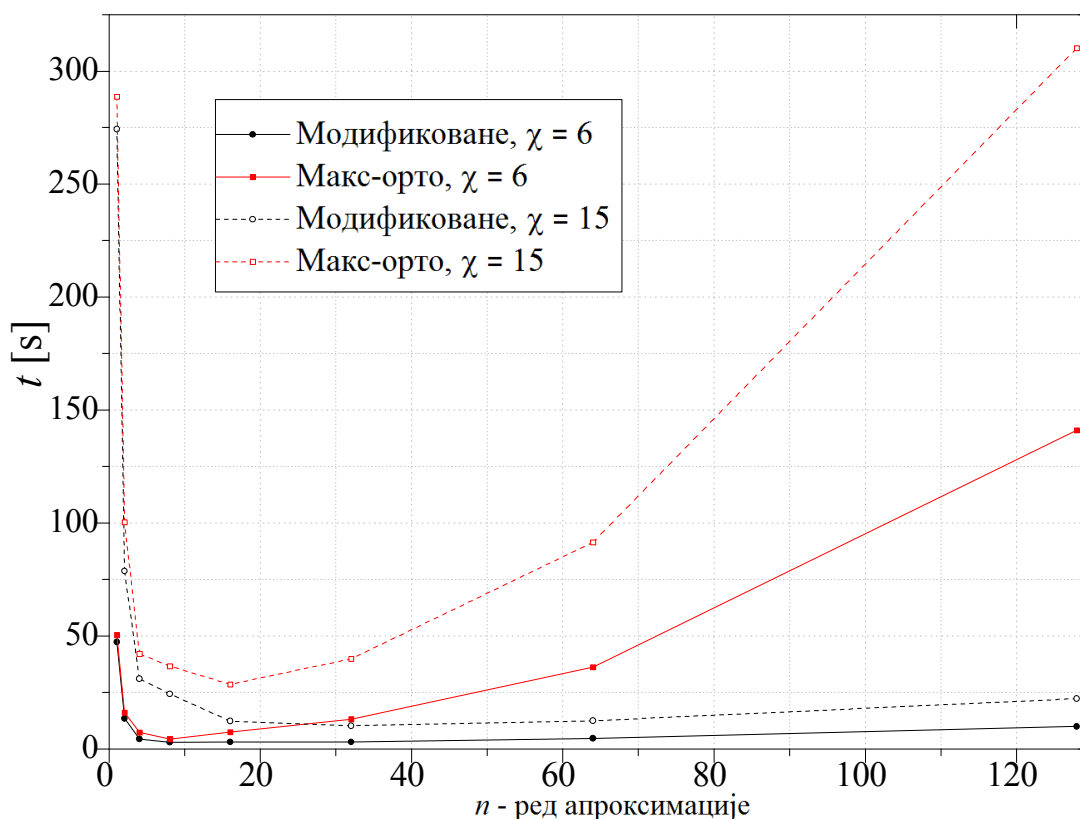
Резултати са слике 4.7 показују да са повећањем реда апроксимације до  $n=16$  време пуњења матрице опада. Са слике се такође види да је време пуњења матрице за све редове апроксимације до  $n=128$  мање или једнако од времена у случају нижих редова апроксимације  $n=1, 2$ . Са слике 4.8 може се уочити да се минималан број тачака интеграције по елементу матрице  $N_p$  остварује за  $n=16$  или  $n=32$  и да после тога број тачака интеграције  $N_p$  релативно споро расте. Овако ефикасно пуњење системске матрице за веома високе редове развоја се може објаснити чињеницом да се исте тачке интеграције користе за све парове функција базиса дефинисаних дуж  $l$ -тог и  $k$ -тог елемента, и да се, стога, одговарајућа Гринова функција одређује само једном (тј. за све парове истовремено).



Слика 4.8. Средњи број тачака интеграције по елементу системске матрице  $N_p$  у зависности од реда апроксимације  $n$  за дебели дипол за неколико случајева жељеног броја цифара тачности  $\chi$ .

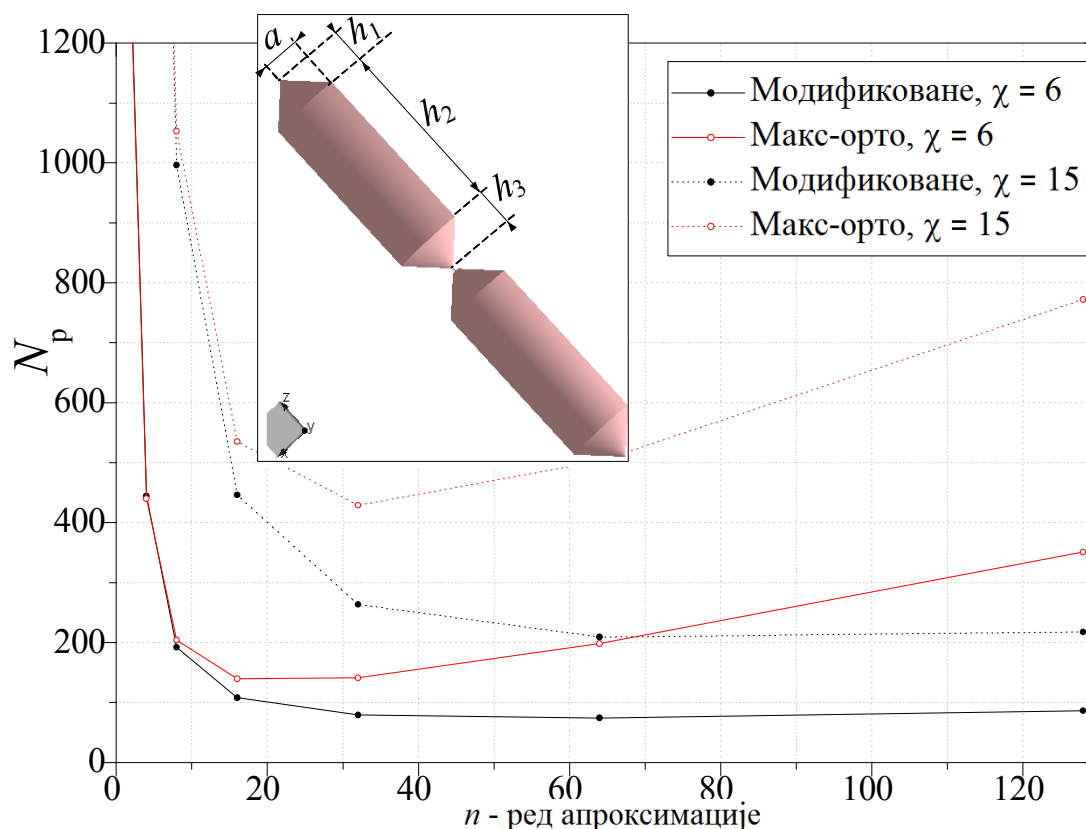
На сликама 4.9 и 4.10 резултати за макс-орто функције базиса упоређени су са резултатима за модификоване функције базиса за број цифара тачности  $\chi=6, 15$ . За симулације је коришћен процесор Intel(R) Core(TM) i7-4700MQ CPU @ 2,40 GHz 2,39 GHz са 8 језгара, при чему су симулације паралелизоване на 7 језгара. На слици 4.9 упоређено је време пуњења системске матрице у зависности од реда апроксимације, и може се уочити да је за ултра високе редове апроксимације, тј. за  $n \geq 64$ , време пуњења у случају макс-орто функција базиса много веће него у случају модификованих. У случају модификованих функција базиса минимално време пуњења матрице,  $t=3$  s, (у обичној прецизности) је постигнуто за ред апроксимације  $n=8$ , а са даљим повећавањем реда апроксимације време пуњења расте веома споро. Међутим, треба имати у виду да се у случају модификованих функција базиса стабилни резултати добијају максимално за ред апроксимације  $n=20$ . У случају макс-орто функција базиса минимално време пуњења,  $t=4$  s, (у обичној прецизности) је постигнуто за  $n=8$ , а са даљим повећавањем реда апроксимације време расте много брже него у случају

модификованих функција базиса. Разлика у времену пуњења системске матрице између макс-орто и модификованих функција базиса постоји због већег броја тачака интеграције које су потребне у случају макс-орто функција базиса, као и због временски захтевних рекурзивних формула (4.7) које се користе за рачунање  $Q$ - и  $Q'$ -интеграла са великом тачношћу.



Слика 4.9. Време пуњења системске матрице  $t$  у зависности од реда апроксимације  $n$  за дебели дипол у случају модификованих и макс-орто функција базиса за број цифара тачности  $\chi=6, 15$ .

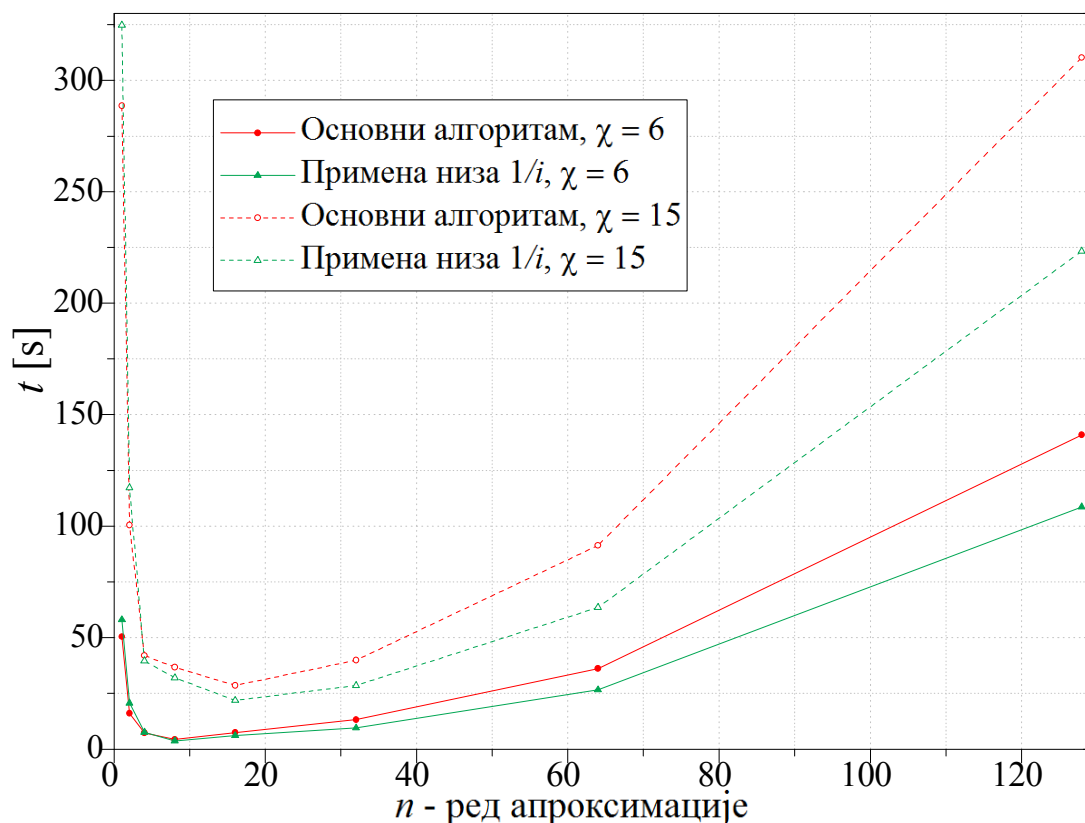
На слици 4.10 упоређен је средњи број тачака интеграције по елементу системске матрице у зависности од реда апроксимације. Са графика се може видети да је број тачака интеграције већи у случају макс-орто функција базиса. Такође, може се приметити да у случају модификованих функција базиса, број тачака интеграције опада до реда  $n=64$  где је  $N_p=90$  у обичној прецизности и да после остаје практично константан. Насупрот томе, у случају макс-орто функција базиса број тачака интеграције опада до  $n=16$  где је  $N_p=150$  у обичној прецизности, а затим расте.



Слика 4.10. Средњи број тачака интеграције по елементу системске матрице  $N_p$  у зависности од реда апроксимације  $n$  за дебелу дипол антену (приказану у инсерту слике) у случају модификованих и макс-орто функција базиса за  $\chi = 6, 15$ .

При разматрању начина поправке ефикасности методе у случају макс-орто функција базиса примећено је да велика количина времена одлази на дељење  $1/i$  ( $i$  је степен посматране функције базиса  $f_i$ ) у оквиру прве интеграције у (4.8), у петљи где се рачунају Лежандрови полиноми и њихови изводи у свим тачкама интеграције. Стога је изабрано да се унапред (испред петље за прву интеграцију) формира низ  $g(i) = 1/i$  који ће затим да се користи у свакој итерацији посматране петље.

Слика 4.11 приказује време пуњења системске матрице у случају макс-орто функција базиса са и без ове модификације. Са слике се може уочити да време пуњења матрице када се примени ова модификација траје 90 s мање за ред апроксимације  $n = 128$  и број цифара тачности  $\chi = 15$ , што је око 30% од иницијалног времена. У наставку ова модификација је увек коришћена.

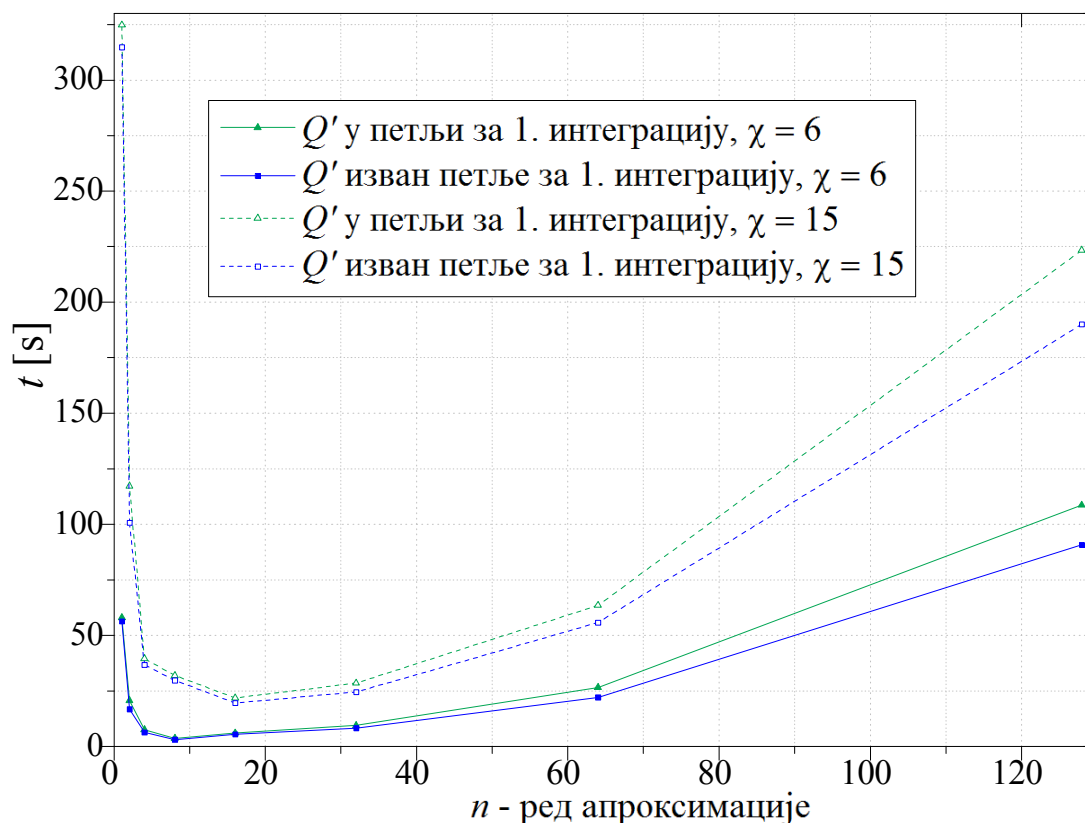


Слика 4.11. Време пуњења системске матрице  $t$  за дебелу дипол антену у зависности од реда апроксимације  $n$  у случају макс-орто функција базиса за број цифара тачности  $\chi = 6, 15, 1$  кад су имплементиране модификације везано за низ  $1/i$ , и 2) пре (тј. без ових модификација).

Резултати са слика 4.9 и 4.11 су добијени коришћењем алгоритма у коме су и прва интеграција  $Q$ -интеграла (где фигуришу Лежандрови полиноми) и прва интеграција  $Q'$ -интеграла (где фигуришу изводи Лежандрових полинома) рачунате засебно у истој петљи.

