UNIVERZITET U BEOGRADU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Aleksandra D. Lekić

STABILNO PREKIDAČKO UPRAVLJANJE DC-DC KONVERTORIMA

doktorska disertacija

Beograd 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Aleksandra D. Lekić

STABLE SWITCHING CONTROL OF DC-DC CONVERTERS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017.

Mentor:

dr Vujo Drndarević, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Članovi komisije:

dr Milan Prokin, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Dragutin Kostić, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Saobraćajni fakultet

dr Dušan Stipanović, Associate Professor
University of Illinois at Urbana-Champaign

dr Željko Đurović, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Datum odbrane: _____

Naslov disertacije: Stabilno prekidačko upravljanje DC-DC konvertorima

Rezime: Kola energetske elektronike se koriste za efikasnu konverziju i kontrolu električne snage. Konvertori predstavljaju kola energetske elektronike koja vrše konverziju jednosmernog ili naizmeničnog ulaznog napona ili struje u jednosmerni ili naizmenični izlazni napon ili struju. U ovoj disertaciji se analiziraju DC-DC konvertori koji vrše konverziju jednosmernog ulaznog napona u jednosmerni izlazni napon.

Sve izraženiji zahtevi u pogledu visokih performansi i što niže cene, koji se postavljaju pred savremene sisteme, odnose se i na DC-DC konvertore, od kojih se zahteva i visoka efikasnost i što manje dimenzije. Zbog toga se razvoju i usavršavanju prekidačkih DC-DC konvertora u poslednjih nekoliko godina posvećuje izuzetna pažnja.

DC-DC konvertori su prekidačka kola kojima se upravlja širinsko modulisanim signalom. Širinsko modulisani signal je najčešće periodičan, ali može biti i aperiodičan i dobija se pažljivim projektovanjem kontrole DC-DC konvertora. Kontrola se projektuje tako da se dobije stabilan sistem, sa velikom faznom marginom, velikom frekvencijom prekidanja, kratkom uzlaznom ivicom rasta upravljačkog signala, brzom reakcijom na promene i što jednostavnijom realizacijom. Zbog toga postoji stalna potreba za usavršavanjem kontrole konvertora i razvojem novih algoritama upravljanja.

U ovoj disertaciji će biti opisano projektovanje stabilnog prekidačkog upravljanja DC-DC konvertora na primeru Ćuk konvertora. Ćuk konvertor je posebno interesantan zato što prekljućuje između granično stabilnih podsistema, što čini realizaciju njegovog kontrolera veoma zahtevnim. Analizirana su tri upravljanja: *sliding mode* kontrola, histerezisna kontrola i kontrola korišćenjem *piecewise linear* funkcija Ljapunova.

Sliding mode kontrola se zasniva na postavljanju prekidačke površine po kojoj se promenljive stanja konvertora u toku rada „kreću". Ovakva kontrola rezultuje sistemom sa velikom faznom marginom i malim dinamičkim gubicima na prekidačima, ali isto tako sama procena stabilnosti upravljanja zahteva linearizaciju sistema i procenu granice nelinearnog ostatka. Zbog jednostavnije procene stabilnosti se projektuje histerezisna kontrola u kojoj se vrši prekljućivanje između podsistema konvertora na osnovu minimuma izvoda kvadratne funkcije Ljapunova. Histerezisna kontrola, ako postoji zajednička funkcija Ljapunova za podsisteme konvertora, daje stabilan sistem. Sama realizacija regulatora je jednostavna i ima iste prednosti u pogledu dinamičkih gubitaka u kolu i fazne margine kao i *sliding mode* kontrola.

Kontrola DC-DC konvertora korišćenjem *piecewise linear* funkcija Ljapunova omogućava realizaciju stabilnog sistema bez obzira na stabilnost njegovih podsistema. Projektovana regulacija, iako je komplikovanije realizacije, rezultuje sistemom čija je stabilnost data samim njegovim projektovanjem.

Cilj ovog doktorata je razvoj algoritma za upravljanje prekidačkih DC-DC konvertora koji prekljućuju između graničnih podsistema. Tri vrste upravljanja: sliding mode, histerezisna kontrola i kontrola pomoću *piecewise linear* funkcija Ljapunova su uopštene tako da mogu da se primene za kontrolu Ćuk konvertora. Kako su sve pomenute kontrole jednostavne za realizaciju korišćenjem digitalnih procesora signala ili mikrokontrolera, biće ponuđena realizacija sliding mode kontrole na primeru Buck konvertora.

Ključne reči: DC-DC konvertori, hibridna kontrola, stabilnost, Ćuk konvertor

Naučna oblast: Elektronika

Uža naučna oblast: Elektronika

UDK broj:

Dissertation title: Stable Switching Control of DC-DC Converters

Abstract: Power electronics circuits are used for controlling and providing efficient power conversion. Furthermore, these converters are used for conversion of the input DC or AC voltage (or current) to output DC or AC voltage (or current). In this dissertation, DC-DC converters that are used for converting input DC voltage to output DC voltage will be considered.

General tendencies of increasing demands on the circuits' performances and lowering the prices also influence the design of DC-DC converters. In particular, small dimensions and great efficiency are some of the standard requirements for DC-DC converters. Due to their importance the challenges the requirements are imposing, these converters have been very attractive to many researchers over the number of recent years.

DC-DC converters are switching circuits controlled by pulse width modulated signals. Pulse width modulated signals can be periodic, but in some cases can be aperiodic, and they can be produced by various types of controllers applied to DC-DC converters. DC-DC circuits' controllers are designed to stabilize their behavior with large phase margins, high switching frequencies, small rising times and settling times while being easy to implement. In order to achieve some or all of these requirements, a number of control algorithms have been developed over the years.

In this thesis, control designs and their results are provided when applied to the Ćuk converter as being one of the most complex DC-DC converters. Ćuk converter is especially interesting from the controls prospective since its operating models (that is, subsystems) are marginally stable and thus a switching control is especially challenging to be designed. In particular, three different control laws are developed and presented: sliding mode control, hysteresis control and control based on multiple Lyapunov functions.

Sliding mode control based on first designing a sliding surface on which the controller switches. This controller is shown to provide a large phase margin and low dynamical stress on switches, but its realization requires complicated mathematical analysis based on the system's linearization and determination of the sector bound for the system nonlinearities remaining after the linearization. Hysteresis control, however, produces a stable system which switches according to the minimum of the multiple derivatives of the Lyapunov function. Hysteresis control stabilizes the system by its design based on the overall system's quadratic Lyapunov function. From the realization point of view this control is rather simple yet it produces similar outcomes as the sliding mode control.

In order to have switching being more dependent on particular variables, a control approach based on multiple polytopic Lyapunov functions is developed and provided. This control results in a very robust and stable system with high performance characteristics.

However, its implementation is more sophisticated and thus more complex to be carried out.

In essence, the aim of this dissertation is to provide designs and analyses of stable switching controllers for DC-DC converters where the operating modes are marginally stable subsystems. Three controllers falling into the categories of sliding mode, hysteresis control and control using multiple Lyapunov functions, are provided and applied to the Ćuk converter. All of the control approaches can be implemented using digital signal processors or microcontrollers, which is illustrated by the sliding mode control of the Buck converter.

Keywords: DC-DC converters, hybrid control, stability, Ćuk converter

Research area: Electronics

Research sub-area: Electronics

UDC number:

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Analiza rada DC-DC konvertora **5**

2.1 Ćuk konvertor 7

2.1.1 Režimi rada konvertora 7

2.1.2 *Linear ripple* aproksimacija 13

2.1.3 Karakterizacija anvelope 15

2.2 Osnovni pojmovi stabilnosti po Ljapunovu 18

3 Sliding mode kontrola DC-DC konvertora **22**

3.1 Koncept sliding mode kontrole 22

3.2 Sliding mode kontrola prekidačkih konvertora 25

3.3 Sliding mode kontrola Ćuk konvertora 28

3.3.1 Uvod 28

3.3.2 Analiza sliding mode kontrole Ćuk konvertora 29

3.3.3 Analiza prekidačkih površina 31

3.4 Zaključak 45

4 Histerezisna kontrola DC-DC konvertora **47**

4.1 Koncept hibridne kontrole 47

4.2 Matrična jednačina Ljapunova za marginalno stabilne sisteme 48

4.2.1 Granično stabilne matrice četvrtog reda 49

4.2.2 Analiza Ćuk konvertora 52

4.3 Funkcija Ljapunova Ćuk konvertora 56

4.4 Histerezisna kontrola Ćuk konvertora koji radi u kontinualnom režimu . . 63

4.4.1 Procena maksimalne vrednosti promenljivih stanja 64

4.4.2 Postupak projektovanja histerezisne kontrole Ćuk konvertora . . . 66

4.4.3 Numerički primeri 66

4.5 Histerezisna kontrola Ćuk konvertora koji radi u diskontinualnim režimima 71

4.5.1 Rad Ćuk konvertora u DCVM režimu 72

4.5.2 Rad Ćuk konvertora u DICM režimu 79
4.6 Zaključak 81

5 Kontrola DC-DC konvertora korišćenjem *piecewise linear* funkcija Ljapunova 82
5.1 Koncept *piecewise linear* funkcije Ljapunova 82
5.1.1 Notacija i osnovne definicije 82
5.1.2 *Piecewise linear* funkcije Ljapunova 84
5.2 PLLF kontrola Ćuk konvertora 86
5.2.1 Zaključak 96

6 Realizacija i eksperimentalna verifikacija kontrole DC-DC konvertora 97
6.1 Analiza buck konvertora 98
6.2 Projektovanje i realizacija kontrole buck konvertora 101
6.2.1 Projektovanje i realizacija buck konvertora 102
6.2.2 Realizacija kontrole korišćenjem mikrokontrolera 106
6.3 Verifikacija kontrole i karakteristika konvertora 106
6.4 Zaključak 113
6.5 Dodatak 114

7 Zaključak 116

Biografija 119

Bibliografija 120

Slike

2.1 Realizacija jednokvadratnih prekidača pomoću: (a) tranzistora, (b) diode; realizacija dvokvadratnih prekidača: (c) strujni bidirekcioni, (d) naponski bidirekcioni. 6

2.2 Ćuk konvertor kod koga su prekidači realizovani: (a) pomoću tranzistora i diode i (b) dva bidirekciona prekidača. 8

2.3 Ćuk konvertor u (a) podsistemu 1, (b) podsistemu 2, (c) podsistemu 3 i (d) podsistemu 4. 9

2.4 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u CCM-u u ustaljenom stanju sa primenjenom *linear ripple* aproksimacijom. . . . 14

2.5 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora sa frekvencijom prekidanja $f_S = 100$ kHz i ispunjenošću implusa PWM signala $d = 0.8$. Crvena linija predstavlja $\mathbf{x}_1[n]$, plava linija je $\mathbf{x}_2[n]$, a zelena linija predstavlja simulacione rezultate iz PLECS-a. 16

2.6 Zavisnost $\det \mathbf{A}(\Delta_1, \Delta_2)$. 17

2.7 Zavisnost $|\lambda|_{max}\mathbf{A}(\Delta_1, \Delta_2)$. 17

2.8 Zavisnost $\mathbf{B}(\Delta_1, \Delta_2)$. 18

3.1 Fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ u slučaju kada je (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, (b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ i (c) $\lambda_1 < 0$ i $\lambda_2 > 0$. 23

3.2 Fazni dijagram $x_2(x_1)$ za $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ u slučaju kada je (a) $\alpha < 0$, (b) $\alpha > 0$ i (c) $\alpha = 0$. 24

3.3 Fazni dijagram sistema sa sliding mode kontrolom. 25

3.4 Ćuk konvertor (slika gore) sa histerezisnim sliding mode kontrolerom (slika dole). 30

3.5 Vremenski dijagrami promenljivih stanja za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = x_1 - 0.5$. Ulazni napon se u trenutku $t = 5$ ms menja sa vrednosti $v_{IN} = 10$ V na $v_{IN} = 20$ V. 33

3.6 Vremenski dijagrami u ustaljenom stanju kada je vrednost parametra histerezisa (a) $\Delta = 10$ m; (b) $\Delta = 100$ m. 34

3.7 Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa Δ je nelinearni deo h_3^* prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora $\alpha|y_3|$ prikazano plavom linijom. 34
3.8 Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa Δ je nelinearni deo h_3^* prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora $\alpha|y_3|$ prikazano plavom linijom. 38
3.9 Fazni dijagram $x_2(x_1)$ za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_5$. 39
3.10 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni. 39
3.11 Vremenski dijagram zbira struje kalemova $i_{L1} + i_{L2}$ Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni. 40
3.12 Fazni dijagram $i_{L2}(i_{L1})$ Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni. 40
3.13 Vremenski dijagrami promenljivih stanja sinhronog Ćuk konvertora za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$. 41
3.14 Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa Δ je nelinearni deo h_3^* prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora $\alpha|y_3|$ prikazano plavom linijom. 43
3.15 Fazni dijagram $v_{C2}(i_{L1})$ Ćuk konvertora za oba kontinualna stanja pri: (a) $u = 1$ i (b) $u = 0$; i za (c) DICM režim rada. 44
3.16 Fazni dijagram $x_4(x_1)$ za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = m_1 x_1 + m_4 x_4 - m_5$. 45

4.1 Fazni dijagram Ćuk konvertora koji radi u CCM-u sa $d = 0.5$. 59
4.2 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u CCM-u za $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$. 68
4.3 Vremenski dijagram funkcije Ljapunova, izvoda funkcije Ljapunova i stanja prekidača S za Ćuk konvertor u CCM-u i $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$. 68
4.4 Fazni dijagram Ćuk konvertora koji radi u CCM-u za $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$. . 69
4.5 Vremenski dijagrami Ćuk konvertora na granici režima CCM i DCVM za $\rho = 4.84 \cdot 10^{-3}$ i $d = 0.8$. 70
4.6 Vremenski dijagram funkcije Ljapunova, izvoda funkcije Ljapunova i stanja prekidača S za Ćuk konvertor na granici režima CCM i DCVM i za $\rho = 4.84 \cdot 10^{-3}$ i $d = 0.8$. 70
4.7 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji preključuje između CCM-a i DCVM-a za $d = 0.8$ i $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$. 78

4.8 Vremenski dijagrami funkcije Ljapunova i izvoda funkcije Ljapunova Ćuk konvertora koji prekljućuje između CCM-a i DCVM-a za $d = 0.8$ i $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$. 78
4.9 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u DICM-u za $d = 0.1$ i $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$. 80
4.10 Vremenski dijagrami funkcije Ljapunova i izvoda funkcije Ljapunova Ćuk konvertora koji radi u DICM-u za $d = 0.1$ i $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$. 80

5.1 Polihedron kao primer. 84
5.2 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. 90
5.3 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = -0.2\ \mathrm{V}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. 91
5.4 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = 0.2\ \mathrm{V}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. . 91
5.5 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_2 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_2 = -20\ \mathrm{A}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. . 93
5.6 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_2 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_2 = 20\ \mathrm{A}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. . 93
5.7 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_4 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_4 = -0.8\ \mathrm{V}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. 94
5.8 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_4 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_4 = 0.8\ \mathrm{V}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. . 94
5.9 Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujama kalemova x_1 i x_2 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$, $k_2 = -20\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = 0.2\ \mathrm{V}^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. 95

6.1 Buck konvertor. 98
6.2 Fazni dijagram buck konvertora. 100
6.3 Blok šema realizacije kontrole buck konvertora. 101

6.4 Merenje frekvencije rada internog oscilatora čipa MC34063A. 103
6.5 Realizovani buck konvertor. 104
6.6 Eksperimentalni rezultati realizovanog buck konvertora. 105
6.7 Realizovani buck konvertor. 107
6.8 Eksperimentalni rezultati *sliding mode* kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V. Ulazni napon je $v_{IN} = 12$ V, kondenzator $C_T = 11$ nF i izlazna otpornost $R = 10\ \Omega$. 109
6.9 Eksperimentalni rezultati *sliding mode* kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V. Ulazni napon je $v_{IN} = 12$ V, kondenzator $C_T = 820$ pF i izlazna otpornost $R = 10\ \Omega$. 110
6.10 Eksperimentalni rezultati *sliding mode* kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = m_1 x_1 + m_2 x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V. Kondenzator $C_T = 820$ pF, a izlazna otpornost $R = 10\ \Omega$. 112

Glava 1

Uvod

Kola energetske elektronike se koriste za efikasnu konverziju i kontrolu električne snage [1]. Konvertori predstavljaju kola energetske elektronike koja vrše konverziju jednosmernog ili naizmeničnog ulaznog napona ili struje u jednosmerni ili naizmenični izlazni napon ili struju. Prema tipu ulazne i izlazne veličine dele se na DC-DC konvertore, AC-DC konvertore (ispravljače), DC-AC konvertore (invertore) i AC-AC konvertore. DC-DC konvertori pretvaraju ulazni jednosmerni napon ili struju u izlazni jednosmerni napon ili struju, pri čemu se na izlazu dobija pojačan ili oslabljen izlazni napon/struja [2].

Sve izraženiji zahtevi u pogledu visokih performansi i što niže cene, koji se postavljaju pred savremene sisteme, odnose se i na DC-DC konvertore, od kojih se zahteva i visoka efikasnost i što manje dimenzije. Zbog toga se razvoju i usavršavanju prekidačkih DC-DC konvertora u poslednjih nekoliko godina posvećuje izuzetna pažnja. Postoji veći broj tipova prekidačkih konvertora, međutim i dalje su u uoptrebi osnovni, neizolovani, konvertori: Buck, Boost i Buck-boost [1]. Navedeni konvertori su čest predmet izučavanja i usavršavanja, kao i kompleksniji konvertori poput Ćuk konvertora [3] i SEPIC konvertora (*single-ended primary-inductor converter*).

Pored pomenutih osnovnih konvertora, kako bi se ostvarilo galvansko razdvajanje ulaza od izlaza konvertora, razvijeni su i mnogobrojni izolovani konvertori. Najčešća realizacija galvanskog razdvajanja ulaza od izlaza konvertora jeste korišćenjem transformatora, npr. Flyback konvertor. Intenzivni razvoj integrisane tehnologije uvodi u upotrebu *switched-capacitor* DC-DC konvertore [4] kod kojih se konverzija ulazne veličine u izlaznu postiže isključivo korišćenjem prekidača i kondenzatora. Razvoj ovih konvertora je uslovljen tendencijom da se kalemovi što manje koriste u integrisanim kolima zbog njihovih velikih parazitnih otpornosti i kapacitivnosti, kao i velike površine.

Kako su DC-DC konvertori prekidačka kola sastavljena od reaktivnih komponenata, kalemova i kondenzatora, i prekidača, dioda i tranzistora, njima se upravlja tako što se na gejt tranzistora (prekidača) dovodi impulsni širinsko modulisani (PWM - *pulse width*

modulated) signal, te se za ove konvertore koristi i naziv PWM konvertori [1]. Signal kojim se upravlja konvertorom je najčešće periodičan, ali može da bude i aperiodičan. Regulacija sa konstantnom frekvencijom prekidanja se postiže tako što se menja ispunjenost impulsa u skladu sa promenom veličine kojom se upravlja ili koja se reguliše, najčešće promenljive stanja (napona kondenzatora i struje kalema). U slučaju da frekvencija upravljačkog signala nije konstantna, onda se u zavisnosti od vrednosti kontrolisane promenljive menja frekvencija prekidanja [5].

Željena konverzija ulazne u izlaznu veličinu DC-DC konvertora se postiže pažljivim projektovanjem njegovog upravljanja. Upravljanje se projektuje tako da se dobije stabilan sistem, sa velikom faznom marginom, velikom frekvencijom prekidanja, kratkom uzlaznom ivicom rasta signala, brzom reakcijom na promene i što jednostavnijom realizacijom. Zbog toga postoji stalna potreba za usavršavanjem kontrole konvertora i razvojem novih algoritama upravljanja. Zahvaljujući pojavi mikrokontrolera i mikroprocesora, koji su jednostavni za programiranje i veoma dostupni na tržištu, poseban akcenat je stavljen na digitalnu kontrolu [6–9]. Digitalna kontrola je uslovila ubrzani razvoj algoritama koji se mogu lako implementirati korišćenjem digitalnih procesora signala.

Standardne metode kontrole DC-DC konvertora se zasnivaju na predstavljanju DC-DC konvertora njegovim modelom sa usrednjenim naponima i strujama u kolu i to najčešće samo za rad u kontinualnom režimu i zatim realizacijom PID regulatora [10, 11]. Razvijeni su brojni algoritmi za usrednjavanje napona i struja u kolu [12], od kojih je najčešće primenjivano usrednjavanje u prostoru stanja (*state-space averaging*) [13, 14]. Često primenjivana metoda je i metoda programiranja struje, *Current Mode Control*, koja pored svojih prednosti u ograničavanju struje često dovodi do pojave haotičnog ponašanja konvertora [15, 16].

Pored standarnih metoda regulacije, razvijeni su i brojni drugi, kao što su *sliding mode* i histerezisna kontrola DC-DC konvertora. *Sliding mode* kontrola [17] se zasniva na postavljanju prekidačke površine po kojoj se promenljive stanja konvertora u toku rada „kreću". Za razliku od PID regulacije, *sliding mode* kontrola uzrokuje manje dinamičke gubitke na prekidačima i daje veću faznu marginu funkcije prenosa konvertora [18]. Sa druge strane, histerezisna kontrola predstavlja oblik hibridne kontrole [19, 20] koja karakteriše sistem koji ima i kontinualnu i diskretnu dinamiku u kolu. U DC-DC konvertoru su kontinualne veličine promenljive stanja (struje kalemova i naponi kondenzatora), dok je diskretna promenljiva dimanika rada prekidača.

Posmatranjem prekidača kao dela kola sa diskretnom dinamikom, može se zadati kriterijum njegovog prekidanja. Jedan od kriterijuma jeste prekidanje na osnovu minimalne vrednosti izvoda funkcije Ljapunova, skalarne funkcije koja se koristi za postizanje stabilnosti sistema. Oblik funkcije Ljapunova korišćene za stabilizaciju sistema u opštem

slučaju nije rešen. Međutim, najčešće korišćena funkcija Ljapunova je kvadratna koja se može odrediti primenom linearnih matričnih nejednačina i konveksnog programiranja [21, 22]. Histerezisna kontrola sa prekidanjem na osnovu minimalne vrednosti izvoda funkcije Ljapunova, ukoliko postoji, garantuje stabilnost koja se dobija direktno na osnovu projektovane kontrole.

Pored *sliding mode* i histerezisne kontrole DC-DC konvertora, čija se stabilnost procenjuje primenom kvadratne funkcije Ljapunova, postoje i kontrole kojima se sistem stabiliše korišćenjem višestrukih linearnih funkcija Ljapunova (*Piecewise Linear Lyapunov Functions*-PLLF) [23]. *Piecewise linear* funkcije Ljapunova su linearne funkcije definisane tako da se za svako od stanja konvertora formuliše linearna funkcija Ljapunova koja ga stabiliše. Zajedno sa prekidanjem sistema između stanja konvertora, odnosno podsistema u kojima DC-DC konvertor radi, kontroler prekida ili još kažemo preključuje između različitih funkcija Ljapunova. Na taj način se dobija celokupno stabilan sistem.

Ova disertacija se bavi analizom i realizacijom *sliding mode*, histerezisne kontrole DC-DC konvertora, kao i kontrole konstruisanjem višestrukih funkcija Ljapunova. Ove tri kontrole daju veliku faznu marginu funkcije prenosa konvertora i manje dinamičke gubitke na prekidačima, dok su sa stanovišta vremena uspona uzlazne ivice signala i stabilnosti merljive sa PID regulacijom [18]. Realizacija histerezisne kontrole sa prekidanjem na osnovu minimalne vrednosti funkcije Ljapunova, ukoliko može da se realizuje, garantuje stabilnost rada konvertora, dok se *sliding mode* kontrolom postiže jednostavnija realizacija kontrolera korišćenjem unapred definisane prekidačke površine. Sa druge strane, konstrukcijom višestrukih funkcija Ljapunova se može dobiti stabilan sistem iako se satoji od podsistema koji mogu biti i stabilni i nestabilni. Sama funkcija Ljapunova je u tom slučaju kompleksnija, ali projektovanje kontrole je veoma jednostavno.

U disertaciji je poseban akcenat stavljen na realizaciju regulatora za Ćuk konvertor čiji se kontinualni režim rada odvija između dva granično stabilna podsistema, što čini projektovanje njegove kontrole i procenu funkcije Ljapunova veoma zahtevnim. Preključivanje između dva granično stabilna sistema daje kvadratnu funkciju Ljapunova čiji izvod sadrži specifične semidefinitne kvadratne forme koje do sada nisu analizirane u literaturi, a čiji oblik je izveden u ovoj disertaciji. Pomenute vrste upravljanja: *sliding mode*, histerezisna kontrola i PLLF kontrola, su proširene tako da se mogu koristiti za projektovanje stabilnog prekidačkog sistema koji preključuje između granično stabilnih podsistema, kao što je Ćuk konvertor.

Kako bi se demonstrirala jedna od analiziranih kontrola, u ovoj disertaciji je realizovana *sliding mode* kontrola Buck konvertora. U radu je realizacija Buck konvertora i kontrole korišćenjem mikrokontrolera STM32F4-DISCOVERY detaljno opisana. Ponuđena realizacija pokazuje da se analizirane kontrole mogu uspešno implementirati digitalno

korišćenjem mikrokontrolera.

Disertacija se sastoji iz sedam glava. U drugoj glavi se daju osnovni pojmovi stabilnosti dinamičkog sistema i analiza Ćuk konvertora. Treća glava opisuje projektovanje *sliding mode* kontrole DC-DC konvertora i analizu stabilnosti dobijenog sistema. Pokazuje se da je ograničenje sektora nelinearnog dela dobijenog nakon linearizacije prekidačkog sistema u direktnoj vezi sa primenom *linear ripple* aproksimacije DC-DC konvertora. Četvrta glava opisuje hibridnu i histerezisnu kontrolu za specijalan slučaj Ćuk konvertora kojim se upravlja na osnovu minimuma izvoda kvadratne funkcije Ljapunova. Kako su DC-DC konvertori prekidačka kola, njima je posebno interesantno upravljati višestrukom funkcijom Ljapunova, pa će PLLF upravljanje biti opisano u petoj glavi. U šestoj glavi je opisana realizacija *sliding mode* kontrole Buck konvertora i dati su merenjem dobijeni rezultati. U sedmoj glavi izneta su zaključna razmatranja, izvršena je komparativna analiza tri načina upravljanja i dati su ostvareni eksperimentalni rezultati.

Glava 2

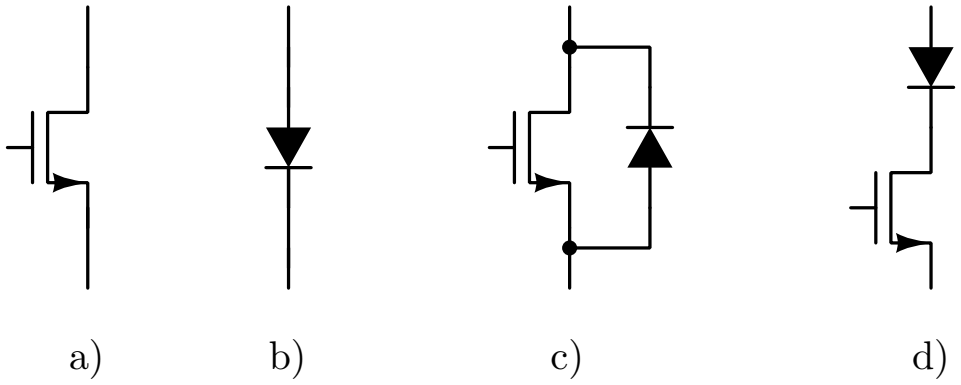
Analiza rada DC-DC konvertora

DC-DC konvertori su kola energetske elektronike koja služe za konverziju jednosmernog napona/struje u izlzni jednosmerni napon/struju. Prilikom konverzije na izlazu se dobija oslabljen ili pojačan ulazni napon/struja. DC-DC konvertori se u osnovi sastoje od ulaza, prekidačke ćelije i izlaza kola [1]. Prekidačka ćelija se realizuje pomoću reaktivnih komponenata (kondenzatora i kalemova) i prekidača.

Prekidači se prema strujno-naponskoj karakteristici dele na jednokvadrantne, dvokvadrantne i četvorokvadrantne. Na sl. 2.1 su prikazane realizacije prekidača. Jednokvadrantni prekidači su tranzistori sl. 2.1a i diode sl. 2.1b zato što se njihova strujno-naponska karakteristika nalazi u jednom kvadrantu ravni. Naime, kroz tranzistore teče pozitivna struja, $i_S > 0$, a kada su isključeni, napon na njihovim krajevima je pozitivan (blokiraju pozitivan napon) $v_S > 0$. Sa druge strane, diode vode pozitivnu struju $i_D > 0$, a kada su isključene, pad napona na njima je negativan, $v_D < 0$, sa referentnim smerom od anode ka katodi. Na sl. 2.1c-d su prikazane bidirekcione realizacije prekidača, od kojih realizacija sa sl. 2.1c predstavlja strujno bidirekcioni prekidač koji propušta struju oba polariteta, a blokira pozitivan napon. Realizacija prekidača sa sl. 2.1d predstavlja naponski bidirekcioni prekidač koji propušta struju koja je pozitivna, a blokira oba polariteta napona. Prekidači koji rade u četiri kvadranta ravni strujno-naponske karakteristike se realizuju antiparalelnom vezom dva naponski bidirekciona prekidača ili rednom vezom dva suprotno orijentisana strujno bidirekciona prekidača.

Prekidači koji u sebi sadrže tranzistore se mogu kontrolisati upravljačkim signalom. Signali kojim se prekidači kontrolišu, a samim tim i konvertor, su realizovani unutar pažljivo projektovanog kontrolera. Upravljački signal se generiše impulsnom širinskom modulacijom (*Pulse Width Modulated* - PWM), pa se za DC-DC konvertore još kaže da su i PWM konvertori.

PWM signal može da bude periodičan ili aperiodičan, u zavisnosti od realizacije kontrolera. Perioda PWM signala se najčešće označava sa T_S (još nazvana i perioda preki-



Slika 2.1: *Realizacija jednokvadratnih prekidača pomoću: (a) tranzistora, (b) diode; realizacija dvokvadratnih prekidača: (c) strujni bidirekcioni, (d) naponski bidirekcioni.*

danja), frekvencija sa $f_S = 1/T_S$, a ispunjenost impulsa, koji predstavlja odnos trajanja impulsa i periode, sa d (*duty-ratio*). Pretpostavlja se da je signal na aktivnom visokom naponskom nivou u toku intervala $t_0 \leq t < t_0 + d\,T_S$ u toku jedne periode prekidanja, a u toku ostatka periode $t_0 + d\,T_S \leq t < t_0 + T_S$ na niskom naponskom nivou, za t_0 koje je početni trenutak.

U zavisnosti od stanja prekidača, odnosno u zavisnosti da li prekidač vodi ili ne, se mogu dobiti različite konfiguracije kola konvertora. Naime, kada je prekidač uključen, on se može modelovati kao jednosmerni naponski generator čiji je napon veoma mali u poređenju sa ostalim naponima u kolu. Zbog toga se još češće prekidač koji je uključen modeluje kao kratak spoj. Kada je isključen, prekidač se prikazuje kao otvorena veza. Za svako od stanja prekidača se dobija drugačija konfiguracija kola, koja se u ovoj disertaciji još naziva i podsistem konvertora.

Kako je prekidačka ćelija sastavljena od reaktivnih komponenata, to se za svako od stanja prekidača, odnosno za svaki podsistem konvertora, može napisati sistem jednačina kola koje predstavljaju obične diferencijalne jednačine prvog reda. Ovaj sistem jednačina se najčešće zapisuje u matričnoj formi u vidu modela stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i\,\mathbf{x} + \mathbf{B}_i, \tag{2.1}$$

gde je sa i označen i-ti podsistem konvertora. U toku jedne periode može da se prekidanjem promeni više podsistema, pa u je slučaju da se promeni $k + 2$ podsistema sekvenca oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{A}_1\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 & n\,T_S \leq t < (n + d_1)\,T_S, \\ \mathbf{A}_2\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 & (n + d_1)\,T_S \leq t < (n + d_1 + d_2)\,T_S, \\ \dots & \\ \mathbf{A}_{k+2}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{k+2} & \left(n + \sum_{j=1}^{k+1} d_j\right)\,T_S \leq t < (n + 1)\,T_S. \end{cases} \tag{2.2}$$

Svaki DC-DC konvertor ima najviše dva kontinualna stanja [1]. To su stanja u kojima su sve vrednosti napona kondenzatora i struja kalemova, kao i njihove linearne kombinacije, različite od nule. Obično se kontrola DC-DC konvertora i projektuje za rad u kontinualnom režimu, odnosno u CCM režimu (*Continuous Conduction Mode*). Samo projektovanje kontrole se vrši najpre usrednjavanjem napona i struja u kolu, koje može biti usrednjavanje u prostoru stanja (*state-space averaging*) [14] ili usrednjavanje na nivou prekidačke ćelije [24].

U ovoj disertaciji će se koristiti usrednjavanje u prostoru stanja koje je posebno pogodno za matrični zapis sistema i zasniva se na singularnim perturbacijama [25]. Usrednjavanje se radi pod pretpostavkom da su u ustaljenom stanju (u tački ekvilibrijuma) srednja vrednost napona na kalemu i srednja vrednost struje kondenzatora jednake nuli. Na dobijene usrednjene vrednosti velikog signala se dodaje mali signal ili ripl primenom *linear ripple* aproksimacije. U poglavlju 2.1 će biti opisano usrednjavanje na primeru Ćuk konvertora i način primene *linear ripple* aproksimacije.

2.1 Ćuk konvertor

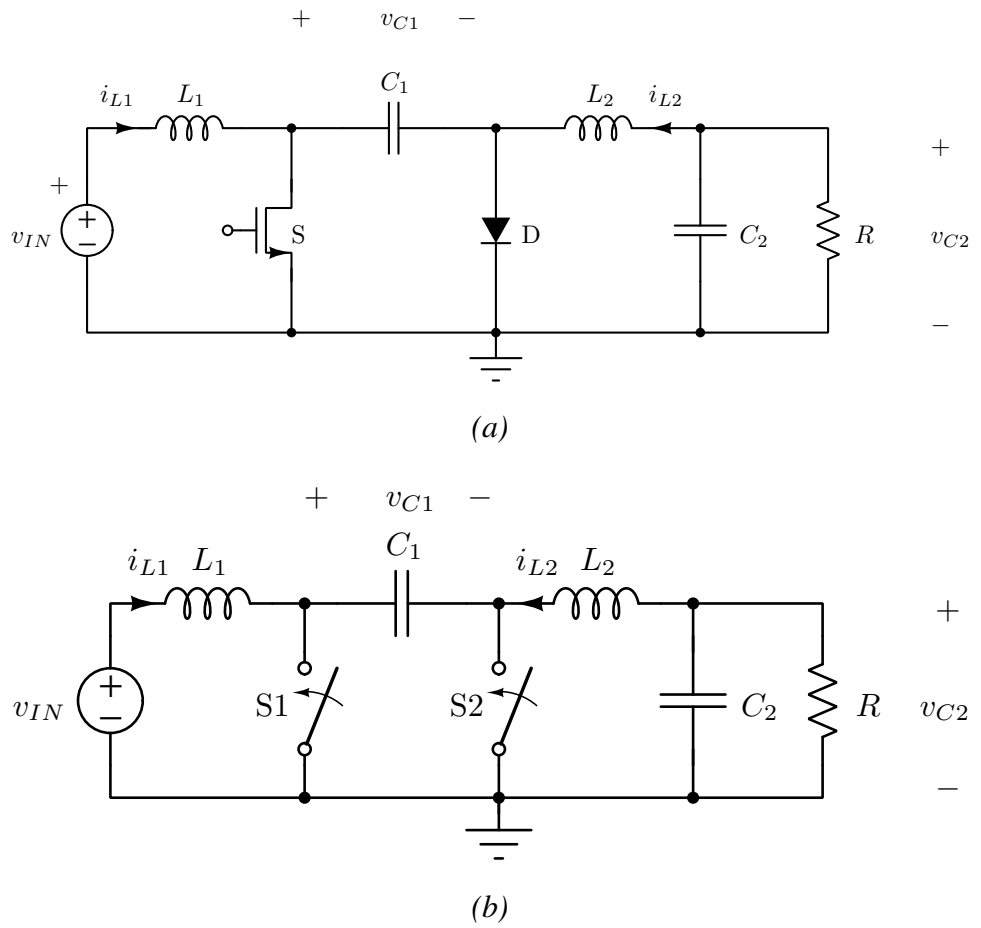
Ćuk konvertor prikazan na sl. 2.2 je kompleksan konvertor četvrtog reda zato što ima četiri promenljive stanja, dve struje kalemova i dva napona na kondenzatorima. Konvertor sa sl. 2.2a je standardni Ćuk konvertor realizovan korišćenjem prekidača koji provode struju u jednom smeru: tranzistora i diode, dok je konvertor sa sl. 2.2b sinhroni Ćuk konvertor realizovan pomoću naponskih i strujno bidirekcionih prekidača. Za sinhroni konvertor važi da je state(S2) = ¬state(S1).

U nastavku poglavlja će biti dat pregled svih režima rada Ćuk konvertora, biće određene vrednosti promenljivih stanja (struja kalemova i napona na kondenzatorima) u ustaljenom stanju konvertora i pod pretpostavkom rada konvertora u ustaljenom stanju će biti uvedena *linear ripple* aproksimacija. U poslednjem odeljku ovog poglavlja će biti data karakterizacija anvelope Ćuk konvertora.

2.1.1 Režimi rada konvertora

Konfiguracija prekidača određuje broj režima rada konvertora [1]. U slučaju realizacije konvertora kao na sl. 2.2a konvertor može da radi u dva kontinualna i u dva diskontinualna režima, dok kada je realizovan kao sinhroni konvertor sa sl. 2.2b radi samo u dva kontinualna režima. Na sl. 2.3 su prikazani svi režimi rada, odnosno svi podsistemi, Ćuk konvertora.

Kaže se da konvertor radi u *Continuous Conduction Mode*-u (CCM) kada se u toku periode prekidanja smenjuju dva moguća kontinualna režima rada konvertora.

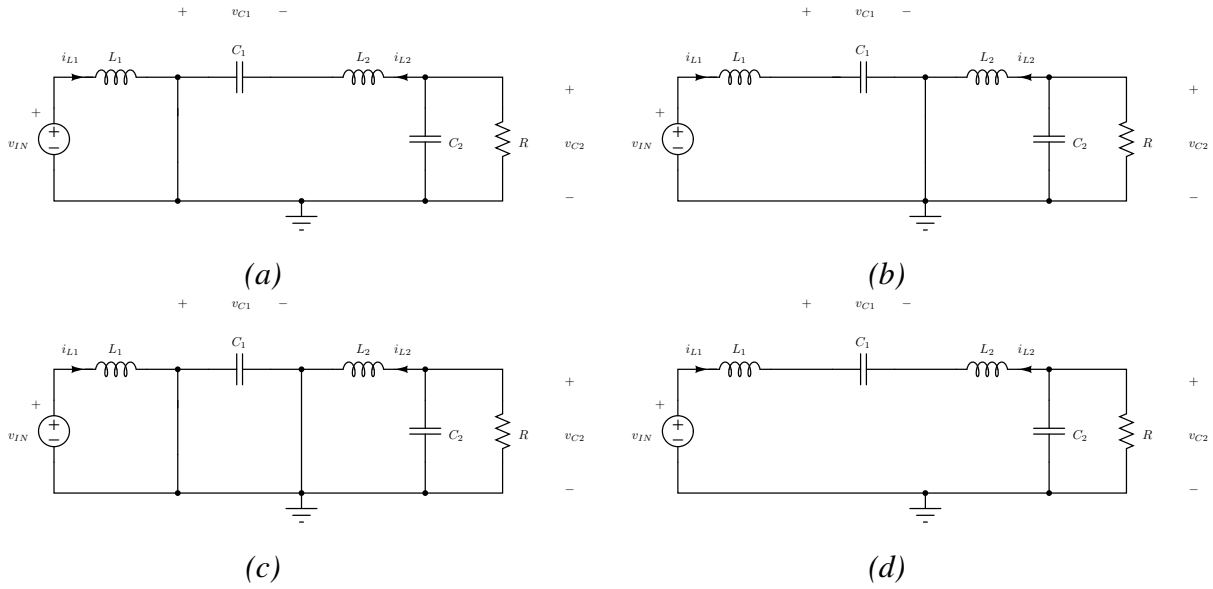


Slika 2.2: *Ćuk konvertor kod koga su prekidači realizovani: (a) pomoću tranzistora i diode i (b) dva bidirekciona prekidača.*

Ukoliko je prekidač S uključen, a dioda D isključena Ćuk konvertora sa sl. 2.2a (odnosno prekidač S1 uključen, a S2 isključen u sinhronom Ćuk konvertoru), dobija se prvo kontinualno stanje, koje će još biti nazivano podsistem 1, prikazano na sl. 2.3a i opisano diferencijalnim jednačinama:

$$\begin{aligned} \frac{d\,i_{L1}}{dt} &= \frac{v_{IN}}{L_1}, \\ \frac{d\,i_{L2}}{dt} &= \frac{v_{C1}}{L_2} + \frac{v_{C2}}{L_2}, \\ \frac{d\,v_{C1}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_1}, \\ \frac{d\,v_{C2}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_2} - \frac{v_{C2}}{R\,C_2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Kako je u Ćuk konvertoru sa sl. 2.2a prekidač S tranzistor, mora da važi da je $i_S > 0$, a za diodu D kada ne vodi važi $v_D < 0$, što daje $i_{L1} + i_{L2} > 0$ i $v_{C1} > 0$. U slučaju sinhronog Ćuk konvertora sa sl. 2.2b nema ograničenja za polaritet struja i napona prekidača S1 i



Slika 2.3: *Ćuk konvertor u (a) podsistemu 1, (b) podsistemu 2, (c) podsistemu 3 i (d) podsistemu 4.*

S2. Matrice koje definišu podsistem 1 u obliku modela u prostoru stanja kao u jednačini (2.3) su:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Matrica $\mathbf{A}_1$ ima jednu sopstvenu vrednost u nuli i tri sopstvene vrednosti od kojih je jedna realna u levoj kompleksnoj poluravni, a preostale dve su konjugovano-kompleksne sa negativnim realnim delom. Očigledno je ovo stanje granično stabilno.

Drugi kontinualni režim rada sa sl. 2.3b, podsistem 2, je kada je prekidač S isključen, a dioda D uključena (S1 isključen, a S2 uključen u kolu sa sl. 2.2b). Struja diode D treba da bude pozitivna $i_D > 0$, a napon na tranzistoru koji je isključen je $v_S > 0$, što daje $i_{L1} + i_{L2} > 0$ i $v_{C1} > 0$. Ovaj režim rada konvertora opisan je sistemom običnih diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{d\, i_{L1}}{dt} &= \frac{v_{IN}}{L_1} - \frac{v_{C1}}{L_1}, \\ \frac{d\, i_{L2}}{dt} &= \frac{v_{C2}}{L_2}, \\ \frac{d\, v_{C1}}{dt} &= \frac{i_{L1}}{C_1}, \\ \frac{d\, v_{C2}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_2} - \frac{v_{C2}}{RC_2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Matrice koje definišu ovaj režim rada su

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Sistemska matrica $\mathbf{A}_2$ ima dva para konjugovano-kompleksih sopstvenih vrednosti. Jedan par konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti ima realan deo jednak nula. Sopstvene vrednosti su:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \frac{j}{\sqrt{L_1 C_1}}, \\ \lambda_{3,4} &= \frac{-\sqrt{L_2} \pm \sqrt{L_2 - 4 C_2 R^2}}{2 C_2 \sqrt{L_2} R}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Na osnovu sopstvenih vrednosti $\lambda_{1,2}$, čiji je realni deo jednak nuli, vidi se da je sistem granično stabilan.

Pored dva kontinualna režima, konvertor sa sl. 2.2a može da radi i u dva diskontinualna režima, dok sinhroni Ćuk konvertor sa sl. 2.2b radi isključivo u kontinualnim režimima. Jedan od diskontinualnih režima je *discontinuous capacitor voltage mode* (DCVM) ili podsistem 3 koji nastupa kada je prekidač S uključen, a napon na kondenzatoru C_1 se izjednači sa nulom [26]. Nulti napon na kondenzatoru C_1 forsira diodu D da provede. U DCVM režimu su uključeni i prekidač S i dioda D, sl. 2.3c, pa je odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{d\, i_{L1}}{dt} &= \frac{v_{IN}}{L_1}, \\ \frac{d\, i_{L2}}{dt} &= \frac{v_{C2}}{L_2}, \\ \frac{d\, v_{C1}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\, v_{C2}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_2} - \frac{v_{C2}}{R\, C_2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

ili u matričnom obliku

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Prekidači S i D daju uslov $i_S,\ i_D > 0$ ili $i_{L1},\ i_{L2} > 0$.

Drugi diskontinualni režim je *discontinuous inductor current mode* (DICM), podsistem 4, prikazan na sl. 2.3d, koji nastupa kada samo dioda D vodi, a zbir struja kalemova

$i_{L1} + i_{L2}$ se izjednači sa nulom. Zbog toga se dioda D gasi. U DICM-u su oba prekidača S i D ugašena, pa je sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{d\,i_{L1}}{dt} = -\frac{d\,i_{L2}}{dt} &= \frac{v_{IN} - v_{C1} - v_{C2}}{L_1 + L_2}, \\ \frac{d\,v_{C1}}{dt} &= \frac{i_{L1}}{C_1} = -\frac{i_{L2}}{C_1}, \\ \frac{d\,v_{C2}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_2} - \frac{v_{C2}}{R\,C_2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

odnosno

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1+L_2} & -\frac{1}{L_1+L_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_1+L_2} & \frac{1}{L_1+L_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1+L_2} \\ -\frac{v_{IN}}{L_1+L_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Kako S i D ne vode, treba da važi $v_S > 0$ i $v_D < 0$. Na osnovu pretpostavke da je $v_D \approx v_{C2}$ i $v_S \approx v_{C1} + v_{C2}$, može se zaključiti da treba da važi $v_{C2} < 0$ i $v_{C1} > -v_{C2} > 0$.

Na osnovu prethodne analize može se zaključiti da Ćuk konvertor realizovan pomoću tranzistora i diode radi u regionu u kome je zbir struja $i_{L1} + i_{L2} \geq 0$, a naponi na kondenzatorima $v_{C1} \geq 0$ i $v_{C2} \leq 0$.

Neka je vektor promenljivih stanja definisan kao $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{L1} & i_{L2} & v_{C1} & v_{C2} \end{bmatrix}^T$ i vektor promenljivih stanja u ustaljenom stanju (ekvilibrijum sistema) $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$, $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \overline{x_3} & \overline{x_4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \overline{i_{L1}} & \overline{i_{L2}} & \overline{v_{C1}} & \overline{v_{C2}} \end{bmatrix}^T$. Vektor promenljivih stanja i svi vektori koji nastaju kao linearna kombinacija ovog vektora, kao na primer varijacija promenljivih stanja oko tačke ekvilibrijuma $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$, su zavisni od vremena, ali iz razloga pojednostavljenja notacije zavisnost od vremena će biti izostavljena na mestima gde je očigledna iz konteksta.

Od posebnog interesa je rad Ćuk konvertora u CCM režimu, kada se smenjuju dva kontinualna stanja. Radi demonstracije rada sistema, kao i promene vrednosti promenljivih stanja, diferencijalne jednačine u kontinualnim režimima rada konvertora su rešene za Ćuk konvertor sa vrednostima $L_1 = L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 20$ μF, $R = 5$ Ω i $v_{IN} = 10$ V. Pretpostavimo da je početni trenutak dat sa $t = 0^+$ ili $t = t_0^+$, što će se označiti jednostavno kao 0 ili t_0, redom.

U kontinualnom stanju kada je prekidač S uključen, a dioda D isključena rešenje običnih diferencijalnih jednačina zavisi od sopstvenih vrednosti $\lambda_1 = -\alpha_1 = -9594.95$ i

$\lambda_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\,\omega_2 = -219.02 \pm j\,32338.27$ i dato je sa:

$$\begin{aligned}
i_{L1}(t) = &\quad i_{L1}(0) + \frac{v_{IN}}{L_1}\,t = i_{L1}(0) + 10000t,\\
i_{L2}(t) = &\quad (E_1\,(0.0002187\cos(\omega_2\,t) + 0.03228\sin(\omega_2\,t)) +\\
&\quad E_2\,(0.0002187\sin(\omega_2\,t) - 0.03228\cos(\omega_2\,t)))\ \mathrm{e}^{-\alpha_2 t}\\
&\quad -0.00646\,E_3\ \mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\\
v_{C1}(t) = &\quad 0.9983\ (E_1\ \cos(\omega_2\,t) +\\
&\quad E_2\ \sin(\omega_2\,t))\ \mathrm{e}^{-\alpha_2 t} - 0.6755\,E_3\ \mathrm{e}^{-\alpha_1 t},\\
v_{C2}(t) = &\quad (E_1\,(0.0456\cos(\omega_2\,t) - 0.0141\ \sin(\omega_2\,t)) +\\
&\quad E_2\,(0.0456\sin(\omega_2\,t) + 0.0141\ \cos(\omega_2\,t)))\ \mathrm{e}^{-\alpha_2 t}\\
&\quad +0.7373\,E_3\ \mathrm{e}^{-\alpha_1 t},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

gde su sve promenljive stanja date u njima odgovarajućim jedinicama mere, što znači struje u amperima i naponi u voltima. Koeficijenti E_{1-3} su računati na osnovu partikularnog rešenja i početnih uslova. Partikularno rešenje je u ovom slučaju nula vektor, pa su koeficijenti:

$$\begin{aligned}
E_1 &= 0.3873\,i_{L2}(0) + 0.9612\,v_{C1}(0) + 0.8840\,v_{C2}(0),\\
E_2 &= 0.0185\,v_{C1}(0) - 31.0865\,i_{L2}(0) - 0.2554\,v_{C2}(0),\\
E_3 &= 0.5723\,i_{L2}(0) - 0.0599\,v_{C1}(0) + 1.3065\,v_{C2}(0).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Rešenje kontinualnog stanja kada je prekidač S isključen, a dioda D uključena je na osnovu sopstvenih vrednosti $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_1 = \pm j\,31623$ i $\lambda_{3,4} = -\alpha_2 \pm j\,\omega_2 = -5000 \pm j\,5000$:

$$\begin{aligned}
i_{L1}(t) = &\quad 0.0316\ (E_1\ \sin(\omega_1\,t) - E_2\ \cos(\omega_1\,t)),\\
i_{L2}(t) = &\quad -0.099\ ((E_3 + E_4)\ \cos(\omega_2\,t) +\\
&\quad (-E_3 + E_4)\ \sin(\omega_2\,t))\ \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},\\
v_{C1}(t) = &\quad -0.9995\ (E_2\ \sin(\omega_1\,t) + E_1\ \cos(\omega_1\,t)) + 10,\\
v_{C2}(t) = &\quad 0.9901\ (E_3\ \cos(\omega_2\,t) + E_4\ \sin(\omega_2\,t))\ \mathrm{e}^{-\alpha_2 t},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

gde su koeficijenti E_{1-4} računati na osnovu partikularnog rešenja $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_{IN} & 0 \end{bmatrix}^T$ i datih početnih uslova kao:

$$\begin{aligned}
E_1 &= 10.005 - 1.0005\,v_{C1}(0),\\
E_2 &= -31.6386\,i_{L1}(0),\\
E_3 &= 1.01\,v_{C2}(0),\\
E_4 &= -10.0995\,i_{L2}(0) - 1.00995\,v_{C2}(0).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Početni trenutak ne mora da bude u trenutku $t = 0$, ali je ova pretpostavljena vrednost ispravna zato što je sistem vremenski invarijantan.

Kako je Ćuk konvertor po klasifikaciji Qn-PWM konvertor [26], ukoliko se upravlja PWM signalom sa konstantnim faktorom ispunjenosti impulsa, mogu se ostvariti četiri sekvence prekidanja u toku jedne periode. Ako konvertor radi u CCM-u prekidačka sekvenca je: podsistem 1 → podsistem 2, ako ulazi u DICM: podsistem 1 → podsistem 2 → podsistem 4, i ako ulazi u DCVM: podsistem 1 → podsistem 3 → podsistem 2. Četvrta sekvenca predstavlja rad Ćuk konvertora kao kvazirezonantni konvertor kod koga se u toku jedne periode prekidanja javljaju oba diskontinualna režima sa sekvencom: podsistem 1 → podsistem 3 → podsistem 2 → podsistem 4.

2.1.2 *Linear ripple* aproksimacija

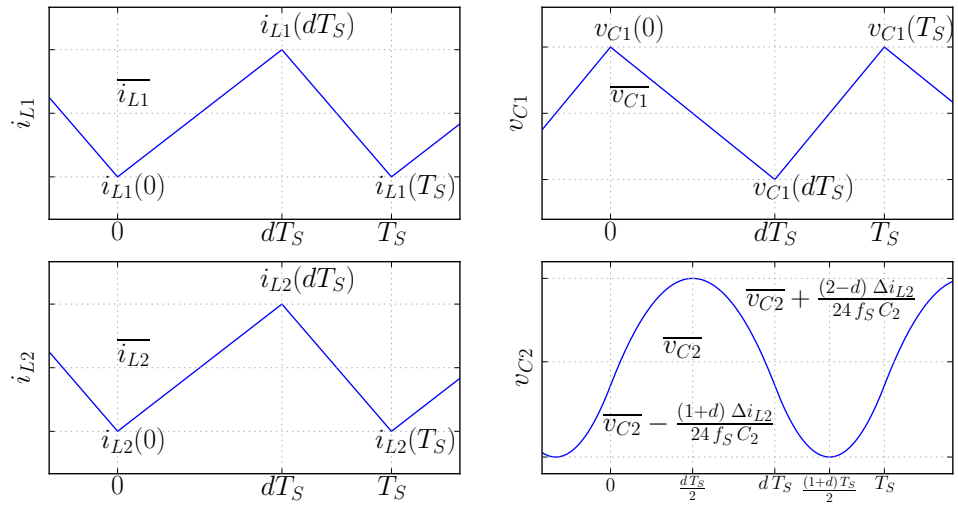
Sopstvene vrednosti DC-DC konvertora su često takve da se može smatrati da su vremenske konstante koje potiču od sopstvenih vrednosti zanemarljive u poređenju sa periodom prekidanja prekidača. Zbog toga se koriste usrednjene vrednosti napona i struja kalemova prilikom određivanja njihovog ripla u ustaljenom stanju [1]. Često se vrši usrednjavanje napona i struja u konvertoru prilikom procene režima rada konvertora, odnosno prilikom konstruisanja modela konvertora [12].

Linear ripple aproksimacija se zasniva na pretpostavci da su naponi na kondenzatorima u ustaljenom stanju konstantni i da se ripl struja kalemova može proceniti na osnovu sekvence prekidanja prekidača. Analogno je za procenu ripla napona na kondenzatorima za koje se koristi pretpostavka konstantne struje kalemova.

Posmatraćemo Ćuk konvertor koji radu u CCM-u i pretpostavićemo da je upravljan PWM signalom čija je ispunjenost impulsa (ili *duty-ratio*) data sa d i periode T_S. U toku intervala vremena $n\,T_S \leq t < (n + d)\,T_S$ je uključen S, a dioda isključena, dok je u toku intervala $(n + d)\,T_S \leq t < (n + 1)\,T_S$ isključen tranzistor S i uključena dioda D. Pod pretpostavkom rada u ustaljenom stanju su vrednosti napona kondenzatora i struja kalemova jednaki na početku periode i na kraju periode prekidanja, odnosno važi $\mathbf{x}(nT_S) = \mathbf{x}((n + 1)\,T_S)$. Pod istom pretpostavkom su u ustaljenom stanju srednje vrednosti napona na kalemovima jednake nuli. Na osnovu *Voltage-second balance*-a [1] su jednačine za srednje vrednosti napona na kalemovima:

$$\begin{aligned} \overline{v_{L1}} &= v_{IN}\,d + (v_{IN} - \overline{x}_3)\,(1 - d) = 0, \\ \overline{v_{L2}} &= (\overline{x}_3 + \overline{x}_4)\,d + \overline{x}_4\,(1 - d) = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ovo znači da vrednosti struja kalemova ili linearno rastu ili linearno opadaju tokom periode prekidanja, pri čemu je apsolutna promena (porast ili opadanje) struja kalemova



Slika 2.4: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u CCM-u u ustaljenom stanju sa primenjenom linear ripple aproksimacijom.*

jednaka. Zato je promena struje kalemova u toku intervala $n\,T_S \leq t < (n+d)\,T_S$ jednaka

$$\begin{aligned} \Delta i_{L1} &= \frac{v_{IN}}{L_1}\,d\,T_S, \\ \Delta i_{L2} &= \frac{\overline{x}_3 + \overline{x}_4}{L_2}\,d\,T_S = \frac{v_{IN}}{L_2}\,d\,T_S. \end{aligned} \tag{2.17}$$

U toku intervala vremena $(n+d)\,T_S \leq t < (n+1)\,T_S$ vrednosti struja kalemova opadnu za istu vrednost kao u jednačini (2.17). To se vidi i sa sl. 2.4, gde su prikazani vremenski dijagrami struja kalemova u ustaljenom stanju.

Analogno, srednja vrednost struja kondezatora u ustaljenom stanju je jednaka nuli. Nakon primene *Ampere-second balance*-a [1] se dobijaju jednačine:

$$\begin{aligned} \overline{i_{C1}} &= -\overline{x}_2\,d + \overline{x}_1\,(1-d) = 0, \\ \overline{i_{C2}} &= -\overline{x}_2 - \tfrac{\overline{x}_4}{R} = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ripl napona na kondenzatoru C_1 je

$$\Delta v_{C1} = \overline{x}_2\,d\,\frac{T_S}{C_1}, \tag{2.19}$$

i u toku intervala $n\,T_S \leq t < (n+d)\,T_S$ napon se linearno smanjuje, a u toku intervala $(n+d)\,T_S \leq t < (n+1)\,T_S$ linearno raste. Struja kondenzatora C_2 je tokom celog perioda

jednaka $i_{C2} = -i_{L2} - \frac{v_{C2}}{R}$, pa je napon

$$v_{C2} = \begin{cases} \overline{v_{C2}} + \dfrac{2\,u_{eq} - 1}{12\,f_S\,C_2}\,\Delta i_{L2} + \dfrac{\Delta i_{L2}}{2\,f_S\,C_2}\left(\dfrac{\tau^2}{u_{eq}} - \tau\right) & 0 \le \tau < u_{eq} \\ \overline{v_{C2}} + \dfrac{2\,u_{eq} - 1}{12\,f_S\,C_2}\,\Delta i_{L2} + \dfrac{\Delta i_{L2}}{2\,f_S\,C_2}\,\dfrac{(\tau - u_{eq})\,(1-\tau)}{1 - u_{eq}} & u_{eq} \le \tau < 1 \end{cases} \tag{2.20}$$

gde je $\tau = \frac{t}{T_S}$. Maksimalna varijacija napona na kondenzatoru C_2 je data sa

$$\Delta v_{C2} = \frac{\Delta i_{L2}}{8\,C_2}\,T_S. \tag{2.21}$$

Vremenski dijagrami promenljivih stanja u ustaljenom stanju su prikazani na sl. 2.4.

2.1.3 Karakterizacija anvelope

Na osnovu formata modela u prostoru stanja (2.1) može da se odredi egzaktno rešenje sistema običnih diferencijalnih jednačina [27], pod pretpostavkom da je početni uslov označen sa $\mathbf{x}(0)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_i\,t}\,\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{A}_i\,\tau}\,\mathbf{B}_i\,d\tau, \tag{2.22}$$

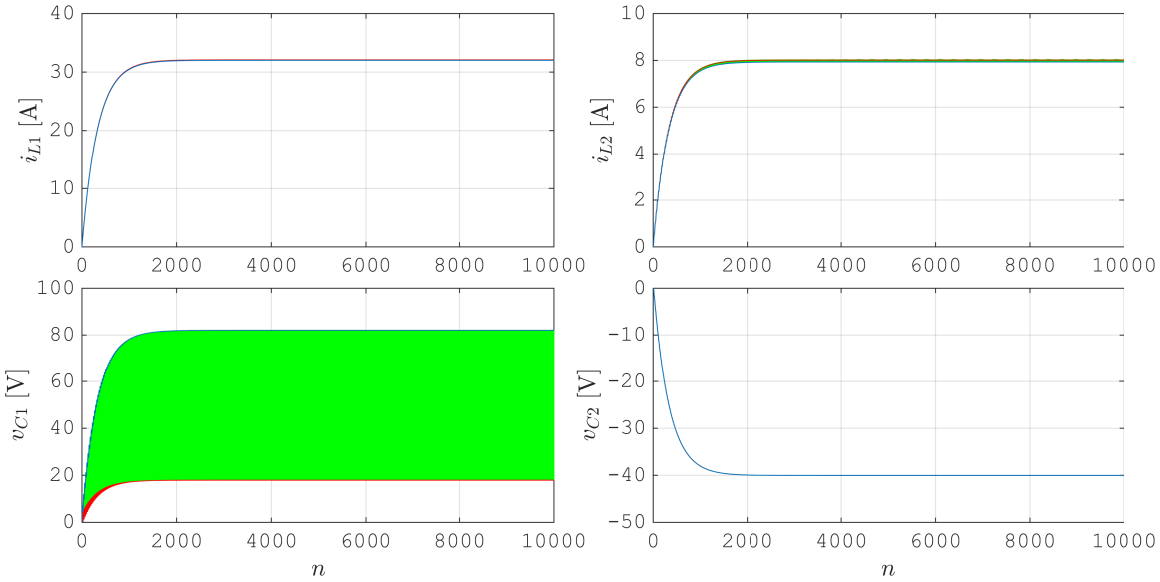
pri čemu je za Ćuk konvertor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ako matrica $\mathbf{A}_i$ nije singularna, jednačina (2.22) se pojednostavljuje

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_i\,t}\,\mathbf{x}(0) + \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}_i\,t} - \mathbf{I}\right)\,\mathbf{A}_i^{-1}\,\mathbf{B}_i. \tag{2.23}$$

Pod pretpostavkom da Ćuk konvertor radi u CCM-u, mogu se izvesti diferencne jednačine korišćenjem (2.22) i (2.23):

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1[k+1] = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\Delta_1}\,\mathbf{x}_2[k] + \textstyle\int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\tau}\,\mathbf{B}_1\,d\tau \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\Delta_1}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2}\,\mathbf{x}_1[k] + \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\Delta_1}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2} - \mathbf{I}\right)\,\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{B}_2 + \textstyle\int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\tau}\,\mathbf{B}_1\,d\tau, \\ &\mathbf{x}_2[k+1] = \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2}\,\mathbf{x}_1[k+1] + \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2} - \mathbf{I}\right)\,\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{B}_2 \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\Delta_1}\,\mathbf{x}_2[k] + \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2}\,\textstyle\int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1\,\tau}\,\mathbf{B}_1\,d\tau + \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2\,\Delta_2} - \mathbf{I}\right)\,\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{B}_2, \end{aligned} \tag{2.24}$$

gde su Δ_1 i Δ_2 vremenski intervali u toku kojih konvertor radi u podsistemu 1 i u podsistemu 2, redom. U slučaju kada je prekidanje vremenski zavisno sa periodom T i faktorom ispunjenosti impulsa d, tada su Δ_1 i Δ_2 dati izrazima $\Delta_1 = dT$ i $\Delta_2 = (1-d)\,T$. Vektori $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ predstavljaju vrednosti vektora promenljivih stanja na kraju rada u svakom od podsistema, to jest, $\mathbf{x}_1$ je vrednost nakon rada u podsistemu 1 i $\mathbf{x}_2$ na kraju rada u podsistemu 2. Ovi vektori predstavlaju vrednosti na anvelopi kontinualne trajektorije sistema.

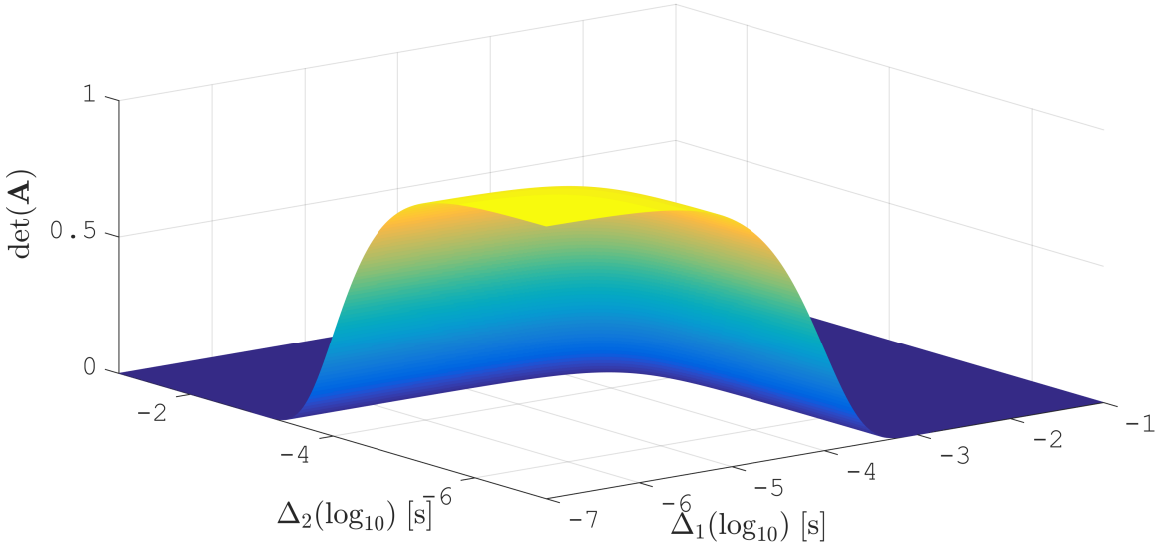


Slika 2.5: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora sa frekvencijom prekidanja* $f_S = 100\,kHz$ *i ispunjenošću implusa PWM signala* $d = 0.8$. *Crvena linija predstavlja* $\boldsymbol{x}_1[n]$, *plava linija je* $\boldsymbol{x}_2[n]$, *a zelena linija predstavlja simulacione rezultate iz PLECS-a.*

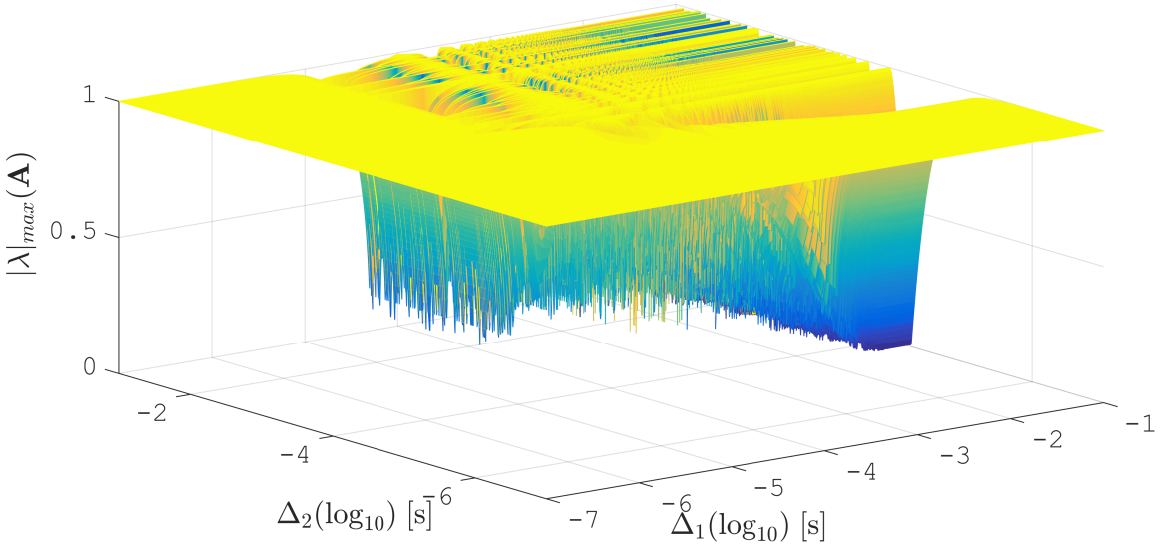
Na sl. 2.5 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora u CCM-u sa frekvencijom prekidanja $f_S = 100$ kHz i *duty-ratio*-om $d = 0.8$. Na sl. 2.5 je prikazana anvelopa dobijena diferencnim jednačinama (2.24) i vremenski dijagrami dobijeni u simulatoru PLECS. U simulaciji je korišćen Ćuk konvertor sa vrednostima elementa u kolu $L_1 = L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1\ \mu$F, $C_2 = 20\ \mu$F, $R = 5\ \Omega$ i $v_{IN} = 10$ V. Vidi se da anvelopa ograničava kontinualan vremenski dijagram prikazan zelenom linijom iz simulatora PLECS.

Na sl. 2.6 i sl. 2.7 su prikazane zavisnosti determinante matrice $\mathbf{A}$ i maksimalne apsolutne sopstvene vrednosti od dužine vremenskih intervala Δ_1 i Δ_2, za matricu $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_2\Delta_2}\ e^{\mathbf{A}_1\Delta_1}$. Vidi se da je moduo maksimalne sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}$ uvek manji od 1, što znači da je konvertor uvek stabilan. Međutim, ograničenje sistema uslovljava prelazak konvertora u neko od diskontinualnih režima rada.

Na sl. 2.8 su prikazani dijagrami koji daju zavisnost matrice $\mathbf{B}(\Delta_1, \Delta_2)$. Indeksima $\mathbf{B}\langle i\rangle$, gde je $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, je data zavisnost od vrednosti (Δ_1, Δ_2) koja odgovara i-toj promenljivoj stanja. Sa sl. 2.8 se vidi da dominantan uticaj na promenu vrednosti promenljivih stanja imaju struja kalema x_1 i napon na kondenzatoru x_3. Naime, očigledan je porast vrednosti $\mathbf{B}\langle 1\rangle(\Delta_1, \Delta_2)$ i $\mathbf{B}\langle 3\rangle(\Delta_1, \Delta_2)$ sa porastom vrednosti Δ_1.



Slika 2.6: *Zavisnost* $\det \boldsymbol{A}(\Delta_1, \Delta_2)$.

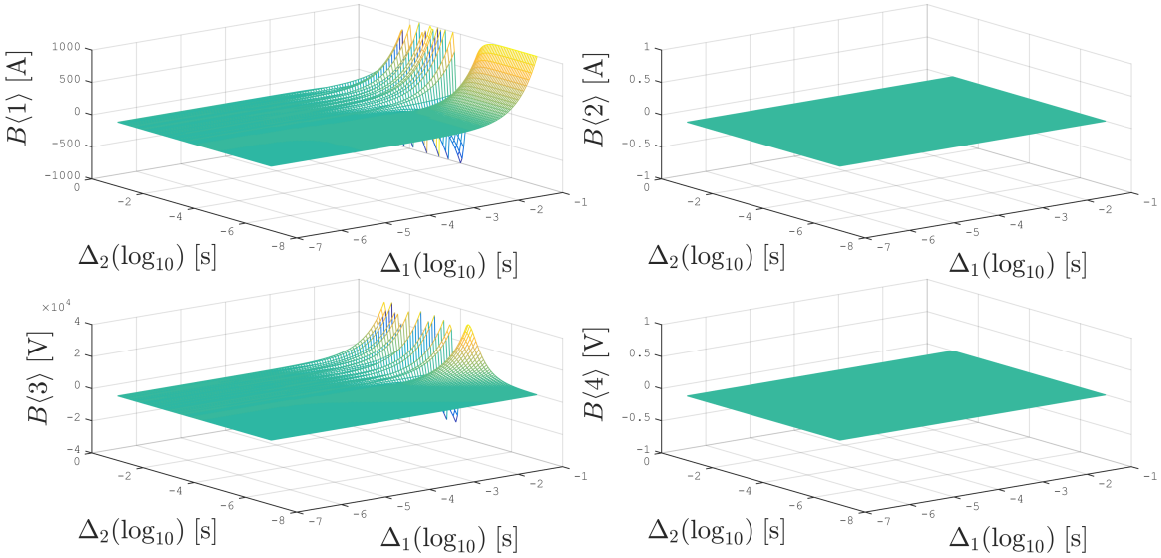


Slika 2.7: *Zavisnost* $|\lambda|_{max}\boldsymbol{A}(\Delta_1, \Delta_2)$.