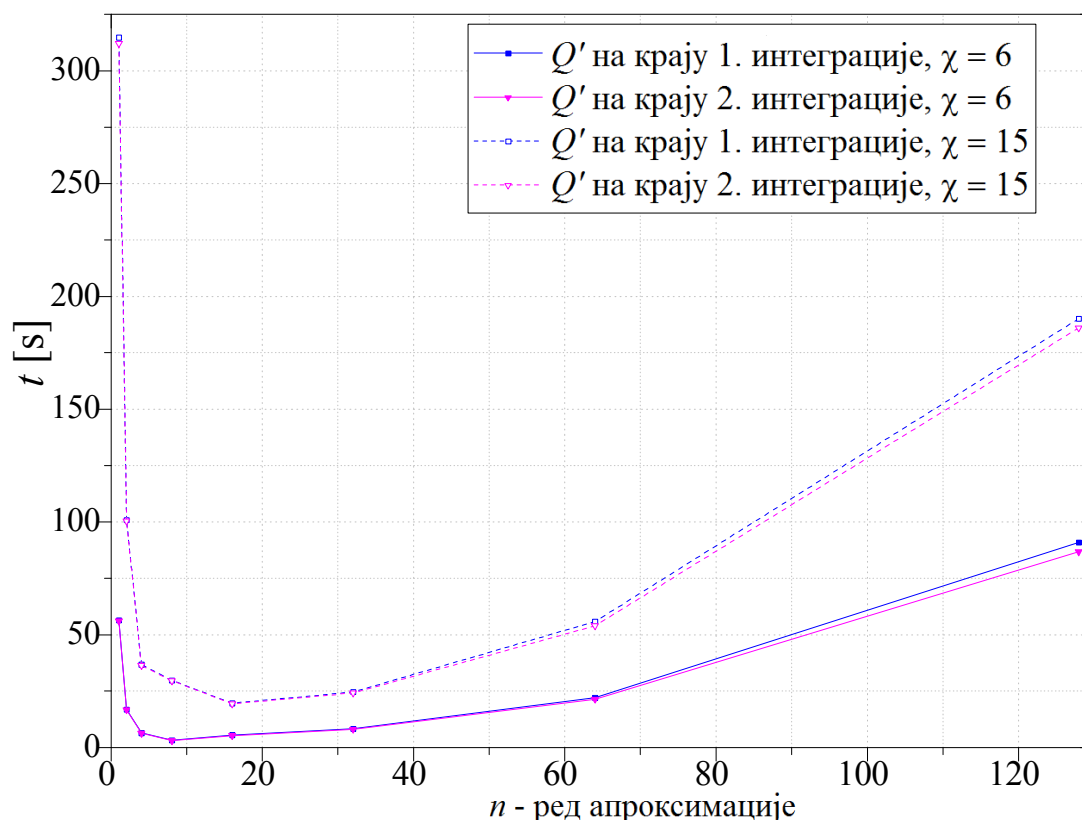
Са друге стране, прва интеграција  $Q'$ -интеграла се може израчунати на основу  $Q$ -интеграла коришћењем рекурзивне формуле (4.76), што омогућује њихово одређивање изван петље за прву интеграцију.

Слика 4.12 приказује време пуњења системске матрице у случају макс-орто функција базиса када се прва интеграција  $Q'$ -интеграла рачуна 1) заједно са  $Q$ -интегралима (тј. у истој петљи), и 2) изван петље, као линеарна комбинација  $Q$ -интеграла коришћењем (4.76). Са слике 4.12 може се видети да у другом случају симулације трају краће. На пример, за  $n = 128$  и  $\chi = 15$  време пуњења матрице у другом случају је за око 33 s мање у поређењу са првим случајем, што је око 15% од укупног времена.



Слика 4.12. Време пуњења системске матрице  $t$  у зависности од реда апроксимације  $n$  у случају макс-орто функција базиса за  $\chi=6, 15$ , када се прва интеграција  $Q'$ -интеграла рачуна 1) заједно са првом интеграцијом  $Q$ -интеграла (у истој петљи), и 2) изван петље, коришћењем (4.76).

Још једна могућност је та да се прве две интеграције  $Q'$ -интеграла рачунају као линеарна комбинација  $Q$ -интеграла после њихове друге интеграције, коришћењем рекурзивне формуле (4.76). На слици 4.13 приказано је време пуњења системске матрице макс-орто функција базиса када се помоћу (4.76)  $Q'$ -интеграл рачунају као линеарна комбинација  $Q$ -интеграла 1) после њихове прве интеграције и 2) после њихове друге интеграције. На основу резултата са слике 4.13 се види да је време пуњења мање у другом случају, али да је разлика у времену мала. На пример за  $n=128$  и  $\chi=15$  време пуњења је за 4 s мање у другом случају. Мало побољшање које је донела претходна модификација се објашњава чињеницом да друга интеграције узима око 8% тоталног времена, док прва интеграција узима око 90% тоталног времена.

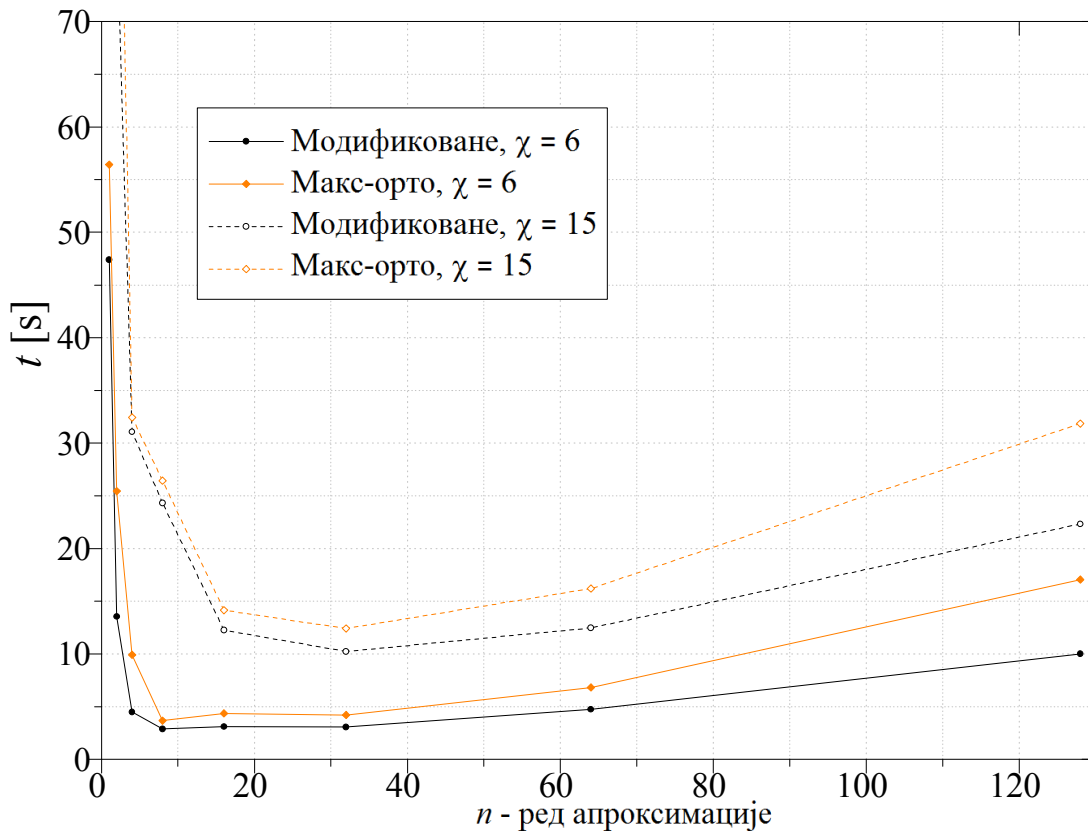


Слика 4.13. Време пуњења системске матрице  $t$  за дебели дипол у зависности реда развоја  $n$ , у случају макс-орто функција базиса за  $\chi = 6, 15$ , када се  $Q'$ -интеграл рачунају помоћу (4.76) као линеарна комбинација  $Q$ -интеграла 1) после њихове прве интеграције и 2) после њихове друге интеграције.

Побољшања направљена у алгоритму нове методе (у случају макс-орто функција базиса) знатно смањују време анализе. Међутим, кад се упореде резултати са слике 4.13 са резултатима за модификоване функције базиса са слике 4.9 може се уочити да макс-орто функције базиса и даље захтевају више времена поготово за ултра високе редове апроксимације, тј. за  $n > 32$ . Разлог за то је велики број тачака интеграције који је потребан за одређивање импеданских интеграла макс-орто функција базиса са великом тачношћу.

На слици 4.14 приказани су резултати за време пуњења системске матрице у случају 1) модификованих функција базиса и 2) макс-орто функција базиса кад се користи исти број тачака интеграције као и код модификованих. Резултати показују да је време пуњења системске матрице у случају макс-орто функција базиса сада упоредиво са временом за модификоване функције базиса. На пример,

у случају  $n = 128$  и  $\chi = 15$  време за модификоване функције базиса је око 32 s, а за модификоване је око 22 s.



Слика 4.14. Време пуњења системске матрице  $t$  у зависности од реда апроксимације  $n$  у случају дебеле дипол антене коришћењем 1) модификованих и 2) макс-орто функција базиса кад се користи исти број тачака интеграције као и за модификоване.

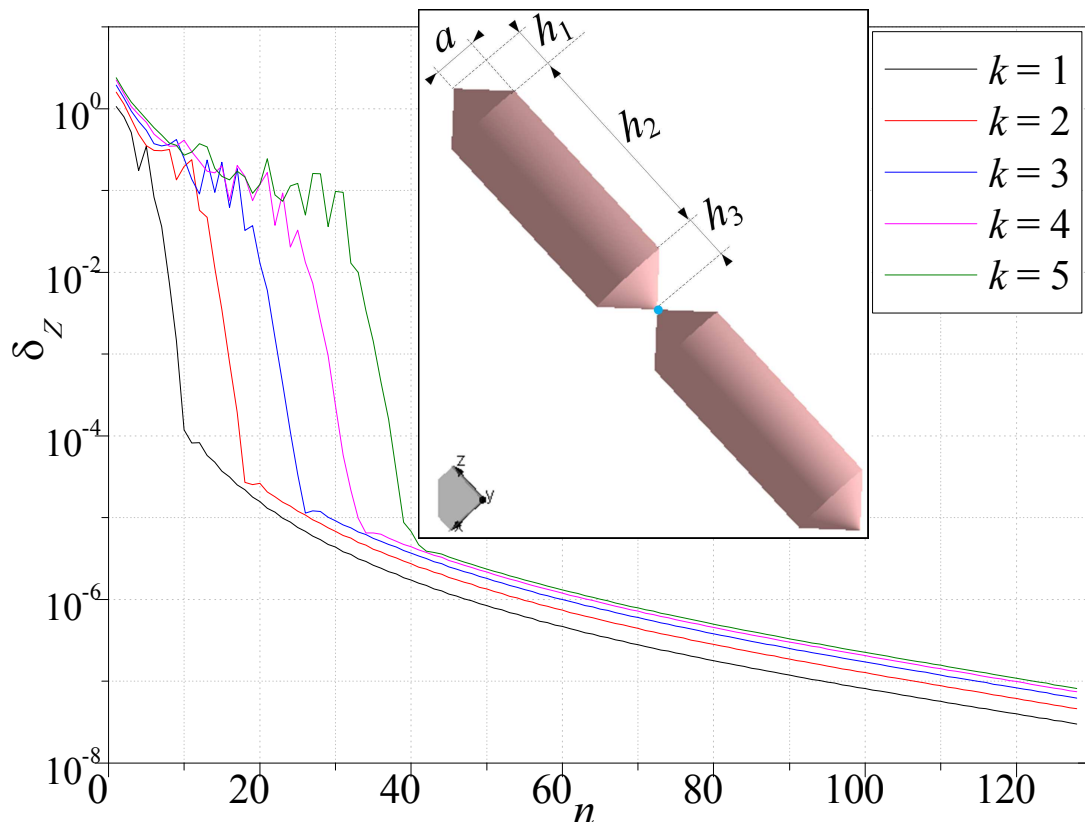
На основу ових резултата може се закључити да је после имплементације горе поменутих модификација време пуњења системске матрице смањено свеукупно за око 40% од иницијалног времена. Разлика у времену која, и после побољшања, постоји између макс-орто и модификованих функција базиса је превасходно због већег броја тачака интеграције које су неопходне за рачунање импеданских интеграла макс-орто функција базиса са велиом тачношћу.



## 5. СИНГУЛАРНЕ ФУНКЦИЈЕ БАЗИСА

У претходној глави су илустроване разне предности примене макс-орто функција базиса као што је могућност коришћења ултра високих редова апроксимације и брза конвергенција резултата са повећањем реда апроксимације. Међутим, са повећањем реда апроксимације изнад одређеног реда брзина конвергенције нагло пада. То се може протумачити утицајем ивичних ефеката, који тек при већим тачностима анализе долазе до изражаја.

Овај ефекат је показан на примеру дебеле дипол антене и биконичне антене. На слици 5.1 приказана је релативна грешка улазне импедансе дебеле дипол антене (из инсерта слике 5.1) у зависности од реда апроксимације, за неколико дужина елемената антене са слике  $h_{1,3} = a = k 2\lambda$  и  $h_2 = k 2\sqrt{2} \lambda$ , где је  $k = 1, \dots, 5$ . Број елемената у свим случајевима (за све димензије антене) је  $n_e = 6$ .

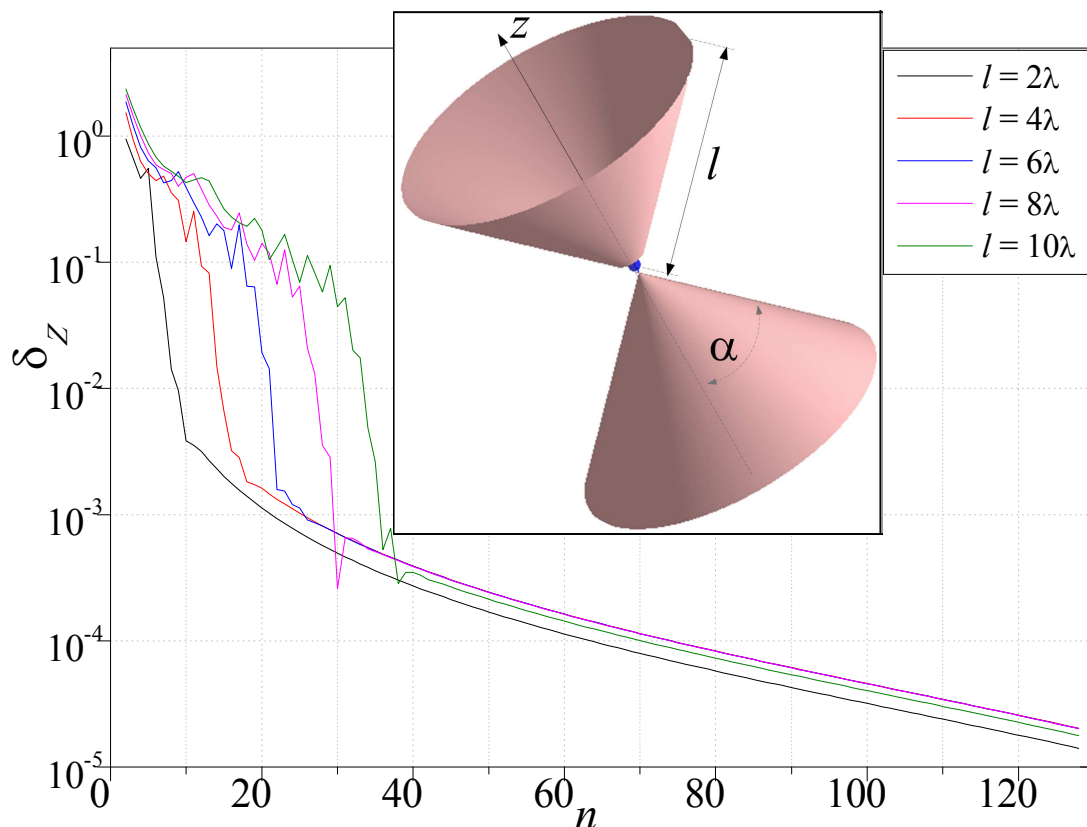


Слика 5.1. Релативна грешка улазне импедансе дебеле дипол антене  $\delta_Z$  у зависности од реда апроксимације  $n$ , за неколико њених димензија  $h_{1,3} = a = k 2\lambda$  и  $h_2 = k 2\sqrt{2} \lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

Резултати са слике 5.1 показују да се са повећањем реда апроксимације до реда  $n = 128$  релативна грешка смањује на око  $10^{-7}$ . Такође се може приметити да после одређене вредности реда апроксимације (нпр. после  $n = 20$  за случај  $k=2$ ) резултати спорије конвергирају. При томе, ред апроксимације после кога резултати спорије конвергирају расте са повећањем електричних димензија дипола. Из тог разлога може се претпоставити да нагли пад у брзини конвергенције настаје због ивичних ефеката.

Наиме, пошто су ивични ефекти по својој суштини квази-статички ефекти, њихов утицај се осећа на одстојањима мањим од  $\lambda/4$  од ивице. Стога је за очекивати да ће утицај ивичног ефекта на целокупно решење бити мање значајан код електрички већих антена. Ово потврђују и резултати са слике 5.1. На пример, у случају дипол антене чији су елементи дужине  $h_{1,3} = a = 2\lambda$  и  $h_2 = 2\sqrt{2}\lambda$  (тј.  $k=1$ ) брзина конвергенције је мања од реда апроксимације  $n=10$ , при чему релативна грешка износи  $\delta = 10^{-4}$ . Са друге стране, за дипол чији су елементи димензија  $h_{1,3} = a = 10\lambda$  и  $h_2 = 10\sqrt{2}\lambda$  (тј.  $k=5$ ) брзина конвергенције је мања од реда  $n=40$ , при чему је релативна грешка  $\delta \approx 7 \cdot 10^{-6}$ .

На слици 5.2 приказани су резултати за релативну грешку улазне импедансе биконичне антене (из прилога слике 5.2) у зависности од реда апроксимације, за неколико дужина крака антене  $l = k2\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Број елемената антене у свим случајевима (за све димензије антене) је  $n_e = 2$ .



Слика 5.2. Релативна грешка улазне импедансе биконичне антене  $\delta_Z$  у зависности од реда апроксимације  $n$ , за неколико димензија крака  $l = k 2\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

Са слике 5.2 се види да са повећањем реда апроксимације до  $n = 128$  релативна грешка опада до вредности од око  $10^{-5}$ . Као и у претходном случају, може се приметити да је до неке критичне вредности  $n$  конвергенција резултата релативно брза, а да се после те вредности брзина конвергенције знатно смањи. При томе, критични ред апроксимације, после кога резултати спорије конвергирају, расте са повећањем електричних димензија биконичне антене. На пример, за дужину крака антене  $l = 2\lambda$  критични ред апроксимације је  $n = 10$ , а релативна грешка износи  $\delta \approx 2 \cdot 10^{-3}$ , а за  $l = 10\lambda$  критични ред апроксимације је око  $n = 40$ , а релативна грешка је  $\delta \approx 7 \cdot 10^{-4}$ .

Упоређивањем резултата са слика 5.1 и 5.2 може се такође приметити да је критична вредност реда апроксимације (после кога резултати спорије конвергирају) за посматрану дужину елемената антена приближно иста за обе антене, али да је релативна грешка на тој критичној вредности знатно већа у

случају биконичне антене. Један од разлога је то што услед отворених крајева биконична антена има више изражене ивичне ефекте.

## 5.1. ОПИС СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

Ивични ефекти су последица теоријски бесконачно велике густине површинског наелектрисања на ивици између два елемента, који су међусобно спојени под углом мањим од  $180^\circ$ , или на отвореној ивици елемента. Расподела таквог наелектрисање се не може добро апроксимирати полиномским функцијама базиса као што су модификоване и макс-орто функције базиса. Стога је корисно имплементирати сингуларне функције базиса у предложеној методи и тиме узети у обзир ивичне ефекте. При томе, сингуларне функције базиса треба одабрати тако да добро апроксимирају расподелу струја и наелектрисања на крајевима елемената.

Површинска густина наелектрисања  $\rho_s$  је повезана са линијском густином површинских струја  $\mathbf{J}_s$  преко једначине континуитета

$$\nabla_s \cdot \mathbf{J}_s = -j\omega\rho_s. \quad (5.1)$$

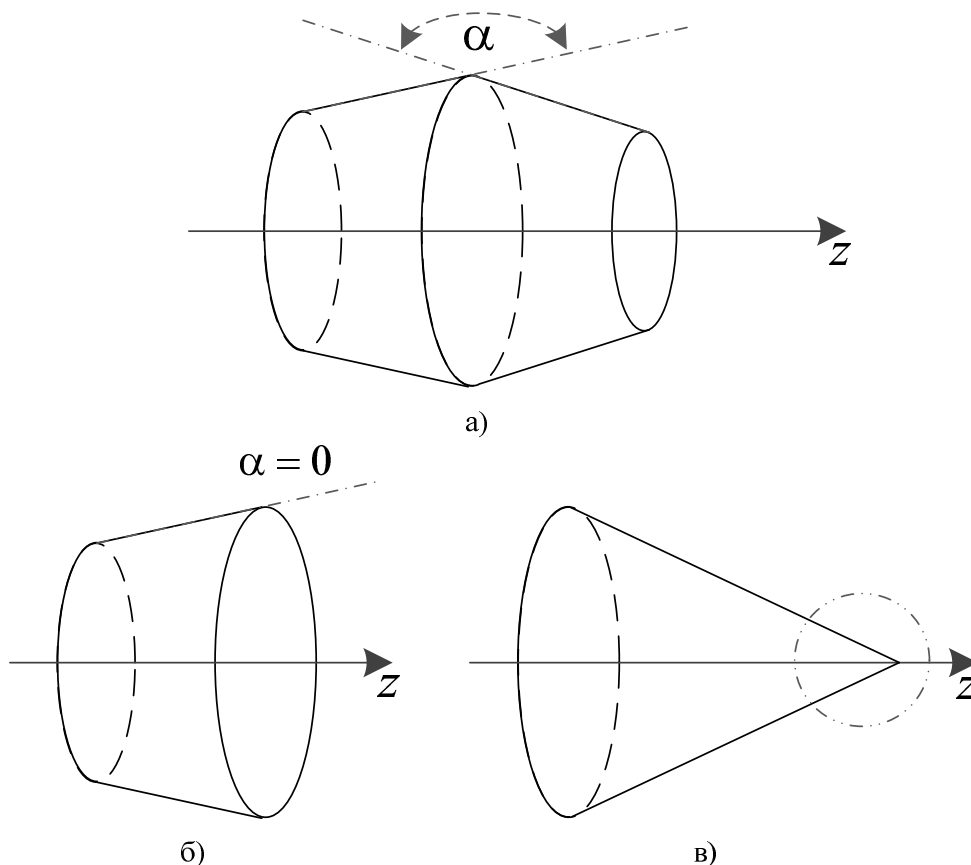
С обзиром на то да функције базиса  $f_i$  апроксимирају површинске струје  $\mathbf{J}_s$ , на основу (5.1) може се закључити да њихов извод (који одговара густини површинског наелектрисања) треба да буде бесконачан на ивицама у чијој је околини изражен ивични ефекат. У општем случају густина површинског наелектрисања у близини отворене ивице елемента или ивице споја два елемента се може изразити у облику [32]

$$\rho_s(s \rightarrow \mp 1) \sim (1 \pm s)^{b-1}, \quad (5.2a)$$

$$b = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}, \quad (5.2b)$$

где је  $s$  локална параметарска координата дуж генератрисе посматраног зарубљеног конуса (градивног елемента), која на почетку и крају елемента има, респективно, вредности  $s = -1$  и  $s = 1$  (видети поглавље 2.3). У (5.2b)  $\alpha$  је угао између генератриса два елемента који су спојени на посматраној ивици, као што је приказано на слици 5.3а. Ивични ефекат на споју два елемента постоји само за

углове  $\alpha \in [0, 180^\circ]$ . Уколико се посматра отворена ивица структуре, тада је  $\alpha = 0$  (слика 5.3б). У околини коничних крајева (слика 5.3в) за густину наелектрисања такође важи формула (5.2), али се параметар  $b$  за свако  $\alpha$  одређује нумерички [116], [117]. Ефекат коничног краја у много мањој мери утиче на укупне резултате од ивичних ефеката. Стога је у овој дисертацији фокус на ивичним ефектима, док ефекат коничних крајева није узиман у обзир.



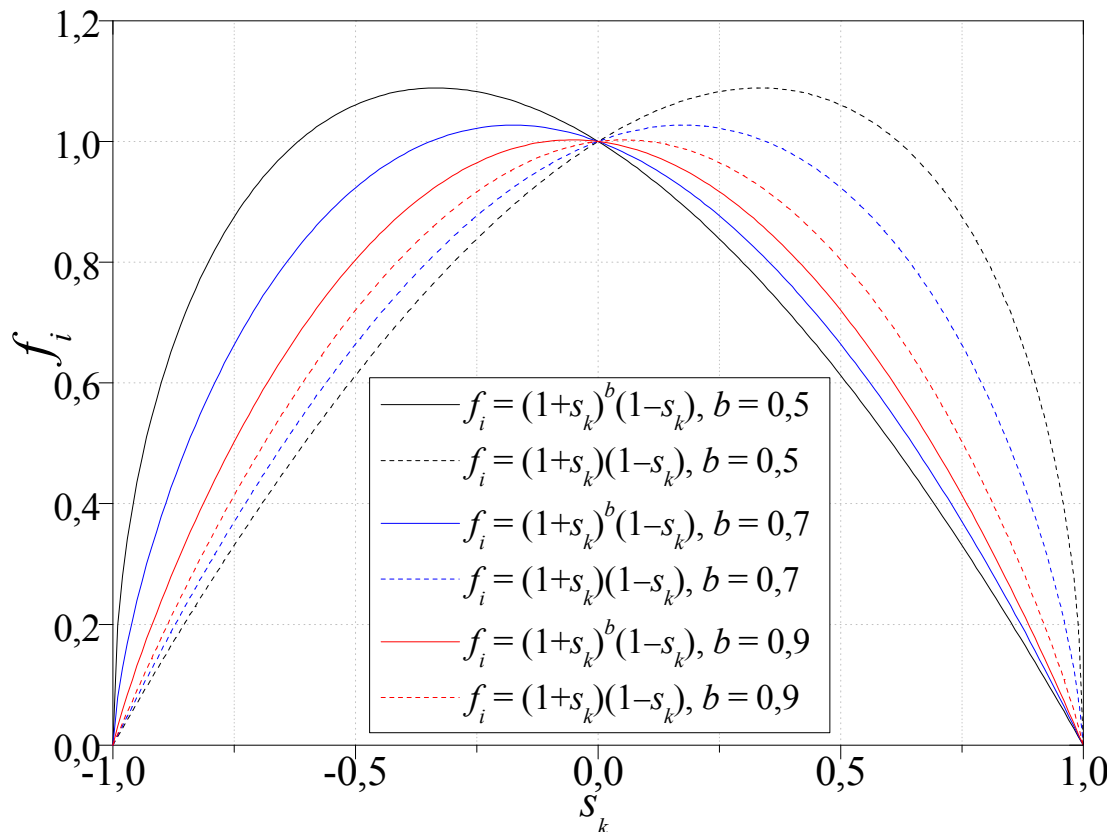
**Слика 5.3.** Приказ угла  $\alpha$  из (5.2б). а) На споју два елемента угао  $\alpha$  је угао између генератриса посматраних елемената. б)  $\alpha = 0$  уколико је структура на посматраном крају отворена. в) У околини коничног краја параметар  $b$  се за свако  $\alpha$  одређује нумерички.

С обзиром на то да је струја, на основу (5.1), сразмерна са интегралом површинског наелектрисања и имајући у виду (5.2), за сингуларне (скаларне) функције базиса струје може се узети облик

$$f_i(s) = \begin{cases} (1+s_k)^b(1-s_k), & s_{ki} = -1 \\ (1+s_k)(1-s_k)^b, & s_{ki} = 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

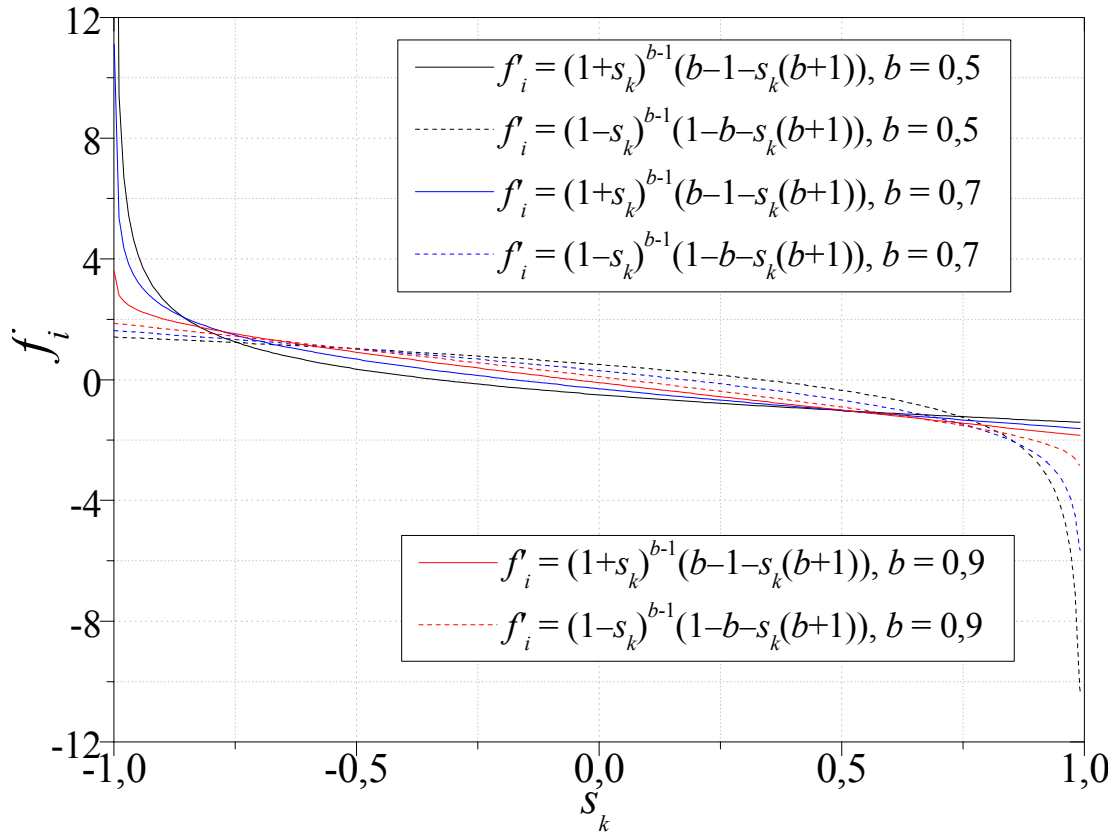
где је  $s_{ki}$  локална координата ивице чији се ивични ефекат посматра (прва функција базиса апроксимира ивични ефекат на ивици којој одговара  $s_k$ -координата  $s_k = -1$ , а друга функција базиса одговара ивици са координатом  $s_k = 1$ ). Извод ових функција базиса је дат са

$$\frac{df_i(s_k)}{ds_k} = \begin{cases} (1+s_k)^{b-1}[b-1-s_k(b+1)], & s_{ki} = -1 \\ (1-s_k)^{b-1}[1-b-s_k(b+1)], & s_{ki} = 1 \end{cases} \quad (5.4)$$



Слика 5.4. Сингуларне функције базиса за апроксимацију ивичног ефекта у  $s_{ki} = \pm 1$  за неколико вредности параметра  $b = 0,5, 0,7, 0,9$ .

На слици 5.4 су приказане сингуларне функције базиса за апроксимацију ивичног ефекта у  $s_{ki} = \pm 1$  за неколико вредности параметра  $b = 0,5, 0,7, 0,9$ , а на слици 5.5 су приказани изводи ових сингуларних функција базиса.



Слика 5.5. Изводи сингуларних функција базиса за апроксимацију ивичног ефекта у  $s_{ki} = \pm 1$  за неколико вредности параметра  $b = 0,5, 0,7, 0,9$ .

Импедансни интеграл (2.35) који одговарају сингуларним функцијама базиса се могу представити помоћу интеграла

$$G_{ji} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_j(s_l) f_i(s_k) \cos^\alpha(\pi p) g(R) ds_k dp ds_l, \quad (5.5a)$$

$$G'_{ji} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{df_j(s_l)}{ds_l} \frac{df_i(s_k)}{ds_k} g(R) ds_k dp ds_l. \quad (5.5b)$$

Интеграл  $G_{ji}$  и  $G'_{ji}$  се не могу ефикасно израчунати директном применом Гаус-Лежандрових формула, јер садрже сингуларитете. Њихово ефикасно рачунање са великом тачношћу је могуће применом методе поништавања сингуларитета. У том случају се за прву и трећу интеграцију не могу користити исте смене променљивих као за модификоване и макс-орто функције базиса, јер интегранди садрже по један сингуларитет више (услед додатног сингуларитета функција базиса). С обзиром на то да функције базиса  $f_i$  зависе само од локалне  $s$ -

координате, очекује се да се за другу интеграцију могу користити исте смене променљивих као и у случају модификованих функција базиса.

## 5.2. ПРВА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

Прва интеграција импедансних интеграла  $G_{ji}$  и  $G'_{ji}$  (5.5) је дата са

$$I_1 = \int_{-1}^1 (1 \pm s_k)^b (1 \mp s_k) \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{sk} R'} ds_k, \quad (5.6a)$$

$$I'_1 = \int_{-1}^1 (1 \pm s_k)^{b-1} [\pm(b-1) - s_k(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{sk} R'} ds_k, \quad (5.6b)$$

где је  $R'$  нормализовано растојање дато са (3.2), а  $\beta' = \beta e_{sk}$ . Будући да садржи извод сингуларне функције базиса, интегранд у (5.6b) је захтевнији за нумеричку интеграцију од интегранда у (5.6a), који садржи сингуларну функцију базиса у основном облику. За очекивати је да ће смена која обезбеди ефикасну интеграцију за (5.6b) обезбедити и ефикасну интеграцију за интеграл (5.6a). Из тог разлога је у наставку избор смена одређен према интегранду у (5.6b).

Уколико за  $d_0$  из (3.7) важи  $d_0 \geq 2$ , тачка поља је далеко од генератрисе дуж које се врши интеграција па интегранд у (5.6) садржи један сингуларитет у  $s_k = s_{ki}$  услед сингуларне функције базиса  $f_i$ . У том случају уводи се смена

$$du = \begin{cases} (s_k + 1)^{b-1} ds_k, & s_{ki} = -1 \\ (1 - s_k)^{b-1} ds_k, & s_{ki} = 1 \end{cases}. \quad (5.7a)$$

Након интеграције леве и десне стране (5.7a), за променљиву  $u$  се добија израз

$$u = \begin{cases} (s_k + 1)^b / b, & s_{ki} = -1 \\ -(1 - s_k)^b / b, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.7b)$$

а зависност  $s_k$  од  $u$  је дата са

$$s_k = \begin{cases} (bu)^{1/b} - 1, & s_{ki} = -1 \\ 1 - (-bu)^{1/b}, & s_{ki} = 1 \end{cases}. \quad (5.7b)$$



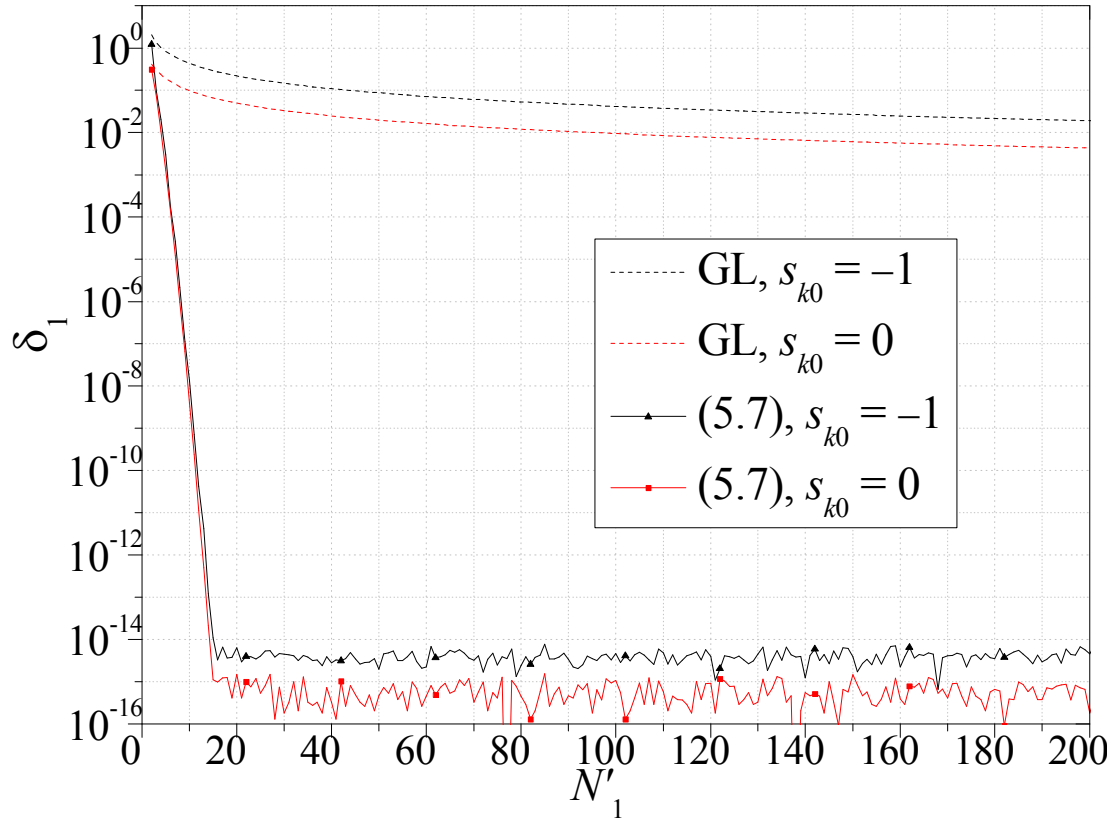
На тај начин израз за интеграле (5.6) се трансформише у

$$I_1 = \begin{cases} \int_0^1 (1+s_k)^b (1-s_k) \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{s_k} R'} (bu)^{1/b-1} du, & s_{ki} = -1 \\ \int_{-1}^1 (1-s_k)^b (1+s_k) \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{s_k} R'} (-bu)^{1/b-1} du, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.8a)$$

$$I_1' = \begin{cases} \int_{u(s_k=-1)}^{u(s_k=1)} [b-1-s_k(u)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{s_k} R'(u)} du, & s_{ki} = -1 \\ \int_{u(s_k=-1)}^{u(s_k=1)} [-(b-1)-s_k(u)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{s_k} R'(u)} du, & s_{ki} = 1 \end{cases}. \quad (5.8b)$$

Пошто је смена (5.7) трансформацијом интеграла (5.6) у (5.8) елиминисала сингуларитет, интеграција (5.8) се поново може извршити ефикасно коришћењем Гаус-Лежандрове формуле.