Za konvertor koji radi u DCVM režimu diferencne jednačine su

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1[k+1] = \;& \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \Delta_1}\, \mathbf{x}_3[k] + \int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \tau}\, \mathbf{B}_1\, d\tau, \\
\mathbf{x}_2[k+1] = \;& \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \Delta_3}\, \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \Delta_1}\, \mathbf{x}_3[k] + \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \Delta_3} \int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \tau}\, \mathbf{B}_1\, d\tau + \int_0^{\Delta_3} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \tau}\, \mathbf{B}_3\, d\tau, \\
\mathbf{x}_3[k+1] = \;& \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2 \Delta_2}\, \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \Delta_3}\, \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \Delta_1}\, \mathbf{x}_3[k] + \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2 \Delta_2}\, \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \Delta_3} \int_0^{\Delta_1} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_1 \tau}\, \mathbf{B}_1\, d\tau \\
& + \mathrm{e}^{\mathbf{A}_2 \Delta_2} \int_0^{\Delta_3} \mathrm{e}^{\mathbf{A}_3 \tau}\, \mathbf{B}_3\, d\tau + \left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}_2 \Delta_2} - \mathbf{I}\right)\, \mathbf{A}_2^{-1}\, \mathbf{B}_2,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

gde je $\mathbf{x}_1$ vrednost promenljivih stanja na kraju rada u podsistemu 1, $\mathbf{x}_2$ na kraju intervala vremena u kome konvertor radi u podsistemu 3, a $\mathbf{x}_3$ na kraju rada u podsistemu 2 u toku jedne periode prekidanja. Simulacije daju maksimalnu apsolutnu sopstvenu vred-



Slika 2.8: *Zavisnost* $\boldsymbol{B}(\Delta_1, \Delta_2)$.

nost $\max(|\lambda|_{max}(\mathbf{A}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3))) < 1$ i $\max(\det(\mathbf{A}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3))) = 0.9970$ što znači da je ovakav sistem bar granično stabilan. Ista analiza se može primeniti i za rad u drugom diskontinualnom režimu DICM.

2.2 Osnovni pojmovi stabilnosti po Ljapunovu

DC-DC konvertori su prekidačka kola koja preključuju između podsistema opisanih običnim diferencijalnim jednačinama (2.1). Svaki od podsistema je linearan vremenski nepromenljiv sistem. Međutim, u toku rada DC-DC konvertor se može predstaviti nelinearnim sistemom čija nelinearnost potiče od preključivanja između linearnih podsistema.

Kako bi se realizovalo upravljanje DC-DC konvertora koje rezultuje stabilnim sistemom za željeno ravnotežno stanje (ekvilibrijum), potrebno je da se primeni metod Ljapunova prilikom konstrukcije upravljanja i analize njegove stabilnosti.

Sistem DC-DC konvertora je autonomni sistem. Ako je autonomni sistem dat [25]

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{2.26}$$

sa funkcijom koja zadovoljava *Lipschitz* uslov $f : \mathbf{D} \to \mathbb{R}^n$ koja preslikava domen $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ u skup $\mathbb{R}^n$. Ekvilibrijum ili ravnotežno stanje datog sistema se određuje rešavanjem jednačine $f(\overline{\mathbf{x}}) = 0$ i označava kao $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{D}$. U daljem tekstu će se postaviti vrednost ekvilibrijuma na $\mathbf{0}$ tako što se uvede smena promenljivih $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$. Tada se sistem (2.26) transformiše u

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}. \tag{2.27}$$

2.2. Osnovni pojmovi stabilnosti po Ljapunovu

Ekvilibrijum po svom značenju predstavlja tačku u prostoru u kojoj će sistem, ako se u njoj nađe, i ostati. U slučaju DC-DC konvertora ekvilibrijum predstavlja vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju, tj. vrednosti kojima promenljive stanja teže sa protokom vremena.

Po definiciji [25] ekvilibrijum može biti stabilan, nestabilan i asimptotski stabilan.

Definicija 2.2.1. Ekvilibrijum $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ sistema (2.26) je:

- stabilan ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi:

$$\|\mathbf{y}(0)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{y}(t)\| < \epsilon, \ \forall t \geq 0,$$

- nestabilan ako nije stabilan,

- globalno asimptotski stabilan ako je stabilan i ako se δ može izabrati tako da važi:

$$\|\mathbf{y}(0)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0.$$

Sistem može da ima više ekvilibrijuma koji su stabilni, ali zato može da postoji samo jedan globalno asimptotski stabilan ekvilibrijum u sistemu. Stabilnost sistema se može ispitati primenom teoreme Ljapunova.

Teorema 1. ***(Teorema Ljapunova)*** *Neka je $\mathbf{y} = 0$ ekvilibrijum sistema (2.26) i neka domen $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n$ sadrži $\mathbf{y} = 0$. Neka je $V : \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}$ kontinualno diferencijabilna funkcija za koju važi:*

$$V(\boldsymbol{0}) = 0 \ i \ V(\mathbf{y}) > 0 \ za \ \mathbf{y} \in \boldsymbol{D} - \{\boldsymbol{0}\},$$
$$\dot{V}(\mathbf{y}) \leq 0.$$

Tada je $\mathbf{y} = 0$ stabilno. Ako je i

$$\dot{V}(\mathbf{y}) < 0 \ za \ \mathbf{y} \in \boldsymbol{D} - \{\boldsymbol{0}\},$$

onda je $\mathbf{y} = 0$ asimptotski stabilno.

Funkcija $V(\mathbf{y})$ se još naziva funkcija Ljapunova. Globalna asimptotska stabilnost sistema se određuje kao što je definisano u sledećoj teoremi.

Teorema 2. *Neka je $\mathbf{y} = 0$ ekvilibrijum sistema (2.26). Neka je $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kontinualno diferencijabilna funkcija za koju važi da je:*

$$V(\boldsymbol{0}) = 0 \ i \ V(\mathbf{y}) > 0, \forall \mathbf{y} \neq \boldsymbol{0},$$
$$\|\mathbf{y}\| \to \infty \Longrightarrow V(\mathbf{y}) \to \infty,$$
$$\dot{V}(\mathbf{y}) < 0, \forall \mathbf{y} \neq \boldsymbol{0},$$

tada je $\mathbf{y} = 0$ *globalno asimptotski stabilno.*

U slučaju kada je ekvilibrijum globalno asimptotski stabilan, sistem ima samo jedan ekvilibrijum.

Najčešće korišćen oblik funkcije Ljapunova je kvadratna forma

$$V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{P}\, \mathbf{y}, \tag{2.28}$$

gde je matrica $\mathbf{P}$ formata $n \times n$ pozitivno definitna, $\mathbf{P} \succ 0$. Određuje se izvod funkcije Ljapunova

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\, \mathbf{A})\, \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}\, \mathbf{y}, \tag{2.29}$$

za koji je potrebno da matrica $\mathbf{Q} \prec 0$ bude negativno definitna tako da važi uslov iz teoreme 2. Globalna asimptotska stabilnost važi i iz uslova

$$\begin{aligned} &\lambda_{min}(\mathbf{P})\, \|\mathbf{y}\|_2^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{P}\, \mathbf{y} \leq \lambda_{max}(\mathbf{P})\, \|\mathbf{y}\|_2^2, \qquad && \lambda_{max}(\mathbf{P}) \geq \lambda_{min}(\mathbf{P}) > 0, \\ &\lambda_{min}(\mathbf{Q})\, \|\mathbf{y}\|_2^2 \leq \mathbf{y}^T \mathbf{Q}\, \mathbf{y} \leq \lambda_{max}(\mathbf{Q})\, \|\mathbf{y}\|_2^2, \qquad && 0 > \lambda_{max}(\mathbf{Q}) \geq \lambda_{min}(\mathbf{Q}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

gde su sa $\lambda_{min}(\cdot)$ i $\lambda_{max}(\cdot)$ označene minimalna i maksimalna sopstvena vrednost pozitivne ili negativno definitne matrice, ukoliko postoje.

Teorema 3. *Ako sve sopstvene vrednosti matrice* $\boldsymbol{A}$ *imaju negativni realni deo (odnosno ako je sistem kome je matrica* $\boldsymbol{A}$ *sistemska matrica stabilan), onda za bilo koju negativno definitnu matricu* $\boldsymbol{Q}$ *postoji pozitivno definitna matrica* $\boldsymbol{P}$ *tako da važi* $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$. *Matrica* $\boldsymbol{P}$ *je jedinstveno rešenje.*

Problem određivanja matrice $\mathbf{P}$ je konveksan, kao što se vidi u prethodnoj teoremi 3, i zato je pogodan za primenu S-procedure [28] i linearnih matričnih nejednačina (*Linear Matrix Inequalities* - LMI) [29].

Kako je cilj ove disertacije realizacija stabilnog upravljanja DC-DC konvertorima, biće korišćene teoreme 2 i 3 za određivanje zakona preključivanja između podsistema DC-DC konvertora. Upravljanje će se zasnivati na konstrukciji funkcije Ljapunova koja zadovoljava uslove iz teoreme 2. Izbor funkcije Ljapunova je u opštem slučaju nerešen problem. Zato će se prilikom realizacije upravljanja DC-DC konvertora razmatrati različiti oblici funkcije Ljapunova, između ostalog i kvadratni oblik, i analizirati dinamika upravljanog sistema.

Glava 3

Sliding mode kontrola DC-DC konvertora

3.1 Koncept sliding mode kontrole

Posmatraćemo linearni sistem koji se sastoji iz m podsistema opisanih običnim diferencijalnim jednačinama oblika

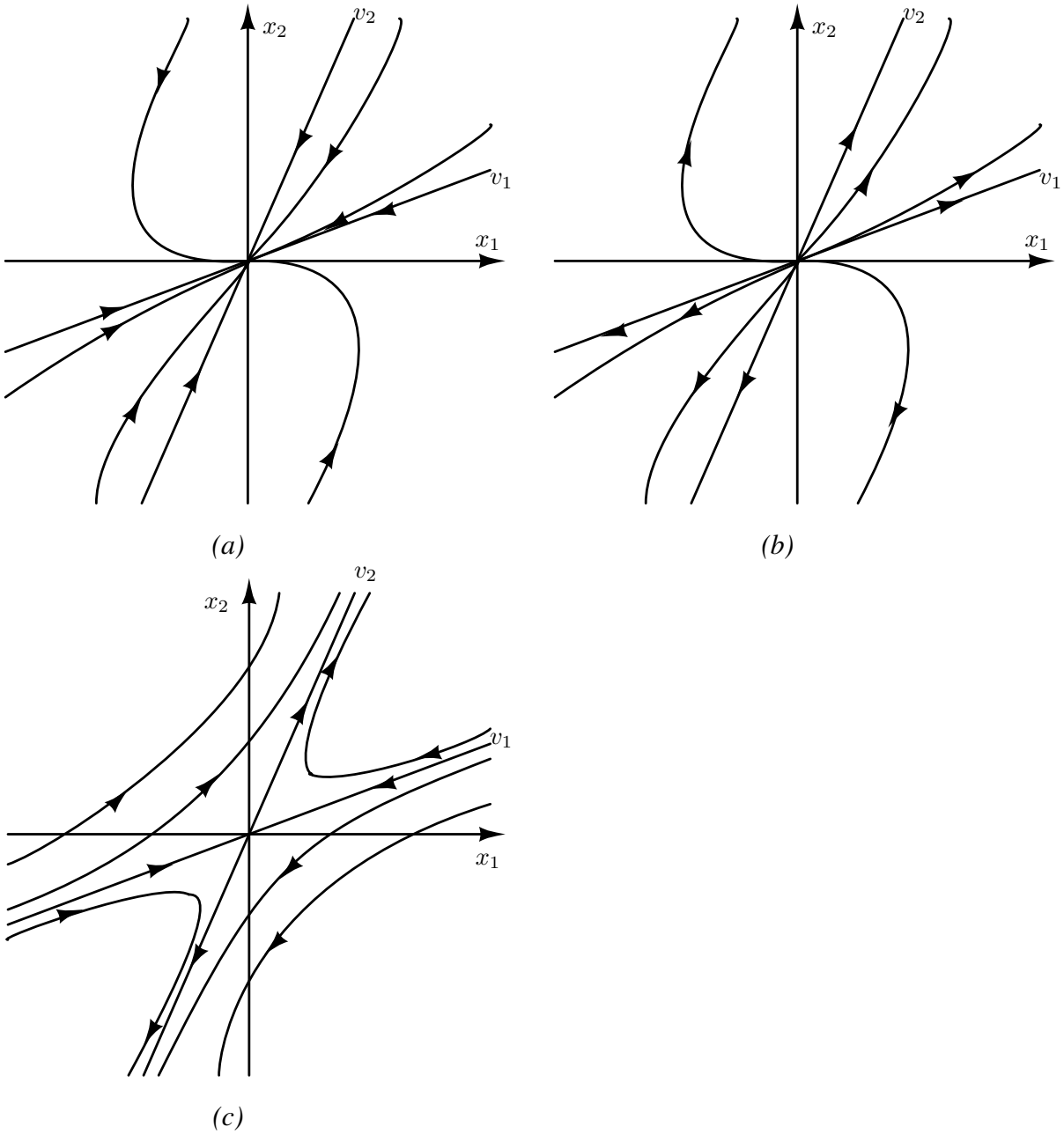
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \, \mathbf{x}, \tag{3.1}$$

pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor od n promenljivih stanja, $i \in \{1, ..., m\}$ redni broj podsistema, a $\mathbf{A}_i$ odgovarajuća matrica stanja i-tog podsistema. Prilikom rada sistem prekljućuje između m podsistema [30]. Generalno, ovi podsistemi ne moraju da budu stabilni, što znači da matrica $\mathbf{A}_i$ ne mora da ima sve sopstvene vrednosti u otvorenoj levoj kompleksnoj poluravni.

Svaki od podsistema ima svoj ekvilibrijum koji se dobija izjednačavanjem matrične jednačine (3.1) sa nulom. U zavisnosti od vrednosti sopstvenih vrednosti matrice stanja podsistema $\mathbf{A}_i$, može se proceniti stabilnost podsistema. Ukoliko su realni delovi svih sopstvenih vrednosti u otvorenoj levoj kompleksnoj poluravni, sistem je stabilan. Ukoliko postoje sopstvene vrednosti sa realnim delom jednakim nuli, podsistem je granično ili marginalno stabilan i ukoliko postoji bar jedna sopstvena vrednost čiji je realni deo pozitivan, podsistem je nestabilan. U slučaju stabilnog podsistema, podsistem konvergira ka vrednosti svog ekvilibrijuma, dok u slučaju nestabilnog, divergira od ekvilibrijuma.

Sama konvergencija/divergencija sistema i putanje koje sistem prilikom rada obrazuje se može posmatrati na njegovom faznom dijagramu [25]. Uzećemo slučaj kada je vektor $\mathbf{x} = [x_1 \; x_2]^T$ i kada postoji samo jedan podsistem

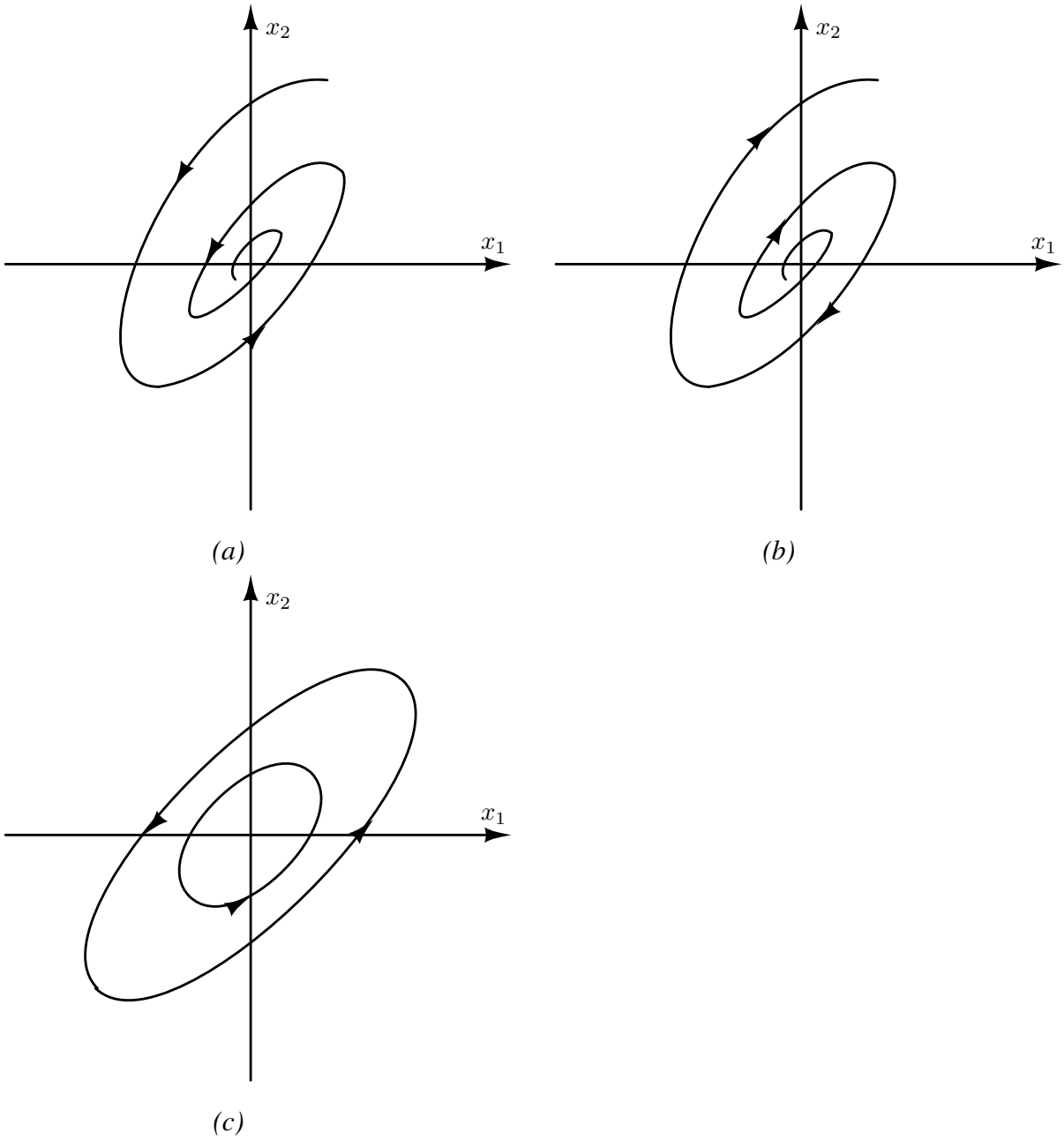
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \, \mathbf{x}, \tag{3.2}$$



Slika 3.1: *Fazni dijagram* $x_2(x_1)$ *za* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *u slučaju kada je (a)* $\lambda_1, \lambda_2 < 0$*, (b)* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *i (c)* $\lambda_1 < 0$ *i* $\lambda_2 > 0$*.*

čije su sopstvene vrednosti λ_1 i λ_2, a odgovarajući sopstveni vektori v_1 i v_2. U zavisnosti od vrednosti sopstvenih vrednosti, mogu se posmatrati dva slučaja: kada su sopstvene vrednosti čisto realne i kada su konjugovano kompleksne.

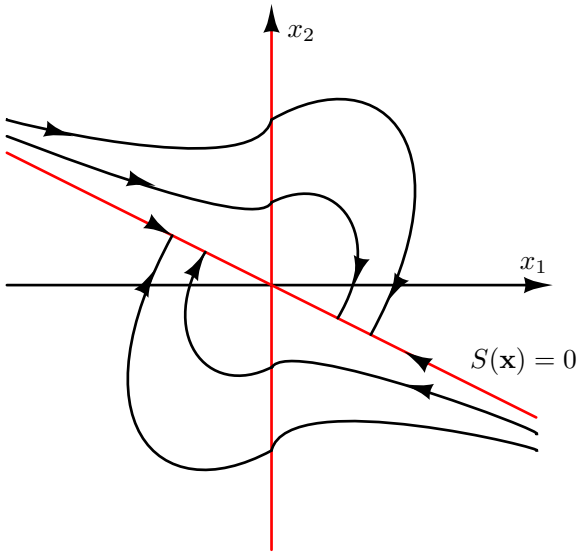
Ukoliko su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, možemo posmatrati tri slučaja. Za $\lambda_1 < 0$ i $\lambda_2 < 0$ je sistem stabilan i konvergira ka ekvilibrijumu $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1 \ \overline{x}_2]^T = [0 \ 0]^T$, kao što je prikazano na sl. 3.1a. Ukoliko su obe sopstvene vrednosti pozitivne $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, fazni dijagram je prikazan na sl. 3.1b. Slučaj kada je jedna pozitivna, a jedna negativna sopstvena vrednost



Slika 3.2: *Fazni dijagram* $x_2(x_1)$ *za* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *u slučaju kada je (a)* $\alpha < 0$*, (b)* $\alpha > 0$ *i (c)* $\alpha = 0$*.*

je prikazan na sl. 3.1c. Vidi se da se u druga dva slučaja, prikazana na sl. 3.1b-c, sistem udaljava od ekvilibrijuma $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1\ \overline{x}_2]^T = [0\ 0]^T$. Dijagram sa sl. 3.1c se još naziva sedlo.

Kada su sopstvene vrednosti konjugovano-kompleksne $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ oblika $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, gde su α i $\beta > 0$ realne vrednosti, postoje na osnovu vrednosti α tri slučaja. Ukoliko je $\alpha < 0$ sistem je stabilan i oblika je stabilnog fokusa sa sl. 3.2a, za $\alpha > 0$ je sistem nestabilan, pa mu je fazni dijagram nestabilni fokus sa sl. 3.2b. Najzad, za $\alpha = 0$ je sistem granično stabilan i oblika kružnice, kao na sl. 3.2c.



Slika 3.3: *Fazni dijagram sistema sa sliding mode kontrolom.*

Cilj slidng-mode kontrole [17, 30, 31] jeste stabilizacija sistema koji preključuju između više podsistema. Naime, podsistem ne mora da bude stabilan, ali uz dobro izabranu prekidačku površinu (*sliding surface*) $S(\mathbf{x}) = 0$, samim preključivanjem između podsistema može da se dobije stabilan sistem [31]. Na sl. 3.3 se može videti fazni dijagram sistema koji preključuje između dva podsistema drugog reda čiji su fazni dijagrami sedlo i fokus. Iako je fokus u ovom slučaju stabilan, sedlo nije, ali se svaki podsistem „kreće" ka prekidačkoj površini, pa je celokupan sistem sa sl. 3.3 sa definisanim preključivanjem stabilan. Sistem na koji je primenjena sliding mode kontrola preključuje između podsistema tako da se uvek dobije stabilan sistem. Naime, potrebno je da za definisanu prekidačku površinu uvek važi da je atraktivna. Prekidačka površina je atraktivna ukoliko vektor pravca promenljivih stanja pokazuje ka njoj, odnosno važi da je

$$S(\mathbf{x})\,\dot{S}(\mathbf{x}) < 0. \tag{3.3}$$

Sama sliding mode kontrola se može konstruisati na više načina. U ovoj glavi će se biti opisana konstrukcija prekidačke površine korišćenjem koncepta ekvivalentne sliding mode kontrole [31], a zatim će biti analizirane sve prekidačke površine prvog i drugog reda na primeru Ćuk konvertora.

3.2 Sliding mode kontrola prekidačkih konvertora

Prekidački sistem kao što je DC-DC konvertor ima više podsistema u zavisnosti od položaja prekidača koji mogu da budu uključeni ili isključeni [17]. Pod pretpostavkom

da su svi kontrolabilni prekidači upravljani istim signalom i da se sliding mode kontrola projektuje tako da konvertor radi u kontinualnom režimu (CCM-u), može se napisati jednačina u matričnom obliku za model u prostoru stanja konvertora

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B} + (\mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D})\,u, \tag{3.4}$$

gde je $u \in \{0, 1\}$ skalar koji predstavlja indikator da li kontrolabilni prekidač zatvoren (uključen), $u = 1$, ili ne, $u = 0$. Matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ su odgovarajućih dimenzija dobijene od modela u prostoru stanja za svaki od dva kontinualna podsistema rada konvertora. U osnovi (3.4) je sistem od n običnih diferencijalnih jednačina sa prekidačkom promenljivom.

Prekidanje se definiše kao

$$u = \begin{cases} 1, & \text{preključi u 1 kada je } S(\mathbf{x}) < -\Delta, \\ 0, & \text{preključi u 0 kada je } S(\mathbf{x}) > \Delta, \end{cases} \tag{3.5}$$

gde se pretpostavlja da je prekidačka površina linearnog oblika data sa $S(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\,(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ sa koeficijentima u vidu vektora $\mathbf{M} = [m_1\ m_2\ \cdots\ m_n]$, vrednosti ekvilibrijuma odnosno vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju $\overline{\mathbf{x}}$ i parametrom histerezisa $\Delta > 0$.

Sliding mode kontrola je primenjena kako bi se analizirao rad konvertora na prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = 0$ korišćenjem koncepta ekvivalentne kontrole [31]. Kretanje sistema sa primenjenom sliding mode kontrolom je ograničeno na prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = 0$ ako je površina atraktivna. U ustaljenom stanju važi $S(\mathbf{x}) = 0$, pa se ekvivalentna kontrola može projektovati prema jednačini

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D})\right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\,(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B})\,, \tag{3.6}$$

ako $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D})$ nije singularna matrica. Nakon zamene parametra u sa u_{eq} (3.6) u jednačinu (3.4) dobija se sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B} + (\mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D})\,u_{eq}. \tag{3.7}$$

Vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju $\overline{\mathbf{x}}$, odnosno ekvilibrijum, se dobijaju izjednačavanjem jednačine (3.7) sa nulom. Potom se sistem (3.4) sa primenjenom ekvivalentnom kontrolom može predstaviti kao zbir linearnog dela datog sa $\mathbf{A}_1\,(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ za koji se matrica $\mathbf{A}_1$ dobija kao Jakobijan sistema (3.7) u okolini ekvilibrijuma i nelianernog ostatka

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_1\,(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}). \tag{3.8}$$

3.2. Sliding mode kontrola prekidačkih konvertora

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = 0$ omogućava eliminaciju jedne promenljive stanja zato što predstavlja linearnu kombinaciju ostalih promenljivih stanja. Neka je $\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$, a vektor $\mathbf{z}$ se dobija kao vektor promenljivih y_i koje nisu eliminisane korišćenjem uslova rada konvertora na prekidačkoj površini. Dinamika redukovanog sistema se može zapisati kao

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^*_{(n-1)\times(n-1)}\,\mathbf{z} + \mathbf{h}^*_{(n-1)\times 1}(\mathbf{z}) \tag{3.9}$$

gde su matrica $\mathbf{A}^*$ i nelinearni ostatak $\mathbf{h}^*$ dobijeni od matrice $\mathbf{A}_1$ i ostatka $\mathbf{h}$ nakon smene promenljivih i eliminacije jedne promenljive stanja.

Stabilnost sistema na željenoj prekidačkoj površini se procenjuje nalaženjem funkcije Ljapunova kvadratnog oblika

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{z}, \tag{3.10}$$

gde je $\mathbf{P}$ pozitivno definitna matrica. Sledeći korak je da se nađe izvod funkcije Ljapunova kao

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\,(\mathbf{A}^{*T}\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{A}^*)\,\mathbf{z} + 2\,\mathbf{z}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{h}^*(\mathbf{z}). \tag{3.11}$$

Linearne matrične nejednačine (LMI - Linear Matrix Inequalities) su efikasan način za računanje funkcije Ljapunova [21, 32, 33] čiji je sistem predstavljen kao zbir linearnog i nelinearnog dela. LMI problem se formuliše primenom S-procedure [28] koja maksimizira ograničenje sektora nelinearnog dela. Ovaj pristup se bazira na konveksnom programiranju [34] koje daje rešenje problema ako ga ima, kaže se još ako je problem *feasible*. Konvergencija u slučaju postojanja rešenja je brza. LMI problem koji se rešava za procenu stabilnosti sistema je [29]:

$$\begin{gathered}\text{minimize}\,\gamma \\ \text{subject to}\,\mathbf{Y} > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}^*\,\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\,\mathbf{A}^{*T} & \mathbf{I} & \mathbf{Y}\,\mathbf{H}^T \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\,\mathbf{Y} & \mathbf{0} & -\gamma\,\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Rešenje daje matricu $\mathbf{Y} = \tau\,\mathbf{P}^{-1}$, za $\tau > 0$, koja maksimizira ograničenje sektora $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Maksimizacijom granice sektora dobija se veći opseg u kome nelinearni deo može da ima vrednosti, a da se i dalje dobije stabilan sistem. Izvod funkcije Ljapunova je tada

$$\dot{V}(\mathbf{z}) = -\mathbf{z}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{z} + 2\,\mathbf{z}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{h}^*(\mathbf{z}) < 0, \quad \mathbf{z} \neq 0, \tag{3.13}$$

gde je matrica $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{*T}\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{A}^* > 0$, a nelinearni deo zadovoljava

$$\mathbf{h}^{*T}\,\mathbf{h}^* \leq \alpha^2\,\mathbf{z}^T\,\mathbf{H}^T\,\mathbf{H}\,\mathbf{z}. \tag{3.14}$$

Oblik nelinearnog dela je određen matricom **H** i pozitivnim parametrom α. Ako se primeni nesingularna transformacija [29]

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\widetilde{\mathbf{x}}, \tag{3.15}$$

sa matricom **T** formiranom od sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}^*$, dobija se veća vrednost ograničenja sektora α. LMI formulacija transformisanog sistema

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}\,\mathbf{T}, \tag{3.16}$$

rezultuje ograničenjem sektora $\widetilde{\alpha}$ datog relacijom

$$\alpha = \frac{\widetilde{\alpha}}{\|\mathbf{T}^{-1}\|}. \tag{3.17}$$

Ovako procenjena granica sektora (3.17) daje granicu procene *linear ripple* aproksimacije. Naime, dokle god je nealinearni deo $\mathbf{h}^*(\mathbf{z})$ unutar sektora (3.14) može se primeniti *linear ripple* aproksimacija.

3.3 Sliding mode kontrola Ćuk konvertora

3.3.1 Uvod

Godinama je kontrola Ćuk konvertora bila česta tema istraživanja i do sada postoji veliki broj publikacija vezanih za projektovanje njegove kontrole [18, 35–39]. Većina radova se bazira na analizi prekidačkih površina sa dve kontrolne varijable, kao što je [35], gde su struja i_{L1} i napon v_{C1} označeni na sl. 2.2, od posebnog interesa. Rad [38] analizira sliding mode kontrolisani Ćuk konvertor i projekovanje njegove regulacije pod pretpostavkom da je kapacitivnost kondenzatora $C_1 \gg C_2$ i samim tim se redukuje sistem jednačina stanja sistema. Redukcija sistema se u nekim slučajevima radi tako što se eliminiše jedan reaktivni element i dobije sistem trećeg reda za koji je lakše projektovati kontrolu [36]. Međutim, u nekim radovima se posmatra Ćuk konvertor četvrtog reda, kao što su [37] i [39]. U radu [37] se analizira Ćuk konvertor se spregnutim kalemovima i bidirekcionim prekidačima koji može da radi samo u kontinualnim režimima i stoga olakšava analizu samog konvertora jer su diskontinualni režimi ne mogu da nastupe.

U ovoj sekciji će biti analizirana sliding mode kontrola Ćuk konvertora kod koga su prekidači realizovani pomoću tranzistora i diode kao na sl. 2.2a i može da radi u svim kontinualnim i diskontinualnim režimima. Dobijeni rezultati za standardni Ćuk konvertor će se porediti sa slučajem bidirekcionog Ćuk konvertora. Biće konstruisane sve preki-

dačke površine prvog i drugog reda i analizirane sa aspekta stabilnosti. Stabilnost sistema predstavljenog kao zbir linearnog dela i nelinearne perturbacije se proverava nalaženjem matrice **P** funkcije Ljapunova i procenom ograničenja sektora. Pokazuje se da je ograničenje sektora u direktnoj vezi sa primenom *linear ripple* aproksimacije. Naime, nelinearna preturbacija se nalazi unutar sektora dokle god je uticaj sopstvenih vrednosti sistema zanemarljiv, odnosno dokle god može da se primeni *linear ripple* aproksimacija. Kada se nelinearnost nađe van sektora, uticaj nelinearnosti postaje vidljiv i više ne može da se primeni *linear ripple* aproksimacija prilikom analize rada konvertora.

3.3.2 Analiza sliding mode kontrole Ćuk konvertora

Na osnovu analize iz odeljka 2.1.1 može se zaključiti da za obe realizacije Ćuk konvertora sa sl. 2.2 važe iste jednačine u kontinualnom stanju. One se mogu zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\frac{d\,i_{L1}}{dt} &= \frac{v_{IN}}{L_1} - \frac{v_{C1}}{L_1}\,(1-u),\\
\frac{d\,i_{L2}}{dt} &= \frac{v_{C1}}{L_2}\,u + \frac{v_{C2}}{L_2},\\
\frac{d\,v_{C1}}{dt} &= \frac{i_{L1}}{C_1}\,(1-u) - \frac{i_{L2}}{C_1}\,u,\\
\frac{d\,v_{C2}}{dt} &= -\frac{i_{L2}}{C_2} - \frac{v_{C2}}{RC_2},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

gde je $u = 1$ kada je prekidač S uključen, a dioda D isključena, a $u = 0$ kada je S isključen, a dioda D uključena. U slučaju sinhronog konvertora sa sl. 2.2b prekidač S1 je kontrolisan signalom u, a S2 signalom $\overline{u}$.

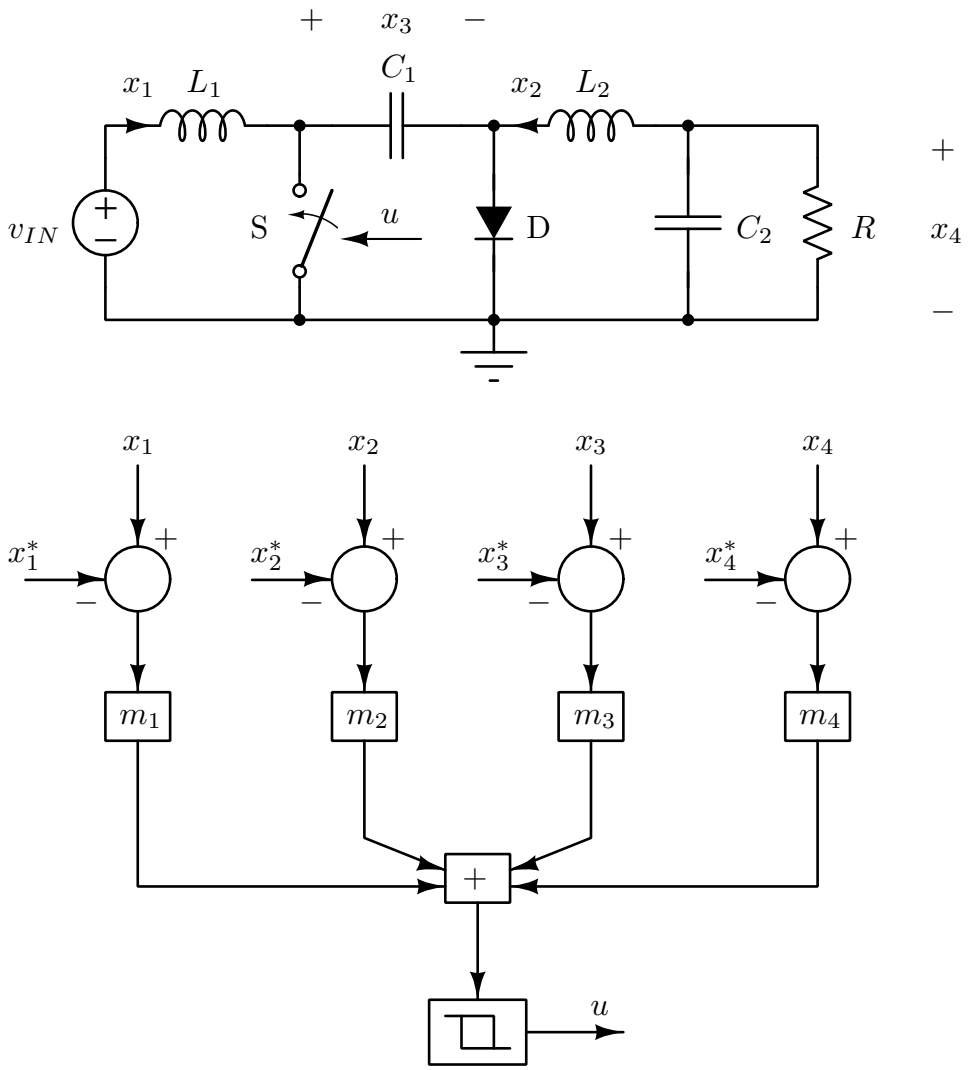
Jednačina (3.18) se može napisati u matričnom obliku (3.4) sa matricama

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{RC_2} \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.19}$$

i matricom $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ koja je nula matrica i zato neće biti korišćena u daljem izvođenju. Kao što je rečeno u poglavlju 2.1, vektor promenljivih stanja je $\mathbf{x} = [i_{L1}\ i_{L2}\ v_{C1}\ v_{C2}]^T = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ sa vrednošću u ustaljenom stanju $\overline{\mathbf{x}} = [\bar{i}_{L1}\ \bar{i}_{L2}\ \overline{v}_{C1}\ \overline{v}_{C2}]^T$.

Sliding mode kontrola Ćuk konvertora je realizovana korišćenjem histerezisnog regulatora kao što je prikazano na sl. 3.4. Regulator sa sl. 3.4 daje kontrolni signal u definisan jednačinom (3.5) sa prekidačkom površinom

$$S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 + m_3\,x_3 + m_4\,x_4 - m_5, \tag{3.20}$$



Slika 3.4: *Ćuk konvertor (slika gore) sa histerezisnim sliding mode kontrolerom (slika dole).*

gde je m_5 ponderisana suma referentnih vrednosti promenljivih stanja pomnoženih sa odgovarajućim koeficijentima $m_1, \cdots, m_4$. Koeficijent m_5 je dat jednačinom

$$m_5 = m_1\,\overline{x}_1 + m_2\,\overline{x}_2 + m_3\,\overline{x}_3 + m_4\,\overline{x}_4. \tag{3.21}$$

U analizi će se primarno posmatrati standardni Ćuk konvertor, kod koga su prekidači realizovani kao tranzistor i dioda, koji može da radi u svim kontinualnim i diskontinualnim režimima. Za takav konvertor važi da je uvek $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ i $x_4 \leq 0$, pa se usvaja da su parametri $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $m_3 > 0$, $m_4 < 0$ i $m_5 > 0$. Ekvivalentna kontrola daje

ekvilibrijum

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -\frac{\overline{x}_4}{v_{IN} - \overline{x}_4}, \\ \overline{x}_1 &= \frac{\overline{x}_4^2}{R\, v_{IN}}, \\ \overline{x}_2 &= -\frac{\overline{x}_4}{R}, \\ \overline{x}_3 &= v_{IN} - \overline{x}_4, \end{aligned} \tag{3.22}$$

za $\overline{x}_4$ određeno na osnovu željene prekidačke površine.

Kako se ekvivalentna sliding mode kontrola primenjuje na Ćuk konvertor čiji nelinearni deo leži unutar sektora datog jednačinom (3.14), što važi za konvertor dokle god se može primeniti *linear ripple* aproksimacija, može se proceniti ripl kao u poglavlju 2.1.2. U toku intervala $t_0 \leq t < u_{eq}\, T_S + t_0$ u CCM-u je prekidač S uključen kao na sl. 2.4, a dioda isključena pa je ripl struja i napona jednak [1]

$$\begin{aligned} \Delta i_{L1} &= \frac{v_{IN}}{L_1}\, u_{eq}\, T_S, \\ \Delta i_{L2} &= \frac{\overline{x}_3 + \overline{x}_4}{L_2}\, u_{eq}\, T_S = \frac{v_{IN}}{L_2}\, u_{eq}\, T_S, \\ \Delta v_{C1} &= \overline{x}_2\, u_{eq}\, \frac{T_S}{C_1}, \\ \Delta v_{C2} &= \frac{\Delta i_{L2}}{8\, C_2}\, T_S. \end{aligned} \tag{3.23}$$

U ustaljenom stanju u kontinualnom režimu rada u toku ostatka periode $u_{eq}\, T_S + t_0 \leq t < T_S + t_0$ se vrednosti promenljivih stanja vrate na početne, odnosno $\mathbf{x}(t_0 + T_S) = \mathbf{x}(t_0)$. Jednačine (3.23) se koriste za određivanje potrebne vrednosti parametra Δ histerezisa.

3.3.3 Analiza prekidačkih površina

U ovom odeljku će biti analizirana sliding mode kontrola Ćuk konvertora za razne prekidačke površine prvog i drugog reda koje su jednostavne za analizu i realizaciju, a onogućavaju kontrolu jedne ili dve promenljive stanja. U primerima je korišćen Ćuk konvertor sa uobičajenim brojnim vrednostima parametara u kolu $v_{IN} = 10\,\mathrm{V}$, $L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{mH}$, $C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}$, $C_2 = 20\,\mu\mathrm{F}$ i $R = 5\,\Omega$. Signal u je generisan korišćenjem histerezisnog regulatora sa pragovima $\pm\Delta$, za $\Delta \in \{1\,\mathrm{m}, 10\,\mathrm{m}, 100\,\mathrm{m}\}$, gde je m oznaka za 10^{-3} i nema jedinica mere. Simulacije su rađene korišćenjem programa PLECS [40].

Prekidačke površine sa jednom promenljivom stanja

U slučaju prekidačke površine sa jednom promenljivom stanja postoje četiri opcije za izbor prekidačke površine.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = x_1 - m_5$: Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = x_1 - m_5$ kontroliše i ograničava ulaznu struju konvertora sa koeficijentima $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 0$ i $m_4 = 0$. Ovakvo upravljanje daje ekvivalentnu kontrolu

$$u_{eq} = \frac{x_3 - v_{IN}}{x_3} \tag{3.24}$$

koja rezultuje ustaljenim stanjem:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= m_5, \\ \overline{x}_2 &= \mp \sqrt{\frac{m_5\, v_{IN}}{R}}, \\ \overline{x}_3 &= \mp \sqrt{m_5\, v_{IN}\, R} + v_{IN}, \\ \overline{x}_4 &= \pm \sqrt{m_5\, v_{IN}\, R}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Da bi konvertor ispravno radio, potrebno je da $x_3 > 0$ i $x_4 < 0$ i zbog toga se bira drugo rešenje. Prvo rešenje je fizički neprihvatljivo.

U toku intervala u kome je prekidač S uključen, a dioda D isključena, struja kalema i_{L1}, odnosno kontrolišuća promenljiva, se linearno menja i na osnovu *linear ripple* aproksimacije je

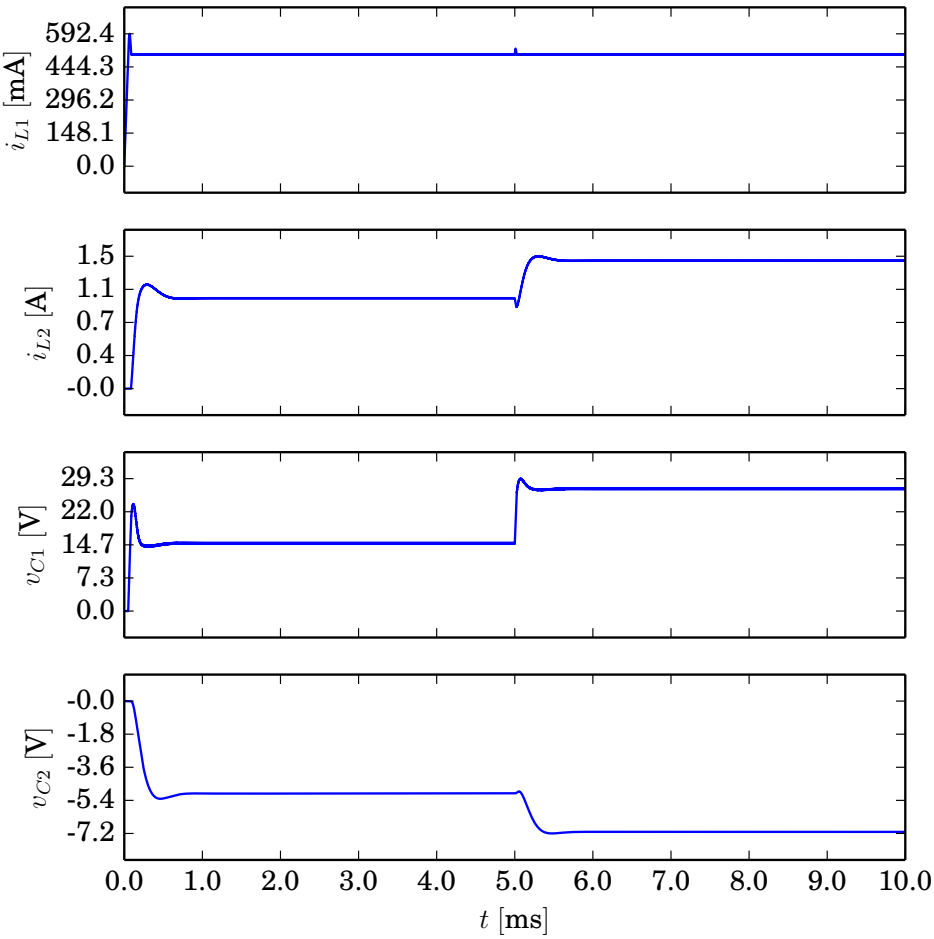
$$\Delta i_{L1} = 2\,\Delta = \frac{v_{IN}}{L_1}\, u_{eq}\, T_S. \tag{3.26}$$

Korišćenjem jednačine (3.26) na osnovu parametra histerezisa Δ može se odrediti perioda prekidanja T_S i zatim iskoristiti za procenu ripla u ustaljenom stanju ostalih promeniljivih stanja kao u jednačini (3.23).

Na sl. 3.5 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja za slučaj kada je $m_5 = 0.5$ i $\Delta = 1$ m. Za pomenute brojne vrednosti je u ustaljenom stanju $\overline{\mathbf{x}} = [0.5\text{ A}\ \ 1\text{ A}\ \ 15\text{ V}\ -5\text{ V}]^T$. U trenutku $t = 5$ ms se vrednost ulaznog napona menja na $v_{IN} = 20$ V, ali struja kalema i_{L1} ostaje konstantna i jednaka 0.5 A.

Na sl. 3.6 su prikazani dijagrami promenljivih stanja u ustaljenom stanju za različite vrednosti parametra histerezisa $\Delta \in \{10\text{ m},\ 100\text{ m}\}$ kada je $m_5 = 0.5$. Vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju su $\overline{\mathbf{x}} = [0.5\text{ A}\ \ 1\text{ A}\ \ 15\text{ V}\ \ -5\text{ V}]^T$. Na dijagramima sa sl. 3.6a se vidi linearno „ponašanje" i ovi dijagrami odgovaraju *linear ripple* aproksimaciji. Međutim, na dijagramima sa sl. 3.6b se vidi nelinearnost ripla, posebno na dijagramu struje kalema i_{L1}. Pokazuje se da su vremenske konstante uzrokovane realnim delovima sopstvenih vrednosti merljive sa periodom prekidanja.

Stabilnost sistema na prekidačkoj površini se može verifikovati linearizacijom sistema u okolini ekvilibrijuma i nalaženjem matrice $\mathbf{P}$ prema LMI proceduri u jednačini (3.12). Na ovoj prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = x_1 - m_5$ promenljiva x_1 je konstantna i zato se diferencijalna jednačina po $\dot{x}_1$ može eliminisati. Analiza stabilnosti je sprovedena posmatrajući



Slika 3.5: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja za prekidačku površinu* $S(\boldsymbol{x}) = x_1 - 0.5$. *Ulazni napon se u trenutku* $t = 5$ *ms menja sa vrednosti* $v_{IN} = 10$ *V na* $v_{IN} = 20$ *V.*

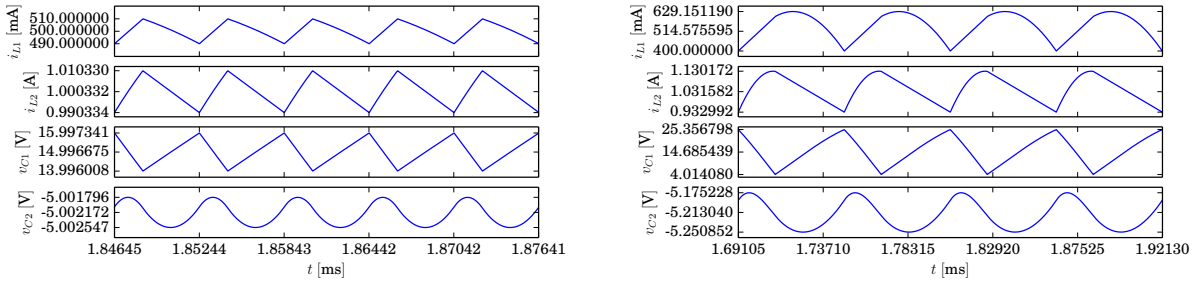
vektor promenljivih $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$, pa se sistem jednačina stanja može predstaviti kao zbir linearnog dela predstavljenog matricom

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{v_{IN} - \overline{x}_3}{\overline{x}_3 C_1} & -\frac{(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) v_{IN}}{x_3^{*2} C_1} & 0 \\ -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{C_2 R} \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

i nelinearnog ostatka

$$\mathbf{h}^*(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-v_{IN}\, y_2\, y_3 + \overline{x}_2\, y_3^2}{(y_3 + \overline{x}_3)\, \overline{x}_3\, C_1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

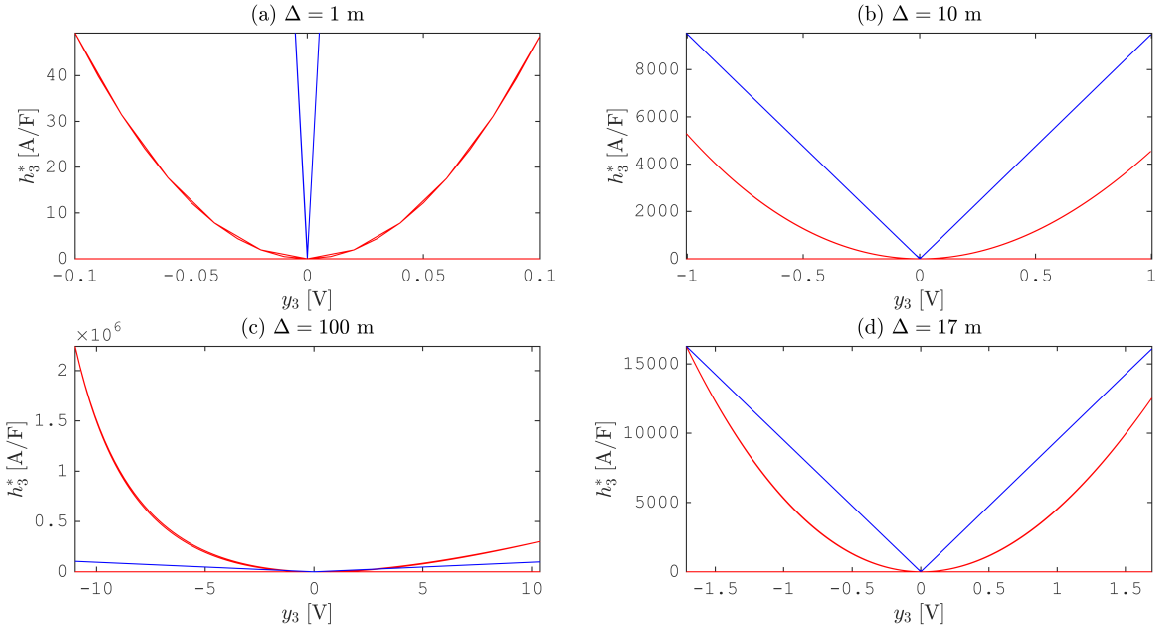
Vidi se da nelinearni ostatak ima izraz koji nije identičan nuli samo na poziciji $h_3^* = \mathbf{h}^*(y_3)$. Ako se izabere matrica $\mathbf{H}$ da bude formata 3×3 sa svim vrednostima jednakim nuli osim



(a) Računate i izmerene vrednosti su: $T_S = 6\,\mu s$, $\Delta v_{C1} = 2\ V$, $\Delta i_{L1} = \Delta i_{L2} = 20\ mA$ *i* $\Delta v_{C2} = 750\,\mu V$.

(b) Računate vrednosti su: $T_S = 60\,\mu s$, $\Delta v_{C1} = 20\ V$, $\Delta i_{L1} = \Delta i_{L2} = 200\ mA$ *i* $\Delta v_{C2} = 75\ mV$. *Meri se* $T_S = 57.55\,\mu s$.

Slika 3.6: *Vremenski dijagrami u ustaljenom stanju kada je vrednost parametra histerezisa (a)* $\Delta = 10\ m$; *(b)* $\Delta = 100\ m$.



Slika 3.7: *Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa* Δ *je nelinearni deo* h_3^* *prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora* $\alpha\,|y_3|$ *prikazano plavom linijom.*

na poziciji $(2, 2)$ na kojoj je 1, i ako se primeni LMI konveksni program kao u jednačini (3.12), dobija se maksimalna veličina sektora. Može se pokazati da nelinearni deo zadovoljava $|h_3^*| \leq (\widetilde{\alpha}/\|\hat{\mathbf{T}}_2\|)\,|y_3|$, gde je $\hat{\mathbf{T}}_2$ druga kolona inverzne matrice transformacione matrice $\mathbf{T}$ kao što je dato u jednačini (3.17). Veličina sektora nelinearnog dela je jednaka $\alpha = 9.4995 \cdot 10^3$.

Na sl. 3.7 prikazana je zavisnost $h_3^*(y_3)$ za različite vrednosti za parametar histerezisa Δ. Vidi se da nelinearni deo h_3^* leži unutar granica perturbacije kada je $\Delta \in \{1\text{ m},\ 10\text{ m}\}$ i prelazi granicu sektora za $\Delta = 100$ m. Dominantna vremenska konstanta koja utiče na

pojavu nelinearnosti je sopstvena vrednost $\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{L_2} \pm \sqrt{L_2 - 4\,C_2\,R^2}}{2\,C_2\,\sqrt{L_2}\,R}$ podsistema 2, kada je prekidač S isključen, a dioda D uključena. U slučaju kada je $\Delta = 100$ m dolazi do velike nelinearnosti koja se vidi na vremenskim dijagramima posebno kod struje kalema i_{L1}, prikazano na sl. 3.6. Takođe se može videti da na dijagramu 3.7c oštrije raste vrednost nelinearnosti sa opadanjem vrednosti promenljive y_3. U ovom slučaju nelinearni ostatak forsira sistem da se približi drugom ekvilibrijumu koji je fizički neprihvatljiv.

Na osnovu vrednosti sektora α iz jednačine (3.17) se može proceniti granica za primenu *linear ripple* aproksimacije kao presečna tačka karakteristika $h_3^*(y_3)$ i ograničenja sektora $\alpha\,|y_3|$. Procenjuje se da je ta vrednost $\Delta y_3 = \Delta v_{C1} \approx 3.4$ V, pa je na osnovu (3.23):

$$\Delta = \frac{1}{2}\,\frac{v_{IN}\,\Delta v_{C1}}{\overline{x}_2}\,\frac{C_1}{L_1}, \tag{3.29}$$

što daje $\Delta = 17$ m kao maksimalnu vrednost pragova histerezisa. Na sl. 3.7d je prikazan granični slučaj sa $\Delta = 17$ m što potvrđuje LMI proceduru. Očigledno se na osnovu vrednosti sektora i nelinearnog ostatka može proceniti kada se koristiti *linear ripple* aproksimacija prilikom analize rada konvertora.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_5$: Ako se izabere da je $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_5$, dobija se ekvivalentno upravljanje

$$u_{eq} = -\frac{x_4}{x_3} \tag{3.30}$$

sa ekvilibrijumom

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{m_5^2\,R}{v_{IN}}, \\ \overline{x}_2 &= m_5, \\ \overline{x}_3 &= m_5\,R + v_{IN}, \\ \overline{x}_4 &= -m_5\,R. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Matrica $\mathbf{A}^*$ za promenljive $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$ u okolini ekvilibrijuma za datu ekvivalentnu kontrolu je

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{\overline{x}_3 + \overline{x}_4}{\overline{x}_3\,C_1} & -\frac{\overline{x}_4\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)}{x_3^{*2}\,C_1} & \frac{\overline{x}_1 + \overline{x}_2}{\overline{x}_3\,C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}^*$ su

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{RC_2}, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{m_5^2\,L_1 R \pm \sqrt{m_5^4\,L_1^2\,R^2 - 4\,v_{IN}^3\,L_1 C_1\,(m_5\,R + v_{IN})}}{2\,v_{IN}\,(m_5 R + v_{IN})\,L_1 C_1}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Vidi se da $\lambda_{2,3}$ imaju pozitivne realne delove zato što je $m_5 > 0$, kako bi sistem ispravno radio. Samim tim ovo upravljanje nije stabilno.

U radu [37] se postiže ustaljeno stanje usled realizacije kalemova kao spregnutih zato što spregnuta realizacija kalema unosi modifikacije u sistem jednačina stanja konvertora. Postavljenjem koeficijenta sprege kalemova k da bude negativan, postiže se da je x_1 negativno u ustaljenom stanju što rezultuje stabilnim ustaljenim stanjem.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = x_3 - m_5$: U slučaju da je $S(\mathbf{x}) = x_3 - m_5$, dobija se

$$u_{eq} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \tag{3.34}$$

i rešenja

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{(v_{IN} - m_5)^2}{v_{IN} R}, \\ \overline{x}_2 &= \frac{m_5 - v_{IN}}{R}, \\ \overline{x}_3 &= m_5, \\ \overline{x}_4 &= v_{IN} - m_5 \end{aligned} \tag{3.35}$$

i $\overline{\mathbf{x}} = [0 \;\; 0 \;\; m_5 \;\; 0]^T$. Prvo rešenje je očigledno željeno, međutim rezultuje nestabilnim sistemom. Naime, determinanta matrice $\mathbf{A}^*$ je

$$\det(\mathbf{A}^*) = \frac{R v_{IN}}{L_1 L_2 C_2 K} > 0. \tag{3.36}$$

gde je za promenljive $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{x}_2\,\overline{x}_3}{L_1\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)^2} & -\dfrac{\overline{x}_1\,\overline{x}_3}{L_1\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)^2} & 0 \\ \dfrac{\overline{x}_2\,\overline{x}_3}{L_2\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)^2} & -\dfrac{\overline{x}_1\,\overline{x}_3}{L_2\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)^2} & \dfrac{1}{L2} \\ -\dfrac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Prekidačka površina $S(x) = x_4 - m_5$: Ne rezultuje ekvivalentnom kontrolom usled singularnosti matrice $\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D})\right)$ u jednačini (3.6).

Prekidačke površine sa dve promenljive stanja

U ovom poglavlju će biti opisana kontstrukcija sliding mode kontrole za dve prekidačke površine od interesa. Prva prekidačka površina koja će biti razmatrana je $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5$ koja omogućava kontrolu struja kalemova i druga $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$ koja pruža mogućnost kontrole izlaznog napona konvertora.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_5$: Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_5$ rezultuje *hysteresis window* strujnim programiranjem ponderisanog zbira struja kalemova [1]. Ekvivalentna kontrola rezultuje ekvilibrijumom

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \frac{2\, m_1\, m_5\, R + m_2\, \left(m_2\, v_{IN} \pm \sqrt{v_{IN}}\, E\right)}{2R\, m_1^2}, \\
\overline{x}_2 &= \frac{m_5 - m_1\, \overline{x}_1}{m_2}, \\
\overline{x}_3 &= v_{IN} - \frac{m_2\, v_{IN} \pm \sqrt{v_{IN}}\, E}{2\, m_1}, \\
\overline{x}_4 &= \frac{m_2\, v_{IN} \pm \sqrt{v_{IN}}\, E}{2\, m_1},
\end{aligned} \tag{3.38}$$

za $E = \sqrt{m_2^2\, v_{IN} + 4\, m_5 m_1\, R}$. Drugo rešenje daje pozitivnu vrednost za x_3 i negativnu za x_4 i daje

$$u_{eq} = \frac{E - m_2\, \sqrt{v_{IN}}}{\sqrt{v_{IN}}\, (2\, m_1 - m_2) + E}. \tag{3.39}$$

U slučaju prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_5$ se može eliminisati promenljiva y_2, pa je redukovani vektor $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_1 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$. Nelinearni ostatak je $\mathbf{h}^*(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & h_3^* & 0 \end{bmatrix}^T$, pri čemu je

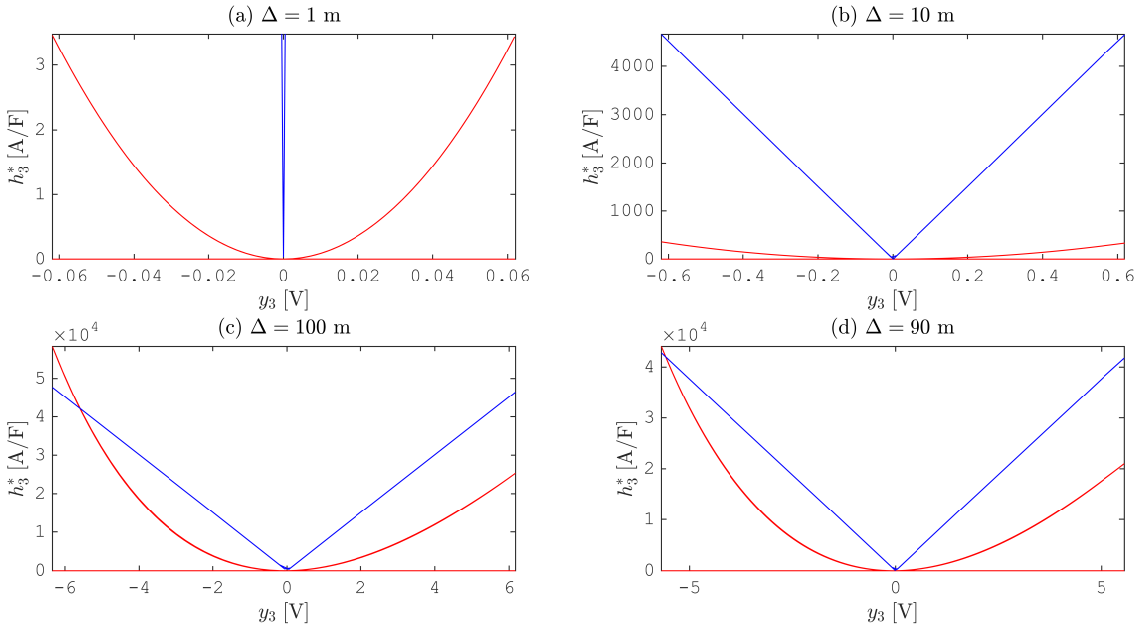
$$h_3^* = \frac{-(m_2 \overline{x}_4 y_3 - R v_{IN}(m_1 - m_2) y_1)(y_3(m_2 L_1 \overline{x}_4 + m_1 L_2 v_{IN}) - y_4 m_2 L_1 \overline{x}_3)}{m_2 C_1 R v_{IN} \overline{x}_3 x_3\, (m_1 L_2 + m_2 L_1)}. \tag{3.40}$$

Može da se izračuna perioda prekidanja T_S na osnovu zadate vrednosti Δ i zatim ripl svih ostalih promenljivih stanja prema (3.23). Perioda se računa na osnovu izraza

$$2\Delta = m_1\, \Delta i_{L1} + m_2\, \Delta i_{L2} = \left(\frac{m_1}{L_1} + \frac{m_2}{L_2}\right)\, v_{IN}\, u_{eq}\, T_S\,. \tag{3.41}$$

Kako bi se odredila granica za primenu *linear ripple* aproksimacije, izabran je slučaj prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_5$ sa koeficijentima $m_1 = m_2 = 1$, $m_5 = 2$ koji daju ustaljeno stanje $\overline{\mathbf{x}} = \left[(3 - \sqrt{5})\ \text{A}\ \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\ \text{A}\ 5(\sqrt{5}+1)\ \text{V}\ \frac{-30+10\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\ \text{V}\right]^T$. Korišćenjem LMI konveksnog programiranja se određuje ograničenje sektora $\alpha = \widetilde{\alpha}/\|\hat{\mathbf{T}}_2\| = 7.5308 \cdot 10^3$. Nelinearni ostatak je izračunat na osnovu simulacija za vrednosti $\Delta \in \{1\ \text{m}, 10\ \text{m}, 100\ \text{m}\}$ i prikazan na sl. 3.8 crvenom linijom. Efekat nelinearnosti se vidi kada je $\Delta = 100$ m, kao na sl. 3.8c.

Može da se proceni maksimalno Δ za koje uticaj sopstvenih vrednosti sistema prestaje da bude zanemarljiv u poređenju sa periodom prekidanja. Određuje se $\Delta v_{C1,\,max} = 11.1$ V.



Slika 3.8: *Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa Δ je nelinearni deo h_3^* prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora $\alpha\,|y_3|$ prikazano plavom linijom.*

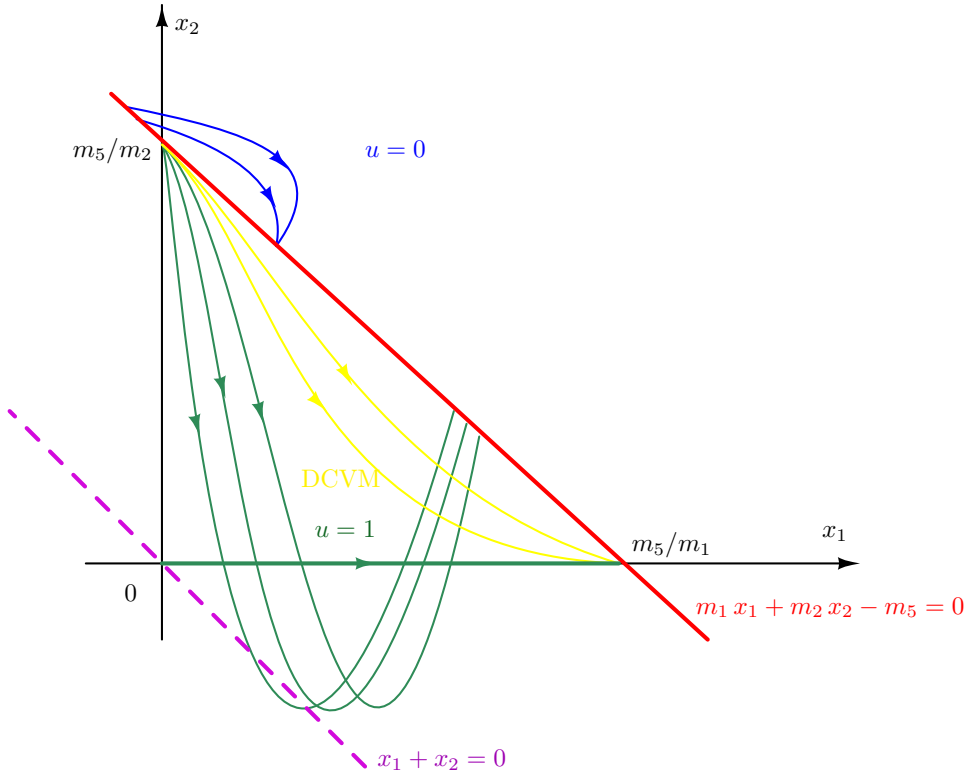
Korišćenjem izraza:

$$\Delta = \frac{\Delta v_{C1}\, v_{IN}\, C_1}{2\,\bar{x}_2}\left(\frac{m_1}{L_1} + \frac{m_2}{L_2}\right), \tag{3.42}$$

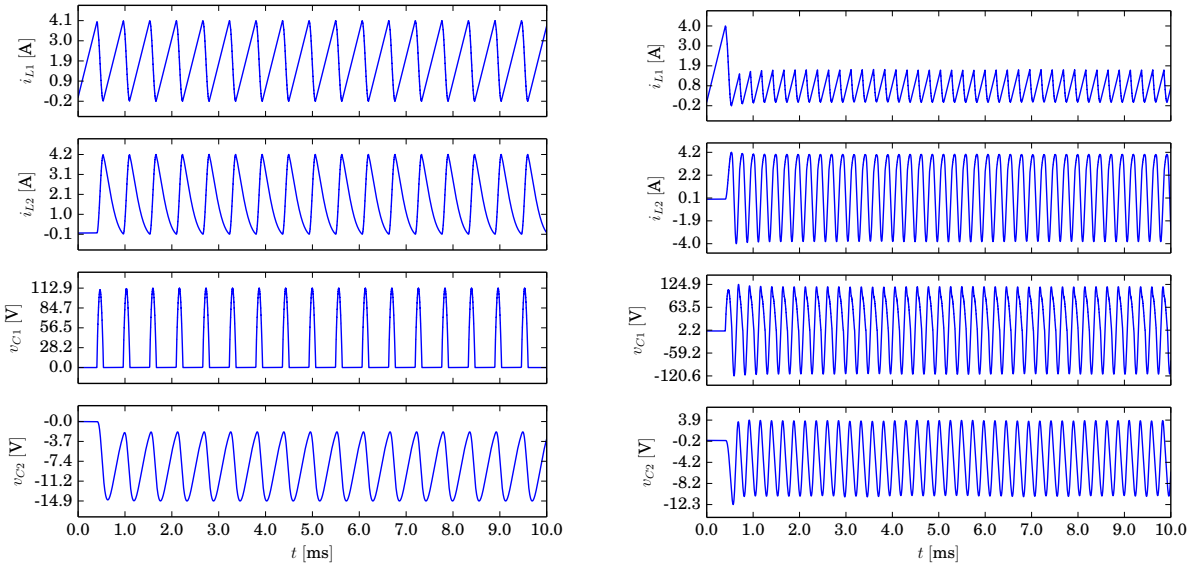
se računa Δ = 90 m. Za ovu vrednost se dobija zaista presečna tačka ograničenja sektora $\alpha\,|y_3|$ i nelinearnosti $h_3^*(y_3)$ kao što se vidi na sl. 3.8d.

Interesantno je još posmatrati fazni dijagram u ravni (x_1, x_2) koji se dobija kada se primeni prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5$. Na sl. 3.9 je dat rezultujući fazni dijagram. Na početku rada sistema, *start up* Ćuk konvertora, se prati putanja $x_2 = 0$ i uključen je prekidač $u = 1$ dok se ne dođe do prave $m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5 = 0$. Postoji mali „preskok" za $u = 0$ dok sistem ne uđe u ustaljeno stanje, nakon čega se sistem kreće po pravoj $m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5 = 0$. Kada je vrednost m_5 toliko velika da može da se pojavi diskontinualno stanje DCVM, onda se sa prave $m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5 = 0$ kada se napon na kondenzatoru v_{C1} izjednači sa nulom, sistem vraća na prekidačku površinu žutim linijama prikazanim na sl. 3.9. U slučaju realizacije Ćuk konvertora kao bidirekcionog, sl. 2.2b, ne postoje diskontinualni režimi, pa se za velike vrednosti m_5 sistem vraća na prekidačku površinu sa velikim „preskokom" kao što je prikazano zelenim linijama na sl. 3.9.

Kako bi se videla razlika između sliding mode kontrolisanog Ćuk konvertora za dve moguće realizacije prekidača, pomoću tranzistora S i diode D i pomoću bidirekcionih prekidača S1 i S2, kao na sl. 2.2, na sl. 3.10 su prikazani vremenski dijagrami za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 4$. Sa dijagrama 3.10a se vidi da DCVM značajno smanjuje ripl



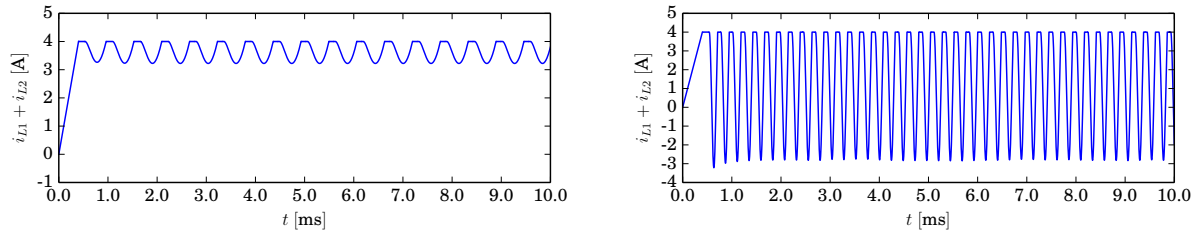
Slika 3.9: *Fazni dijagram $x_2(x_1)$ za prekidačku površinu $S(\boldsymbol{x}) = m_1\,x_1 + m_2\,x_2 - m_5$.*



(a) *(b)*

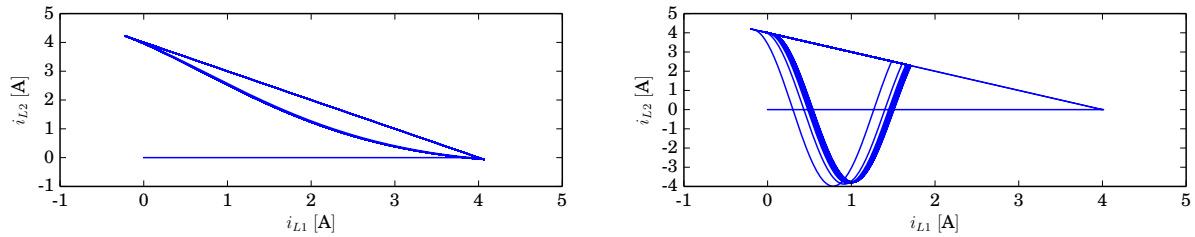
Slika 3.10: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni.*

struja kalemova i zbira struja kalemova, prikazano na sl. 3.11a. Takođe je usled postojanja DCVM-a smanjen i ripl napona na kondenzatoru C_1. Dodatno, na sl. 3.12 su prikazani



(a) *(b)*

Slika 3.11: *Vremenski dijagram zbira struje kalemova $i_{L1} + i_{L2}$ Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni.*



(a) *(b)*

Slika 3.12: *Fazni dijagram $i_{L2}(i_{L1})$ Ćuk konvertora za slučaj prekidačke površine $S(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - 4$ kada su prekidači realizovani kao: (a) tranzistor i dioda i (b) strujno i naponski bidirekcioni.*

fazni dijagrami za obe realizacije Ćuk konvertora koji potvrđuju prethodnu analizu i slažu se sa faznim dijagramom prikazanim na sl. 3.9.