На слици 5.6 приказана је релативна грешка  $\delta_1$  интеграције  $I_1'$  у зависности од броја тачака интеграције  $N_1'$  применом поништавања сингуларитета (5.7) и директне методе (GL). Дужина интеграционе путање је  $1\lambda$  (тј.  $e_{s_k} = 0,5\lambda$ ),  $d = 2,5$  (тачка поља је далеко од путање интеграције),  $s_{ki} = -1$  (па је функција базиса једнака  $f_i = (1+s_k)^b (1-s_k)$ ) и  $b = 0,5$  (угао на ивици је  $\alpha = 0$  што значи да је на посматраној ивици отворен крај структуре). График је приказан за две вредности пројекције тачке поља  $s_{k0} = -1$  и  $s_{k0} = 0$ . Са слике се види да примена методе поништавања сингуларитета са сменом (5.7) обезбеђује максималну тачност са мање од 20 тачака интеграције. За разлику од тога, применом директе интеграције тачност се јако споро поправља, тако да се коришћењем 200 тачака интеграције добија релативна грешка већа од  $10^{-3}$ .



Слика 5.6. Релативна грешка  $\delta_1$  интеграције  $I'_1$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_1$  коришћењем поништавања сингуларитета (5.7) и директне методе (GL) за две вредности пројекције тачке поља  $s_{k0} = -1$  и  $s_{k0} = 0$ , за случај  $e_{sk} = 0,5\lambda$ ,  $d = 2,5$ ,  $s_{ki} = -1$  и  $b = 0,5$ .

Уколико се тачка поља налази близу генератрисе дуж које се врши интеграција и важи да је  $d_0 < 2$ , тада подинтегрална функција у (5.6) има два сингуларитета, један услед сингуларне функције базиса, а други услед близине тачке поља. У том случају смена (5.7) није довољна јер се њом елиминише само један сингуларитет. Из тог разлога, предложена је смена променљивих која се добија у два корака. Први корак је да се поништи сингуларитет услед близине тачке поља на исти начин као и код полиномских функција базиса, тј. коришћењем смене (3.4а), па се интеграцијом леве и десне стране за променљиве  $t$ ,  $s_k$  и  $R'$  добијају изрази из (3.4б-д) при чему се интеграл (5.6) трансформише у

$$I_1 = \begin{cases} \int_1^{-1} (1 + s_k(t))^b (1 - s_k(t)) \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{sk}} dt, & s_{ki} = -1 \\ \int_{-1}^1 (1 - s_k(t))^b (1 + s_k(t)) \frac{e^{-j\beta'R'}}{4\pi e_{sk}} dt, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.9a)$$

$$I'_1 = \begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} (s_k(t)+1)^{b-1} [(b-1) - s_k(t)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(t)}}{4\pi e_{sk}} dt, & s_{ki} = -1 \\ \int_{t_1}^{t_2} (s_k(t)-1)^{b-1} [-(b-1) - s_k(t)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(t)}}{4\pi e_{sk}} dt, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.96)$$

где је  $t_1 = t(s_k = -1)$ , а  $t_2 = t(s_k = 1)$ . У интегралима (5.9) је поништен сингуларитет услед близине тачке поља, а сингуларитет услед функције базиса и даље фигурише. С обзиром на то да се у околини преосталог сингуларитета, тј. за  $s_k \rightarrow s_{ki}$ , сингуларни члан у трансформисаном облику подинтегралне функције понаша као

$$(1 + s_k(t))^{b-1} = \begin{cases} [d(\sinh t - \sinh t_1)]^{b-1} \approx [d(t - t_1)]^{b-1}, & s_{ki} = -1 \\ [d(\sinh t_2 - \sinh t)]^{b-1} \approx [d(t_2 - t)]^{b-1}, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.10)$$

коришћењем смене

$$du = \begin{cases} (t - t_1)^{b-1} dt, & s_{ki} = -1 \\ (t_2 - t)^{b-1} dt, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.11a)$$

поништава се и сингуларитет услед сингуларне функције базиса. При чему се интеграцијом леве и десне стране добија

$$t = \begin{cases} (bu)^{1/b} + t_1, & s_{ki} = -1 \\ t_2 - (-bu)^{1/b}, & s_{ki} = 1 \end{cases}. \quad (5.11b)$$

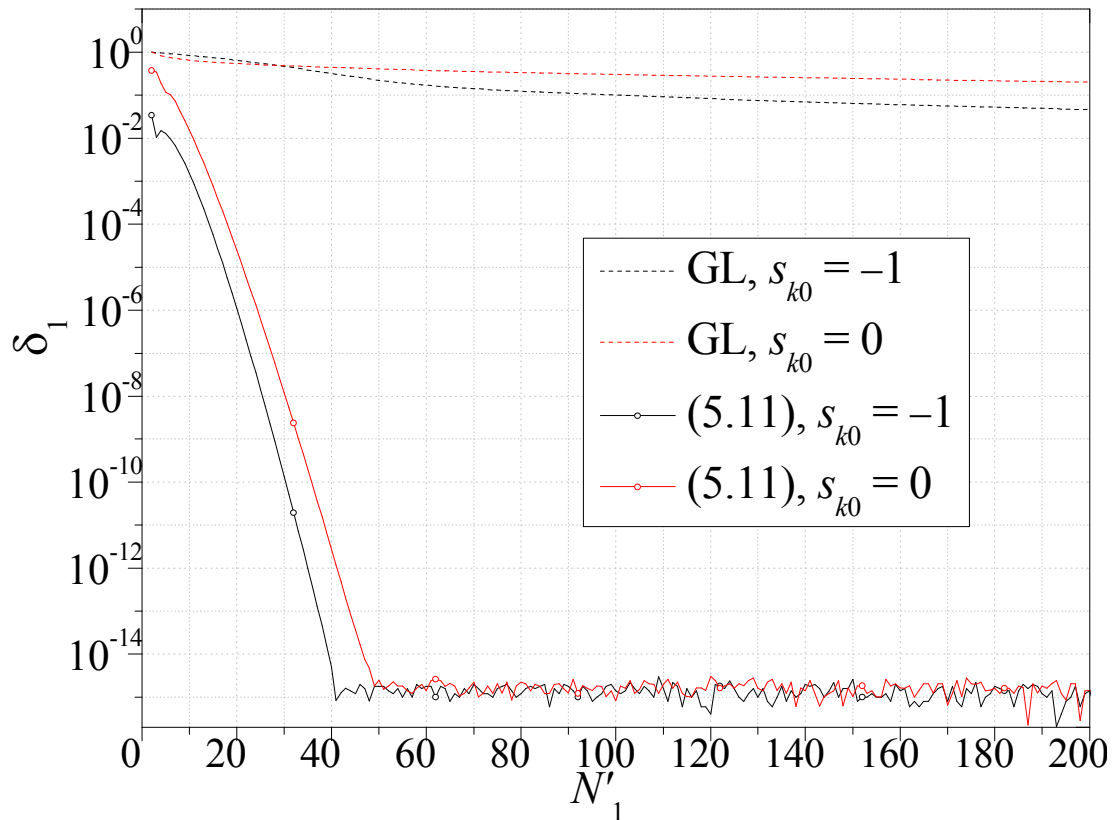
Финални изрази за интеграле  $I_1$  и  $I'_1$  су, стога, дати са

$$I_1 = \begin{cases} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(s_k(u)+1)^b}{(bu)^{1-1/b}} (1 - s_k(u)) \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{sk}} du, & s_{ki} = -1 \\ \int_{u_1}^{u_2} \frac{(1 - s_k(u))^b}{(-bu)^{1-1/b}} (s_k(u) + 1) \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{sk}} du, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.12a)$$

$$I'_1 = \begin{cases} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(s_k(u)+1)^{b-1}}{(bu)^{1-1/b}} [(b-1) - s_k(u)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{sk}} du, & s_{ki} = -1 \\ \int_{u_1}^{u_2} \frac{(1 - s_k(u))^{b-1}}{(-bu)^{1-1/b}} [-(b-1) - s_k(u)(b+1)] \frac{e^{-j\beta'R'(u)}}{4\pi e_{sk}} du, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.12b)$$

где је  $u_1 = u(t=t_1)$ , а  $u_2 = u(t=t_2)$ .

На слици 5.7 приказана је релативна грешка  $\delta_1$  интеграције  $I'_1$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_1$  за случај  $e_{sk} = 0,5\lambda$ ,  $d = 10^{-3}$  (тачка поља је близу путање интеграције),  $s_{ki} = -1$  и  $b = 0,5$ . Релативна грешка  $\delta_1$  је приказана за методу поништавања сингуларитета (5.11) и директну методу (GL) за две вредности пројекције тачке поља  $s_{k0} = -1$  и  $s_{k0} = 0$ . Са слике се може уочити да резултати добијени директном интеграцијом (GL) веома споро конвергирају, тако да се коришћењем 200 тачака интеграције добија релативна грешка већа од  $10^{-2}$ . Са друге стране смена (5.11) већ са мање од 50 тачака интеграције обезбеђује максималну тачност.



Слика 5.7. Релативна грешка  $\delta_1$  интеграције  $I'_1$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_1$  коришћењем смене (5.11) и директне методе (GL) за две вредности пројекције тачке поља  $s_{k0} = -1$  и  $s_{k0} = 0$ , за случај  $e_{sk} = 0,5\lambda$ ,  $d = 10^{-3}$ ,  $s_k = s_{ki}$  и  $b = 0,5$ .

На основу резултата са слика 5.6 и 5.7 и њима сличним закључено је да је оптимално се за прву интеграцију (5.6) користи метода поништавања

сингуларитета применом смене (5.7) уколико је  $d_0 > 2$ , а у супротном коришћењем смене (5.11).

На сличан начин као и за модификоване функције базиса, формирана је формула за процену броја тачака интеграције за прорачун прве интеграције (5.6) са жељеном тачношћу (без обзира на коришћену методу и смену)

$$N'_1 = \begin{cases} N_1, & |\Delta s_{ki}| \geq 1 \\ 4/3 \cdot (N_1 + \Delta N), & |\Delta s_{ki}| < 1 \end{cases} \quad (5.13a)$$

$$\Delta N = \begin{cases} 0, & \log d > -8 \vee \log \Delta s_{ki} > 0 \\ [11 - 0,5 \log d - 10^{-3} (\log d)^2] c, & \log d \leq -8 \wedge \log \Delta s_{ki} < 0 \end{cases} \quad (5.13b)$$

$$c = \begin{cases} 4\chi/9, & \log \Delta s_{ki} < -8 \\ -\log(\Delta s_{ki}) \cdot \chi/18, & \log \Delta s_{ki} > -8 \end{cases} \quad (5.13b)$$

где је  $\Delta s_{ki} = |s_{k0} - s_{ki}|$ , а  $N_1$  је број тачака интеграције за прву интеграцију у случају макс-орто функција базиса (4.9б).

### 5.3. ДРУГА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

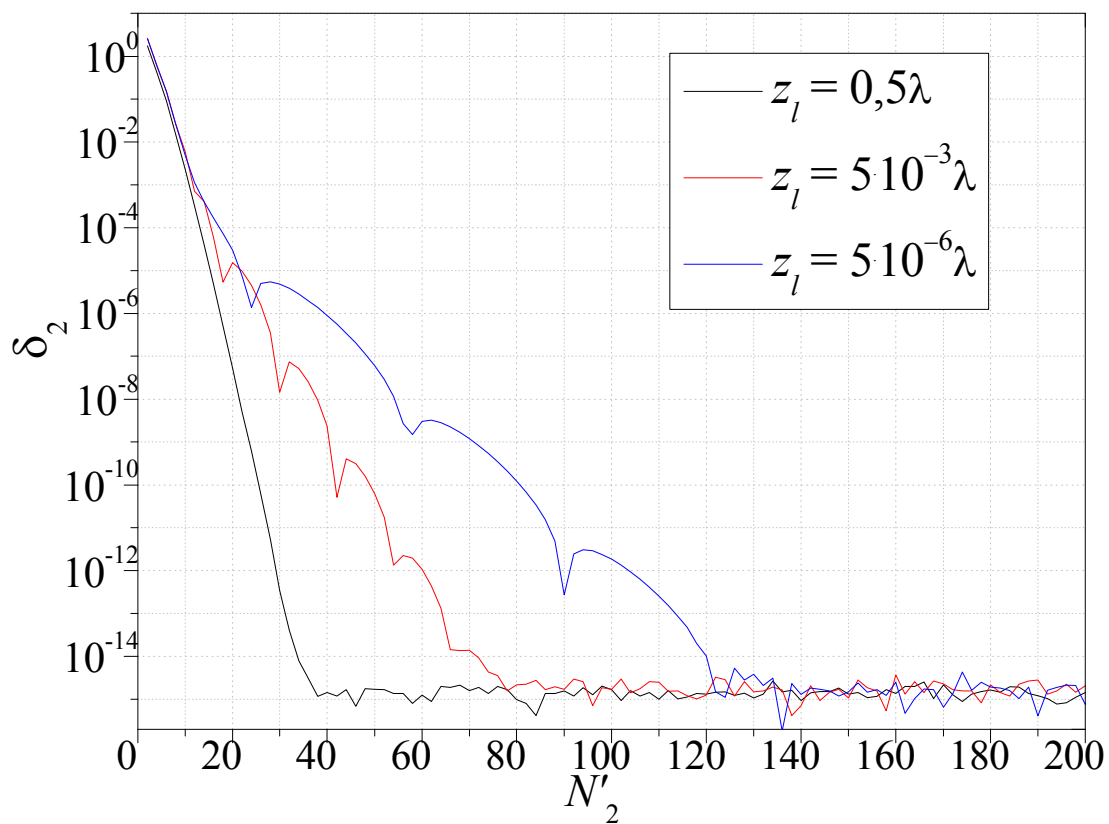
Друга интеграција интеграла  $G_{ji}$  и  $G'_{ji}$  (5.5) је дата са

$$I_2(s_l) = \int_{-1}^1 I_1(s_l, p) \cos^\alpha(\pi p) dp, \quad (5.14a)$$

$$I'_2(s_l) = \int_{-1}^1 I'_1(s_l, p) dp. \quad (5.14b)$$

С обзиром на то да сингуларне функције базиса не фигуришу у другој интеграцији (јер не зависе од  $p$ -координате), могу се користити исте методе интеграције као и код модификованих функција базиса. Наиме, уколико важи  $R_{\max} / R_{\min} < 5$  и  $R_{\min} > \lambda$ , (где су  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$  максимално и минимално растојање од круга који садржи пројекцију тачке поља на посматрани зарубљени конус као и у поглављу 3.1) довољна је директна метода (GL) за ефикасну интеграцију (5.14).

Уколико је  $R_{\max} / R_{\min} \geq 5$  и  $R_{\min}, R_{\max} \leq \lambda$  примењује се метода поништавања сингуларитета применом смене бр. 4 из Табеле I,  $p = t^m - a'$ . У ситуацијама где је  $R_{\max} / R_{\min} \geq 5$ ,  $R_{\min} \leq \lambda$  и  $R_{\max} > \lambda$  интеграциона путања се дели на два дела  $((0, p_0)$  и  $(p_0, 1)$ , где је  $p_0$  дато са (3.19)). На први део се примењује метод поништавања сингуларитета базиран на смени  $p = t^m - a'$ , а на други део се примењује директна метода (GL) на исти начина као што је описано у поглављима 3.1.3 и 3.1.5.



**Слика 5.8.** Релативна грешка  $\delta_2$  друге интеграције  $I'_2$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_2$  применом поништавања сингуларитета,  $p = t^m - a'$ , у случају цилиндричног елемента димензија  $z_{ck} = \Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,45\lambda$  и  $\Delta a_k = 0$ , за различите координате тачке поља  $z_l = \{0,5\lambda, 5 \cdot 10^{-3}\lambda, 5 \cdot 10^{-6}\lambda\}$  и  $a_l = 0,45\lambda$ .