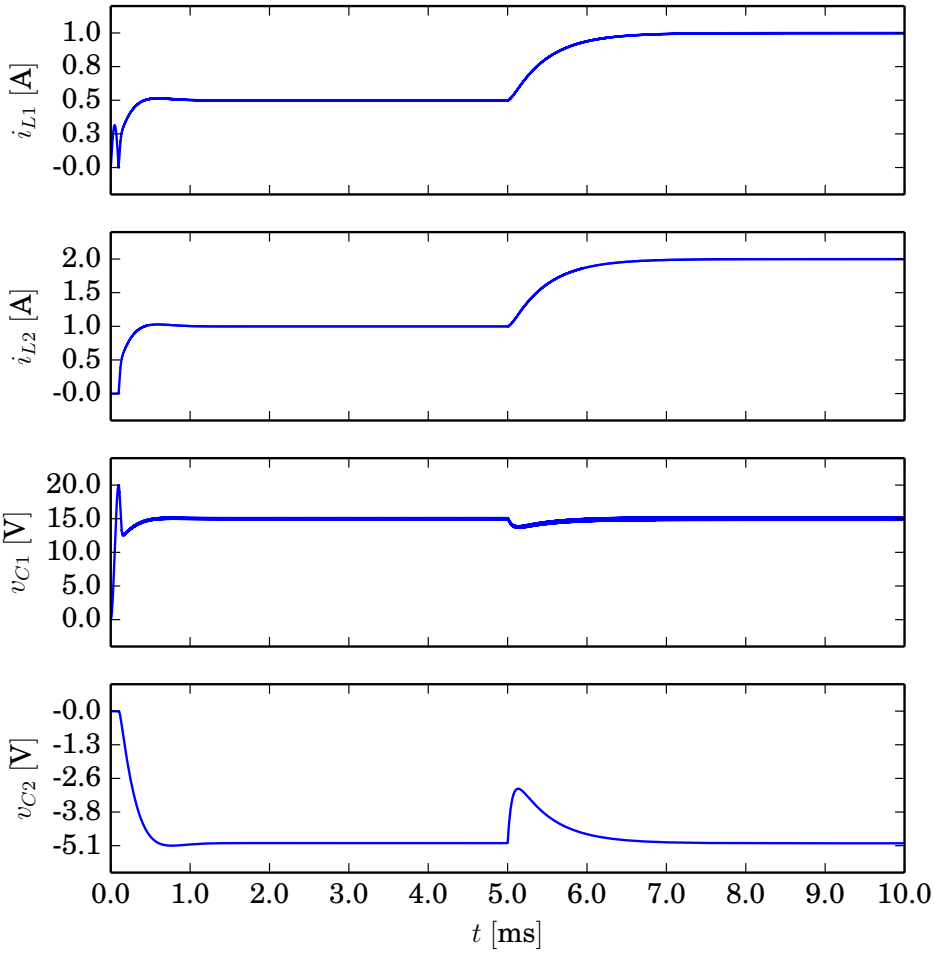
Upravljanje sa prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_5$ može da se koristi da se izbegne osetljivost napona na izlazu na promenu otpornosti R, ali samo u slučaju realizacije Ćuk konvertora sa bidirekcionim prekidačima sa sl. 2.2b. Da bi se to postiglo, potrebno je da bude $m_5 = 0$. U slučaju kada su prekidači realizovani kao tranzistor i dioda kao na sl. 2.2a takvo upravljanje je nemoguće usled nastupanja diskontinualnog DICM režima. Međutim, ako se koriste bidirekcioni prekidači, dobija se ustaljeno stanje sa vrednošću za izlazni napon koja ne zavisi od otpornosti R:

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{m_2^2\, v_{IN}}{m_1^2\, R}, \\ \overline{x}_2 &= -\frac{m_2\, v_{IN}}{m_1\, R}, \\ \overline{x}_3 &= \frac{(m_1 - m_2)\, v_{IN}}{m_1}, \\ \overline{x}_4 &= \frac{m_2\, v_{IN}}{m_1}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

i

$$u_{eq} = \frac{m_2}{m_2 - m_1}, \tag{3.44}$$

što je moguće ako je $m_1 > 0$ i $m_2 < 0$ ili $m_1 < 0$ i $m_2 > 0$. Kako je pokazano da za $u_{eq} \in (0,\ 1)$, mora da važi $m_1 > 0$, bira se da je $m_1 > 0$ i $m_2 < 0$. Na sl. 3.13 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja kada se u trenutku $t = 5\,\text{ms}$ otpornost na izlazu sa standardne vrednosti od $R = 5\ \Omega$ promeni na $R = 2.5\,\Omega$. Uzeto je da su $m_1 = 2$ i $m_2 = -1$, pa se napon na izlazu održava konstantnim na $\overline{v}_{C2} = -5\,\text{V}$.



Slika 3.13: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja sinhronog Ćuk konvertora za prekidačku površinu* $S(\boldsymbol{x}) = 2\,x_1 - x_2$.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$: Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$ daje ekvilibrijum

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= \frac{\mp m_4\,E\;\sqrt{v_{IN}\,R} + m_4^2\,v_{IN}\,R + 2m_1 m_5}{2m_1^2},\\
\overline{x}_2 &= \frac{\mp\sqrt{v_{IN}}\;\sqrt{R}\,E + m_4\,v_{IN}\,R}{2m_1 R},\\
\overline{x}_3 &= \frac{\mp\sqrt{v_{IN}}\;\sqrt{R}\,E + m_4\,v_{IN}\,R + 2m_1\,v_{IN}}{2m_1},\\
\overline{x}_4 &= \frac{m_5 - m_1\,\overline{x}_1}{m_4},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

gde je $E = \sqrt{m_4^2\,R\,v_{IN} + 4\,m_1 m_5}$, čije drugo rešenje rezultuje pozitivnim naponom x_3 i negativnim x_4. Ekvivalentna kontrola je data izrazom

$$u_{eq} = \frac{m_4\,R\;\sqrt{v_{IN}} + \sqrt{R}\,E}{(2\,m_1 + R\,m_4)\;\sqrt{v_{IN}} + \sqrt{R}\,E}. \tag{3.46}$$

Na prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$ se može eliminisati promenljiva x_4, pa sistem jednačina postaje

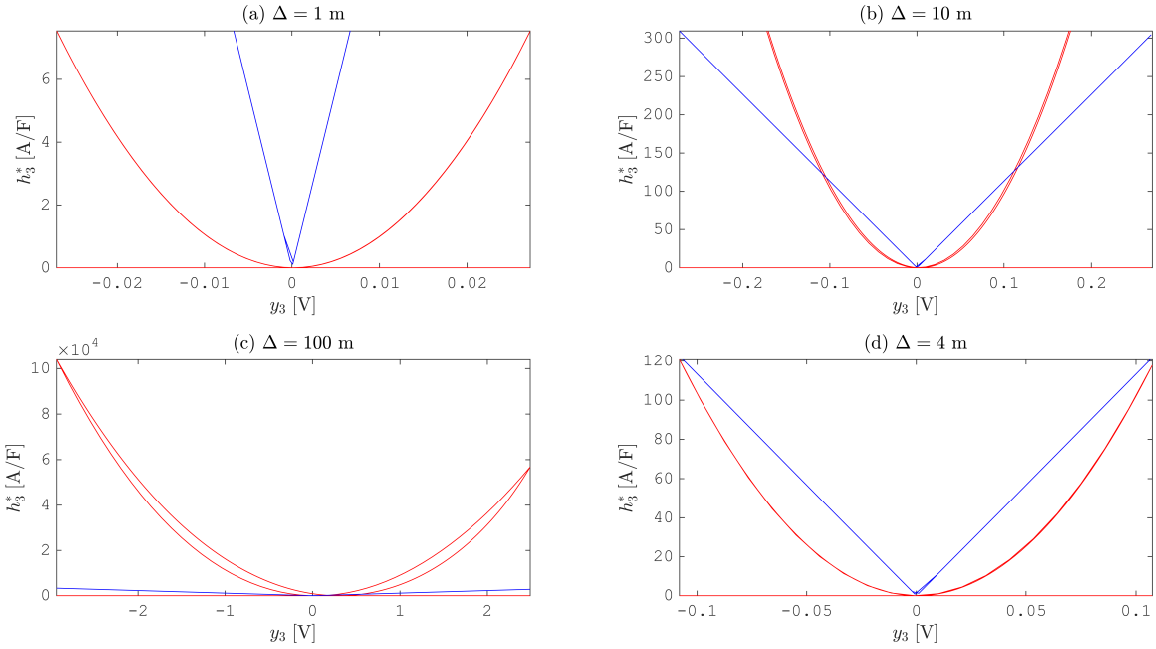
$$\begin{aligned}
\frac{d\,x_1}{dt} &= \frac{m_5 - m_1\,x_1 + R\,m_4\,x_2}{C_2\,R\,m_1},\\
\frac{d\,x_2}{dt} &= \frac{m_5 - m_1\,x_1}{L_2\,m_4} - \frac{m_1\,(v_{IN} - x_3) - m_4\,L_1\,\left(\frac{x_2}{C_2} + \frac{m_5 - m_1\,x_1}{C_2\,R\,m_4}\right)}{m_1\,L_2},\\
\frac{d\,x_3}{dt} &= \frac{x_1}{C_1} + \frac{\frac{x_1 + x_2}{C_1}\;m_1\,(v_{IN} - x_3) - m_4\,L_1\,\left(\frac{x_2}{C_2} + \frac{m_5 - m_1\,x_1}{C_2\,R\,m_4}\right)}{m_1\,x_3}.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Linearizacijom sistema se dobija Jakobijan matrica $\mathbf{A}^*$ za redukovani sistem $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T$ i nealinearni ostatak $\mathbf{h}^*(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_3^* \end{bmatrix}$, gde je

$$\begin{aligned}
h_3^* = &-\frac{L_1}{C_1 C_2 R\,x_3}\;y_1^2 + \frac{L_1\,(R\,m_4 - m_1)}{C_1 C_2 R\,m_1}\;\frac{y_1 y_2}{x_3} + \frac{C_2 R^2 v_{IN}^2 + L_1\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4}{C_1 C_2 R^2\,v_{IN}\,\overline{x}_3}\;\frac{y_1 y_3}{x_3} + \frac{m_4\,L_1}{C_1 C_2 m_1}\;\frac{y_2^2}{x_3}\\
&+\frac{m_1 C_2 R v_{IN}^2 + m_4 L_1\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4}{m_1\,C_1 C_2 R\,v_{IN}\,\overline{x}_3}\;\frac{y_2 y_3}{x_3} + \frac{\overline{x}_4}{C_1 R\,\overline{x}_3}\;\frac{y_3^2}{x_3}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Kako je vrednost napona na kondenzatoru C_2 na početku periode prekidanja (u trenutku $t_0 = 0$), u trenutku $u_{eq}\,T_S$ i na kraju periode prekidanja jednaka, što se može videti sa sl. 2.4, promena ripla napona $x_4 = v_{C2}$ se neće uzimati u obzir. Zato je

$$\Delta = \frac{C_1}{2\,L_1}\;\frac{m_1\,\Delta v_{C1}\,v_{IN}}{\overline{x}_2} \tag{3.49}$$



Slika 3.14: *Na slikama (a)-(d) za različite vrednosti parametra histerezisa* Δ *je nelinearni deo* h_3^* *prikazan crvenom linijom, dok je ograničenje sektora* $\alpha\,|y_3|$ *prikazano plavom linijom.*

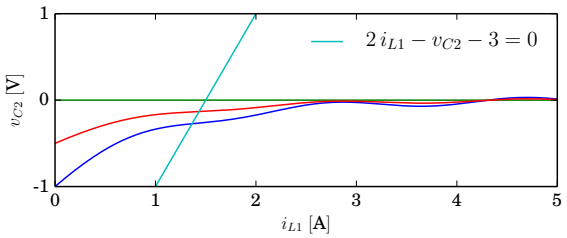
i određuje period prekidanja T_S. Ripl svih ostalih promenljivih stanja se može odrediti prema jednačinama (3.23).

Radi prezentacije LMI algoritma za procenu maksimalne vrednosti Δ za koju se može primeniti *linear ripple* aproksimacija prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$ sa vrednostima $m_1 = 2$, $m_4 = -1$ i $m_5 = 3$, izabrana je matrica $\mathbf{H}$ formata 3×3 sa nulama na svim pozicijama osim na poziciji $(3,3)$ gde ima vrednost 1. Računa se ograničenje sektora $\alpha = \widetilde{\alpha}/\|\hat{\mathbf{T}}_3\| = 1.1336 \cdot 10^3$. Kako je jedini nenulti izraz u nelinearnom ostatku $\mathbf{h}^*$ na trećoj poziciji, umesto ranije druge kolone $\hat{\mathbf{T}}_2$, u ovom slučaju se koristi treća kolona $\hat{\mathbf{T}}_3$ inverzne matrice $\mathbf{T}$. Prikazana je zavisnost nelinearnog ostatka $h_3^*(y_3)$ na sl. 3.14 za vrednosti $\Delta \in \{1\text{ m},\ 10\text{ m}, 100\text{ m}\}$. Sa dijagrama na sl. 3.14c se procenjuje $\Delta v_{C1,max} = 0.2156$ V. Korišćenjem izraza:

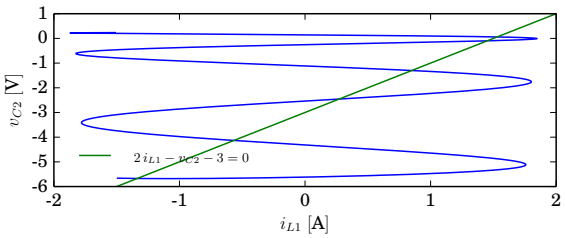
$$\Delta = \frac{C_1}{2\,L_1}\,\frac{m_1\,\Delta v_{C1}\,v_{IN}}{\overline{x}_2} \tag{3.50}$$

računa se $\Delta = 3.98$ m. Ova vrednost se zaista pokazuje kao granična, što se vidi sa sl. 3.14d.

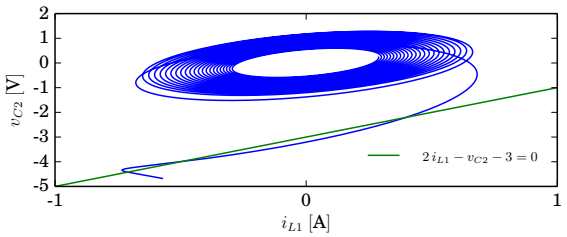
Za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$ se može prikazati rad sistema Ćuk konvertora u obliku faznog dijagrama $x_4(x_1)$. Da bi se konstruisao fazni dijagram, potrebno je posmatrati rad sistema za svako od stanja prekidača koje se može desiti u kolu. U kontinualnom stanju rada konvertora za $u = 1$ fazni dijagram je prikazan na sl. 3.15a-b. Pored kontinualnih stanja može da nastupi i diskontinualni režim DICM i u tom slučaju se



(a) Fazni dijagram $v_{C2}(i_{L1})$ za $u = 1$ i različite početne uslove: zelena linija $\boldsymbol{x}(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^T$, crvena linija $\boldsymbol{x}(0) = [0\ 0\ 0\ -0.5\ V]^T$ i plava linija $\boldsymbol{x}(0) = [0\ 0\ 0\ -1\ V]^T$.



(b) Fazni dijagram $v_{C2}(i_{L1})$ za $u = 0$ i početne uslove: $x_1(0) = -1.5\,A$, $x_2(0) = 1.2\,A$, $x_3(0) = -17.9\,V$ i $x_4(0) = -5.66\,V$.



(c) Fazni dijagram $v_{C2}(i_{L1})$ za rad u DICM režimu sa početnim uslovima: $x_1(0) = -x_2(0) = -0.57\,A$, $x_3(0) = 35\,V$ i $x_4(0) = -4.68\,V$.

Slika 3.15: *Fazni dijagram $v_{C2}(i_{L1})$ Ćuk konvertora za oba kontinualna stanja pri: (a) $u = 1$ i (b) $u = 0$; i za (c) DICM režim rada.*

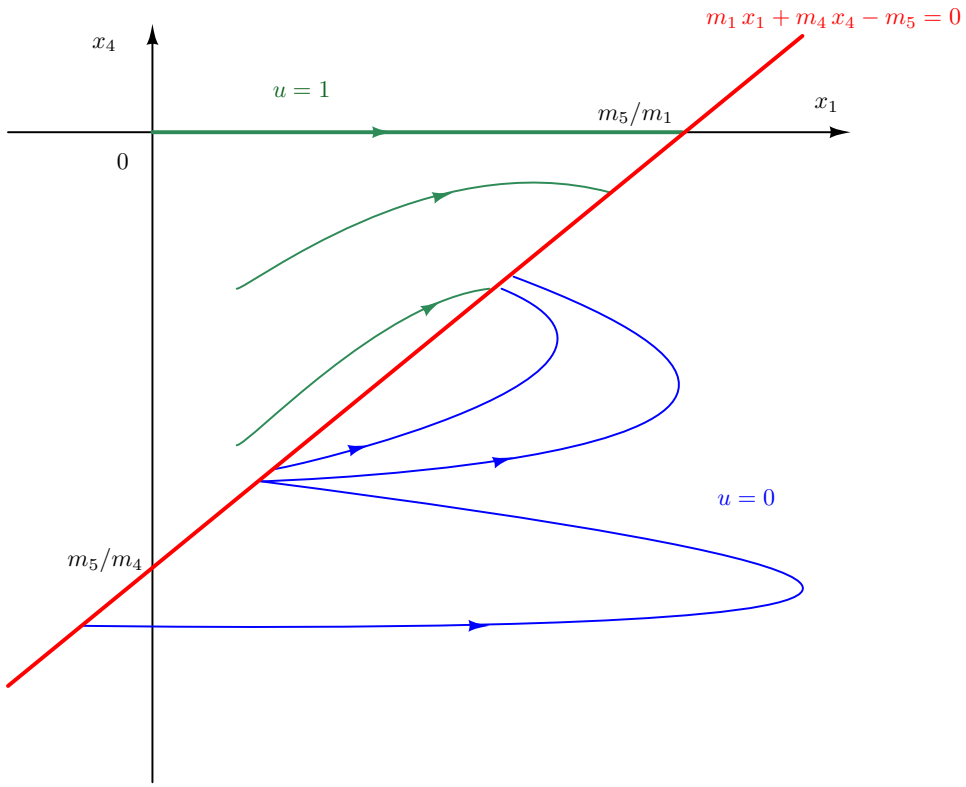
sistem kreće ka novom ekvilibrijumu $\overline{\mathbf{x}} = [0\ 0\ v_{IN}\ 0]$, što se vidi sa sl. 3.15c. Rezultujući fazni dijagram je prikazan na sl. 3.16 za prekidačku površinu $S(\mathbf{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$. Na sl. 3.16 nije prikazan slučaj kada se javlja DICM zato što nastupa samo za pojedine vrednosti koeficijenata m_1, m_4 i m_5 i komplikuje grafik.

Prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = m_2\,x_2 + m_4\,x_4 - m_5$: U ovom slučaju je ekvivalentna kontrola $u_{eq} = \frac{m_5\,R}{m_2\,v_{IN} + m_5\,R - m_4\,R\,v_{IN}}$ za ekvilibrijum $\overline{x}_1 = \frac{m_5^2\,R}{v_{IN}\,(m_2 - R\,m_4)^2}$, $\overline{x}_2 = \frac{m_5 - m_4\,\overline{x}_4}{m_2}$, $\overline{x}_3 = \frac{m_2\,v_{IN} + m_5\,R - m_4\,R\,v_{IN}}{m_2 - m_4\,R}$ i $\overline{x}_4 = -\frac{m_5\,R}{m_2 - m_4\,R}$.

Na prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = m_2\,x_2 + m_4\,x_4 - m_5 = 0$ je $\frac{d\,x_2}{dt} = -\frac{m_4}{m_2}\,\frac{d\,x_4}{dt}$, pa se može eliministi jednačina za x_2. Računa se Jakobijan matrica $\mathbf{A}^*$, čija je determinanta

$$\det(\mathbf{A}^*) = -\frac{v_{IN}\,(m_2 - m_4\,R)^2}{C_1 C_2 L_1 R\,m_2\,F}, \tag{3.51}$$

za $F = m_2\,v_{IN} + m_5\,R - m_4\,R\,v_{IN}$. Determinanta je negativna za $m_5 > 0$ i $m_2 > 0$, ali su



Slika 3.16: *Fazni dijagram $x_4(x_1)$ za prekidačku površinu $S(\boldsymbol{x}) = m_1\,x_1 + m_4\,x_4 - m_5$.*

sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}^*$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{m_2 - m_4\,R}{C_2\,R\,m_2}, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{m_5^2\,\sqrt{L_1}\,R \pm \sqrt{m_5^4\,L_1\,R - 4C_1\,v_{IN}^3\,(m_2 - m_4\,R)^3\,F}}{2C_1\,\sqrt{L_1}\,v_{IN}\,(m_2 - m_4\,R)\,F}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Vidi se da konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti $\lambda_{2,3}$ imaju pozitivan realni deo, pa je sistem nestabilan.

3.4 Zaključak

Konstruisana je sliding mode kontrola Ćuk konvertora za prekidačke površine prvog i drugog reda. Kao što se vidi, s' obzirom na to da je struja kalema x_1 promenljiva koja daje nestabilnu dinamiku rada Ćuk konvertora u oba kontinualna režima, moguće je konstruisati samo prekidačke površine koje imaju kao jedan od kontrolnih parametara i struju x_1. Za svaku od konstruisanih prekidačkih površina analizirana je stabilnost, određen ekvilibrijum i konstruisan fazni dijagram. Za površine koje ne mogu da se realizuju je dat dokaz da rezultuju nestabilnim sistemom.

Stabilnost sistema koji je sliding mode kontrolisan, sa željenom prekidačkom površinom, je procenjena posmatranjem sistema kao zbira linearnog dela i nelinearnog ostatka određivanjem funkcije Ljapunova i ograničenja sektora. Primenom LMI procedure opisane u radu [29], a date jednčinom (3.12) je nađena pozitivno definitna matrica **P** i ograničenje sektora α. Pokazano je da je nelinearni ostatak koji se dobija nakon primene sliding mode kontrole i linearizacije sistema jednačina u direktnoj vezi sa primenom *linear ripple* aproksimacije [1]. Naime, ograničenje sektora nelinearnog ostatka predstavlja ujedno i granicu za primenu *linear ripple* aproksimacije prilikom analize rada konvertora.

Za svaku od analiziranih i realizovanih prekidačkih površina su dati dijagrami nelinearnog ostatka i ograničenja sektora koji pokazuju da je presečna tačka ove dve zavisnosti granica za primenu *linear ripple* aproksimacije prilikom analize rada Ćuk konvertora. Dobijeni rezultat je moguće primeniti i na analizu ostalih DC-DC konvertora.

Glava 4

Histerezisna kontrola DC-DC konvertora

4.1 Koncept hibridne kontrole

Pod hibridnim sistemom se smatra sistem koji u sebi ima kontinualnu i diskretnu dinamiku [41]. Ovo su u suštini prekidački sistemi [23, 42–44] koji preključuju između više podsistema u zavisnosti od vrednosti diskretnih promenljivih u kolu.

Kontinualni deo kola predstavljaju promenljive stanja i njihova dinamika koja je opisana sistemom običnih diferencijalnih jednačina kao

$$\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in C, \tag{4.1}$$

gde je sa $\dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x})$ označena diferencijalna inkluzija i ujedno se može napisati kao $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ na skupu $C \subseteq \mathbb{R}^n$. U literaturi [19] se C naziva skup toka signala ili *flow set*, a F mapa toka signala ili *flow map*. Osim diferencijalne inkluzije, definiše se i sledeće stanje sistema kao

$$\mathbf{x}^+ \in G(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in D, \tag{4.2}$$

gde je sa $\mathbf{x}^+ = g(\mathbf{x})$ dato sledeće stanje za promenljive $\mathbf{x}$ na domenu $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Skup D se naziva skup skoka signala (*jump set*), a G mapa skoka signala, odnosno *jump map*. Hibridni sistem je tako određen sa $\mathcal{H} = (C, F, D, G)$.

Kako su DC-DC konvertori prekidačka kola koja mogu da rade u više režima [26] na osnovu stanja kontrolisanog prekidača, oni se mogu posmatrati kao hibridni sistemi. U tom slučaju je kontinualni deo kola predstavljen promenljivama stanja (strujama kalemova i naponima kondenzatora), dok je diskretni sistem prekidač koji je potrebno kontrolisati. Svaki od režima rada konvertora je podsistem sistema DC-DC konvertora.

U ovoj glavi će biti opisana konstrukcija kontrolera Ćuk konvertora, koji kao DC-DC

konvertor sa četiri promenljive stanja i dva kontinualna režima opisana granično stabilnim matricama stanja, predstavlja jedan od najkompleksnijih DC-DC konvertora.

Da bi se dobio stabilan hibridni sistem potrebno je konstruisati funkciju Ljapunova koja daje zajedničku pozitivno definitnu matricu **P** za oba kontinualna granično stabilna podsistema rada Ćuk konvertora. Nalaženje funkcije Ljapunova u matričnoj formi je posebno pogodno za primenu linearnih matričnih nejednačina [45]. Granično stabilni podsistemi uzrokuju semidefinitnost u izvodu funkcije Ljapunova i zato je posebno interesantno naći format matrice **P** koji daje negativno semidefinitne izvode funkcije Ljapunova. U nastavku ove glave će biti dat oblik tih semidefinitnih matrica koje se mogu odrediti korišćenjem cvx paketa [46] integrisanog unutar MATLAB-a.

Kontrola koja će biti opisana u ovoj glavi je u osnovi hibridna [47] kod koje se kao uslov za prekidanje (skok iz jednog podsistema u drugi) uzima minimizacija izvoda funkcije Ljapunova. Kako bi se ostvarila fizički prihvatljiva frekvencija rada konvertora, potrebno je uvođenje histerezisa [48]. Prag histerezisa određuje frekvenciju prekidanja konvertora $f_S = 1/T_S$ i faktor ispunjenosti impulsa PWM signala d. Kako se preključivanje između podsistema DC-DC konvertora koji predstavlja jedan hibridni sistem ostvaruje pomoću pomenutog zakona prekidanja korišćenjem histerezisa, ovakvo upravljanje nazivamo histerezisno upravljanje DC-DC konvertorima.

4.2 Matrična jednačina Ljapunova za marginalno stabilne sisteme

Konstrukcija i rešavanje kontinualne matrične jednačine Ljapunova je bila česta oblast istraživanja poslednjih decenija (pogledati na primer [49]), ali specifični oblik funkcije Ljapunova za granično stabilne sisteme nije analiziran. U ovom poglavlju će biti izveden oblik kvadratne funkcije Ljapunova granično stabilnih podsistema čiji oblik odgovara podsistemima rada Ćuk konvertora. Funkcija Ljapunova granično stabilnih podsistema u datoj kvadratnoj formi daje odgovarajuće matrice koje imaju osobine definitnih i semidefinitnih matrica [50]. Kako je jednačina Ljapunova za kontinualne sisteme:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{Q} \tag{4.3}$$

može se naći veza između matrice stanja **A** i njene realne Žordanove forme $\mathbf{A}_D$. Pretpostavićemo da su sopstvene vrednosti matrice **A** međusobno različite, što odgovara sopstvenim vrednostima Ćuk konvertora. Neka je matrica $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n]$ dobijena od kolona $\mathbf{t}_i$ tako što je za λ_i koje je realna sopstvena vrednost, $\mathbf{t}_i$ njen odgovarajući sopstveni vektor i u slučaju da su $\lambda_i = \sigma_i + j\,\omega_i$ i $\lambda_{i+1} = \sigma_i - j\,\omega_i$ konjugovano-kompleksne sopstvene

vrednosti, računa se sopstveni vektor kao $\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{t}_{i+1} + j\,\mathbf{t}_i$ gde je $\mathbf{t}_i = \Im\{\boldsymbol{\epsilon}_i\}$ i $\mathbf{t}_{i+1} = \Re\{\boldsymbol{\epsilon}_i\}$. U slučaju konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti dobija se 2×2 blok na glavnoj dijagonali oblika $\begin{bmatrix} \sigma_i & -\omega_i \\ \omega_i & \sigma_i \end{bmatrix}$. Ako uvrstimo realnu Žordanovu formu u jednačinu Ljapunova, dobija se

$$\mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_D + \mathbf{P}_D \mathbf{A}_D = \mathbf{Q}_D, \tag{4.4}$$

gde je

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{A}_D \Rightarrow \mathbf{T} \mathbf{A}_D \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}. \tag{4.5}$$

Primećuje se da se ništa ne menja množenjem jednačine (4.4) sa desne strane sa $\mathbf{T}^{-1}$ i sa leve sa transponovanom matricom dobijenom od $\mathbf{T}^{-1}$, koja je označena kao $\mathbf{T}^{-T}$. Matrica $\mathbf{T}^{-1}$ nije singularna i zato ne utiče na stabilnost sistema (4.4). Dobija se

$$\begin{gathered} \mathbf{T}^{-T} \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_D \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}^{-T} \mathbf{P}_D \mathbf{A}_D \mathbf{T}^{-1} = \\ (\mathbf{T} \mathbf{A}_D \mathbf{T}^{-1})^T (\mathbf{T}^{-T} \mathbf{P}_D \mathbf{T}^{-1}) + (\mathbf{T}^{-T} \mathbf{P}_D \mathbf{T}^{-1}) (\mathbf{T} \mathbf{A}_D \mathbf{T}^{-1}) = \\ \mathbf{T}^{-T} \mathbf{Q}_D \mathbf{T}^{-1}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Poređenjem jednačina (4.3) i (4.6), i korišćenjem jednačine (4.5) dobija se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{T}^{-T} \mathbf{P}_D \mathbf{T}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P}_D = \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{T}^{-T} \mathbf{Q}_D \mathbf{T}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_D = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.2.1 Granično stabilne matrice četvrtog reda

Kako je Ćuk konvertor u svakom od podsistema linearni vremenski invarijantan sistem četvrtog reda, od interesa je naći osobine funkcije Ljapunova u matričnom obliku za granično stabilne sisteme četvrtog reda sa međusobno različitim sopstvenim vrednostima. Generalizacijom se dobijeni rezultati mogu primeniti i na sisteme višeg reda.

Granično stabilna matrica sa konjugovano-kompleksnim sopstvenim vrednostima

Pretpostavimo da je u slučaju od interesa sistemska matrica $\mathbf{A}$ četvorodimenziona sa dva para konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti, od kojih je jedan par granično stabilan sa realnim delom jednakim nuli, pa je realna Žordanova forma matrice $\mathbf{A}$ oblika

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Dalje se može pisati da su matrice $\mathbf{P}_D$ i $\mathbf{Q}_D$ u formi blokova $\mathbf{P}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$ i $\mathbf{Q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$ i može se proveriti da li dati blokovi zavise od oblika realne Žordanove forme $\mathbf{A}_D$. Računanjem matrice $\mathbf{Q}_D$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_D =& \mathbf{A}_D^T \mathbf{P}_D + \mathbf{P}_D \mathbf{A}_D = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \, \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T \, \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \, \mathbf{P}_{12}^T \\ \mathbf{P}_{12} \, \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_{12}^T \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{22} \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.9}$$

i izdvajanjem prvog bloka

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} =& \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11} \mathbf{A}_{11} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2p_{12}\omega_1 & \omega_1(p_2 - p_1) \\ \omega_1(p_2 - p_1) & -2p_{12}\omega_1 \end{bmatrix} = \omega_1 \begin{bmatrix} 2p_{12} & (p_2 - p_1) \\ (p_2 - p_1) & -2p_{12} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

se zaključuje da je matrica $\mathbf{Q}_{11} \preceq 0$ negativno semidefinitna ako je zadovoljeno $p_{12} = 0$ i $p_1 = p_2 = p > 0$, pa je $\mathbf{P}_{11} = p\mathbf{I}_2$ (gde je $\mathbf{I}_2$ jedinična matrica formata 2×2) pozitivno definitna dijagonalna matrica. Zato je oblik matrice $\mathbf{P}_D$

$$\mathbf{P}_D = \begin{bmatrix} p\mathbf{I} \; \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T \, \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}, \text{ i } \mathbf{Q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \, \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T \, \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Kako bi matrica $\mathbf{Q}_D$ bila negativno semidefinitna, mora da važi $\mathbf{Q}_{12} \equiv \mathbf{0}_{2\times 2}$, što se zasniva na činjenici da su matrica $\mathbf{Q}$ i njeni blokovi parnog reda (reda 4 i 2 redom). Važi:

$$\mathbf{Q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times 2} \, \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 2} \, \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \, \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

što na osnovu jednačine (4.7) daje:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T}. \tag{4.13}$$

Dobijeni rezultat pokazuje da rešenje kvadratne semidefinitne forme $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = 0$ može biti dobijeno primenom „1 na 1" transformacije $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{y}$ i primenom $\mathbf{x}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\,\mathbf{T}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{T}\,\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\,\mathbf{Q}_D\,\mathbf{y}$. Sada je potrebno videti kada je $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 = [1,0,0,0]^T$ ili $\mathbf{y} = \mathbf{e}_2 = [0,1,0,0]^T$, ili bilo koja linearna kombinacija prethodna dva vektora koja daje $\mathbf{y}^T\,\mathbf{Q}_D\,\mathbf{y} = 0$ odnosno $\mathbf{x}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{x} = 0$, gde je $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}_1$ ili $\mathbf{x} = \mathbf{T}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{t}_2$ ili bilo koja njihova linearna kombinacija. Na taj način se dobija kvadratna forma $\mathbf{x}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{x}$ koja je nula u linearnom prostoru određenom imaginarnim i realnim delovima sopstvenih vektora matrice $\mathbf{A}$ koji odgovaraju jednoj od granično stabilnih sopstvenih vrednosti. Zapravo, čak i kada je $\mathbf{Q}_{12} \neq 0$, dokle god je $\mathbf{Q}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$, dobijaju se iste osobine vektorskog prostora $\mathbf{x}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{x} = 0$, odnosno, vektorski prostor je određen vektorima $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$.

Granično stabilna matrica sa jednom sopstvenom vrednošću jednakom nula

Drugi slučaj koji je potrebno analizirati je kada je matrica $\mathbf{A}$ granično stabilna sa jednom sopstvenom vrednošću jednakom nula. Kako je sistemska matrica četvrtog reda, ona mora imati drugu realnu sopstvenu vrednost $\lambda < 0$, pa je u blokovskoj realnoj Žordanovoj formi

$$\mathbf{A}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{2\times2} \\ \mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \; \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

pa je na osnovu jednačine (4.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} = \mathbf{A}_{11}^T\,\mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{11}\,\mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda p_{12} \\ \lambda p_{12} & 2\lambda p_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{12} & 2p_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Za $p_{12} = 0$ je $\mathbf{P}_{11} = \mathrm{diag}\{p_1, p_2\}$ i odgovarajuća matrica $\mathbf{Q}_{11} = \mathrm{diag}\{0, q_2\}$ je negativno semidefinitna. Zato je u matrici $\mathbf{Q}_D$ element na poziciji $\langle 1,1\rangle$ nula. Nula na poziciji $\mathbf{Q}_D\langle 1,1\rangle$ uzrokuje da u slučaju kada je $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1$ važi:

$$\mathbf{e}_1^T\,\mathbf{Q}_D\,\mathbf{e}_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}_1^T\,\mathbf{T}^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{T}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}_1^T\,\mathbf{Q}\,\mathbf{t}_1 = 0, \tag{4.15}$$

gde je $\mathbf{t}_1$ sopstveni vektor matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti jednakoj 0.

4.2.2 Analiza Ćuk konvertora

Kako u CCM režimu rada Ćuk konvertor prekljućuje između dva granično stabilna podsistema, čija je sistemska matrica oblika opisanog u prethodnom poglavlju 4.2.1, čiji je odgovarajući oblik funkcije Ljapunova izveden u istom poglavlju 4.2.1, potrebno je pronaći zajedničku funkciju Ljapunova za oba granično stabilna podsistema. Neka je $\mathbf{P}$ pozitivno definitna matrica zajedničke kvadratne funkcije Ljapunova za dve granično stabilne matrice sistema $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Matrica $\mathbf{P}$ zadovoljava $\mathbf{A}_i^T\,\mathbf{P} + \mathbf{P}\,\mathbf{A}_i \preceq 0$, za $i = 1, 2$, gde negativna semidefinitnost (označena sa $\preceq$) potiče od činjenice da su sistemske matrice $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ granično stabilne. Pozitivna definitnost je označena sa „$\succ 0$”, a pozitivna semidefinitnost sa „$\succeq 0$” (analogno je i sa negativnom definitnošću „$\prec 0$” i semidefinitnošću „$\preceq 0$”). Indeks “1” označava podsistem 1 kada je prekidač S uključen, a dioda isključena, a indeks “2” se koristi za podsistem 2 kada je S isključen, a dioda D uključena. Ovo omogućava konstrukciju kontinualne kvadratne funkcije Ljapunova sa osobinama prekidačkih sistema da kada je jedan od prekidačkih podsistema stabilan u domenu kontinualnosti sistema, nema potrebe da se proverava uslov stabilnosti prekidačke površine (za više detalja pogledati [51] i za strukturne sisteme [52]). U datoj analizi se prekljućuje između granično stabilnih sistema, ali i dalje može da se koristi zajednička diferencijabilna funkcija Ljapunova.

Ako želimo da izbegnemo semidefinitnost i imamo samo definitne nejednakosti, onda se moraju izabrati kolone matrice $\mathbf{T}_i$ koje odgovaraju stabilnim sopstvenim vrednostima matrice $\mathbf{A}_i$ i kreirati $\widetilde{\mathbf{T}}_i$ kao 4×3 ili 4×2 matrice zavisno od toga da li u odgovarajućoj matrici stanja postoje jedna ili dve granično stabilne sopstvene vrednosti. Pod pretpostavkom da su stabilni dijagonalni elementi svake matrice sistema označeni sa $\mathbf{A}_{2i}$, dobijaju se definitne nejednakosti date sa $\mathbf{A}_{2i}^T\,\widetilde{\mathbf{T}}_i^T\,\mathbf{P}\widetilde{\mathbf{T}}_i + \widetilde{\mathbf{T}}_i^T\,\mathbf{P}\,\widetilde{\mathbf{T}}_i\,\mathbf{A}_{2i} \prec 0$, $i = 1, 2$. Međutim, ovo nije dovoljno za određivanje zajedničke matrice $\mathbf{P}$. Potrebno je proveravati i da li se dijagonalne matrice $\mathbf{P}_{Di} = \widetilde{\mathbf{T}}_i^T\,\mathbf{P}\,\widetilde{\mathbf{T}}_i$ slažu sa oblikom izvedenim u prethodnoj podsekciji 4.2.1, odnosno da je u slučaju postajanja dve granično stabilne sopstvene vrednosti matrica data jednačinom (4.11) i u slučaju jedne realne nulte sopstvene vrednosti oblika $\mathbf{P}_D = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, \mathbf{P}_2\}$. Kada se odredi zajednička matrica $\mathbf{P}$, potrebno je izračunati svaku dijagonalnu verziju kao $\mathbf{P}_{Di} = \widetilde{\mathbf{T}}_i^T\,\mathbf{P}\,\widetilde{\mathbf{T}}_i$ i videti da li je željene forme ili ne. Ako nije, računa se ponovo matricu $\mathbf{P}$ tako da se zadrži stabilnost i pozitivna definitnost sistema i dobije specifična forma matrica $\mathbf{P}_{Di}$. Ova procedura je veoma komplikovana, pa je zato izabran konveksni programski paket [46] koji radi sa semidefinitnim matricama. Pozitivno definitna matrice funkcije Ljapunova $\mathbf{P}$ se može odrediti korišćenjem sledeće LMI

procedure:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_0 &\preceq 0, \\ \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_1 &\preceq 0, \\ \mathbf{P} &\succ 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Konveksni problem dat jednačinom (4.16) je komplikovanija formulacija problema nego nalaženje zajedničke funkcije Ljapunova za par stabilnih i linearnih vremenski invarijantnih dinamičkih sistema, zbog toga što se radi sa granično stabilnim sistemima. Kako bi se proverilo da li postoji zajednička funkcija Ljapunova, postoji razvijen test singularnosti za sistem trećeg reda (sa predlogom za primenu na sisteme višeg reda) [53] i test Lie-algebre [54], ali nijedan nije jednostavniji za primenu od korišćenja konveksnog programiranja za rešavanje LMI kao u jednačini (4.16). Rešavanjem linearnih matričnih nejednačina se takođe dobija uvid u rešivost problema proverom da li konveksni program konvergira rešenju i ako je problem rešiv, onda je garantovano rešenje zato što je problem konveksan [22]. Dalje, formulacija problema procene zajedničke funkcije Ljapunova granično stabilnih podsistema je jedinstvena zato što se bavi semidefinitnim sistemima koji takođe rezultuju konveksnim problemom, ali se samo nekoliko programskih paketa bavi rešavanjem semidefinitnih problemima. Jedan od paketa je cvx koji je instaliran u okviru programskog jezika MATLAB. Kako rešenje LMI konveksnog problema ne zavisi od izbora programa ako je problem konveksan [55], izabran je cvx kao simulacioni program. Interesantno je spomenuti i da sistem linearnih matričnih nejednačina (4.16) može biti prepisan zamenom poslednje nejednakosti sa $\mathbf{P} \succ \alpha\mathbf{I}$, gde je $\alpha > 0$ i $\mathbf{I}$ jedinična matrica istih dimenzija kao $\mathbf{P}$. Može se čak dodati i maksimizacija parametra α kao kriterijumska funkcija i (4.16) bi i dalje bila konveksni problem čiji je rezultat pozitivno definitna matrca $\mathbf{P}$. Za potrebe dizajniranja histerezisne kontrole nisu bile potrebne modifikacije, pa je zadržana jednostavnija formulacija problema kao u (4.16). Matrice

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_1 \tag{4.17}$$

i

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_2 \tag{4.18}$$

su semidefinitne zato što su matrice podsistema $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ granično stabilne. Matrica $\mathbf{A}_1$ ima jednu sopstvenu vrednost jednaku nula, pa je zato matrica $\mathbf{Q}_1$ semidefinitna sa jednom sopstvenom vrednošću jednakom nula. U drugom kontnualnom stanju je dinamika sistema opisana matricom $\mathbf{A}_2$ koja ima par konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti čiji je realni deo jednak nula, pa odgovarajuća matrica $\mathbf{Q}_2$ ima dve sopstvene vrednosti jednake nula.

Može se pokazati da za oblik matrica $\mathbf{P}_{D1}$ i $\mathbf{P}_{D2}$, i za odgovarajući redosled promenljvih stanja $\mathbf{x}$, matrica $\mathbf{P}$ ima sledeći oblik:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & p_{24} \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & p_{24} & 0 & p_4 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Na osnovu formata matrica $\mathbf{Q}_{D1}$ i $\mathbf{Q}_{D2}$

$$\mathbf{Q}_{D1} = \begin{bmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_{D2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

gde je simbolom $*$ označena nenulta vrednost elementa, i na osnovu matrica sopstvenih vektora $\mathbf{T}_1$ i $\mathbf{T}_2$, matrice $\mathbf{Q}_1$ i $\mathbf{Q}_2$ su sledeće strukture:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

U nastavku poglavlja se u analizi i u simulacijama koristi Ćuk konvertor se sl. 2.2 sa vrednostima $L_1 = L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 20$ μF, $R = 5$ Ω i $v_{IN} = 10$ V. Za slučaj podsistema 1 kada prekidač S vodi, a dioda je isključena, matrica sistema je

$$\mathbf{A}_1 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 & 0.0010 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0500 & 0 & -0.0100 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

sa odgovarajućim matricama sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora u realnoj Žorda-

novoj formi:

$$\mathbf{D}_1 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} -0.9562 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0219 & 3.2338 & 0 \\ 0 & -3.2338 & -0.0219 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -0.0065 & 0.0002 & -0.0323 & 0 \\ -0.6755 & 0.9983 & 0 & 0 \\ 0.7373 & 0.0456 & 0.0141 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Za podsistem 2 u kome je prekidač S isključen, a dioda uključena, sistemska matrica i sopstvene vrednosti i sopstveni vektori realne Žordanove forme su, redom:

$$\mathbf{A}_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0500 & 0 & -0.0100 \end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

$$\mathbf{D}_2 = 10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3.1623 & 0 & 0 \\ -3.1623 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0316 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.099 & -0.099 \\ -0.9995 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Korišćenjem programskog paketa cvx integrisanog unutar MATLAB-a, dobija se da za date matrice $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ matrica $\mathbf{P}$ zaista ima određeni oblik

$$\mathbf{P} = 10^{-8} \cdot \begin{bmatrix} 0.1209 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1210 & 0 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0025 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Na osnovu jednačine (4.28) se vidi da izračunata matrica $\mathbf{P}$ zadovoljava specifikacije iz jednačine (4.19).

4.3 Funkcija Ljapunova Ćuk konvertora

Kao što je pomenuto ranije, od interesa je pronaći zajedničku funkciju Ljapunova

$$V(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{P} \, (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) \tag{4.29}$$

za dva podsistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \, \mathbf{x} + \mathbf{B}$, $i = 1, 2$. Izvod po vremenu funkcije Ljapunova je dat sa

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})^T \, (\mathbf{A}_i^T \, \mathbf{P} + \mathbf{P} \, \mathbf{A}_i) \, (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) + 2 \, (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{P} \, (\mathbf{A}_i \, \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i), \tag{4.30}$$

ili

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \, \mathbf{Q}_i \, \mathbf{y} + 2 \, \mathbf{y}^T \, \mathbf{P} \, \mathbf{B}_{yi}, \tag{4.31}$$

gde se uvodi smena promenljivih $\mathbf{y} = (\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}})$ i $\mathbf{B}_{yi} = \mathbf{A}_i \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_i$.

U CCM-u imamo da je:

$$\left\langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{A}_\xi \mathbf{y} + \mathbf{B}_{y\xi} \right\rangle = \begin{cases} \gamma_1(\mathbf{y}), & \xi = 1, \\ \gamma_2(\mathbf{y}), & \xi = 2, \end{cases} \tag{4.32}$$

gde je

$$\gamma_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \, \mathbf{Q}_1 \, \mathbf{y} + 2 \, \mathbf{y}^T \, \mathbf{P} \, \mathbf{B}_{y1}, \tag{4.33}$$

i

$$\gamma_2(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \, \mathbf{Q}_2 \, \mathbf{y} + 2 \, \mathbf{y}^T \, \mathbf{P} \, \mathbf{B}_{y2}. \tag{4.34}$$

Definišimo vektor vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju (srednje vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju) kao $\overline{\mathbf{x}}$, zatim faktor ispunjenosti impulsa PWM signala d, periodu prekidanja T_S, frekvenciju prekidanja $f_S = 1/T_S$ i vektor promene ripla u toku prvog dela periode, kao u sekciji 2.1.2, označen sa Δ, gde je $\Delta = \mathbf{x}(t_0 + d \, T_S) - \mathbf{x}(t_0))$. Primenom *Ampere-second* i *Volt-second balance* [1] se računa vektor promenljivih stanja u ustaljenom stanju:

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \\ \overline{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{i_{L1}} \\ \overline{i_{L2}} \\ \overline{v_{C1}} \\ \overline{v_{C2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{d}{1-d}\right)^2 \, \frac{v_{IN}}{R} \\ \frac{d}{1-d} \, \frac{v_{IN}}{R} \\ \frac{v_{IN}}{1-d} \\ -\frac{d}{1-d} \, v_{IN} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

kao i promena ripla promenljivih stanja

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta i_{L1} \\ \Delta i_{L2} \\ \Delta v_{C1} \\ \Delta v_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L_1}\, d\, T_S \\ \frac{v_{IN}}{L_2}\, d\, T_S \\ -\frac{\overline{i_{L2}}}{C_1}\, d\, T_S \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

U ustaljenom stanju važe na osnovu analize iz poglavlja 2.1.2 izrazi

$$\begin{aligned} \overline{x_1} &= \frac{\overline{x_4}^2}{R\, v_{IN}}, \\ \overline{x_2} &= -\frac{\overline{x_4}}{R}, \\ \overline{x_3} &= v_{IN} - \overline{x_4}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

U ustaljenom stanju kod Ćuk konvertora realizovanog sa tranzistorom i diodom prikazanog na sl. 2.2a su struje kalemova pozitivne, napon na kondenzatoru C_1 je takođe pozitivan, dok je napon na kondenzatoru C_2 negativan, $\overline{x_4} < 0$. U ustaljenom stanju je promena ripla tokom prvog i drugog intervala vremena iste apsolutne vrednosti, samo što je promena ripla u prvom intervalu suprotnog znaka od promene ripla u drugom intervalu u toku jedne periode prekidanja, kao što je prikazano u sekciji 2.1.2, [1]. Stoga, promenljive stanja imaju iste vrednosti na početku i na kraju periode.

Motivisano uspešnom primenom hibridne kontrole na Boost konvertor u radu [47], razmatra se sledeći zakon prekidanja:

$$\begin{aligned} q_s &= \arg\min_{\xi \in \{1,2\}} \left\langle \nabla V(\mathbf{y}), \mathbf{A}_\xi \mathbf{y} + \mathbf{B}_{y\xi} \right\rangle, \\ q &= \begin{cases} 0, \text{ ako je } q_s = 2, \\ 1, \text{ ako je } q_s = 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.38}$$

i na osnovu koga je formulisana sledeća teorema.

Teorema 4. *Za prekidački signal kao u jednačini (4.38) najmanje jedan izvod po vremenu $\gamma_1(\mathbf{y})$ ili $\gamma_2(\mathbf{y})$ je negativan daleko od početne vrednosti.*

Dokaz. Na osnovu oblika izvoda funkcije Ljapunova i matrice $\mathbf{P}$, funkcije $\gamma_1(\mathbf{y})$ i $\gamma_2(\mathbf{y})$ se određuju kao

$$\gamma_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\, \mathbf{Q}_1\, \mathbf{y} + 2\, \mathbf{y}^T\, v_{IN} \left[\frac{p_1}{L_1} \; \frac{p_2}{L_2} \; \frac{p_3\, \overline{x_4}}{R\, v_{IN}\, C_1} \; \frac{p_{24}}{L_2} \right]^T, \tag{4.39}$$

$$\gamma_2(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\, \mathbf{Q}_2\, \mathbf{y} + 2\, \mathbf{y}^T\, \overline{x_4} \left[\frac{p_1}{L_1} \; \frac{p_2}{L_2} \; \frac{p_3\, \overline{x_4}}{R\, v_{IN}\, C_1} \; \frac{p_{24}}{L_2} \right]^T. \tag{4.40}$$

Očigledno u jednačinama (4.39) i (4.40) vektori koji množe $\mathbf{y}^T$ se razlikuju samo u multiplikativnom faktora suprotnog znaka. Definišimo vektor $\mathbf{z}$ kao

$$\mathbf{z} = 2\, v_{IN} \begin{bmatrix} \frac{p_1}{L_1} \\ \frac{p_2}{L_2} \\ \frac{p_3\, \overline{x_4}}{R\, v_{IN}\, C_1} \\ \frac{p_{24}}{L_2} \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

i neka je $a = -\frac{d}{1-d} < 0$, tako da se izrazi za $\gamma_1(\mathbf{y})$ i $\gamma_2(\mathbf{y})$ mogu zapisati kao

$$\gamma_1(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\, \mathbf{Q}_1\, \mathbf{y} + \mathbf{y}^T\, \mathbf{z}, \tag{4.42}$$

i

$$\gamma_2(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T\, \mathbf{Q}_2\, \mathbf{y} + a\, \mathbf{y}^T\, \mathbf{z}. \tag{4.43}$$

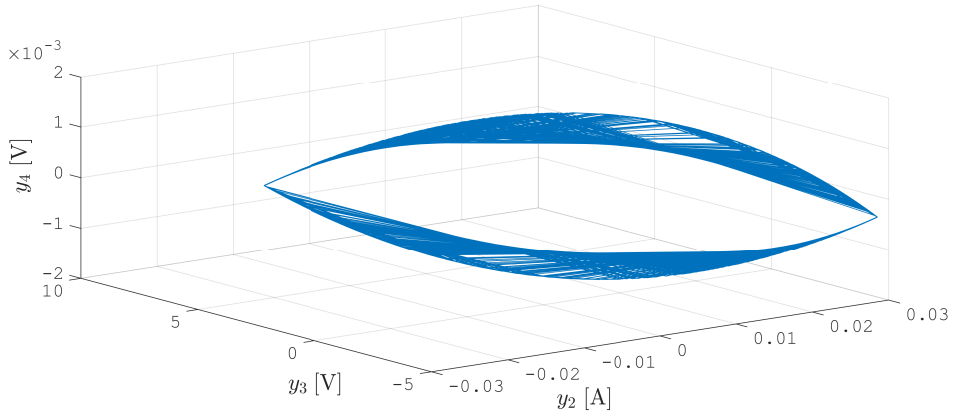
Primećuje se da oba kvadratna izraza $\mathbf{y}^T\mathbf{Q}_i\mathbf{y}$, $i = 1, 2$, $\mathbf{y} \neq 0$, mogu biti jednaka nuli istovremeno kada je vektor $\mathbf{y}$ kolinearan sa $\left[1, 0, 0, 0\right]^T$, što znači jednak $c\left[1, 0, 0, 0\right]^T$ za $c \neq 0$. Ovo je posledica toga što je $\left[c, 0, 0, 0\right]^T$, za bilo koje $c \neq 0$, zajedniči sopstveni vektor koji odgovara nultoj sopstvenoj vrednosti matrice $\mathbf{A}_1$ (četvrta kolona matrice $\mathbf{T}_1$ u jednačini (4.24) i takođe odgovara sopstvenom vektoru konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti sa realnim delom jednakim nuli matrice $\mathbf{A}_2$ (videti drugu kolonu matrice $\mathbf{T}_2$ u jednačini (4.27)). Tada je, međutim, ili $a\mathbf{y}^T\, \mathbf{z} = 2\, a\, c\, v_{IN}\, p_1/L_1$ ili $\mathbf{y}^T\, \mathbf{z} = 2\, c\, v_{IN}\, p_1/L_1$ negativno, što znači da je ili $\gamma_2(\mathbf{y})$ ili $\gamma_1(\mathbf{y})$ negativno.

Za bilo koji drugi nenulti vektor $\mathbf{y}$ (nije jedanak početnoj vrednosti) koji nije kolinearan sa $\left[1, 0, 0, 0\right]^T$ imaćemo da je ili $\mathbf{y}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{y} < 0$ ili ako je $\gamma_1(\mathbf{y}) \geq 0$ onda je $\mathbf{y}^T\, \mathbf{z} > 0$ odnosno $\gamma_2(\mathbf{y}) < 0$. Ako je $\gamma_1(\mathbf{y}) < 0$, onda se može izabrati $\gamma_1(\mathbf{y})$. □

Sa praktične strane se može primetiti da promenljive stanja ne uzimaju vrednosti kolinearne sa vektorom $\left[1, 0, 0, 0\right]^T$ zato što promenljive y_2, y_3 i y_4 nikada nisu istovremeno jednake nuli. Sa sl. 2.4 se može videti da kada je y_2 jednako nuli ($x_2 = \overline{x}_2$) i $y_3 = 0$ ($x_3 = \overline{x}_3$), tada izlazni napon ima ili maksimalnu ili minimalnu vrednost. Isti zaključak se može izvesti posmatranjem sl. 4.1 gde je prikazan fazni dijagram Ćuk konvertora u ustaljenom stanju sa faktorom ispunjenosti impulsa $d = 0.5$.

U osnovi, zakon prekidanja ponuđen u teoremi 4 globalno asimptotski stabiliše sistem kao što je naznačeno u radu [47]. Interesantno je da se pokaže da prekidanje iz jednačine (4.38) ne samo što daje globalnu asimptotsku stabilnost za sistem koji prekida između dva kontinualna režima, već i za prekidanje između kontinualnog i diskontinualnog režima.

Sa strane praktične primene, definisani zakon prekidanja dat jednačinom (4.38) rezul-



Slika 4.1: *Fazni dijagram Ćuk konvertora koji radi u CCM-u sa* $d = 0.5$.

tuje beskonačno brzim prekidanjem, $f_S \to \infty$, koje nije fizički moguće postići bilo kojim realnim kolom. Zato se uvodi parametar označen sa ρ koji se koristi da bi se ograničila frekvencija prekidanja. U osnovi, frekvencija prekidanja se može ograničiti uvođenjem parametra ρ u zakon prekidanja dat jednačinom (4.38) da bi se formiralo histerezisno prekidanje dato sa:

$$q = \begin{cases} 1 & \text{if } q = 0,\ \gamma_2(\mathbf{y}) \geq \rho + \gamma_1(\mathbf{y}), \\ \{0,\ 1\} & \text{if } \gamma_1(\mathbf{y}) \geq \rho + \gamma_2(\mathbf{y}),\ \gamma_2(\mathbf{y}) \geq \rho + \gamma_1(\mathbf{y}), \\ 0 & \text{if } q = 1,\ \gamma_1(\mathbf{y}) \geq \rho + \gamma_2(\mathbf{y}). \end{cases} \tag{4.44}$$

Kao posledica uvođenja histerezisa, trajektorije sistema neće konvergirati ka vektoru promenljivih stanja u ustaljenom stanju, već ka ograničenoj oblasti oko njega. Da bi se garantovala ograničena stabilnost sistema, skup vrednosti sistema treba da bude dat u vidu nivoa funkcije Ljapunova. Analiza Ljapunova garantuje konvergenciju sistema unutar ovog skupa ako je izvod funkcije Ljapunova negativan izvan skupa. Karakterizacija skupa tačaka je data u teoremi 5.

Za bolje razumevanje teoreme 5 podsetimo se da su izvodi $\dot{V}_1(\mathbf{y}) = \gamma_1(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_2(\mathbf{y}) = \gamma_2(\mathbf{y})$ definisani u teoremi 4, vektor $\mathbf{z}$ u jednačini (4.41) i $a = -\frac{d}{1-d} < 0$. Notacija koja se koristi je: $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\langle 2:4, 2:4\rangle$, $\overline{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{Q}_1\langle 2:4, 2:4\rangle$, $\overline{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{Q}_2\langle 2:4, 2:4\rangle$, $\mathbf{s} = \mathbf{z}\langle 2:4\rangle$ i $a_1 = \mathbf{z}\langle 1\rangle$. Smatraćemo za proizvoljnu matricu $\mathbf{H}$, koja može biti pozitivno ili negativno definitna, da $\lambda_{max}(\mathbf{H})$ i $\lambda_{min}(\mathbf{H})$ predstavljaju minimalnu i maksimalnu sopstvenu vrednost, redom. Za datu matricu $\mathbf{H}$ notacija $\mathbf{H}\langle p:q, r:s\rangle$, $p < q$, $r < s$, predstavlja matricu manjih dimenzija od $\mathbf{H}$ dobijenu zadržavanjem redova od p do q i kolona od r do s u istom redosledu kao u originalnoj matrici. Ista notacija se koristi da se konstruišu podvektori od datog vektora.

Teorema 5. *Ako je* $K > K_1^2\,\lambda_{max}(\overline{\boldsymbol{P}}) + K_2^2\,\boldsymbol{P}\langle 1,1\rangle$ *za* $K_1 = \sqrt{\frac{\rho}{\left|k_r\,\lambda_{max}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\boldsymbol{Q}}_0+\overline{\boldsymbol{Q}}_1\right)\right|}}$, *gde je* $k_r = |a|$ *za* $d \leq \frac{1}{2}$ *i* $k_r = 1$ *za* $d > \frac{1}{2}$, $K_2 = \max\left\{\frac{\left|-\rho+\frac{1}{4}\boldsymbol{s}^T\,\overline{\boldsymbol{Q}}_1^{-T}\,\boldsymbol{s}\right|}{a_1}, k_y\right\}$ *i* $k_y = \frac{1}{a_1}\left(\rho + \frac{(2\,|\lambda_{max}(\overline{\boldsymbol{Q}}_1)|\,K_1 - \|\boldsymbol{s}\|)^2 - \|\boldsymbol{s}\|^2}{4\,|\lambda_{max}(\overline{\boldsymbol{Q}}_1)|}\right)$, *onda je ili* $\dot{V}_1(\mathbf{y}) > \dot{V}_2(\mathbf{y}) + \rho$ *ili* $\dot{V}_2(\mathbf{y}) > \dot{V}_1(\mathbf{y}) + \rho$ *ili* $\dot{V}_1(\mathbf{y}) < 0$ *i* $\dot{V}_2(\mathbf{y}) < 0$ *na skupu* $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) > K\}$.

Dokaz. Primetićemo prvo da se izvodi $\dot{V}_1(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ mogu predstaviti preko vektora $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\mathbf{y}) &= \mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1\,\mathbf{r} + \mathbf{r}^T\,\mathbf{s} + a_1\,y_1, \\ \dot{V}_2(\mathbf{y}) &= \mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_2\,\mathbf{r} + a\,\mathbf{r}^T\,\mathbf{s} + a\,a_1\,y_1. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Ako su promenljive stanja sistema van skupa $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \leq K\}$ koji je karakterisan kao nivo funkcije Ljapunova $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) = K\}$, pokazaćemo da su ili oba izvoda $\dot{V}_1(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ negativna ili je njihova razlika veća od ρ. Kada je razlika izvoda veća od ρ, tada je sistem u režimu rada koji ima negativan izvod funkcije Ljapunova zato što se prekidanje dešava uvek kada je razlika izvoda funkcije Ljapunova jednaka ρ i jedan od izvoda je uvek negativan kao što je pokazano u teoremi 4. Na osnovu formata matrice $\mathbf{P}$ u jednačini (4.19) dobija se $\mathbf{y}^T\,\mathbf{P}\,\mathbf{y} = p_1\,|y_1|^2 + \mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{P}}\,\mathbf{r}$, gde je $p_1 = \mathbf{P}\langle 1,1\rangle$ i $\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\langle 2:4, 2:4\rangle$. Zato van atraktivnog skupa $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \leq K\}$ imamo

$$\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{P}}\,\mathbf{r} + p_1\,|y_1|^2 > K = K_1^2\,\lambda_{max}\left(\overline{\mathbf{P}}\right) + p_1\,K_2^2, \tag{4.46}$$

što znači da ili je $\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{P}}\,\mathbf{r} > K_1^2\,\lambda_{max}\left(\overline{\mathbf{P}}\right)$ ili $p_1\,|y_1|^2 > p_1\,K_2^2$. Ovo dalje znači da van atraktivnog skupa imamo da je ili $\|\mathbf{r}\| > K_1$ ili $|y_1| > K_2$. Uslovi za normu vektora $\mathbf{r}$ i apsolutnu vrednost promenljive y_1 će biti korišćeni nezavisno zato što je njihov uticaj na izvode $\dot{V}_1(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ različit, kao što se može videti u jednačini (4.45).

Prvo ćemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{r}\| > K_1$. Ako su oba izvoda $\dot{V}_1(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ negativna, nema potrebe za daljim dokazom. Međutim, ako je $\dot{V}_1(\mathbf{y}) > 0$, onda je dovoljno da se pokaže da je $\dot{V}_2(\mathbf{y}) < -\rho$ kada je $\|\mathbf{r}\| > K_1$. Pod pretpostavkom da je $\dot{V}_1(\mathbf{y}) > 0$ dobija se $a\,a_1\,y_1 < -a\,\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1\,\mathbf{r} - a\,\mathbf{r}^T\,\mathbf{s}$, što se može koristiti u izvodu $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ da se dobije

$$\mathbf{r}^T\,(\overline{\mathbf{Q}}_2 + |a|\,\overline{\mathbf{Q}}_1)\,\mathbf{r} < -\rho. \tag{4.47}$$

Poslednja nejednakost daje sledeću granicu na $\|\mathbf{r}\|$:

$$\|\mathbf{r}\| \geq \sqrt{\frac{\rho}{|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_2 + |a|\,\overline{\mathbf{Q}}_1)|}}, \tag{4.48}$$

koja je manja od K_1 po konstrukciji. Ista analiza se primenjuje na slučaj kada je $\dot{V}_2(\mathbf{y}) > 0$, pa se pokazuje kada je $\dot{V}_1(\mathbf{y}) < -\rho$. U tom slučaju se ostvaruje granica

$$\|\mathbf{r}\| \geq \sqrt{\frac{\rho}{\left|\lambda_{max}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\mathbf{Q}}_0 + \overline{\mathbf{Q}}_1\right)\right|}}, \tag{4.49}$$

što je ponovo manje od K_1 zato što je

$$K_1 = \max\left\{\sqrt{\frac{\rho}{|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_0 + |a|\,\overline{\mathbf{Q}}_1)|}},\ \sqrt{\frac{\rho}{\left|\lambda_{max}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\mathbf{Q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}_1\right)\right|}}\right\} \tag{4.50}$$

ili

$$K_1 = \sqrt{\frac{\rho}{\left|k_r\,\lambda_{max}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\mathbf{Q}}_0 + \overline{\mathbf{Q}}_1\right)\right|}}, \tag{4.51}$$

gde je

$$k_r = \begin{cases} |a| & \text{for } |a| \leq 1 \text{ or } d \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{for } |a| > 1 \text{ or } d > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.52}$$

Kada $|y_1|$ postane dominantno veliko, postoje dve mogućnosti: da je $y_1 < 0$ i ima veliku apsolutnu vrednost ili da ima veliku pozitivnu vrednost. U slučaju kada je y_1 negativno, potrebno je samo da se garantuje $\dot{V}_1(\mathbf{y}) < -\rho$, što implicira da je izvod funkcije Ljapunova negativan za dato histerezisno prekidanje. U osnovi, $\dot{V}_1(\mathbf{y}) < -\rho$ rezultuje sledećim ograničenjem:

$$y_1 \leq \frac{-\rho - \max\left\{\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1\,\mathbf{r} + \mathbf{r}^T\,\mathbf{s}\right\}}{a_1} = \frac{-\rho + \frac{1}{4}\mathbf{s}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1^{-T}\,\mathbf{s}}{a_1}, \tag{4.53}$$

gde je maksimalna vrednost dobijena za $\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{Q}}_1^{-1}\,\mathbf{s}$.

Ako je y_1 velika pozitivna vrednost, tako da je $y_1 \geq k_y > 0$, onda ili je $\dot{V}_1(\mathbf{y}) > \rho$, pa nije potrebna dalja analiza, s' obzirom da će sistem biti u drugom režimu rada jer je $\dot{V}_2(\mathbf{y}) < 0$, ili $\dot{V}_1(\mathbf{y}) \leq \rho$ što implicira $\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1\,\mathbf{r} + \mathbf{r}^T\,\mathbf{s} - \rho + a_1\,k_y \leq 0$. U tom slučaju ćemo pokazati da je

$$\mathbf{r}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1\,\mathbf{r} + \mathbf{r}^T\,\mathbf{s} - \rho + a_1\,k_y \leq \|\mathbf{r}\|^2\,\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1) + \|\mathbf{r}\|\,\|\mathbf{s}\| - \rho + a_1\,k_y \leq 0 \tag{4.54}$$

ili

$$\|\mathbf{r}\|^2\,\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1) + \|\mathbf{r}\|\,\|\mathbf{s}\| - \rho + a_1\,k_y \leq 0. \tag{4.55}$$

Pozitivni koren leve strane kvadratne forme (odnosno veći koren ukoliko su oba korena pozitivna) u nejednačini (4.55), označen sa rr_1, ako postoji, se računa kao

$$rr_1 = \frac{\|\mathbf{s}\| + \sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + 4\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|\,(a_1\,k_y - \rho)}}{2\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|}, \tag{4.56}$$

s' obzirom da je matrica $\overline{\mathbf{Q}}_1$ negativno definitna. Posmatranjem izraza za rr_1 vidi se da je rr_1 rastuća funkcija u zavisnosti od pozitivne vrednosti k_y. Ako postavimo da je $K_1 = rr_1$, odnosno

$$K_1 = \frac{\|\mathbf{s}\| + \sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + 4\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|\,(a_1\,k_y - \rho)}}{2\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|}, \tag{4.57}$$

dobija se sledeća vrednost za k_y:

$$k_y = \frac{1}{a_1}\left(\rho + \frac{(2\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|\,K_1 - \|\mathbf{s}\|)^2 - \|\mathbf{s}\|^2}{4\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|}\right). \tag{4.58}$$

Vrednost k_y garantuje da ako je $y_1 > k_y$, onda će nejednakost (4.54) biti uvek zadovoljena za $\|\mathbf{r}\| > K_1$, što je već zadovoljeno za donju granicu $\|\mathbf{r}\|$. Trebalo bi primetiti da ako izračunata vrednost (4.58) daje vrednost koja nije pozitivna ispod kvadratnog korena u jednačini (4.55), onda rr_1 možda ne postoji, ali je nejednakost (4.54) uvek zadovoljena, pa je tvrdnja ispravna. Ako je vrednost ispod kvadratnog korena pozitivna, onda vrednost rr_1 postoji i tvrdnja je zadovoljena na osnovu prethodnog izvođenja. Stoga, $K_2 = \max\left\{\frac{\left|-\rho + \frac{1}{4}\mathbf{s}^T\,\overline{\mathbf{Q}}_1^{-T}\,\mathbf{s}\right|}{a_1}, k_y\right\}$ daje donju granicu za $|y_1|$ koja garantuje da je izvod funkcije Ljapunova negativan van atraktivnog skupa i time je kompletiran dokaz teoreme. □

Dokaz teoreme 5 pokazuje da uvođenjem histerzisa sistem više nije globalno asimptotski stabilan, već samo stabilan, kao što je pokazano u teoremi 5 zato što funkcija Ljapunova u ovom slučaju nije striktno opadajuća u okolini ekvilibrijuma [56]. Odziv sistema je karakterisan unutar atraktivnog skupa $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) > K\}$ u zavisnosti od njegovog ustaljenog stanja, odnosno tačke ekvilibrijuma, kao varijacija koja se u energetskoj elektronici naziva riplom. Ova analiza sistema u ustaljenom stanju dopunjava rezultate teoreme 5 zato što daje detalje kako se sistem „ponaša" unutar atraktivnog skupa. Da bi se izvele željene karakteristike, prvo se posmatra prvi podinterval vremena $d\,T_S$ periode T_S za koji se dobija sledeće

$$\gamma_1(\mathbf{y}(t_0 + d\,T_S)) - \gamma_1(\mathbf{y}(t_0)) = 2\,\rho + \gamma_2(\mathbf{y}(t_0 + d\,T_S)) - \gamma_2(\mathbf{y}(t_0)). \tag{4.59}$$

Vrednosti promenljivih stanja na granicama ovog intervala su $\mathbf{x}(t_0 + d\,T_S) = \overline{\mathbf{x}} + \frac{\Delta}{2}$ i $\mathbf{x}(t_0) = \overline{\mathbf{x}} - \frac{\Delta}{2}$, gde su $\overline{\mathbf{x}}$ i Δ definisani jednačinama (4.35) i (4.36). Kako bi se pojednostavili izrazi, koristićemo smenu promenljivih $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$. Može se pisati da je $\mathbf{y}(t_0 + d\,T_S) = \frac{\Delta}{2}$ i $\mathbf{y}(t_0) = -\frac{\Delta}{2}$:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\mathbf{y}(t_0 + d\,T_S)) - \gamma_1(\mathbf{y}(t_0)) &= 2\,\Delta^T\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A}_1\,\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}), \\ \gamma_2(\mathbf{y}(t_0 + d\,T_S)) - \gamma_2(\mathbf{y}(t_0)) &= 2\,\Delta^T\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A}_2\,\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}). \end{aligned} \tag{4.60}$$

Korišćenjem jednačina (4.59) i (4.60) određuje se

$$\rho = \Delta^T\,\mathbf{P}\,(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\,\overline{\mathbf{x}}. \tag{4.61}$$

Jednačina (4.61) daje vezu između kontrolnog parametra $\rho > 0$ i željenih vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju, ripla i periode prekidanja. Ovaj izraz je veoma bitan za dizajn kontrole.

4.4 Histerezisna kontrola Ćuk konvertora koji radi u kontinualnom režimu

Histerezisno upravljani DC-DC konvertor se može predstaviti kao hibridni sistem čija se dinamika hibridnog sistema može definisati kao [47]

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} F_q(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} =: F(\mathbf{x}, q) \quad (\mathbf{x}, q) \in C\,, \tag{4.62}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^+ \\ q^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ G_q(\mathbf{x}) \end{bmatrix} =: G(\mathbf{x}, q) \quad (\mathbf{x}, q) \in D\,, \tag{4.63}$$

gde je kao i ranije $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{L1}\ i_{L2}\ v_{C1}\ v_{C2} \end{bmatrix}^T$ i $q \in \{0,\ 1\}$ stanje prekidača S, odnosno $q = 1$ znači da je prekidač S uključen, a $q = 0$ označava da je prekidač S isključen.