Анализом различитих примера примећено је да са смањењем размака између пројекције тачке на зарубљени конус и краја где је сингуларитет услед функције базиса, број тачака интеграције који је потребан за исту тачност расте (што није случај код макс-орто функција базиса). Овај ефекат је илустрован на слици 5.8 где је приказана релативна грешка  $\delta_2$  друге интеграције  $I'_2$  у зависности од броја

тачака интеграције  $N'_2$  применом поништавања сингуларитета,  $p = t^m - a'$ , за неколико положаја тачке поља. Посматрани елемент је цилиндричан, димензија  $z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{ck} = 0,45\lambda$  и  $\Delta a_k = 0$ , а координате тачке поља су  $z_l = \{0,5\lambda, 5 \cdot 10^{-3}\lambda, 5 \cdot 10^{-6}\lambda\}$  и  $a_l = 0,45\lambda$ . Са слике 5.8 се види да је у случају тачке поља која је најдаља од ивице ( $z_l = 0,5\lambda$ ) максимална тачност остварена са мање од 40 тачака, док је за тачку поља која је најближа ивици ( $z_l = 5 \cdot 10^{-6}\lambda$ ) потребно око 120 тачака интеграције за исту тачност.

С обзиром на то да ефикасност друге интеграције (5.14) зависи од близине тачке поља од ивице где је сингуларитет услед функције базиса, формуле за одређивање броја тачака интеграције у случају макс-орто функција базиса (4.9в) се морају модификовати за примену у случају сингуларних функција базиса. На сличан начин као и за прву интеграцију кориговане су формуле за процену броја тачака интеграције потребних за остваривање жељене тачности друге интеграције на следећи начин

$$N'_2 = N_2 + \Delta N_2, \quad (5.15a)$$

$$\Delta N_2 = [-7 \log \Delta s_{ki0} + 2,2(\log \Delta s_{ki0})^2] \frac{\chi + 0,5}{15} c_2, \quad (5.15б)$$

$$c_2 = \begin{cases} 0, & w \leq 0 \\ 6,4 \cdot 10^{-2} \cdot w, & 0 < w \leq 16 \\ 1, & w > 16 \end{cases} \quad (5.15в)$$

$$w = \begin{cases} -\log(R_{\min} / e_{sk}), & R_{\min} > 0 \\ 17, & R_{\min} = 0 \end{cases} \quad (5.15г)$$

где је  $N_2$  број тачака интеграције у случају макс-орто функција базиса,  $\Delta s_{ki0} = |s_{k00} - s_{ki}|$ ,  $s_{k00}$  је пројекција тачке поља на посматрани зарубљени конус као извор поља  $s_{k00} = s_{k0}(p = 0)$ , а  $s_{k0}$  је дато са (3.2в).

#### 5.4. ТРЕЋА ИНТЕГРАЦИЈА ИМПЕДАНСНИХ ИНТЕГРАЛА У СЛУЧАЈУ СИНГУЛАРНИХ ФУНКЦИЈА БАЗИСА

Након уврштавања израза за сингуларне функција базиса и њихове изводе (5.3) и (5.4) у (5.5), трећа интеграција импедансних интеграла  $G_{ji}$  и  $G'_{ji}$  добија облик

$$I_3 = \begin{cases} \int_{-1}^1 (1+s_l)^b (1-s_l) I_2(s_l) ds_l, & s_{ki} = -1 \\ \int_{-1}^1 (1-s_l)^b (1+s_l) I_2(s_l) ds_l, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.16a)$$

$$I'_3 = \begin{cases} \int_{-1}^1 (1+s_l)^{b-1} ((b-1) - s_l(b+1)) I'_2(s_l) ds_l, & s_{ki} = -1 \\ \int_{-1}^1 (1-s_l)^{b-1} (-(b-1) - s_l(b+1)) I'_2(s_l) ds_l, & s_{ki} = 1 \end{cases}, \quad (5.16b)$$

где су  $I_2$  и  $I'_2$  дати са (5.14) и представљају потенцијале који  $k$ -ти елемент прави на месту  $l$ -тог елемента. Код треће интеграције, као и код прве, за нумерички прорачун је захтевнији интеграл са изводом функције базиса,  $I'_3$ . Разлог за то је што извод функције базиса (5.4) који је сингуларан за  $s_k = s_{ki}$ , фигурише код  $I'_3$ . Стога је ефикасност интеграције превасходно посматрана за интеграл (5.16b).

Поље  $k$ -тог елемента се брзо мења у околини његових крајева. Из тог разлога уколико су крајеви  $k$ -тог елемента далеко од  $l$ -тог, интегранди у (5.16) имају укупно по један сингуларитет услед сингуларне функције базиса (и њеног извода). Уколико је један крај  $k$ -тог елемента близу ивице  $l$ -тог елемента где је и сингуларитет услед функције базиса, онда се два сингуларитета поклапају. У случају да је један крај  $k$ -тог елемента близу другог краја  $l$ -тог елемента где није сингуларитет услед функције базиса, тада интегранди у (5.16) имају по један сингуларитет и један квази-сингуларитет. Такође, уколико су оба краја  $k$ -тог елемента близу оба краја  $l$ -тог елемента, интегранди у (5.16) опет имају по један сингуларитет и један квази-сингуларитета (јер се сингуларитети услед близине једног од крајева и услед сингуларне функције базиса поклапају). Стога разликујемо две ситуације: 1) да интегранди у (5.16) имају по један сингуларитет и 2) да имају по један сингуларитет и један квази-сингуларитет.



Без обзира да ли је у питању ситуација 1) или 2) предлаже се да се путања интеграције подели на два једнака дела,  $s_l \in (-1,0)$  и  $s_l \in (0,1)$ . За део коме припада сингуларитет услед функције базиса предложена је смена

$$du = (s_l + 1)^{b-1} ds_l, \quad s_l = (bu)^{1/b} - 1, \quad (5.17а,б)$$

на интервалу  $s_l \in (-1,0)$  уколико је сингуларитет услед функције базиса у  $s_k = -1$ , а уколико је тај сингуларитет у  $s_k = 1$  за смену се предлаже

$$du = (1 - s_l)^{b-1} ds_l, \quad s_l = 1 - (-bu)^{1/b}, \quad (5.17в,г)$$

на интервалу  $s_l \in (0,1)$ . После примене ових смена интегранди (5.16) постају релативно мирне функције па се коришћењем Гаус-Лежандрове интеграционе формуле ефикасно може постићи жељена тачност.

У случају ситуације 1) на другом делу интеграционе путање нема квази-сингуларитета па је довољно применити директну интеграцију (GL). У случају ситуације 2) на крају другог дела интеграционе путање постоји квази-сингуларитет услед близине ивица  $k$ -тог и  $l$ -тог елемента. Стога, уколико је  $s_{li} = -1$  (тј. у  $s_l = 1$  је само сингуларитет услед близине ивица  $k$ -тог и  $l$ -тог елемента) предлаже се смена бр. 3а из Табеле II,  $s_l = 1 + h'_2 - (-t)^m$ , за ефикасну интеграцију на интервалу  $s_l \in (0,1)$ . Уколико је  $s_{li} = 1$  (тј. у  $s_l = -1$  је само сингуларитет услед ивичног ефекта) предлаже се смена бр. 3б из Табеле II,  $s_l = -(1 + h'_1) + t^m$ , за интеграцију на интервалу  $s_l \in (-1,0)$ .

У случају 1) интеграл (5.16) се трансформишу у

$$I_3 = \int_{u(s_l=-1)}^{u(s_l=0)} (1 + s_l(u))^b (1 - s_l(u)) I_2 (bu)^{1/b-1} du + \int_{s_l=0}^{s_l=1} (1 + s_l)^b (1 - s_l) I_2 ds_l, \quad (5.18а)$$

$$I'_3 = \int_{u(s_l=-1)}^{u(s_l=0)} [b - 1 - s_l(u)(b + 1)] I'_2 du + \int_{s_l=0}^{s_l=1} (1 + s_l(u))^{b-1} [b - 1 - s_l(u)(b + 1)] I'_2 ds_l, \quad (5.18б)$$

ако је у питању функција базиса  $f_j = (1 + s_l)^b (1 - s_l)$ . У случају функције базиса  $f_j = (1 - s_l)^b (1 + s_l)$  интеграл се трансформишу у

$$I_3 = \int_{s_l=-1}^{s_l=0} (1-s_l)^b (1+s_l) I_2 ds_l + \int_{u(s_l=0)}^{u(s_l=1)} (1-s_l(u))^b (1+s_l(u)) I_2 (-bu)^{1/b-1} du, \quad (5.19a)$$

$$I'_3 = \int_{s_l=-1}^{s_l=0} (1-s_l)^{b-1} [-b+1-s_l(b+1)] I'_2 ds_l + \int_{u(s_l=0)}^{u(s_l=1)} [-b+1-s_l(u)(b+1)] I'_2 du. \quad (5.19b)$$

У случају 2) интеграл (5.16) се трансформишу у

$$I_3 = \int_{u(s_l=-1)}^{u(s_l=0)} (1+s_l(u))^b (1-s_l(u)) I_2 (bu)^{1/b-1} du + m \int_{t(s_l=0)}^{t(s_l=1)} (1+s_l(t))^b (1-s_l(t)) I_2 (-t)^{m-1} ds_l, \quad (5.20a)$$

$$I'_3 = \int_{u(s_l=-1)}^{u(s_l=0)} [b-1-s_l(u)(b+1)] I'_2 du + m \int_{t(s_l=0)}^{t(s_l=1)} (1+s_l(t))^{b-1} [b-1-s_l(t)(b+1)] I'_2 (-t)^{m-1} ds_l, \quad (5.20b)$$

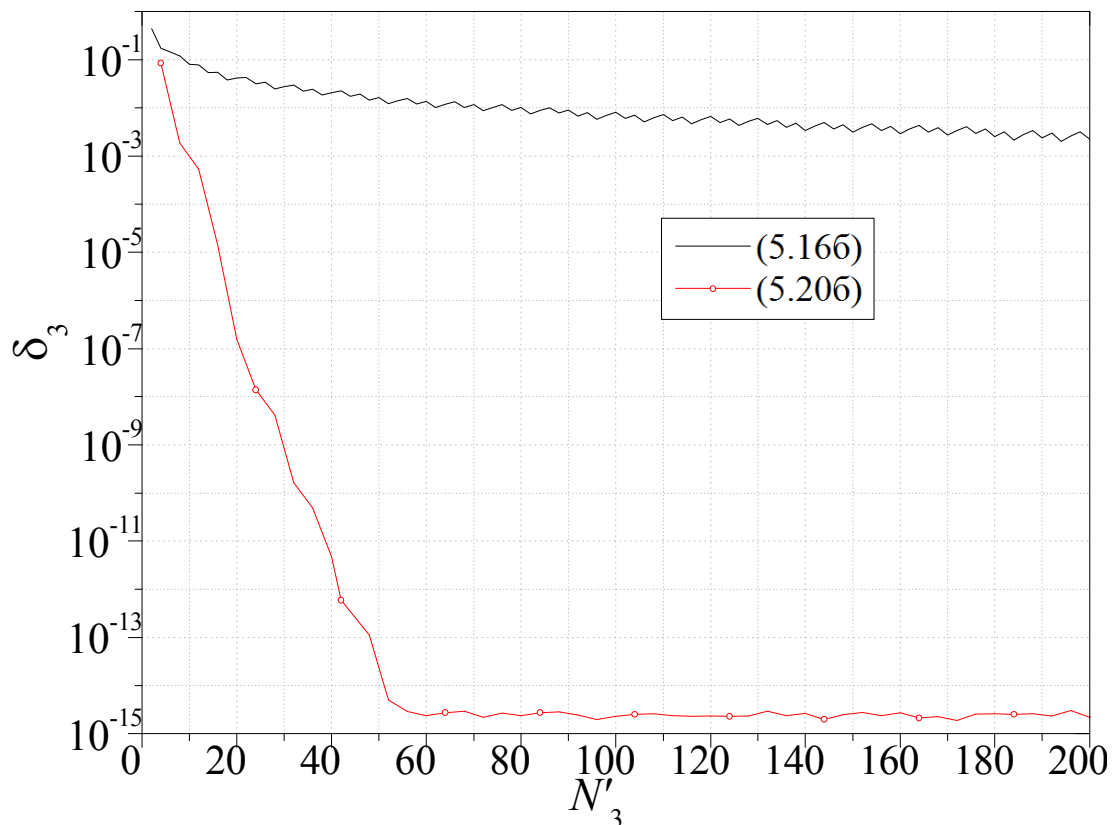
ако је у питању функција базиса  $f_j = (1+s_l)^b (1-s_l)$ . У случају функције базиса  $f_j = (1-s_l)^b (1+s_l)$  интеграл се трансформишу у

$$I_3 = m \int_{t(s_l=-1)}^{t(s_l=0)} (1-s_l(t))^b (1+s_l(t)) I_2 t^m dt + \int_{u(s_l=0)}^{u(s_l=1)} (1-s_l(u))^b (1+s_l(u)) I_2 (-bu)^{1/b-1} du, \quad (5.21a)$$

$$I'_3 = m \int_{t(s_l=-1)}^{t(s_l=0)} (1-s_l(t))^{b-1} [-b+1-s_l(t)(b+1)] I'_2 t^{m-1} dt + \int_{u(s_l=0)}^{u(s_l=1)} [-b+1-s_l(u)(b+1)] I'_2 du. \quad (5.21b)$$

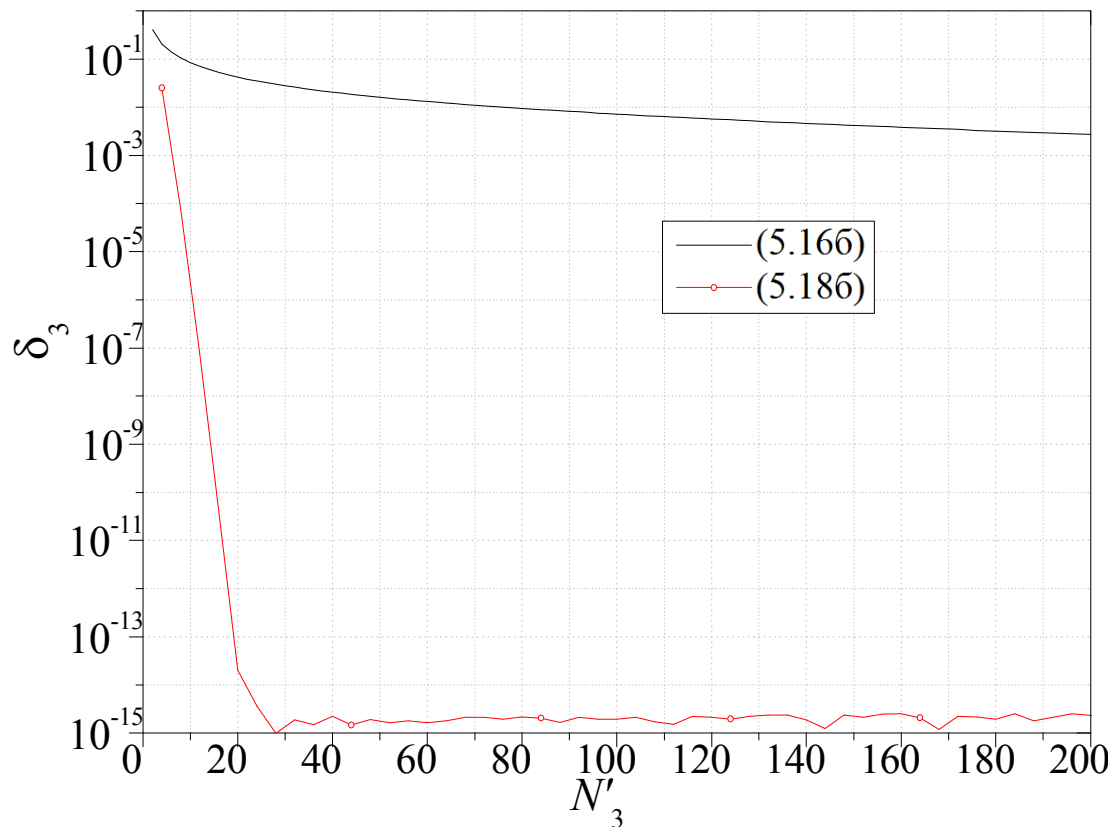
Да бисмо упоредили ефикасност директне методе и методе поништавања сингуларитета за трећу интеграцију, посматрајмо прво интеграцију сопственог члана ( $l=k$ ) у случају цилиндра димензија  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$  и

$\Delta a_l = 0$ . Разматра се ивични ефекат на крају  $s_{kl} = -1$  (тј. користи се сингуларна функција базиса  $f_j = (1 + s_l)^b (1 - s_l)$ ) за случај  $b = 0,5$  (угао на ивици је  $\alpha = 0$  што значи да је на посматраној ивици отворен крај структуре). На слици 5.9 приказана је релативна грешка  $\delta_3$  треће интеграције  $I'_3$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_3$  у случају директне интеграције (5.16б) и поништавања сингуларитета са сменама (5.17а,б) и  $s_l = 1 + h'_2 - (-t)^m$ , при чему се добија интеграл (5.20б). Са слике се може видети да је поништавање сингуларитета (5.20б) ефикасније од директне методе (5.16б), јер захтева око 50 тачака за максималну тачност. За разлику од тога резултати добијени директном методом јако споро конвергирају, тако да се на пример применом 200 тачака интеграције остварује релативна грешка већа од  $10^{-3}$ .



**Слика 5.9.** Релативна грешка  $\delta_3$  треће интеграције  $I'_3$  сопственог члана у зависности од броја тачака интеграције  $N'_3$  у случају  $s_{kl} = -1$  и  $b = 0,5$ , за директну методу (5.16б) и методу поништавања сингуларитета (5.20б). (Димензије цилиндра:  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$  и  $\Delta a_l = 0$ .)

Слика 5.9 илуструје ефикасност директне методе и методе поништавања сингуларитета на примеру сопственог члана, што одговара ситуацији 2). Стога је следеће анализирана ефикасност интеграције  $I'_3$  у случају 1). Посматрана је спрега између два цилиндра (на  $l$ -том се врши тестирање, а  $k$ -ти представља извор поља) чије су димензије  $z_{cl} = 0,5\lambda$ ,  $z_{ck} = 1,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = \Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$ ,  $a_{ck} = 2\lambda$  и  $\Delta a_l = \Delta a_k = 0$ . Тестирање се врши сингуларном функцијом базиса  $f_j = (1 + s_l)^b (1 - s_l)$ , а функција базиса која прави поље (тј. потенцијал) је  $f_i = (1 - s_k)^b (1 + s_k)$ . За обе функције базиса је  $b = 0,5$  (тј.  $\alpha = 0$  за оба елемента). На слици 5.10 приказана је у том случају релативна грешка  $\delta_3$  треће интеграције  $I'_3$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_3$  за директну методу и методу поништавања сингуларитета (при чему се користи смена (5.17а,б) на делу  $s_l \in (-1,0)$  и за  $I'_3$  се добија израз (5.18б)).



**Слика 5.10.** Релативна грешка  $\delta_3$  треће интеграције  $I'_3$  у зависности од броја тачака интеграције  $N'_3$  за директну интеграцију (5.166) и методу поништавања сингуларитета (5.18б). (Димензије два цилиндра су  $z_{cl} = z_{ck} = 0,5\lambda$ ,  $\Delta z_l = \Delta z_k = 0,5\lambda$ ,  $a_{cl} = 0,05\lambda$ ,  $a_{ck} = 2\lambda$  и  $\Delta a_l = \Delta a_k = 0$ . Тест функција је  $f_j = (1 + s_l)^b (1 - s_l)$ , функција базиса је  $f_i = (1 - s_k)^b (1 + s_k)$  и  $b = 0,5$ .)

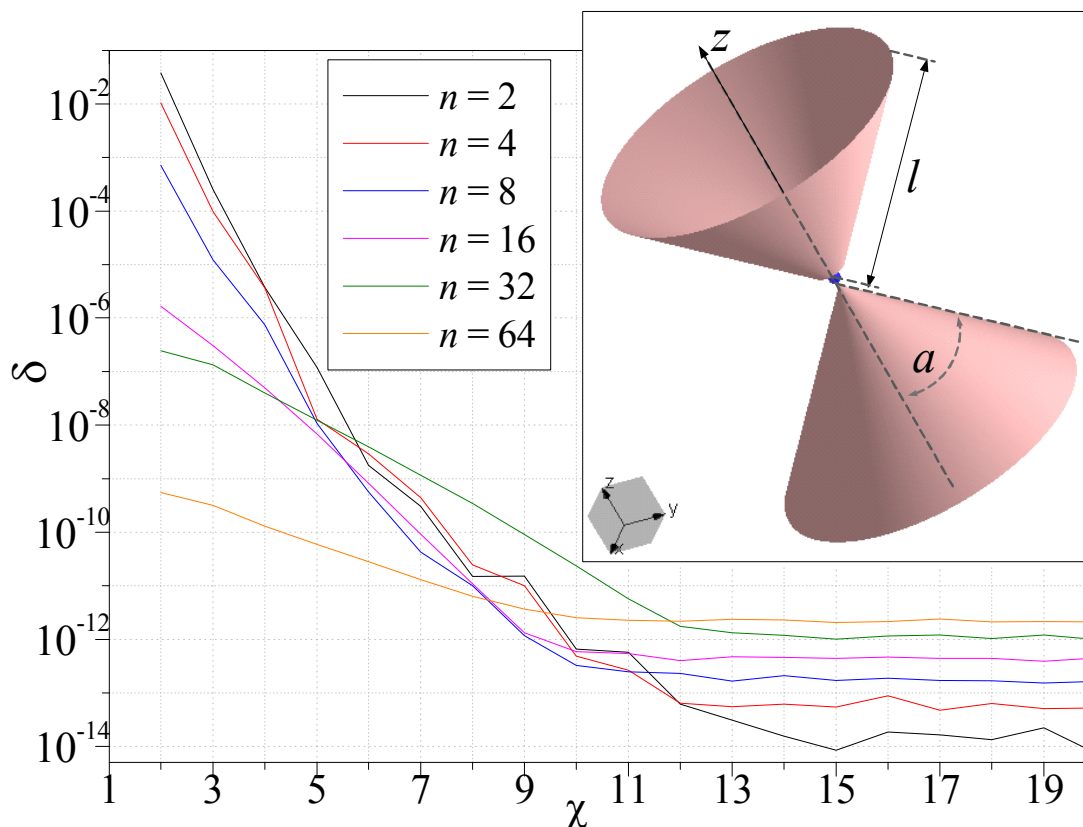
Са слике 5.10 може се видети да је интеграција применом технике поништавања сингуларитета (5.18б) ефикаснија од директне интеграције (5.16б), јер обезбеђује максималну тачност (тј. релативну грешку од око  $10^{-15}$ ) са мање од 30 тачака интеграције. Насупрот томе, директна метода, због своје споре конвергенције резултата, остварује релативну грешку која је већа од  $10^{-3}$  коришћењем чак 200 тачака интеграције.

На основу разних нумеричких примера, укључујући и оне са слика 5.9 и 5.10, формирана је формула за процену броја тачака интеграције за жељену тачност, на сличан начин као и у случају макс-орто функција базиса. Утврђено је да број тачака за трећу интеграцију  $N'_3$  одговара броју тачака интеграције у случају макс-орто функција базиса за степен апроксимације  $n = 1$ , односно

$$N'_3 = \max[3, (3,5\chi - 4 + 6e_{sl} / \lambda)]. \quad (5.22)$$

## 5.5. ТАЧНОСТ РАЧУНАЊА СИСТЕМСКЕ МАТРИЦЕ

Тачност рачунања системске (импедансне) матрице у случају кад се поред макс-орто користе и сингуларне функција базиса, илустрована је на примеру биконичне антене приказане у инсерту слике 5.11. Антена је моделована помоћу  $n_e = 2$  елемента. Дужина крака антене је  $l = 0,25\lambda$  на учестаности  $f = 300$  MHz, а угао отвора је  $\alpha = 66,774^\circ$ . На слици 5.11 приказана је релативна средња квадратна грешка (3.31) импедансне матрице у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$  за неколико степена апроксимације  $n$  (који се односи на ред развоја макс-орто функција базиса).

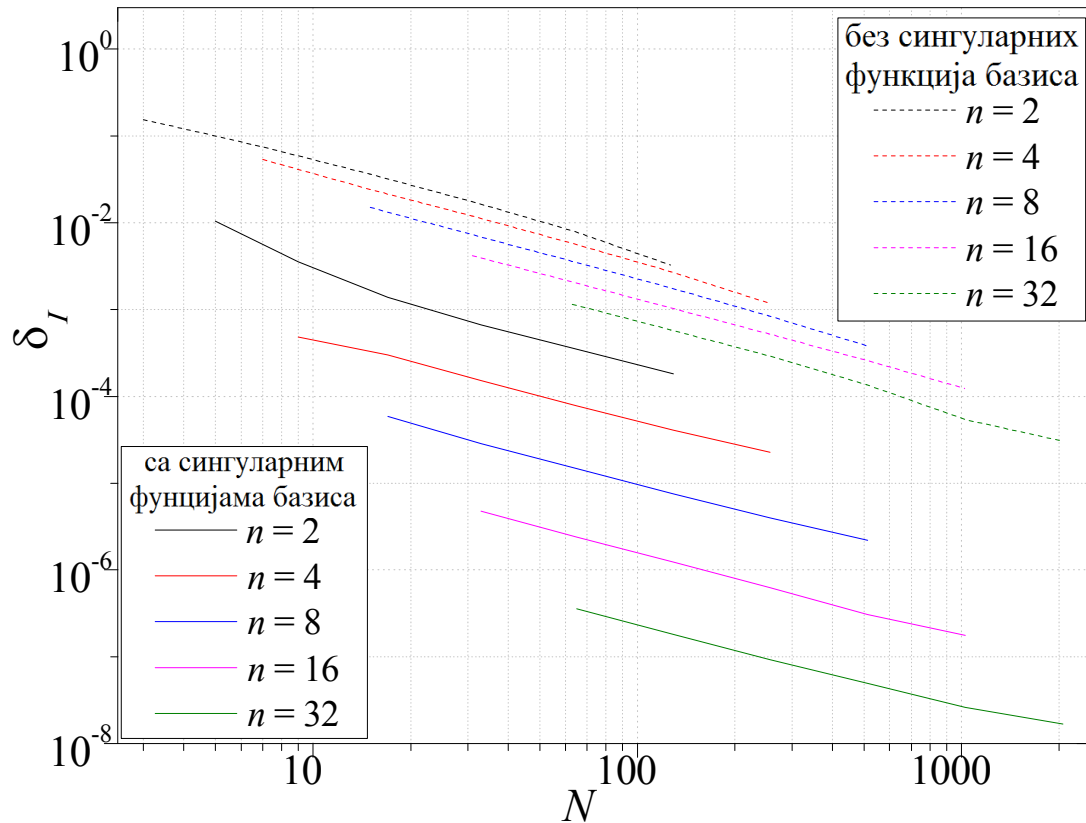


Слика 5.11. Релативна средња квадратна грешка импедансне матрице биконичне антене (приказане у инсерту слике) у зависности од жељеног броја цифара тачности  $\chi$  за неколико степена апроксимације  $n$ . (Димензије антене:  $l=0,25\lambda$  и  $\alpha=66,774^{\circ}$ .)

Са слике 5.11 се види да се применом алгоритма за процену броја тачака интеграције (тј. коришћењем формула (5.13), (5.15) и (5.22)) остварује жељена тачност са специфицираним бројем цифара тачности или већим.

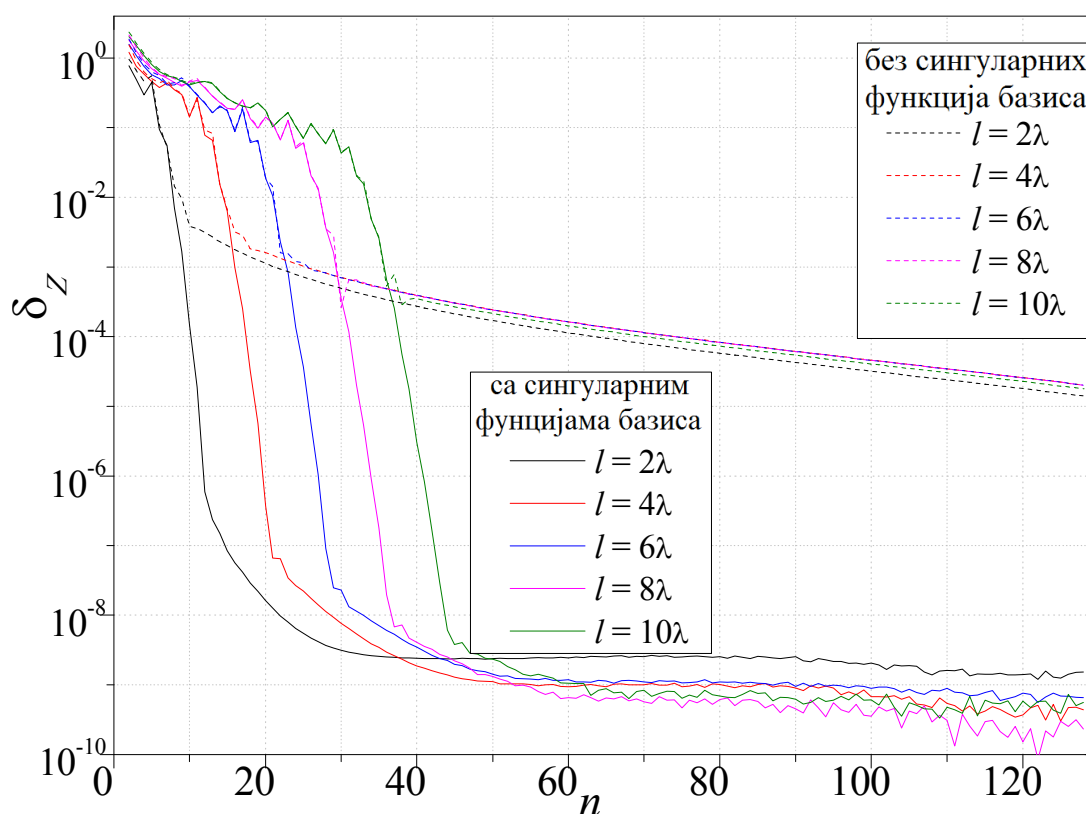
## 5.6. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ

Предност увођења сингуларних функција базиса у нову методу је илустрована на неколико примера. Треба напоменути да се укључивањем сингуларних функција базиса у методу задржавају и макс-орто функције базиса, тј. сваки елемент има  $n$  макс-орто функција базиса и максимално две сингуларне функције базиса.



**Слика 5.12.** Релативна средња квадратна грешка струје биконичне антене (приказане у инсерту слике 5.11) у зависности од броја непознатих  $N$ , за неколико степена апроксимације струје  $n$ , у случају кад су сингуларне функције базиса коришћене и без њих. (Димензије антене су  $l=0,25\lambda$ , а угао отвора  $\alpha=66,774^\circ$ .)

Посматрајмо прво биконичну антену из инсерта слике 5.11, чија је дужина крака  $l=0,25\lambda$ , а угао отвора  $\alpha=66,774^\circ$ . На слици 5.12 приказана је релативна средња квадратна грешка струје (3.32) за ову антену у зависности од броја непознатих  $N$ , за неколико степена апроксимације струје  $n$ , у случају кад се не користе и кад се користе сингуларне функције базиса. Са слике се може приметити да је тачност за око три реда величине већа уколико се сингуларне функције базиса примењују у поређењу са ситуацијом кад се оне не користе. На пример, у случају реда апроксимације  $n=32$  и броја подсегмената  $n_s=16$  релативна грешка у случају сингуларних функција базиса је око  $10^{-8}$ , а кад се оне не користе релативна грешка је око  $10^{-5}$ .



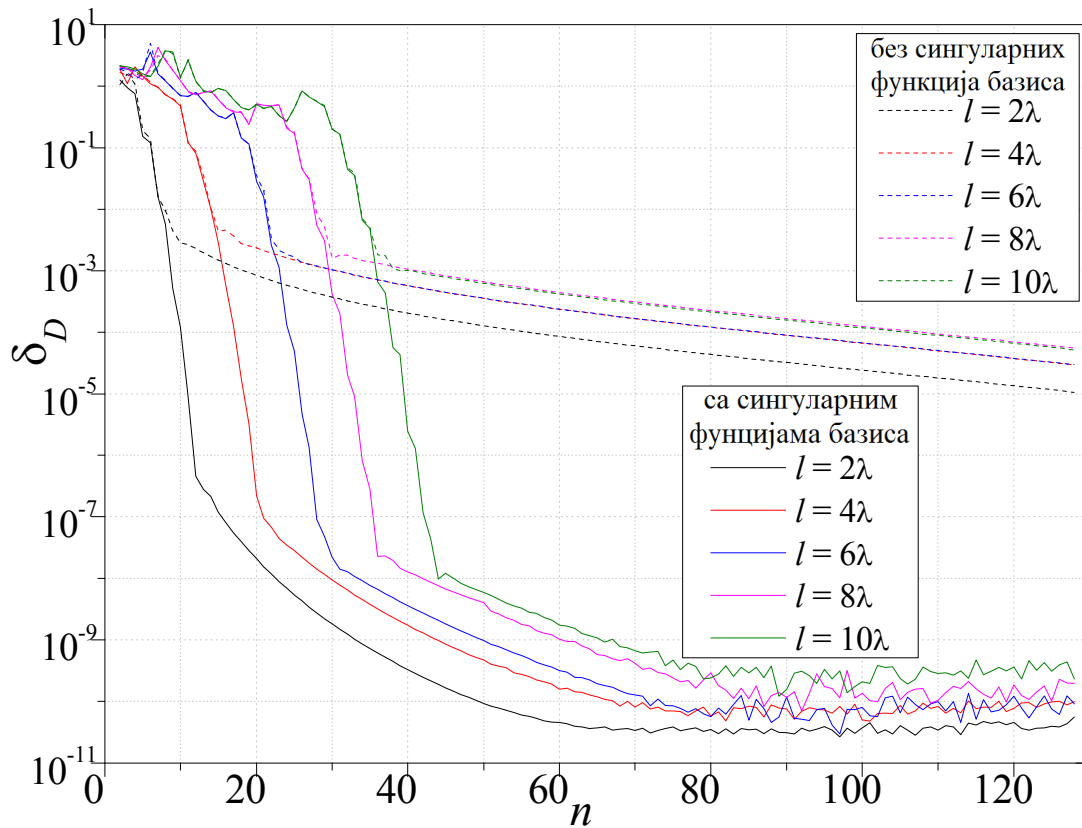
Слика 5.13. Релативна грешка  $\delta_z$  улазне импедансе у зависности од коришћеног степена апроксимације  $n$ , у случају кад се користе сингуларне функције базиса и без њих, за неколико дужина биконичне антене, чији је модел приказан у инсерту слике 5.11. (Димензије антена су  $\alpha = 66,774^\circ$ ,  $l = k2\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ .)

У циљу испитивања ефикасности методе са сингуларним функцијама базиса у случају електрички великих структура, као следећи пример је анализирана биконична антена (приказана у инсерту слике 5.11) чији је угао отвора  $\alpha = 66,774^\circ$ , а крак дужне  $l = k2\lambda$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ . На слици 5.13 приказана је релативна грешка улазне импедансе ове антене, на слици 5.14 приказана је релативна средња квадратна грешка добитка антене, а на слици 5.15 је приказана релативна средња квадратна грешка струје (3.32) дуж антене у зависности од степена апроксимације. На све три слике 5.13-5.15 приказани су резултати у случају кад су примењене сингуларне функције базиса и без њих.