Skup toka signala (*flow set* sistema) je

$$C = \{(\mathbf{x}, q) : \mathbf{x} \in M, q \in \{0,\ 1\}\}\,, \tag{4.64}$$

gde je

$$M = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : i_{L1} + i_{L2} \geq 0, v_{C1} \geq 0, v_{C2} \leq 0\right\}. \tag{4.65}$$

Mapa toka signala (*flow map*) je:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x},q) &= \begin{cases} F_0(\mathbf{x}) & q=0, \\ F_1(\mathbf{x}) & q=1, \end{cases} \\ F_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_1\,\mathbf{x}+\mathbf{B}_{y1} \quad \mathbf{x}\in M\cap\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 : v_{C1}>0\right\}, \\ F_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_2\,\mathbf{x}+\mathbf{B}_{y2} \quad \mathbf{x}\in M\cap\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 : i_{L1}+i_{L2}>0\right\}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Mapa skoka signala (*jump map*) za beskonačno brzo prekidanje je data sa

$$\begin{aligned} D=\{(\mathbf{x},q) : \mathbf{x}\in M, \gamma_0(\mathbf{y})=\gamma_1(\mathbf{y}), q=0\}\cup \\ \{(\mathbf{x},q) : \mathbf{x}\in M, \gamma_1(\mathbf{y})=\gamma_0(\mathbf{y}), q=1\}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

i $G_q(\mathbf{x}) = 1-q$.

Kako bi se dobilo fizički ostvarivo prekidanje, prekidačka frekvencija mora biti ograničena. Zato su mapa toka signala i skup toka signala isti, ali se mapa skoka signala modfikuje tako da se doda parametar histerezisa ρ kao

$$\begin{aligned} D=\{(\mathbf{x},q) : \mathbf{x}\in M, \gamma_2(\mathbf{y})=\rho+\gamma_1(\mathbf{y}), q=0\}\cup \\ \{(\mathbf{x},q) : \mathbf{x}\in M, \gamma_1(\mathbf{y})=\rho+\gamma_2(\mathbf{y}), q=1\}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

4.4.1 Procena maksimalne vrednosti promenljivih stanja

Kako bi se sprečio prestanak rada kola usled previsoke vrednosti napona ili struja u kolu, veoma je bitno da se procene maksimalne vrednosti koje promenljive stanja mogu da dostignu prilikom rada Ćuk konvertora. Maksimalna (*peak*) vrednost promenljivih stanja po uključenju sistema (koji je kritičan po pitanju kvara konvertora usled pregorevanja komponenata zbog visokih vrednosti napona i struja u kolu) će biti procenjena pod pretpostavkom da su početne vrednosti promenljivih stanja nula, što znači da je $x_i(0) = 0$, $i = 1,\ldots,4$. Predložena procedura daje samo procenu maksimalnih vrednosti promenljivih stanja zato što je računanje dato za početne vrednosti jednake nuli, ali ako su početne vrednosti zaista jednake nuli, ova procena je egzaktna. Sa druge strane, ova procena je i konzervativna zato što najveću opasnost za prestanak rada kola predstavlja vrednost struje kalema i_{L1} ukoliko dostigne veliku vrednost. Struja kalema i_{L1} se može egzaktno proceniti u slučaju nultih početnih vrednosti. U početnom trenutku se smatra da je drajver uključio prekidač S, dok je dioda isključena, pa primenom rešenja podsistema 1 na osnovu jednačina (2.12) i (2.13) vektor promenljivih stanja je:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{IN}}{L_1}\,t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \tag{4.69}$$

i njegov pomeraj od ustaljenog stanja

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{v_{IN}}{L_1}\, t - \overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 \\ -\overline{x}_4 \end{bmatrix}. \tag{4.70}$$

Na osnovu prethodnih jednačina i na osnovu vrednosti (2.12) i (2.13), dominantna promenljiva (koja daje maksimalnu *peak* vrednost) je struja kalema i_{L1} koja diktira dužinu inicijalnog intervala vremena označenog sa t_0. Kako je funkcija Ljapunova kvadratna, može se izvući egzaktan uticaj struje kalema i_{L1} biranjem početnih vrednosti jednakih nula, i na taj način uklanjanjem uticaja ostalih promenljivih stanja na *peak* vrednosti funkcije Ljapunova.

Da bi se procenila maksimalna vrednost struje kalema i_{L1} po uključenju konvertora, potrebno je proceniti dužinu intervala u kome konvertor radi kao podsistem 1. Do prve promene stanja prekidača S, odnosno trenutak kada se nakon uključenja sistema prekidač S isključuje i prelazi iz podsistema 1 u podsistem 2, je kada je:

$$\gamma_1(\mathbf{y}) = \rho + \gamma_2(\mathbf{y}), \tag{4.71}$$

odnosno

$$\mathbf{y}^T\ \mathbf{Q}_1\ \mathbf{y} + 2\,\mathbf{y}^T\ \mathbf{P}\ (\mathbf{A}_1\ \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{y1}) = \rho + \mathbf{y}^T\ \mathbf{Q}_2\ \mathbf{y} + 2\,\mathbf{y}^T\ \mathbf{P}\ (\mathbf{A}_2\ \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_{y2}), \tag{4.72}$$

$$\mathbf{y}^T\ (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2)\ \mathbf{y} + 2\,\mathbf{y}^T\ \mathbf{P}\ (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\ \overline{\mathbf{x}} = \rho. \tag{4.73}$$

Neka je $\mathbf{Q}_{3\times3}$ matrica koja sadrži sve vrednosti koje nisu jednake nuli, to jest $\mathbf{Q}_{3\times3} = [\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2]_{\langle 2:4,\ 2:4\rangle}$ i neka je

$$\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}} = \left[\tilde{y}_1,\ -\overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle^T\right]^T \tag{4.74}$$

gde je $\tilde{y}_1 = x_1 - \overline{x}_1$. Ako označimo $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}\ (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\ \overline{\mathbf{x}}$, jednačina (4.73) se transformiše u

$$2\left[\tilde{y}_1,\ -\overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle^T\right]\ \mathbf{P}_1 = \rho - \overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle^T\ \mathbf{Q}_{3\times3}\ \overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle\,, \tag{4.75}$$

što daje

$$\widetilde{y_1} = \frac{\rho + \overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle^T\,(-\mathbf{Q}_{3\times3}\,\overline{\mathbf{x}}\,\langle 2:4\rangle + 2\,\mathbf{P}_1\,\langle 2:4\rangle)}{2\mathbf{P}_1\,\langle 1\rangle}, \tag{4.76}$$

gde je ρ određeno jednačinom (4.61). Dobija se trajanje podsistema 1 po uključenju Ćuk

konvertora

$$t_0 = \frac{L_1}{v_{IN}}(\tilde{y}_1 + \overline{x}_1). \tag{4.77}$$

Rezultat (4.77) daje informaciju o maksimalnoj vrednosti ulazne struje konvertora, odnosno struje kalema i_{L1}, koja se može dostići po uključenju konvertora $i_{L1}(t_0)$, i trenutak u kome se ta maksimalna vrednost dostiže t_0. Implicitno, ovaj rezultat se koristi da se procene *peak* vrednosti ostalih promenljivih stanja korišćenjem jednačina (2.12) i (2.13). Jednačina (4.77) je proverena i numeričkim simulacijama u nastavku.

4.4.2 Postupak projektovanja histerezisne kontrole Ćuk konvertora

U ovom poglavlju će biti objašnjena procedura za realizaciju kontrolera Ćuk konvertora na osnovu zadatih specifikacija konvertora. Procedura je podeljena u sledeće korake:

1. Na osnovu vrednosti elemenata u konvertoru korišćenjem opisane LMI procedure (4.16) računaju se matrice $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{P}$.

2. Za željene vrednosti izlaznih parametara konvertora zadatih u formi struja kalemova ili napona kondenzatora, *duty-ratio* (faktor ispunjenosti impulsa) se računa kao u jednačini (4.35) za vrednost promenljivih stanja u ustaljenom stanju.

3. Uzimajući ispunjenost impulsa (*duty-ratio*) i frekvenciju prekidanja kao ulazne parametre, može se proceniti parametar ρ koji je dat jednačinom (4.61).

Kada se odrede matrice $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{P}$, kao i parametar ρ, dobijaju se svi parametri potrebni za implementaciju kontrolera.

4.4.3 Numerički primeri

Kako bi se ilustrovala implementacija i perfromanse predloženog dizajna kontrolera, u ovom poglavlju se prikazuju simulacioni rezultati za dva različita scenarija rada kontrolera. Simulacije su rađene korišćenjem Hybrid Equation (HyEQ) Toolbox integrisanog unutar MATLAB-a [57]. Prvi primer pokazuje da je dizajn kontrole nepromenljiv za rad Ćuk konvertora u CCM-u i zadovoljava specifikacije dizajna kontrolera. Ovaj primer potvrđuje rezultate date jednačinom (4.61) za parametar ρ i trajanje početnog intervala vremena datog jednačinom (4.77). Pored toga simulacioni rezultati pokazuju da sistem radi u CCM-u sa ustaljenim stanjem (4.35) i riplom (4.36). Drugi simulacioni primer daje rezultate za slučaj kada konvertor radi na granici kontinualnih režima i diskontinualnih režima, bilo DICM ili DCVM.

Primer 1

Na osnovu željene ispunjenosti impulsa PWM signala $d = 0.5$ i frekvencije prekidanja $f_S = 100$ kHz, korišćenjem jednačine (4.61) se računa $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$. Na sl. 4.2 su prikazani simulacioni rezultati u vidu vremenskih dijagrama promenljivih stanja, a na sl. 4.3 su prikazane funkcija Ljapunova i njeni izvodi, gde je sa $\nabla V_1(\mathbf{x}) = \dot{V}_1(\mathbf{x})$ označen izvod kada je prekidač S uključen, a sa $\nabla V_0(\mathbf{x}) = \dot{V}_2(\mathbf{x})$ kada je prekidač S isključen. Dijagrami sa sl. 4.2a i sl. 4.3a predstavljaju vremenske dijagrame tokom prvih 5 ms od početka rada konvertora, dok su desno na sl. 4.2b i sl. 4.3b prikazani delovi dijagrama sa leve strane u toku vremenskog intervala 4.95 ms – 5 ms kako bi se uvećali dijagrami promenljivih stanja u ustaljenom stanju. U ovom slučaju je $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2\text{ A} & 2\text{ A} & 20\text{ V} & -10\text{ V} \end{bmatrix}^T$ i $\Delta = \begin{bmatrix} 50\text{ mA} & 50\text{ mA} & -10\text{ V} & 0\text{ V} \end{bmatrix}^T$. Prva promena stanja prekidača se dešava prema jednačini (4.77) u trenutku $t_0 = 1.0521 \cdot 10^{-4}$ s, dok se simulacijom dobija rezultat $t_0 = 1.0512 \cdot 10^{-4}$ s. Kao što se vidi ove dve vrednosti se slažu, što nije iznenađenje zato što je sistem startovan kada su početne vrednosti promenljivih stanja bile jednake nuli.

Na Sl. 4.4 je prikazan fazni dijagram simulirane histerezisne kontrole. Vidi se da je kretanje promenljivih stanja konvertora invarijantno u odnosu na region M definisan jednačinom (4.65).

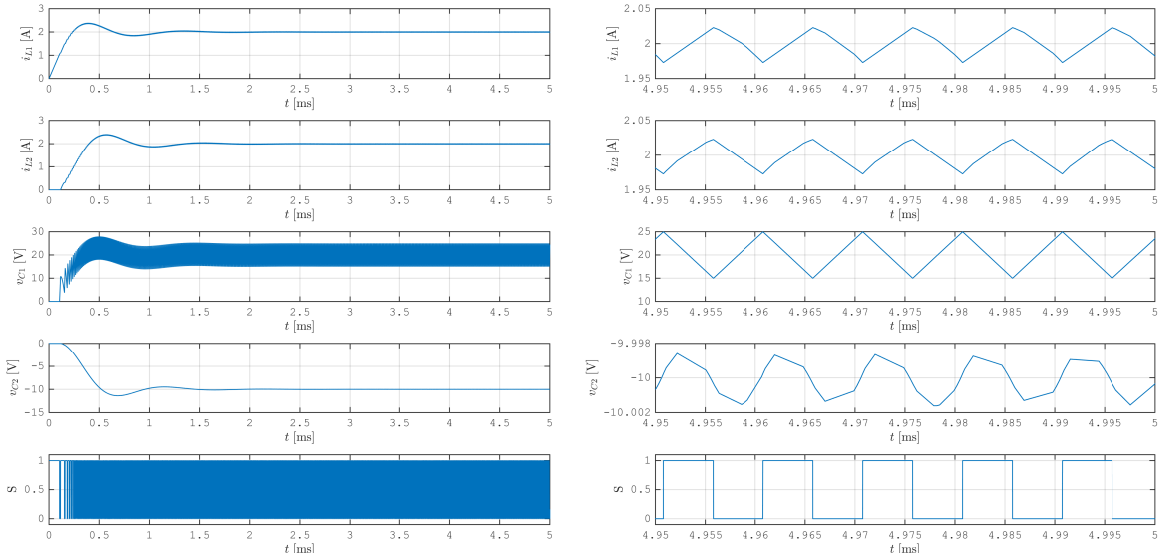
Primer 2

Kao što je pomenuto na početku ovog odeljka, može se proveriti kako sistem radi na granici CCM-a i diskontinualnih režima. Granice za rad u diskontinualnom režimu su date u radu [26]. Uslov za rad u DCVM režimu je

$$\begin{aligned} &f_S \leq f_{S,boundary\,DCVM}, \\ &f_{S,boundary\,DCVM} = \frac{d^2}{2RC_1}, \end{aligned} \tag{4.78}$$

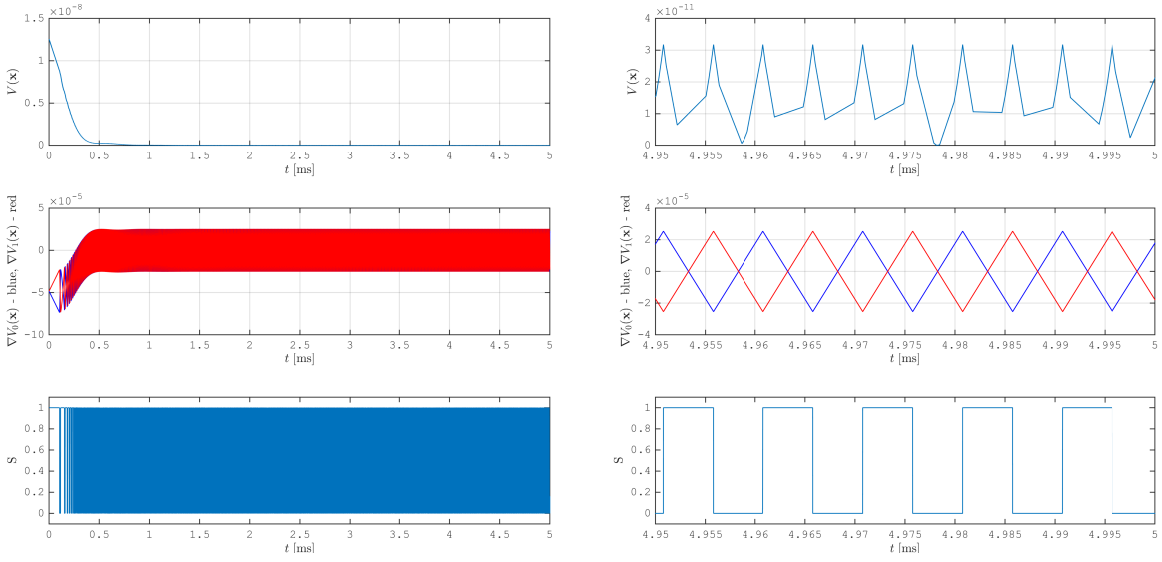
koji se može koristiti za procenu minimalne vrednosti parametra ρ, označenog kao $\underline{\rho}_{DCVM}$, tako što se odredi vrednost Δ i potom na osnovu jednačine (4.61) se dobija eksplicitan uslov za rad u režimu DCVM.

Za dati Ćuk konvertor sa željenim *duty-ratio*-om $d = 0.8$, računaju se uslovi za ulazak u DCVM kao $\rho \geq \underline{\rho}_{DCVM} = 4.9 \cdot 10^{-3}$ i $f_S \leq f_{S,boundary\,DCVM} = 64$ kHz. Simulacija sa zadatom vrednošću $\rho = 4.84 \cdot 10^{-3}$ (ova vrednost je malo niža od izračunate) daje vremenske dijagrame na Sl. 4.5 i na Sl. 4.6 funkciju Ljapunova i njene izvode, gde je sa $\nabla V_1(\mathbf{x}) = \dot{V}_1(\mathbf{x})$ označen izvod kada je prekidač S uključen, a sa $\nabla V_0(\mathbf{x}) = \dot{V}_2(\mathbf{x})$ kada je prekidač S isključen. Ponovo su levi dijagrami označeni sa *(a)* sa Sl. 4.5 i Sl. 4.6



(a) *(b)*

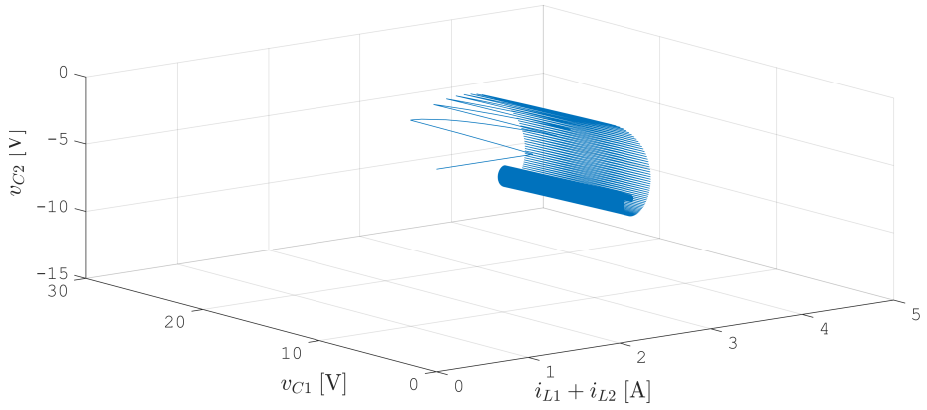
Slika 4.2: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u CCM-u za* $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$.



(a) *(b)*

Slika 4.3: *Vremenski dijagram funkcije Ljapunova, izvoda funkcije Ljapunova i stanja prekidača S za Ćuk konvertor u CCM-u i* $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$.

kompletni vremenski dijagrami u toku prvih 20 ms, a njihovi desni dijagrami, označeni sa *(b)*, delovi u toku vremenskog intervala 19.95 ms – 20 ms. Jasno je da napon v_{C1} dostiže vrednost nula i zato konvertor radi na granici režima CCM i DCVM. Na osnovu rezultata simulacija se može odrediti da je u ustaljenom stanju frekvencija prekidanja $f_S = 64.31$ kHz i $d = 0.8$, što odgovara računatim vrednostima. Trajanje početnog stanja je $t_0 = 4$ ms, što se dobija i simulacijama i rešavanjem jednačine (4.77).



Slika 4.4: *Fazni dijagram Ćuk konvertora koji radi u CCM-u za* $\rho = 5.0796 \cdot 10^{-5}$.

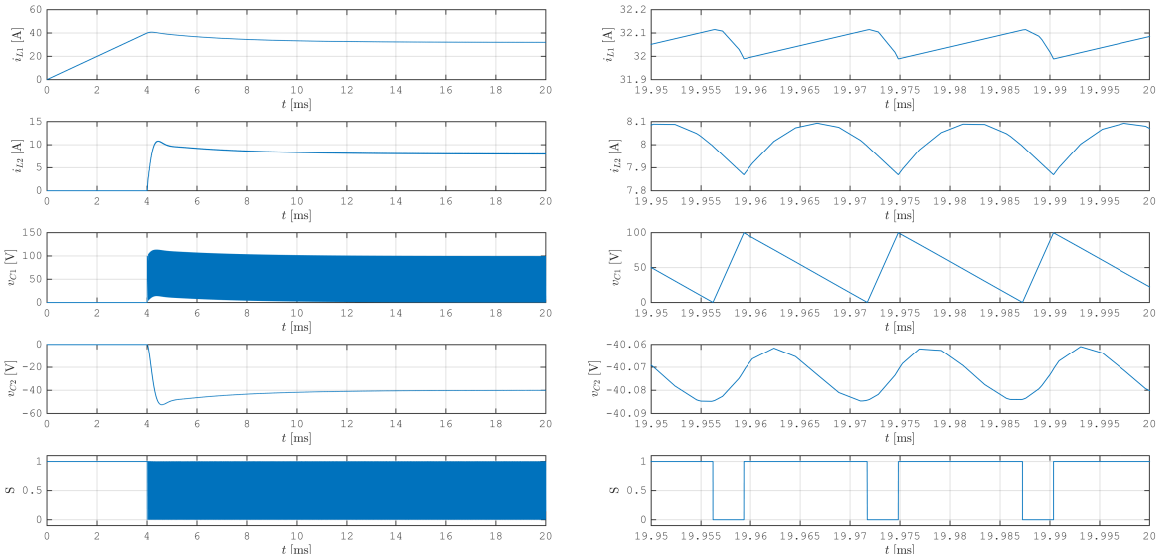
Isti pristup se koristi za određivanje uslova kada konvertor radi u režimu DICM. Na osnovu [26] konvertor radi u diskontinualnom režimu DICM kada je

$$\begin{aligned} &f_S \leq f_{S,boundary\,DICM}, \\ &f_{S,boundary\,DICM} = \frac{R\,(1-d)^2}{2\,(L_1+L_2)}, \end{aligned} \tag{4.79}$$

na osnovu čega se određuje vrednost $\underline{\rho}_{DICM}$ korišćenjem jednačine (4.61).

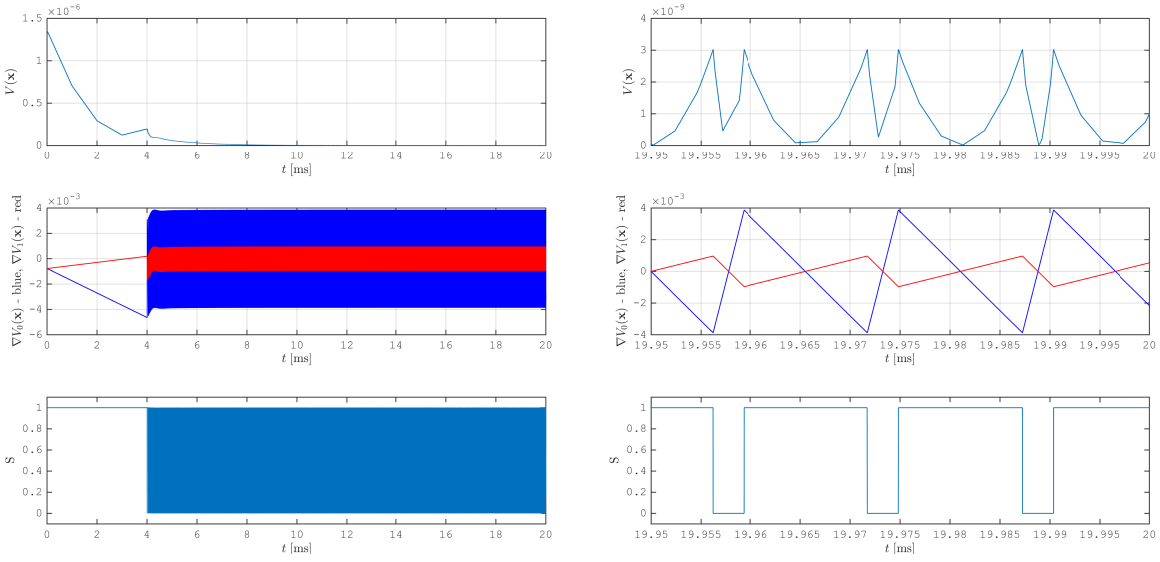
Na osnovu simulacije se dobija da za *duty-ratio* $d = 0.8$ konvertor radi u DICM režimu kada je frekvencija $f_S \leq f_{S,boundary\,DICM} = 50$ Hz i $\rho \geq \underline{\rho}_{DICM} = 6.2109$. Međutim, granica $\underline{\rho}_{DCVM}$ za rad u DCVM režimu je niža po vrednosti parametra ρ i zbog toga će daljim povećanjem parametra ρ konvertor raditi u DCVM režimu.

Vrednosti $\underline{\rho}_{DCVM}$ i $\underline{\rho}_{DICM}$ daju nižu granicu $\underline{\rho} = \min\left(\underline{\rho}_{DCVM}, \underline{\rho}_{DICM}\right)$ za koju konvertor počinje da radi u nekom od diskontinualnih režima. Za svako $\rho > \underline{\rho}$ konvertor ostaje u istom diskontinualnom režimu za koji je postignuta vrednost $\underline{\rho}$. Bitno je napomenuti da se analiza stabilnosti konvertora koji radu u CCM-u može primeniti za analizu rada konvertora u diskontinualnim režimima.



(a) *(b)*

Slika 4.5: *Vremenski dijagrami Ćuk konvertora na granici režima CCM i DCVM za* $\rho = 4.84 \cdot 10^{-3}$ *i* $d = 0.8$.



(a) *(b)*

Slika 4.6: *Vremenski dijagram funkcije Ljapunova, izvoda funkcije Ljapunova i stanja prekidača S za Ćuk konvertor na granici režima CCM i DCVM i za* $\rho = 4.84 \cdot 10^{-3}$ *i* $d = 0.8$.

4.5 Histerezisna kontrola Ćuk konvertora koji radi u diskontinualnim režimima

Zakon prekidanja histerezisno kontrolisanog Ćuk konvertora [47, 58] koji radi i u diskontinualnim režimima se dobija kao modifikacija jednačine (4.38) tako da obuhvati i diskontinualne režime rada konvertora:

$$\begin{aligned} q_s &= \arg\min_{\xi\in\{i,j\}} \left\langle \dot{V}(\mathbf{y}), \mathbf{A}_\xi \mathbf{y} + \mathbf{B}_\xi \right\rangle, \\ i &= \begin{cases} 1, & \text{if } v_{C1} \neq 0, \\ 3, & \text{if } v_{C1} = 0, \end{cases} \\ j &= \begin{cases} 2, & \text{if } i_{L1} + i_{L2} \neq 0, \\ 4, & \text{if } i_{L1} + i_{L2} = 0, \end{cases} \\ q &= \begin{cases} 0, & \text{if } q_s \in \{2, 4\}, \\ 1, & \text{if } q_s \in \{1, 3\}, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.80}$$

gde je $q \in \{0, 1\}$ stanje prekidača S, pri čemu je parametru q dodeljena vrednost „1" kada je prekidač S uključen i „0" kada je isključen.

Kao i u prethodnom poglavlju, zakon prekidanja (4.80) daje beskonačnu frekvenciju prekidanja koja je fizički neprihvatljiva. Zato se uvodi histerezis

$$q = \begin{cases} 1 & \text{if } q = 0,\ \dot{V}_j(\mathbf{y}) \geq \rho + \dot{V}_i(\mathbf{y}), \\ \{0,\ 1\} & \text{if } \dot{V}_i(\mathbf{y}) \geq \rho + \dot{V}_j(\mathbf{y}),\ \dot{V}_j(\mathbf{y}) \geq \rho + \dot{V}_i(\mathbf{y}), \\ 0 & \text{if } q = 1,\ \dot{V}_i(\mathbf{y}) \geq \rho + \dot{V}_j(\mathbf{y}). \end{cases} \tag{4.81}$$

Parametar histerezisa ρ se računa na isti način kao u CCM režimu [58] primenom jednačine (4.61). Za veće vrednosti parametra ρ, konvertor može da uđe ili u diskontinualno stanje DICM ili DCVM. Kao što će biti pokazano, sistem može da preključuje između podsistema 1 i 3 dok ne pređe u podsistem 2. Ako se iz podsistema 2 pređe u kombinovano stanje koje obuhvata podsisteme 1 i 3, onda imamo stabilno preključivanje između kombinovanog podsistema 1 i 3 i podsistema 2. Interno prekidnje između podsistema 1 i 3 je nestabilno i nekontrolisano, ali se ovaj proces može modelovati kao jedan kombinovani režim rada sa tačke gledišta prelaska u podsistem 2 i iz podsistema 2. Drugo interesantno ponašanje jeste prelazak iz podsistema 2 u posistem 4. Ovo prekidanje je nezavisno i stabilno, ali se nakon prelaska u podsistem 4 menja ekvilibrijum.

4.5.1 Rad Ćuk konvertora u DCVM režimu

Uslov za prelazak u DCVM režim

Konvertor koji radi u CCM-u može da pređe u diskontinualni režim DCVM uzrokovano velikom vrednošću parametra ρ. Kako su struja kalema y_1 i napon kondenzatora y_3 kritične promenljive stanja, što se vidi posmatranjem sopstvenih vektora u CCM-u (4.24) i (4.27), one mogu da značajno porastu i opadnu, redom. Dominantne komponente vektora $\mathbf{y}$ se mogu aproksimirati kao

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{y}_{13} = \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_3\,\mathbf{e}_3. \tag{4.82}$$

gde je $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\,0\,0\,0\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0\,0\,1\,0\end{bmatrix}^T$ i α_1 i α_3 su realne konstante. Ovaj rezultat daje $\mathbf{e}_1^T\,\mathbf{Q}_i\,\mathbf{e}_1 = 0$ za $i = 1, 2$, kao što je pokazano u teoremi 1 rada [58], pri čemu važi da je $\mathbf{e}_3^T\,\mathbf{Q}_2\,\mathbf{e}_3 = 0$. Izvod u vremenu funkcije Ljapunova postaje

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\mathbf{y}) &= 2\,\alpha_1\,\alpha_3\,\mathbf{e}_1^T\,\mathbf{Q}_1\,\mathbf{e}_3 + \alpha_3^2\,\mathbf{e}_3^T\,\mathbf{Q}_1\,\mathbf{e}_3 + \alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3\\ &= \alpha_3^2\,q_{33} + \alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3,\\ \dot{V}_2(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}_{13}^T\mathbf{Q}_2\mathbf{y}_{13} + a\,(\alpha_1 z_1 + \alpha_3 z_3) = a\,(\alpha_1 z_1 + \alpha_3 z_3),\end{aligned} \tag{4.83}$$

gde je $\mathbf{y}_{13}^T\,\mathbf{z} = \alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3$; z_1 i z_3 su prvi i treći element vektora $\mathbf{z}$ i q_{33} vrednost matrice $\mathbf{Q}_1$ na poziciji $(3, 3)$.

Prelazak iz podsistema 1 u podsistem 2 se dešava kada je $\dot{V}_1(\mathbf{y}) = \dot{V}_2(\mathbf{y}) + \rho$. To znači da dok se ne zadovolji ova jednakost važi da je

$$0 < -\alpha_3^2\,|q_{33}| + \alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3 < a\,(\alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3) + \rho, \tag{4.84}$$

što rezultuje

$$\alpha_3^2\,|q_{33}| < \alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3 < \frac{\alpha_3^2\,|q_{33}| + \rho}{1 - a}. \tag{4.85}$$

Kako je vrednost q_{33} jako mala u poređenju sa ostalim elementima matrice $\mathbf{Q}_1$ koji nisu jednaki nula, ova vrednost postaje zanemarljiva u poređenju sa parametrom ρ. U slučaju većih vrednosti za ρ, vrednost $\alpha_1\,z_1 + \alpha_3\,z_3$ sporo raste što rezultuje brzim porastom struje y_1 i brzim opadanjem napona y_3 po zakonu iz jednačine (4.85). Nakon nekog vremena se napon na kondenzatoru x_3 izjednači sa nulom ($y_3 = -\overline{x}_3$) i tada nastupa DCVM, odnosno konvertor prelazi podsistem 3.

Analiza stabilnosti

Kao što je pokazano, prelazak iz CCM-a u podsistem 3 je nekontrolisan i određen ograničenjem kola u vidu minimalne vrednosti napona na kondenzatoru C_1, ali se izlazak iz ovog stanja dešava korišćenjem kontrole na osnovu prekidanja po izvodu funkcije Ljapunova definisanog u jednačini (4.81). Za podsistem 3 je izvod funkcije Ljapunova

$$\dot{V}_3(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}_3 \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{t}, \tag{4.86}$$

gde je vektor $\mathbf{t} = 2\left[\frac{p_1 v_{IN}}{L_1} \;\; \frac{p_2 \overline{x}_4}{L_2} \;\; 0 \;\; \frac{p_{24} \overline{x}_4}{L_2}\right]^T$. Može da se odredi zajednička matrica $\mathbf{P}$ funkcije Ljapunova za sve tri matrice podsistema $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$, koja je istog formata kao u jednačini (4.19). Zato je matrica $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{A}_3^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_3$ istog oblika kao $\mathbf{Q}_2$ iz jednačine (4.21).

Celokupno prekidanje vezano za DCVM može biti podeljeno na interno nekontrolisano prekidanje između podsistema 1 i 3 i kontrolisano prekidanje preko izvoda funkcije Ljapunova između podsistema 1 i 3 i podsistema 2. Pokazuje se da je interno prekidanje nestabilno, ali je ukupno prekidanje stabilno.

Ako je konvertor u podsistemu 3, onda jedino može da preključi u podsistem 1 ili 2. Preključivanje u podsistem 1 je nekontrolisano i izazvano padom struje kroz diodu na nulu, odnosno $x_2 = 0$ i $y_2 = -\overline{x}_2$. Kako je u podsistemu 3 napon na kondenzatoru C_1 jednak nuli, važi $x_3 = 0$ i $y_3 = -\overline{x}_3$.

Nekontrolisano preključivanje između podsistema 1 i 3 je nestabilno. Matrice stanja u jednačinama (2.4) i (2.9) pokazuju da se sistem može kompletno podeliti između dinamike promenljive y_1 i dinamike vektora $\widetilde{\mathbf{y}} = \left[y_2 \; y_3 \; y_4\right]^T$. Kako je dinamika promenljive y_1 očigledno nestabilna, potrebno je pokazati da je nezavisna dinamika vektora $\widetilde{\mathbf{y}}$ stabilna. Kako bi se razdvojile dinamike promenljive y_1 i vektora $\widetilde{\mathbf{y}}$, definiše se pomoćna funkcija Ljapunova data sa:

$$\widetilde{V}(\widetilde{\mathbf{y}}) = \widetilde{\mathbf{y}}^T \begin{bmatrix} p_2 & 0 & p_{24} \\ 0 & p_3 & 0 \\ p_{24} & 0 & p_4 \end{bmatrix} \widetilde{\mathbf{y}}. \tag{4.87}$$

Onda se izvodi pomoćne funkcije Ljapunova mogu napisati pomoću nove notacije $\mathbf{s} = [y_2 \;\; y_4]^T$, $\widetilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z}\langle 2:4\rangle$, $z_1 = \mathbf{z}\langle 1\rangle$, $z_3 = \mathbf{z}\langle 3\rangle$, $\widetilde{\mathbf{t}} = [\mathbf{t}\langle 2\rangle \;\; \mathbf{t}\langle 4\rangle]^T$, $t_1 = \mathbf{t}\langle 1\rangle$, $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\langle 2:4, 2:4\rangle$, $\overline{\mathbf{Q}}_1 = \mathbf{Q}_1\langle 2:4, 2:4\rangle$, $\overline{\mathbf{Q}}_2 = \mathbf{Q}_2\langle 2:4, 2:4\rangle$. Matrice $\widetilde{\mathbf{Q}}_2$ i $\widetilde{\mathbf{Q}}_3$ su dobijene eliminacijom prve i treće kolone i vrste iz matrica $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{Q}_3$. Izvodi pomoćne funkcije Ljapunova su

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{V}}_1(\widetilde{\mathbf{y}}) &= \widetilde{\mathbf{y}}^T \overline{\mathbf{Q}}_1 \widetilde{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}^T \widetilde{\mathbf{z}}, \\ \dot{\widetilde{V}}_3(\widetilde{\mathbf{y}}) &= \mathbf{s}^T \widetilde{\mathbf{Q}}_3 \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \widetilde{\mathbf{t}}. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Treba primetiti da je u podsistemu 3 promenljiva stanja $y_3 = -\overline{x}_3$, odnosno y_3 je konstanta.