Са слика 5.13 и 5.14 може се видети да се применом сингуларних функција базиса тачност резултата брзо повећава са порастом реда развоја (макс-орто функцијај базиса). На пример, минимална релативна грешка улазне импедансе износи  $10^{-9}$ , а добитка око  $10^{-10}$ , што је за око 4 до 5 редова величине мање него у случају кад се сингуларне функције базиса не користе. За веће редове развоја



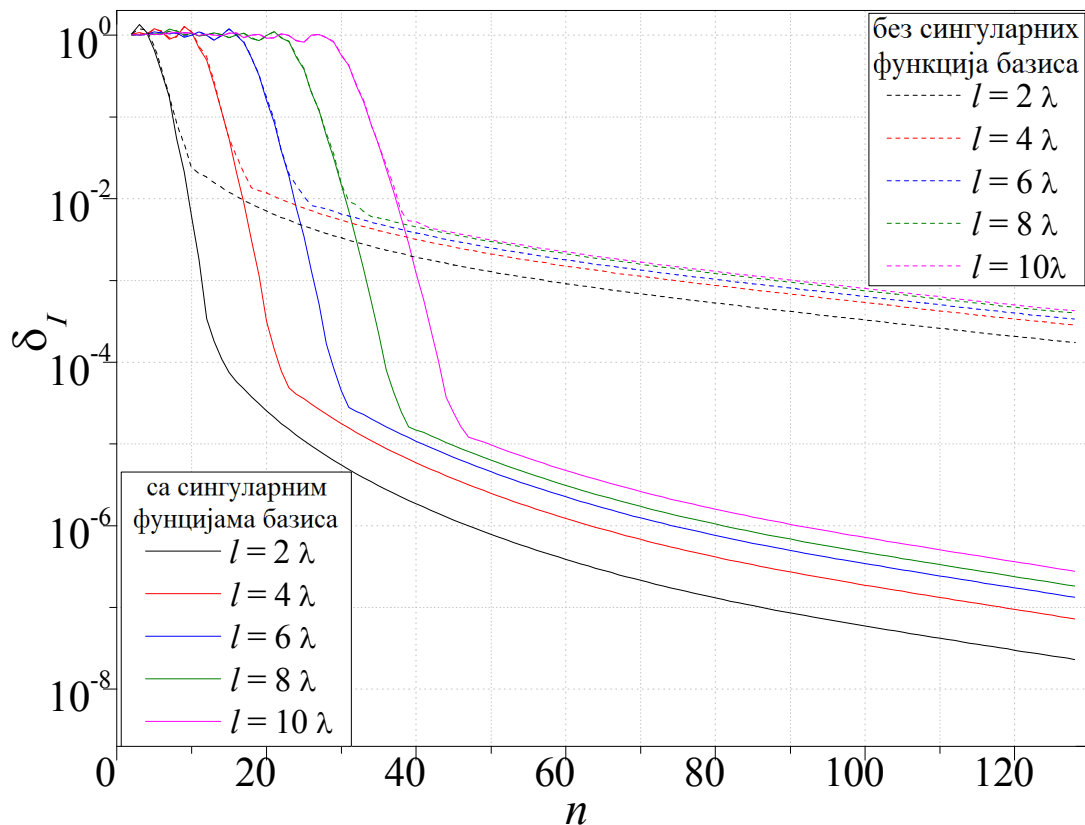
макс-орто функција базиса, тачност ових резултата (у случају примене и сингуларних функција базиса) улази у zasiћење због релативне RMS грешке са којом се рачуна сама системска матрица, која на пример за  $n = 64$  износи  $\delta = 10^{-11}$ .



Слика 5.14. Релативна средња квадратна грешка  $\delta_D$  добитка антене у зависности од коришћеног степена апроксимације  $n$ , у случају кад се користе сингуларне функције базиса и без њих, за неколико дужина биконичне антене (чији је модел приказан у инсерту слике 5.11). (Димензије антене су  $\alpha = 66,774^\circ$ ,  $l = k2\lambda$ ,  $k = 1,2\dots 5$ .)

Такође, може се приметити да се метода понаша исто за мање тачности (тј. за релативну RMS грешку до око  $10^{-2}$ ) без обзира да ли се сингуларне функције базиса користе или не, па се у том случају оне не морају примењивати. За разлику од тога, у случају захтева за вишим тачностима примена сингуларних функција базиса омогућава коришћење и за ред величине мањи број непознатих. На пример, ако се у случају дужине крака антене  $l = 2\lambda$  сингуларне функције базиса не користе, релативна RMS грешка добитка од  $10^{-5}$  (слика 5.14) се остварује применом 128. реда развоја, што одговара броју непознатих  $N = 255$ . Ако се и сингуларне функције базиса користе ова релативна грешка се остварује применом реда развоја  $n = 12$ , што одговара броју непознатих  $N = 25$ .

Са слике 5.15 се види да применом сингуларних функција базиса релативна RMS грешка струје опада до вредности од око  $10^{-8}$  коришћењем реда апроксимације  $n=128$ . Уколико се сингуларне функције базиса не користе ова релативна грешка (за  $n=128$ ) износи минимално  $10^{-4}$  што је за око четири реда величине веће. На другој страни, са слике се може уочити да резултати за релативну RMS грешку струје после одређеног реда апроксимације спорије конвергирају и у случају примене сингуларних функција базиса. Може се претпоставити да су разлог за то ефекти коничних крајева на месту напајања антене.



**Слика 5.15.** Релативна средња квадратна грешка  $\delta_I$  струје дуж антене у зависности од коришћеног степена апроксимације  $n$ , у случају кад се користе сингуларне функције базиса и без њих, за неколико дужина биконичне антене (чији је модел приказан у инсерту слике 5.11). (Димензије антене су  $\alpha = 66,774^\circ$ ,  $l = k2\lambda$ ,  $k = 1, 2 \dots 5$ .)

## 6. ЗАКЉУЧАК

У овој дисертацији је разматрана метода за анализу аксијално симетричних металних структура која се базира на решавању интегралне једначине електричног поља, која укључује тзв. егзактно језгро, коришћењем методе момената. За геометријско моделовање проблема коришћени су зарубљени конуси произвољне величине и облика. Површинске струје су представљене полиномским функцијама базиса вишег реда.

Као први облик полиномских функција базиса коришћене су тзв. модификоване функције базиса вишег реда. Развијен је нови алгоритам за рачунање интеграла потенцијала и импеданских интеграла који се базира на методи поништавања сингуларитета. Предложено је више различитих смена променљивих у оквиру методе поништавања сингуларитета примењене на сваку од две интеграције у случају интеграла потенцијала тј. три интеграције у случају импеданских интеграла. Предложене смене променљивих су једноставне за примену са једне стране, а са друге стране обезбеђују брзу конвергенцију интеграла (до машинске прецизности) са повећањем реда Гаус-Лежандрове интеграционе формуле. Посебно, осмишљене су једноставне формуле које одређују потребан број тачака интеграције за остваривање жељене тачности.

Тачност методе је потврђена кроз поређења са постојећим методама за електромагнетско моделовање. Предност рачунања интеграла потенцијала и импеданских интеграла са великом тачношћу је илустрована на више нумеричких примера. За дебелу дипол антену дужине око  $1\lambda$  одређена је расподела струје дуж крака антене и показана је брза конвергенција резултата са повећањем реда апроксимације. Такође, приказани су резултати за расподелу блиског поља по уздужном пресеку дипола и показано је да је ниво поља унутар антене практично једнак теоријској вредности 0. На примеру биконичне антене чија је дужина крака  $60\lambda$ , показано је да се за тачну и стабилну ЕМ анализу могу користити развоји за струју максималног реда  $n = 10$  у обичној, и  $n = 20$  у дуплој прецизности. У случају дебеле дипол антене дужине од око  $1\lambda$  релативна средња квадратна грешка расподеле струје је спуштена на  $10^{-6}$  коришћењем  $p$ - и  $h$ -рафинације. Потврђено је да се коришћењем  $p$ -рафинације остварује знатно бржа конвергенција резултата

него у случају  $h$ -рафинације. За умерено дебелу дипол антену, чија је укупна дужина 0,72 m, крах анализе на ниским учестаностима је спуштен на учестаности од око 30 Hz. За биконичну антену угла отвора  $\alpha = 66,774^\circ$ , чија дужина крака са повећањем учестаности расте од  $\lambda/100$  до  $100\lambda$ , показано је да улазна импеданса конвергира ка теоријској вредности од  $(50 + j0) \Omega$  бесконачно дугачке биконичне антене. За коаксијални кабл, који се напаја преко коничних прелаза, показано је да се параметар  $s_{11}$  рачуна са великом тачношћу у опсегу учестаности од 10 MHz до 10GHz, узимајући вредности од  $-100$  dB до  $-35$  dB.

У циљу повећања максималног реда развоја који се може користити за тачну и стабилну ЕМ анализу аксијално симетричних металних структура, посебна пажња је посвећена имплементацији тзв. макс-орто функција базиса. Велика тачност рачунања системске матрице је остварена коришћењем следеће три технике: 1) елементи системске матрице су представљени у виду линеарне комбинације импеданских интеграла у којима фигуришу Лежандрови полиноми и њихови изводи, 2) сингуларно понашање интегранда импеданских интеграла је елиминисано коришћењем смена променљивих за технику поништавања сингуларитета, и 3) Лежандрови полиноми и њихови изводи су рачунати са великом тачношћу коришћењем рекурзивних формула. На овај начин, коришћењем дупле прецизности за прорачун, импедансна матрица се може израчунати са релативном средњом квадратном грешком од  $10^{-14}$  до  $10^{-11}$  за редове развоја од  $n = 1$  до  $n = 128$ .

Услед ортогоналних особина макс-орто функција базиса и велике тачности рачунања одговарајуће системске матрице, стабилни и тачни резултати су добијени за ултра високе редове апроксимације за струју. Примена редова апроксимације до  $n = 128$  је демонстрирана на примеру дебеле дипол антене дужине око  $1\lambda$ . Показано је да се релативна средња квадратна грешка расподеле струје може спустити до  $10^{-6}$  коришћењем само  $p$ -рафинације, и до  $10^{-7}$  коришћењем и  $p$ - и  $h$ -рафинације. Посебно, показано је да је применом реда  $n = 128$  уместо  $n = 16$  релативна средња квадратна грешка 10 пута мања за исти број непознатих. Иста тачност се може постићи и коришћењем реда  $n = 16$  али са око 6 пута већим бројем непознатих.

На основу резултата за релативну грешку улазне импедансе електрички великих структура, уочено је да се брзина конвергенције нагло смањује после одређеног (критичног) реда апроксимације. Како овај критичан ред апроксимације расте са повећањем електричне дужине крака антене, закључено је да је разлог за овакво понашање ивични ефекат. Наиме, бесконачна површинска густина наелектрисања на ивицама (крајевима и спојевима) зарубљених конуса се не може довољно добро апроксимирати полиномским функцијама базиса. Стога су у циљу добијања врло великих тачности имплементирани и сингуларне функције базиса. При томе је посебна пажња поклоњена веома тачном и ефикасном израчунавању импеданских интеграла. С обзиром на то да интегранди одговарајућих импеданских интеграла имају по један сингуларитет више (у односу на полиномске функције базиса) нове смене променљивих су предложене за све три интеграције у оквиру импеданских интеграла, као и кориговане формуле за процену броја тачака интеграције за остваривање жељене тачности резултата.

Предност примене сингуларних функција базиса илустрована је на неколико нумеричких примера. За биконичне антене дужине крака од  $l=0,25\lambda$  до  $l=10\lambda$  израчунате су релативна средња квадратна грешка расподеле струје и добитка антене и релативна грешке улазне импедансе антене. Коришћењем развоја закључно са 128. редом остварене су минималне релативне грешке од  $10^{-7}$  до  $10^{-10}$ , што је за три до пет реда величине мање од релативних грешака које се могу добити када се сингуларне функције базиса не користе.

Имајући у виду све приказане нумеричке резултате закључује се да нова метода у оквиру које су укључене сингуларне и макс-орто функције базиса омогућава ефикасну анализу аксијално симетричних металних структура са великом тачношћу (7–10 цифара тачности) и у веома широком опсегу електричних димензија ( $10^{-6}\lambda$ – $100\lambda$ ). Такође, искуства стечена у имплементацији макс-орто функција базиса ултра високог реда и сингуларних функција базиса, као и у развоју техника поништавања сингуларитета при рачунању импеданских интеграла, могу се искористити и проширити на анализу произвољних метално-диелектричних структура.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [2] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*. New York: Macmillan, 1968; reprinted by New York: IEEE Press, 1993.
- [3] W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [4] B. D. Popović, *Elektromagnetika*. Beograd, Srbija: Građevinska knjiga, 1980.
- [5] J. A. Kong, *Electromagnetic Wave Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [6] A. R. Đorđević, *Elektromagnetika*. Beograd, Srbija: Akademska Misao, 2012.
- [7] S. V. Savić, A. Krmeta, M. Stevanović, D. I. Olćan, M. Tasić, M. M. Ilić, et al., "Analytic solutions of electromagnetic fields in inhomogeneous media," *International Journal of Electrical Engineering Education*, vol. 52, no. 2, pp. 131-141, April 2015.
- [8] K. K. Mei and J. G. Van Bladel, "Scattering by Perfectly Conducting Rectangular Cylinders," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 11, pp. 185–192, March 1963.
- [9] K. K. Mei, "On the Integral Equations of Thin Wire Antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 13, no. 3, pp. 374–378, May 1965.
- [10] Y. S. Yeh and K. K. Mei, "Theory of Conical Equiangular-Spiral Antennas: Part I-Numerical Technique," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 15, no. 5, pp. 634–639, September 1967.
- [11] M. G. Andreasen, "Scattering from Parallel Metallic Cylinders with Arbitrary Cross Section," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 12, pp. 746–754, November 1964.
- [12] M. G. Andreasen, "Scattering from Bodies of Revolution," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 2, no. 13, pp. 303–310, March 1965.
- [13] M. G. Andreasen, "Scattering from Cylinders with Arbitrary Surface Impedance," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 812–817, 1965.
- [14] J. H. Richmond, "Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross-Section Shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 13, pp. 338–341, May 1965.
- [15] J. H. Richmond, "Scattering by an Arbitrary Array of Parallel Wires," *IEEE Trans. Microwave Th. and Tech.*, vol. 13, pp. 408–412, July 1965.
- [16] J. H. Richmond, "Digital Computer Solutions of the Rigorous Equations for Scattering Problems," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 796–804, 1965.
- [17] J. H. Richmond, "TE-Wave Scattering by a Dielectric Cylinder of Arbitrary Cross-Section Shape," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 14, pp. 460–464, July 1966.

- [18] J. H. Richmond, "A Wire Grid-Model for Scattering by Conducting Bodies," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 14, pp. 782–786, November 1966.
- [19] F. K. Oshiro, "Source Distribution Technique for the Solution of General Electromagnetic Scattering Problems," *Proc. of 1st GISAT Symp.*, vol. 1, Pt. 1, Mitre Corporation, pp. 83–107, 1965.
- [20] F. K. Oshiro and K. M. Mitzner, "Digital Computer Solution of Three-Dimensional Scattering Problem," *Digest of IEEE Int. Antennas Propagat. Symp.*, pp. 257–263, October 1967.
- [21] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 14, no. 3, pp. 302–307, May 1966.
- [22] R. F. Harrington, "Matrix Methods for Field Problems," *Proc. IEEE*, vol. 55, no. 2, pp. 136–149, February 1967.
- [23] R. F. Harrington and J. R. Mautz, "Straight Wires with Arbitrary Excitation and Loading," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 15, pp. 502–515, July 1967.
- [24] P. Silvester, "A General Higher-Order Finite-Element Waveguide Analysis Program," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 17, no. 4, pp. 204–210, April 1969.
- [25] Z. J. Csendes and P. Silvester, "Numerical Solution of Dielectric Loaded Waveguides: I-Finite-Element Analysis," *IEEE Trans. Microwave Th. and Tech.*, vol. 18, no. 12, pp. 1124–1131, December 1970.
- [26] (ed.) R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics*. Elmsford, NY: Pergamon Press, 1973.
- [27] (ed.) R. Mittra, *Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*. New York: Springer Verlag, 1975.
- [28] P. B. Johns, "The Solution of Inhomogeneous Waveguide Problems Using a Transmission-Line Matrix," *IEEE Trans. Microwave Th. and Tech.*, vol. 122, no. 3, pp. 209–215, March 1974.
- [29] B. D. Popovic and B. M. Kolundzija, *Analysis of Metallic Antennas and Scatterers*. London: IEE, 1994.
- [30] A. Peterson, S. C. Ray, and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. New York: IEEE Press, and Oxford, U.K.: Oxford University Press, 1998.
- [31] W. C. Chew, J. M. Jin, E. Michielssen, and J. M. Song, (ed.), *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Boston, MA: Artech House, 2001.
- [32] B. M. Kolundzija and A. R. Djordjevic, *Electromagnetic Modeling of Composite Metallic and Dielectric Structures*. Boston, MA, USA: Artech House, 2002.

- [33] R. D. Graglia and A. F. Peterson, *Higher-order Techniques in Computational Electromagnetics*. Edison, NJ: SciTech Publishing, an imprint of the IET, 2015.
- [34] P. Silvester and R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 1st ed. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1983.
- [35] Jin, J.-M., *The Finite Element Method in Electromagnetics*. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [36] J. L. Volakis, A. Chatterjee and L. C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics*. New York: IEEE Press, 1998.
- [37] M. Salazar-Palma, T. P. Sarkar, L. E. Garcia-Castillo, T. Roy, and A. R. Djordjevic, *Iterative and self-adaptive finite elements in electromagnetic modeling*. Boston: Artech House, 1998.
- [38] A. Taflove, *Computational electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech House, 2005.
- [39] W. J. R. Hoefer, "The Transmission-Line Matrix Method - Theory and Applications," *IEEE Trans. Microwave Th. and Tech.*, vol. 33, no. 10, pp. 882–893, October 1985.
- [40] C. Caloz and T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications: The Engineering Approach*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- [41] M. Clemens and T. Weiland, "Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique," *Progress In Electromagnetics Research, PIER 32*, pp. 65–87, 2001.
- [42] J. Zhao, D. Psychoudakis, C.-C. Chen, and J. L. Volakis, "Design optimization of a low-profile UWB body-of-revolution monopole antenna," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 12, pp. 5578-5586, December 2012.
- [43] S. Liao, P. Chen and Q. Xue, "Ka-Band omnidirectional high gain stacked dual bicone antenna," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 64, no. 1, pp. 5578-5586, January 2016.
- [44] M. J. Adkins, "Low-pass filter with embedded resonator," patent 8 115 574 B2, February 14, 2012.
- [45] D. H. Werner, "An exact formulation for the vector potential of a cylindrical antenna with uniformly distributed current and arbitrary radius," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 8, pp. 1009–1018, 1993.
- [46] A. Mohan and D. S. Weile, "Accurate modeling of the cylindrical wire kernel," *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 48, no. 4, pp. 740-744, April 2006.
- [47] A. M. A. Jalloul and J. L. Young, "Singularity evaluation of the straight-wire mixed-potential integral equation in the Method of Moments procedure," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 1, pp. 172-179, January 2011.



- [48] A. R. Djordjevic, M. B. Dragovic, and B. D. Popovic, "Analysis of electrically thick antennas of revolution," in *Proc. 3rd ICAP*, Norwich, U.K., Apr. 12-15, 1983, pp. 390-394.
- [49] B. M. Kolundzija and B. D. Popovic, "Entire-Domain Galerkin Method for Analysis of Generalized Wire Antennas and Scatterers," *Proc. IEE H*, vol. 139, no. 1, pp. 17-24, February 1992.
- [50] B. D. Popovic, M. B. Dragovic, and A. R. Djordjevic, *Analysis and Synthesis of Wire Antennas*. Chichester, U.K.: Research Studies Press, 1982.
- [51] M. C. van Beurden and A. G. Tijhuis, "Analysis and Regularization of the Thin-Wire Integral Equation With Reduced Kernel," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 55, no. 1, pp. 120-129, January 2007.
- [52] D. R. Wilton and N. J. Champagne, "Evaluation and integration of the thin wire kernel," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, no. 4, pp. 1200-1206, April 2006.
- [53] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "Evaluation of weakly singular integrals via generalized Cartesian product rules based on the double exponential formula," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 58, no. 6, pp. 1980-1988, June 2010.
- [54] D. S. Sumic and B. M. Kolundzija, "Efficient iterative solution of surface integral equations based on maximally orthogonalized higher order basis functions," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, July 2005, vol. 4A, pp. 288-291.
- [55] D. S. Sumic and B. M. Kolundzija, "Efficient RCS calculation of fighter airplane on a PC using maximally orthogonalized higher order basis functions," in *1st Eur. Conf. Antennas Propagat. EUCAP 2006*, Nice, France, November 6-10, 2006, pp. 1-4.
- [56] M. M. Kostic and B. M. Kolundzija, "Maximally Orthogonalized Higher Order Bases Over Generalized Wires, Quadrilaterals, and Hexahedra," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 6, pp. 3135-3148, June 2013.
- [57] B. M. Kolundzija, "On the Inclusion of Edge Effect into Surface Vector Basis Functions," in *Proc. of IEEE AP-S Int. Symp.*, Atlanta, GA, 1998, pp. 282-285.
- [58] R. D. Graglia and G. Lombardi, "Singular Higher Order Divergence-Conforming Bases of Additive Kind and Moments Method Applications to 3D Sharp-Wedge Structures," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 56, no. 12, pp. 3768-3788, December 2008.
- [59] C. M. Butler, "Evaluation of potential integral at singularity of exact kernel on thin-wire calculations," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 23, no. 2, pp. 293-295, March 1975.
- [60] L. W. Pearson, "A separation of the logarithmic singularity in the exact kernel of the cylindrical antenna integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 23, no. 2, pp. 256-258, March 1975.

- [61] C. M. Butler and D. R. Wilton, "Effective Methods for Solving Integral and Integro-Differential Equations," in *Moment Methods in Antennas and Scattering*, R. C. Hansen, Ed. Boston, MA, USA: Artech House, 1990, pp. 58–77.
- [62] D. H. Werner, J. A. Huffman, and P. L. Werner, "Techniques for evaluating the uniform current vector potential at the isolated singularity of the cylindrical wire kernel," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 42, no. 11, pp. 1549-1553, November 1994.
- [63] S.-O. Park and C. A. Balanis, "Efficient kernel calculation of cylindrical antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 43, no. 11, pp. 1328-1331, November 1995.
- [64] F. D. Q. Pereira, J. L. G. Tornero, D. C. Rebenaque, J. P. Garcia, and A. A. Melcon, "Analysis of thick-wire antennas using a novel and simple kernel treatment," *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 46, no. 4, pp. 410-417, August 2005.
- [65] A. Heldring and J. M. Rius, "Efficient full-kernel evaluation for thin wire analysis," *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 44, no. 5, pp. 477–480, March 2005.
- [66] A. Heldring, J. M. Ruis, "Efficient Full Kernel Calculation for Wire Antennas," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Symp.*, June 20-25, 2004, pp. 3461–3464.
- [67] P. J. Papakanellos, "Assessment of a simple technique for the computation of singular potential and reaction integrals occurring in thin-wire antenna analysis," *Microw. Opt. Tech. Lett.*, vol. 49, no. 2, pp. 462-467, February 2007.
- [68] A. Mohan and D. S. Weile, "Convergence properties of higher order modeling of the cylindrical wire kernel," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 55, no. 5, pp. 1318-1324, May 2007.
- [69] U. C. Resende, M. V. Moreira, and M. M. Afonso, "Evaluation of singular integral equation in MoM analysis of arbitrary thin wire structures," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 457-460, February 2014.
- [70] W. X. Wang, "The exact kernel for cylindrical antenna," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 39, no. 4, pp. 434-435, April 1991.
- [71] D. H. Werner, J. A. Huffman, and P. L. Werner, "An exact formulation for the electromagnetic fields of a cylindrical antenna with a triangular current distribution," *Radio Sci.*, vol. 31, no. 4, pp. 701–714, July 1996.
- [72] D. H. Werner, "A method of moments approach for the efficient and accurate modeling of moderately thick cylindrical wire antennas," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 3, pp. 373-382, March 1998.
- [73] B. D. Popovic, "Polynomial Approximation of Current Along Thin-Symmetrical Cylindrical Dipoles," *Proc. IEE*, vol. 117, pp. 873–878, 1970.
- [74] A. R. Djordjevic, B. D. Popovic, and M. B. Dragovic, "A Rapid Method for Analysis of Wire-Antenna Structures," *Archiv fur Electrotechnik*, vol. 61, pp. 17–23, 1979.

- [75] A. R. Djordjevic, et al., *Analysis of Wire Antennas and Scatterers*. Norwood, MA: Artech House, 1990.
- [76] B. M. Kolundzija, "General Entire-Domain Galerkin Method for Electromagnetic Modeling of Composite Wire to Plate Structures," in *Proc. of 20th EuMc*, Budapest, Hungary, Pt. 1, 1990, pp. 853–858.
- [77] B. M. Kolundzija, "Comparison of a Class of Sub-Domain and Entire-Domain Basis Functions Automatically Satisfying KCL," *IEEE Trans. on Antennas and Propagat.*, vol. 44, no. 10, pp. 1362–1366, October 1996.
- [78] P. C. Waterman, "Matrix Formulation of Electromagnetic Scattering," *Proc. IEEE*, vol. 53, pp. 805–812, 1965.
- [79] M. A. Khayat and D. R. Wilton, "Numerical Evaluation of Singular and Near-Singular Potential Integrals," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, no. 10, pp. 3180-3190, October 2005.
- [80] A. G. Polimeridis, J. M. Tamayo, J. M. Ruis, and J. R. Mosig, "Fast and Accurate Computation of Hypersingular Integrals in Galerkin Surface Integral Equation Formulations via the Direct Evaluation Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 6, pp. 2329-2340, June 2011.
- [81] F. Vipiana and D. R. Wilton, "Optimized numerical evaluation of singular and near-singular potential integrals involving junction basis functions," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 1, pp. 162-171, January 2011.
- [82] F. Vipiana and D. R. Wilton, "Numerical evaluation via singularity cancellation schemes of near-singular integrals involving the gradient of Helmholtz-type potentials," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 3, pp. 1255-1265, March 2013.
- [83] D. J. Taylor, "Accurate and Efficient Numerical Integration of Weakly Singular Integrals in Galerkin EFIE Solutions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 51, no. 7, pp. 3180-3190, July 2003.
- [84] A. G. Polimeridis and J. R. Mosig, "Complete semi-analytical treatment of weakly singular integrals on planar triangles via the direct evaluation method," *Int. Journal Numer. Meth. Engng.*, vol. 83, no. 12, pp. 1625-1650, September 2010.
- [85] A. G. Polimeridis, F. Vipiana, J. R. Mosig, and D. R. Wilton, "DIRECTFN: Fully Numerical Algorithms for High Precision Computation of Singular Integrals in Galerkin SIE Methods," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 61, no. 6, pp. 3112-3122, June 2013.
- [86] J. P. Webb, "Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 47, no. 8, pp. 1244–1253, August 1999.
- [87] R. Graglia, A. Peterson, and F. Andriulli, "Curl-conforming hierarchical vector bases for triangles and tetrahedra," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 3, pp. 950–959, March 2011.

- [88] R. D. Graglia and A. F. Peterson, "Hierarchical curl-conforming Nédélec elements for quadrilateral and brick cells," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 8, pp. 2766–2773, August 2011.
- [89] A. F. Peterson and R. D. Graglia, "Scale factors and matrix conditioning associated with triangular-cell hierarchical vector basis functions," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 9, pp. 40–43, 2010.
- [90] M. Djordjevic and B. M. Notaros, "Three types of higher-order MoM basis functions automatically satisfying current continuity conditions," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp. Dig.*, June 2002, vol. 4, pp. 610–613.
- [91] E. Jørgensen, "Higher order integral equation methods in computational electromagnetics," Ph.D. dissertation, Tech. Univ. of Denmark, Ørsted-DTU, Lyngby, Denmark, 2003.
- [92] E. Jørgensen, J. L. Volakis, P. Meincke, and O. Breinbjerg, "Higher order hierarchical legendre basis functions for electromagnetic modeling," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 52, no. 11, pp. 2985–2995, November 2004.
- [93] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Evaluation of Potential and Impedance Integrals in Analysis of Axially Symmetric Metallic Structures to Prescribed Accuracy Up To Machine Precision," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 65, no. 5, pp. 2526 - 2539, February 2017.
- [94] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Singularity cancellation and extraction techniques for precise evaluation of impedance integrals in thin-wire analysis," in *10th Eur. Conf. Antennas Propag. (EuCAP 2016)*, Davos, Switzerland, April 10-15, 2016, pp. 1-4.
- [95] A. J. Krneta i B. M. Kolundžija, "Poređenje dve metode za računanje integrala potencijala u analizi tankih žičanih struktura", 58. Konferencija za elektroniku, telekomunikacije, računarstvo, automatiku i nuklearnu fiziku (ETRAN 2014), , Vrnjačka Banja, Srbija, jun 2 5, 2014, AP1.3.1-6.
- [96] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Analysis of axially symmetric wire antennas by the use of exact kernel of electric field integral equation," *Serb. J. Electr. Eng.*, vol. 13, no. 1, pp. 95-109, February 2016.
- [97] B. M. Kolundzija and A. J. Krneta, "Optimal use of Gauss-Legendre integration formula for evaluation of potential integrals in analysis of axially symmetrical wire antennas," in *3rd Int. Conf. Electr., Electron. Comp. Eng. (IcETRAN 2016)*, Zlatibor, Serbia, June 13-16, 2016, pp. API1.4.1-6.
- [98] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Improved efficiency of matrix fill in higher order modeling of axially symmetric antennas," in *4th Int. Conf. Electr., Electron. Comp. Eng. (IcETRAN 2017)*, Kladovo, Serbia, June 5-8, 2017, pp. API1.6.1-4.
- [99] A. J. Krneta and B. M. Kolundzija, "Matrix Fill in Analysis of Axially Symmetric Antennas using Very High Expansion Orders," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp. (APSURSI 2017)*, San Diego, California, July 9-14, 2017.

- [100] A. W. Maue, "Toward Formulation of a General Diffraction Problem via an Integral Equation," *J. Phys.*, vol. 126, no. 7, pp. 601–618, 1949.
- [101] A. J. Poggio and E. K. Miller, "Integral Equation Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems," in *Computer Techniques for Electromagnetics*, R. Mittra, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon Press, 1973.
- [102] J. R. Mautz and R. F. Harrington, "H-Field, E-Field and Combined-Field Solutions for Conducting Bodies of Revolution," *Arch. Elek. Ubertragung*, vol. 32, no. 4, pp. 157–164, 1978.
- [103] W. C. Chew, C. P. Davis, K. F. Warnick, Z. P. Nie, J. Hu, S. Yan, and L. Gurel, "EFIE and MFIE, Why the Difference?," in *IEEE Antennas Propag. Soc. Int. Symp.*, July 5-11, 2008, pp. 1-2.
- [104] L. Gurel and O. Ergul, "Contamination of the Accuracy of the Combined-Field Integral Equation With the Discretization Error of the Magnetic-Field Integral Equation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, no. 9, pp. 2650–2657, September 2009.
- [105] B. M. Kolundzija and V. V. Petrovic, "Power balance in MoM/SIE and FEM solved by Galerkin method," in *IEEE AP-S Int. Symp*, USA, OH, Columbus, June 22-27, 2003.
- [106] T. K. Sarkar and S. M. Rao, "A Simple Technique for Solving E-Field Integral Equations for Conducting Bodies at Internal Resonances," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 30, no. 6, pp. 1250–1254, November 1982.
- [107] O. Ergul and L. Gurel, "Improving the accuracy of the magnetic field integral equation with the linear-linear basis functions," *Radio Science*, vol. 41, no. 4, pp. 1-15, August 2006.
- [108] O. Ergul and L. Gurel, "On the Accuracy of MFIE and CFIE in the Solution of Large Electromagnetic Scattering Problems," in *1st Eur. Conf. Antennas Propag. EuCAP 2006*, Nice, France, November 6-10, 2006, pp. 1-5.
- [109] A. F. Peterson and M. M. Bibby, "High-Order Numerical Solutions of the MFIE for the Linear Dipole," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 10, pp. 2684-2691, October 2004.
- [110] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. New York: John Wiley and Sons, 1989.
- [111] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [112] E. K. Miller and F. J. Deadrick, "Some Computational Aspects of Thin-Wire Modeling," in *Computer Techniques for Electromagnetics*, R. Mittra, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon Press, 1973.
- [113] B. M. Kolundzija, "Electromagnetic Modeling of Wire to Plate Structures," D. Sc. Thesis, University of Belgrade, Department of Electrical Engineering, 1990.

- [114] A. G. Polimeridis, I. D. Koufogiannis, M. Mattes, J. R. Mosig, "Considerations on Double Exponential-Based Cubatures for the Computation of Weakly Singular Galerkin Inner Products," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 60, no. 5, pp. 2579 - 2582, May 2012.
- [115] WIPL-D Pro v13, <http://www.wipl-d.com>.
- [116] J. Van Bladel, "Field singularities at the tip of a cone," *Proc. IEEE*, vol. 71, pp. 901-902, 1983.
- [117] R. De Smedt and J. G. Van Bladel, "Field singularities at the tip of a metallic cone of arbitrary cross section," *IEEE Trans. on Antennas Propag.*, vol. 34, no. 7, 1986.

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Александра Крнета је рођена 2. јануара 1989. године у Београду, где је завршила основну школу “Младост” као носилац Вукове дипломе и ученик генерације, и Математичку гимназију као носилац Вукове дипломе. Електротехнички факултет у Београду уписала је 2007. године. Дипломирала је 15. јула 2011. године на Одсеку за телекомуникације и информационе технологије, Смер микроталасна техника са просечном оценом 9,91, по четворогодишњем студијском програму. Дипломски рад „Моделовање антена на људском телу за бежичне сензорске мреже“, одбранила је са оценом 10. По дипломирању проглашена је за студента са најбољим успехом међу студентима који су дипломирали 2010/2011 године на Одсеку за телекомуникације и информационе технологије. Након тога је уписала дипломске академске – мастер студије на Смеру за микроталасну технику, које је завршила 27. септембра 2012. године са просечном оценом 10,0, по једногодишњем студијском програму. Мастер рад „Кружни антенски низ на диелектричној сфери за омнидирекционо и усмерено зрачење“, одбранила је са оценом 10. Докторске студије на Смеру за микроталасну технику уписала је 13. новембра 2012. године. На докторским студијама положила је свих 10 испита са просечном оценом 10,0.

За сарадника у настави за ужу научну област Електромагнетика, антене и микроталаси при Катедри за општу електротехнику, на Електротехничком факултету изабрана је 6. децембра 2011. године. За асистента за ужу научну област Електромагнетика, антене и микроталаси при Катедри за општу електротехнику изабрана је 12. фебруара 2013. године, а поново је изабрана у исто звање 1. марта 2016. године.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписана Александра Крнета

Број индекса 2012/5005

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Функције базиса ултра високог реда и сингуларне функције базиса у анализи аксијално симетричних металних структура

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.12.2017.

Aleksandra Krneta



Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александра Крнета

Број уписа 2012/5005

Студијски програм Електротехника и рачунарство

Наслов рада Функције базиса ултра високог реда и сингуларне функције  
базиса у анализи аксијално симетричних металних структура

Ментор др Бранко Колунџија, редовни професор

Потписана Александра Крнета

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.12.2017.

Aleksandra Krneta

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Функције базиса ултра високог реда и сингуларне функције базиса у анализи аксијално симетричних металних структура

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.12.2017.

Aleksandra Krneta

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.