Izvodi funkcije Ljapunova (4.88) su negativni za dovoljno veliku vrednost promenljivih stanja, što znači da se uspostavlja ograničena stabilnost u odnosu na dinamiku $\widetilde{\mathbf{y}}$. Negativna definitnost matrice $\overline{\mathbf{Q}}_1$ omogućava da se garantuje

$$\dot{\overline{V}}_1(\widetilde{\mathbf{y}}) \leq \|\widetilde{\mathbf{y}}\|^2 \lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1) + \|\widetilde{\mathbf{y}}\| \, \|\widetilde{\mathbf{z}}\| \leq 0, \tag{4.89}$$

kada je

$$\|\widetilde{\mathbf{y}}\| \geq -\frac{\|\widetilde{\mathbf{z}}\|}{\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)}. \tag{4.90}$$

Ista analiza za podsistem 3 daje

$$\dot{\overline{V}}_3(\widetilde{\mathbf{y}}) \leq \|\mathbf{s}\|^2 \lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{Q}}_3) + \|\mathbf{s}\| \, \|\widetilde{\mathbf{t}}\| \leq 0, \tag{4.91}$$

za

$$\|\mathbf{s}\| \geq -\frac{\|\widetilde{\mathbf{t}}\|}{\lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{Q}}_3)}. \tag{4.92}$$

Očigledno za

$$K_S = \max\left\{-\frac{\|\widetilde{\mathbf{z}}\|}{\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)}, \ \sqrt{\overline{x}_3^2 + \left(\frac{\|\widetilde{\mathbf{t}}\|}{\lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{Q}}_3)}\right)^2}\right\} \tag{4.93}$$

i

$$\widetilde{V}(\widetilde{\mathbf{y}}) \geq \|\widetilde{\mathbf{y}}\|^2 \lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{P}}) \geq K_S^2 \, \lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{P}}) \tag{4.94}$$

važi da je $\dot{\overline{V}}(\widetilde{\mathbf{y}}) \leq -\alpha$, za $\alpha > 0$, što dokazuje ograničenu stabilnost za dinamiku vektora $\widetilde{\mathbf{y}}$. Međutim, kako je dinamika y_1 nestabilna, interno prekidanje između podsistema 1 i 3 je nestabilno.

Bez obzira na nestabilnost preključivanja između podsistema 1 i 3, ukupno preključivanje između podsistema 1, 2 i 3 je ograničeno stabilno što je formulisano u sledećoj teoremi.

Teorema 6. *Trajektorije sistema koje počinju van skupa* $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \leq K\}$*, gde je* $K = \max\{K_1, K_2\}$ *za*

$$K_1 = p_1 K_y^2 + \lambda_{max}\left(\begin{bmatrix} p_2 & p_{24} \\ p_{24} & p_4 \end{bmatrix}\right) K_s^2 + p_3 \overline{x}_3^2,$$

$$K_y = \max\left\{\left|\frac{-\rho + \frac{1}{4}\widetilde{\boldsymbol{t}}^T \widetilde{\boldsymbol{Q}}_3^{-T} \widetilde{\boldsymbol{t}}}{t_1}\right|, \ \frac{-\rho + \frac{1}{4}\widetilde{\boldsymbol{t}}^T \widetilde{\boldsymbol{Q}}_2^{-T} \widetilde{\boldsymbol{t}} + a z_3 \overline{x}_3}{a z_1}\right\},$$

$$K_s = \max\left\{\frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 + 4\lambda_1(\rho + |a| z_3 \overline{x}_3)}}{2\,\lambda_1}, \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4\lambda_2(\rho + z_3 \overline{x}_3)}}{2\lambda_2}\right\},$$

$\lambda_1 = |\lambda_{max}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_2 + |a|\,\widetilde{\boldsymbol{Q}}_3)|$, $E_1 = (1+|a|)\,\|\widetilde{\boldsymbol{t}}\|$, $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{|a|}$, $E_2 = \frac{E_1}{|a|}$; *i*

$$
\begin{aligned}
K_2 &= K_r^2\,\lambda_{max}(\widetilde{\boldsymbol{P}}) + p_1\,K_{y1}^2,\\
K_r &= \sqrt{\frac{\rho}{\left|k_r\,\lambda_{min}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\boldsymbol{Q}}_2 + \overline{\boldsymbol{Q}}_1\right)\right|}} \quad za\ k_r = \begin{cases} 1 & d > \frac{1}{2},\\ |a| & d \le \frac{1}{2}, \end{cases}\\
K_{y1} &= \max\left\{\frac{\left|-\rho + \frac{1}{4}\widetilde{\boldsymbol{z}}^T\overline{\boldsymbol{Q}}_1^{-T}\widetilde{\boldsymbol{z}}\right|}{z_1}, \frac{\rho + \frac{(2|\,\lambda_{max}(\overline{\boldsymbol{Q}}_1)|\,K_r - |\|\widetilde{\boldsymbol{z}}\||)^2 - |\|\widetilde{\boldsymbol{z}}\||^2}{4\,|\lambda_{max}(\overline{\boldsymbol{Q}}_1)|}}{z_1}\right\},
\end{aligned}
$$

će konvergirati u njega.

Dokaz. Pozivom na teoremu 5, konvertor koji preključuje između podsistema 1 i 2 je ograničeno stabilan. Kako je $a\,[\widetilde{\mathbf{z}}\langle 1\rangle\ \widetilde{\mathbf{z}}\langle 3\rangle] = \widetilde{\mathbf{t}}$ i $z_1 = t_1$, izvodi funkcije Ljapunova u podsistemima 2 i 3 se mogu zapisati kao

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2(\mathbf{y}) &= \mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_2\,\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}} + a\,z_1\,y_1 + a\,z_3\,y_3,\\
\dot{V}_3(\mathbf{y}) &= \mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3\,\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}} + t_1\,y_1.
\end{aligned}
\tag{4.95}
$$

Donja granična norma vektora $\mathbf{s}$ se može odrediti za dva slučaja. Prvi slučaj je kada je $0 < \dot{V}_3(\mathbf{y}) < \rho$. Kako bi bio zadovoljen uslov za prekidanje, treba da bude $\dot{V}_2(\mathbf{y}) < -\rho$. Na osnovu $\dot{V}_3(\mathbf{y}) > 0$ se dobija $y_1 > -\frac{1}{t_1}\left(\mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3\,\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}}\right)$, pa je

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_2(\mathbf{y}) < \mathbf{s}^T\,(\widetilde{\mathbf{Q}}_2 + |a|\widetilde{\mathbf{Q}}_3)\,\mathbf{s} + (1+|a|)\,\mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}} + |a|z_3\overline{x}_3\\
&\le \|\mathbf{s}\|^2\,\lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{Q}}_2 + |a|\widetilde{\mathbf{Q}}_3) + (1+|a|)\,\|\mathbf{s}\|\,\|\widetilde{\mathbf{t}}\| + |a|z_3\overline{x}_3 < -\rho.
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

Poslednja nejednakost rezultuje

$$
-\|\mathbf{s}\|^2\,\lambda_1 + E_1\,\|\mathbf{s}\| + |a|\,z_3\,\overline{x}_3 + \rho < 0,
\tag{4.97}
$$

što je zadovoljeno ako je

$$
\|\mathbf{s}\| > \frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 + 4\lambda_1\,(\rho + |a|z_3\overline{x}_3)}}{2\,\lambda_1},
\tag{4.98}
$$

gde je $\lambda_1 = |\lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{Q}}_2 + |a|\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3)|$ i $E_1 = (1+|a|)\,\|\widetilde{\mathbf{t}}\|$.

Drugi slučaj je kada Ćuk konvertor radi u podsistemu 2 i važi $0 < \dot{V}_2(\mathbf{y}) < \rho$. Sistem će da preključi u podsistem 3 samo ako je $\dot{V}_3(\mathbf{y}) < -\rho$ i $y_3 = -\overline{x}_3$. Ako uslov $y_3 = -\overline{x}_3$ nije zadovoljen, sistem može da preključi jedino iz podsistema 1 u podsistem 2. Na osnovu

$\dot{V}_2(\mathbf{y}) > 0$ se dobija $y_1 < \frac{1}{a\,z_1}\,(-\mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_2\,\mathbf{s} - \mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{t}} + a\,z_3\,\overline{x}_3)$ koji rezultuje

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(\mathbf{y}) &< \mathbf{s}^T\,\left(\widetilde{\mathbf{Q}}_3 + \tfrac{1}{|a|}\widetilde{\mathbf{Q}}_2\right)\mathbf{s} + \left(1 + \tfrac{1}{|a|}\right)\mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}} + z_3\overline{x}_3 \\ &\leq \|\mathbf{s}\|^2\,\lambda_{max}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}_3 + \tfrac{1}{|a|}\widetilde{\mathbf{Q}}_2\right) + \left(1 + \tfrac{1}{|a|}\right)\|\mathbf{s}\|\,\|\widetilde{\mathbf{t}}\| + z_3\overline{x}_3 < -\rho.\end{aligned} \tag{4.99}$$

Nejednačina (4.99) daje

$$-\|\mathbf{s}\|^2\,\lambda_2 + E_2\,\|\mathbf{s}\| + z_3\overline{x}_3 + \rho < 0, \tag{4.100}$$

koja je zadovoljena za

$$\|\mathbf{s}\| > \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4\lambda_2\,(\rho + z_3\overline{x}_3)}}{2\,\lambda_2}, \tag{4.101}$$

gde je $\lambda_2 = \left|\lambda_{max}\left(\widetilde{\mathbf{Q}}_3 + \frac{1}{|a|}\widetilde{\mathbf{Q}}_2\right)\right| = \frac{\lambda_1}{|a|}$ i $E_2 = \left(1 + \frac{1}{|a|}\right)\|\widetilde{\mathbf{t}}\| = \frac{E_1}{|a|}$. Na osnovu (4.98) i (4.101) je donja granica za $\|\mathbf{s}\|$ data sa

$$K_s = \max\left\{\frac{E_1 + \sqrt{E_1^2 + 4\lambda_1\,(\rho + |a|z_3\overline{x}_3)}}{2\,\lambda_1},\ \frac{E_2 + \sqrt{E_2^2 + 4\lambda_2\,(\rho + z_3\overline{x}_3)}}{2\,\lambda_2}\right\}. \tag{4.102}$$

Donja granica za promenljivu $|y_1|$ se određuje na osnovu dve mogućnosti. Prva mogućnost je kada važi $0 < \dot{V}_3 < \rho$, što daje uslov za prekidanje $\dot{V}_2 < -\rho$, koji je zadovoljen za pozitivne vrednosti struje y_1 jednake

$$y_1 \geq \frac{-\rho - \max\left\{\mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_2\,\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}}\right\} + az_3\overline{x}_3}{az_1} = \frac{-\rho + \frac{1}{4}\,\widetilde{\mathbf{t}}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_2^{-T}\widetilde{\mathbf{t}} + az_3\overline{x}_3}{az_1}. \tag{4.103}$$

Druga mogućnost je kada se prekljućuje iz podsistema 2 u podsistem 3 dok je y_1 negativno. Tada nejednakost $\dot{V}_3 < -\rho$ daje

$$y_1 \leq \frac{-\rho - \max\left\{\mathbf{s}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3\,\mathbf{s} + \mathbf{s}^T\widetilde{\mathbf{t}}\right\}}{t_1} = \frac{-\rho + \frac{1}{4}\,\widetilde{\mathbf{t}}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3^{-T}\widetilde{\mathbf{t}}}{t_1}. \tag{4.104}$$

Na osnovu (4.103) i (4.104) je donja granica za $|y_1|$ jednaka

$$K_y = \max\left\{\left|\frac{-\rho + \frac{1}{4}\,\widetilde{\mathbf{t}}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_3^{-T}\widetilde{\mathbf{t}}}{t_1}\right|,\ \frac{-\rho + \frac{1}{4}\,\widetilde{\mathbf{t}}^T\,\widetilde{\mathbf{Q}}_2^{-T}\widetilde{\mathbf{t}} + az_3\overline{x}_3}{az_1}\right\}. \tag{4.105}$$

Ukupna donja granica za podsisteme 2 i 3 je $K_1 = p_1\,K_y^2 + \lambda_{max}\left(\begin{bmatrix} p_2 & p_{24} \\ p_{24} & p_4 \end{bmatrix}\right)K_s^2 + p_3\,\overline{x}_3^2$.

Na osnovu teoreme 5 donja granica za prekidanje između podsistema 1 i 2 je

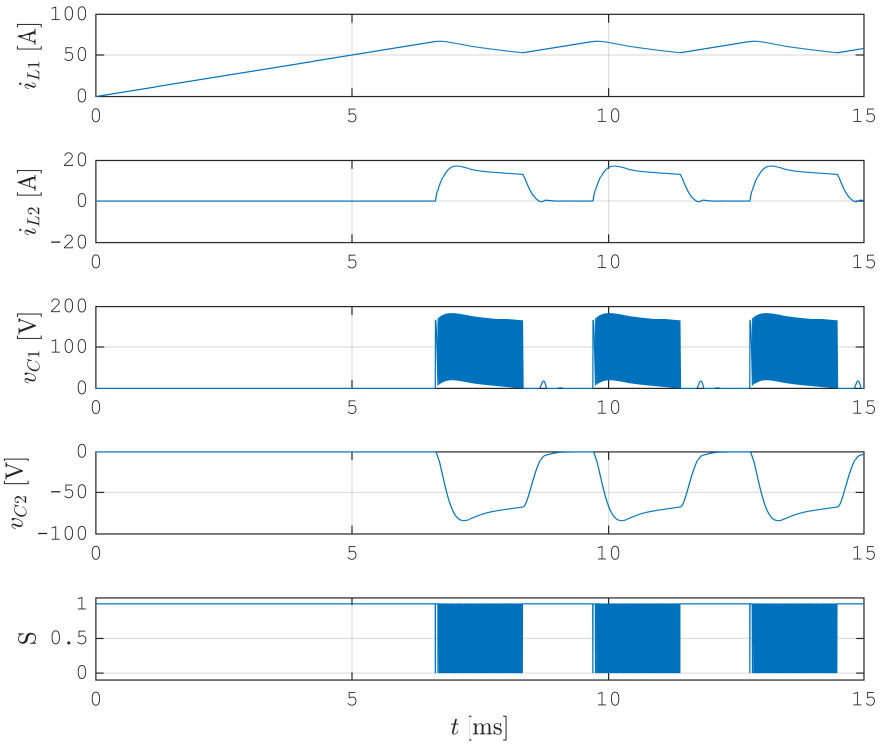
$$
\begin{aligned}
K_2 &= K_r^2\,\lambda_{max}(\widetilde{\mathbf{P}}) + p_1\,K_{y1}^2,\\
K_r &= \sqrt{\frac{\rho}{\left|k_r\,\lambda_{min}\left(\frac{1}{|a|}\,\overline{\mathbf{Q}}_2 + \overline{\mathbf{Q}}_1\right)\right|}} \quad \text{for } k_r = \begin{cases} 1 & d > \frac{1}{2},\\ |a| & d \le \frac{1}{2}, \end{cases}\\
K_{y1} &= \max\left\{\frac{\left|-\rho + \frac{1}{4}\overline{\mathbf{z}}^T\overline{\mathbf{Q}}_1^{-T}\overline{\mathbf{z}}\right|}{z_1}, \frac{\rho + \frac{(2|\,\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|\,K_r - |\overline{\mathbf{z}}\|)^2 - |\overline{\mathbf{z}}\|^2}{4\,|\lambda_{max}(\overline{\mathbf{Q}}_1)|}}{z_1}\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.106}
$$

Sada je $K = \max\{K_1, K_2\}$ atraktivni skup za koji važi $\{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \le K\}$. Van ovog atraktivnog skupa, oba izvoda $\dot{V}_2(\mathbf{y})$ i $\dot{V}_3(\mathbf{y})$ su negativna ili je njihova razlika veća od vrednosti parametra ρ, što implicira da je prekidanje između podsistema 2 i kombinovanog podsistema 1 i 3 ograničeno stabilno. □

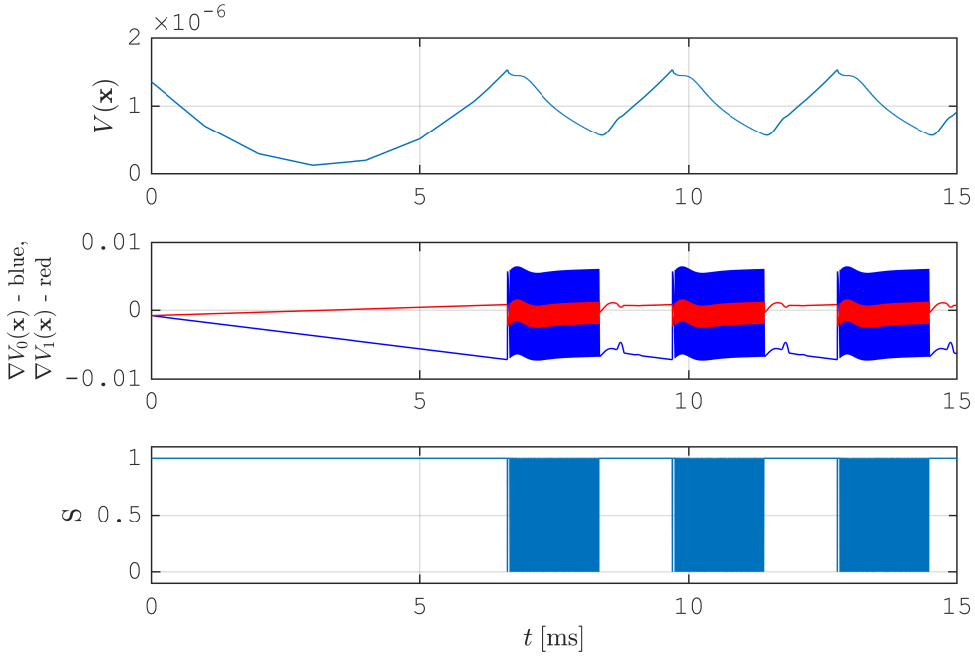
Važno je napomenuti da se iz podsistema 1 ili 3 ne može preključiti u diskontinualni podsistem 4. Preključivanje u podsistem 4 (DICM) je bazirano na uslovu da je $x_1 + x_2 = 0$. U podsistemu 3 struja x_1 linearno raste i pozitivna je, dok je struja x_2 takođe pozitivna zato što predstavlja struju koja teče kroz diodu D, pogledati sl. 2.2a. Jasno je da je nemoguće zadovoljiti uslov $x_1 + x_2 = 0$. Slično je u podsistemu 1 u kome struja x_1 linearno raste i ne može biti jednaka po apsolutnoj vrednosti struji x_2.

Bez pojednostavljenja, a sa razlogom bolje prezentacije prethodne analize, uzet je primer Ćuk konvertora sa sl. 2.2a sa vrednostima elemenata u kolu $L_1 = L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 20$ μF, $R = 5$ Ω i $v_{IN} = 10$ V. Na sl. 4.7 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja za parametar histerezisa $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$ i $d = 0.8$. Očigledno je u pojedinim intervalima vremena napon na kondenzatoru C_1 jednak nuli, odnosno $v_{C1} = x_3 = 0$ V, i tada konvertor radi u režimu DCVM (podsistem 3). Kao što se vidi sa sl. 4.7, nakon ulaska u podsistem 3, sistem može da preključuje između podsistema 1 i 3 sve dok ne preključi u 2. Dodatno, na sl. 4.8 su prikazani vremenski dijagrami funkcije Ljapunova, izvod funkcije Ljapunova pri čemu je sa $\nabla V_0(\mathbf{x}) = \dot{V}_i(\mathbf{x}),\ i = \{2, 4\}$ označeno stanje kada je prekidač S isključen i jednak je $\dot{V}_2(\mathbf{x})$ ili $\dot{V}_4(\mathbf{x})$ u zavisnosti koji je podsistem aktivan, 2 ili 4, dok je sa $\nabla V_1(\mathbf{x}) = \dot{V}_i(\mathbf{x}),\ i = \{1, 3\}$ označen izvod funkcije Ljapunova kada je prekidač S uključen u podsistemima 1 ili 3.

Numeričke vrednosti za simulirni Ćuk konvertor procenjene su za donju granicu preključivanja između podsistema 2 i 3 računati pomoću jednačina (4.102) i (4.105) su $K_y = 641.3132$, $K_s = 385.1389$ i $K_1 = 6.7679 \cdot 10^{-4}$, u odgovrajućim jedinicama mere.



Slika 4.7: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji preključuje između CCM-a i DCVM-a za* $d = 0.8$ *i* $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$.



Slika 4.8: *Vremenski dijagrami funkcije Ljapunova i izvoda funkcije Ljapunova Ćuk konvertora koji preključuje između CCM-a i DCVM-a za* $d = 0.8$ *i* $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$.

4.5.2 Rad Ćuk konvertora u DICM režimu

Slično kao DCVM, režim DICM nastupa između prekidanja iz podsistema 2 u podsistem 1. Ako uslov za preključivanje iz podsistema 2 u 1 nije ispunjen, tj. ako je $\dot{V}_2(\mathbf{y}) = \dot{V}_1(\mathbf{y}) + \rho$, i ako je zbir struje kalemova $x_1 + x_2 = 0$, nastupa DICM. Nejednakost koja je zadovoljena sve dok se ne preključi iz podsistema 2 u 1 je

$$\frac{\alpha_3^2 |q_{33}| - \rho}{1 - a} < \alpha_1 z_1 + \alpha_3 z_3 < 0 \tag{4.107}$$

ili

$$0 < a\,(\alpha_1 z_1 + \alpha_3 z_3) < \frac{|a|\,(-\alpha_3^2 |q_{33}| + \rho)}{1 - a}. \tag{4.108}$$

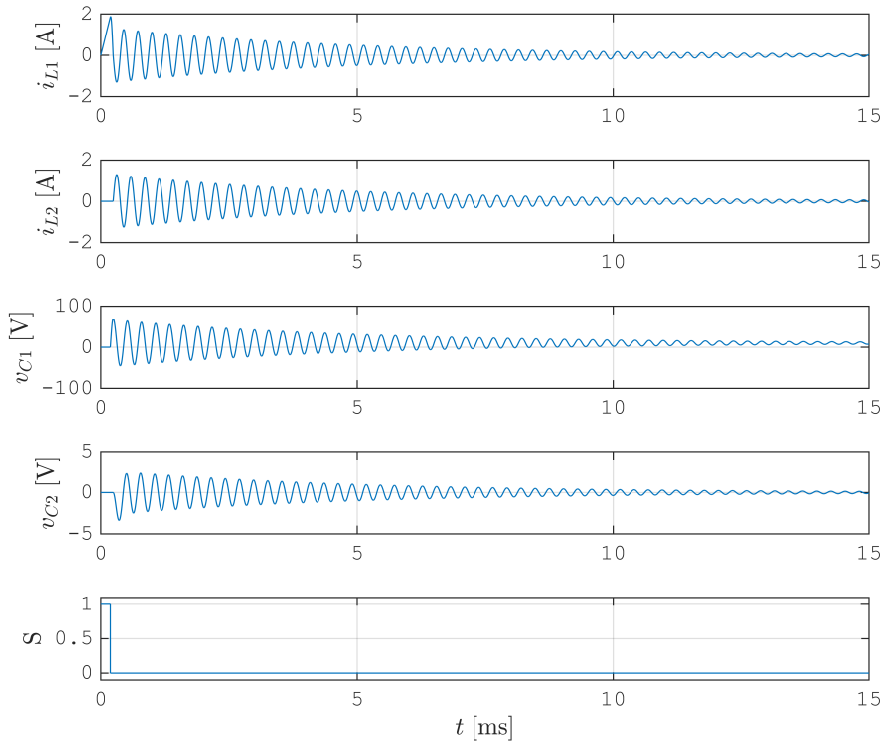
Očigledno je da kada parametar ρ ima dovoljno veliku vrednost, uslov za preključivanje neće biti zadovoljen i konvertor će ući diskontinualni režim DICM.

Nakon ulaska u DICM konvertor konvergira ka novom ekvilibrijumu $\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_{IN} & 0 \end{bmatrix}^T$. Očigledno, kada uslov za preključivanje u podsistem 1 dat jednačinom (4.107) nije zadovoljen, konvertor će nakon ulaska u podsistem 4 u njemu i ostati i dalje neće preključivati. Naime, u DICM-u može da se elminiše jedna promenljiva stanja jer važi $x_1 = -x_2$. Novi redukovani sistem za vektor $\widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{x}\langle 2:4\rangle - \mathbf{x}_e\langle 2:4\rangle$ je dat sa

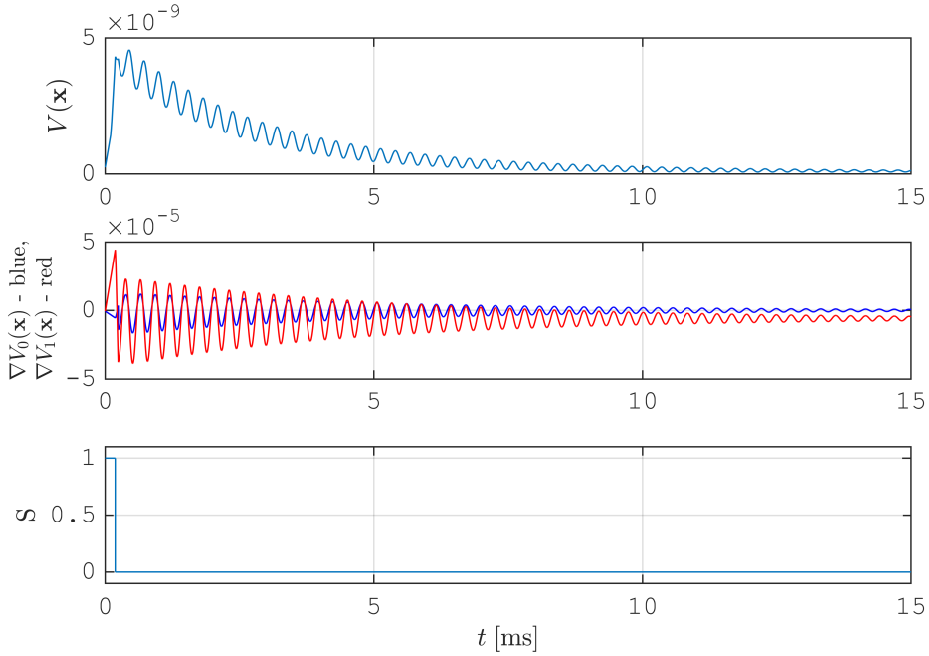
$$\dot{\widehat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}_4\langle 2:4, 2:4\rangle\ \widehat{\mathbf{y}}, \tag{4.109}$$

jer je $\mathbf{A}_4\langle 2:4, 2:4\rangle\ \mathbf{x}_e\langle 2:4\rangle + \mathbf{B}_4\langle 2:4\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Kako je matrica $\mathbf{A}_4\langle 2:4, 2:4\rangle$ stabilna, vektor promenljivih $\widehat{\mathbf{y}}$ konvergira $\mathbf{0}$, odnosno $\mathbf{x}\langle 2:4\rangle$ konvergira ka ekvilibrijumu $\mathbf{x}_e\langle 2:4\rangle$.

Na sl. 4.9 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja za $d = 0.1$ i $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$ sa kojih se vidi da nakon ulaska u DICM konvertor nastavlja da radi u ovom podsistemu. Činjenica da konvertor radi samo u DICM-u može biti proverena na petom dijagramu sa sl. 4.9 gde je prikazan dijagram rada prekidača S koji uzima vrednosti 1 kada je prekidač uključen i 0 za isključen prekidač. U ovom slučaju je stanje prekidača S na logičkoj nuli od trenutka kada se završi inicijalni tranzijent i izjednači zbir struja $x_1 + x_2 = 0$. Na ovaj način se isključuje mogućnost da sistem preključi u podsistem 1, što se vidi sa sl. 4.9. Pored toga se vidi da promenljive stanja konvergiraju novom ekvilibrijumu $\mathbf{x}_e$. Na sl. 4.10 su prikazani vremenski dijagrami funkcije Ljapunova, izvod funkcije Ljapunova pri čemu je sa $\nabla V_0(\mathbf{x}) = \dot{V}_i(\mathbf{x}),\ i = \{2, 4\}$ označeno stanje kada je prekidač S isključen i jednak je $\dot{V}_2(\mathbf{x})$ ili $\dot{V}_4(\mathbf{x})$ u zavisnosti koji je podsistem aktivan, 2 ili 4, dok je sa $\nabla V_1(\mathbf{x}) = \dot{V}_i(\mathbf{x}),\ i = \{1, 3\}$ označen izvod funkcije Ljapunova kada je prekidač S uključen u podsistemima 1 ili 3, za Ćuk konvertor koji radi u DICM-u.



Slika 4.9: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora koji radi u DICM-u za* $d = 0.1$ *i* $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$.



Slika 4.10: *Vremenski dijagrami funkcije Ljapunova i izvoda funkcije Ljapunova Ćuk konvertora koji radi u DICM-u za* $d = 0.1$ *i* $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$.

4.6 Zaključak

U ovoj glavi je projektovana histerezisna kontrola koja je zasnovana na zakonu preključivanja na osnovu minimuma izvoda funkcije Ljapunova. Kontrola se projektuje na osnovu zadatih vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju i željene frekvencije prekidanja. Ovako kontrolisani sistem je stabilan u svim režimima rada DC-DC konvertora.

Na primeru Ćuk konvertora koji predstavlja kompleksni DC-DC konvertor četvrtog reda sa granično stabilnim podsistemima, je prikazano projektovanje kontrolera. Kako se za procenu stabilnosti i realizaciju preključivanja koristi kvadratna funkcija Ljapunova, u slučaju Ćuk konvertora odgovarajuća matrica izvoda funkcije Ljapunova $\mathbf{Q}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ nije čisto negativno definitna. Naime, zbog granične stabilnosti podsistema konvertora dobija se semidefinitnost izvoda funkcije Ljapunova. Zbog toga odgovarajuće matrice funkcije Ljapunova imaju specifičan format koji je određen u ovoj glavi.

Semidefinitnost funkcije Ljapunova Ćuk konvertora daje uopštenje dosadašnjih rezultata projektovanja i primene histerezisne kontrole na DC-DC konvertore. U ovoj glavi je analizirana stabilnost histerezisno kontrolisanog sistema Ćuk konvertora u svim mogućim režimima rada. Pokazano je da je sistem stabilan i u kontinualnim i u diskontinualnim režimima. Dodatno je pokazano i koje vrednosti parametra histerezisa dovode do rada Ćuk konvertora samo u diskontinualnim režimima i analizirana je dinamika sistema nakon ulaska u jedan od dva diskontinualna režima.

Sama histerezisna kontrola kod koje se preključivanje definiše na osnovu minimuma funkcije Ljapunova je jednostavna sa stanovišta realizacije kontrolera koji se može realizovati i digitalno korišćenjem digitalnih procesora signala ili mikrokontrolera.

Glava 5

Kontrola DC-DC konvertora korišćenjem *piecewise linear* funkcija Ljapunova

5.1 Koncept *piecewise linear* funkcije Ljapunova

Stabilno upravljanje prekidačkim kolima kao što su DC-DC konvertori je veoma česta tema istraživanja [59]. Pažljivim formiranjem zakona prekidanja (preključivanja između podsistema) unutar konvertorskog sistema dobija se stabilan sistem [60]. U poglavlju 4 je pokazano da se DC-DC konvertorom može upravljati korišćenjem kvadratne funkcije Ljapunova. U poglavlju 4 je i određen specijalan oblik kvadratne funkcija Ljapunova za primer Ćuk konvertora koji je jedan od najkompleksnijih konvertora.

Novija istraživanja upravljanja prekidačkim sistemima su bazirana na formiranju višestrukih funkcija Ljapunova [23] i to posebno *Piecewise Linear Lyapunov Functions* - PLLF [61]. Naime, formiranjem skupa na kome su definisana stanja odnosno podsistemi rada konvertora i konstrukcijom funkcija Ljapunova korišćenjem norme koja nije kvadratna, postiže se stabilan sistem [62–65]. U nastavku će biti opisan način formiranja politopske funkcije Ljapunova.

5.1.1 Notacija i osnovne definicije

Prilikom analize politopskih i *piecewise linear* funkcija Ljapunova koristićemo se notacijom iz rada [61]. U nastavku će biti date definicije i notacija osnovnih pojmova.

1. Konveksni skup

   Definicija 5.1.1. Za skup $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan ako i samo ako za bilo koje dve tačke $x \in \mathbf{P}$ i $y \in \mathbf{P}$ važi da je zatvoreni segment $[x, y]$ unutar skupa $\mathbf{P}$.

2. Potporni poluprostor i potporna hiperravan

   Definicija 5.1.2. Neka je $\mathbf{P}$ neprazni konveksni skup unutar $\mathbb{R}^n$. Potporni prostor skupa $\mathbf{P}$ je zatvoreni poluprostor $\mathbf{S}_- = \mathbf{H}_{S-}(\alpha, \mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \leq \alpha\}$ takav da važi $\mathbf{S}_- \subseteq \mathbf{P}$ i $\mathbf{H} \cap \mathbf{P} = \varnothing$, gde je $\mathbf{H} = \mathbf{H}_P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \alpha\}$, $\mathbf{a}$ je normala na hiperravan $\mathbf{H}$, a α je realni broj. Hiperravan $\mathbf{H}$ se zove potporna hiperravan. Ako $\mathbf{P}$ nije sadržano unutar hiperravni $\mathbf{P}$, $\mathbf{H}$ se zove prava potporna hiperravan.

3. Linearna, afina i konveksna kombinacija

   Definicija 5.1.3. Linearna kombinacija vektora $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_m$ je vektor oblika $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m$, gde $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

   Definicija 5.1.4. Linearna kombinacija se naziva afina kombinacija ako je zadovoljeno $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.

   Definicija 5.1.5. Afina kombinacija se naziva konveksna kombinacija ako je $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

4. Linearni, afin, konveksni i konveksni konični omotač

   Definicija 5.1.6. Neka je $\mathbf{V}$ podskup $\mathbb{R}^n$. Linearni, afin, konveksni i konveksni konični omotač su redom dati izrazima:

   $$\begin{aligned}
   &\text{span}(\mathbf{V}) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 | \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbf{V}, i = 1, 2\}, \\
   &\text{aff}(\mathbf{V}) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 | \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathbf{V}, i = 1, 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}, \\
   &\text{conv}(\mathbf{V}) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 | \lambda_i \in [0, +\infty), v_i \in \mathbf{V}, i = 1, 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}, \\
   &\text{cc}(\mathbf{V}) = \{\mu \mathbf{v} | \mathbf{v} \in \text{conv}(\mathbf{V}), \mu \geq 0\}.
   \end{aligned}$$

5. Lice (*face*), strana (*facet*) i ekstremne tačke

   Definicija 5.1.7. Konveksni podskup $\mathbf{F}$ konveksnog skupa $\mathbf{P}$ se zove lice skupa $\mathbf{P}$ ako za bilo koje dve različite tačke $x, y \in \mathbf{P}$ takve da je $(x, y) \cap \mathbf{F}$ neprazan skup, važi da je $[x, y] \subseteq \mathbf{F}$.

   Prazan skup i skup $\mathbf{P}$ su takođe lica skupa $\mathbf{P}$.

   Lice $\mathbf{F}$ se naziva *k-face* ako je $\dim(\mathbf{F}) = k$.

   Strana skupa $\mathbf{P}$ je lice $\mathbf{F}$ za koje važi da je $0 \leq \dim(\mathbf{F}) = \dim(\mathbf{P}) - 1$.

   Definicija 5.1.8. Tačka $x \in \mathbf{P}$ je ekstremna tačka konveksnog skupa $\mathbf{P}$ ako je $\{x\}$ lice skupa $\mathbf{P}$.

Skup ekstremnih vrednosti skupa **P** se označava kao ext(**P**).

6. Politopa

Definicija 5.1.9. Politopa je konveksni omotač of nepraznog konačnog skupa vektora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m\}$.

Za dva vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^n$ se sa $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ označava skalarni proizvod.

Za skup $\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ se unutrašnjost skupa označava sa int(**P**), a granica sa bd(**P**).

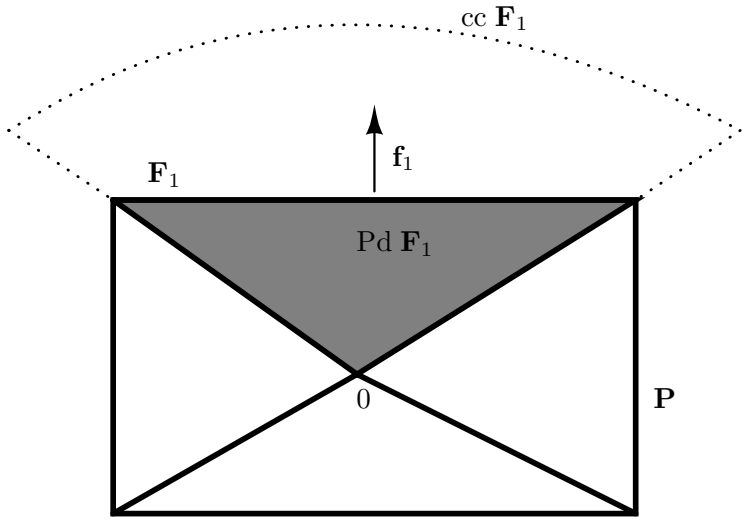
Ako je sa **P** označena politopa, oznake ext(**P**) i **F**(**P**) označavaju skupove ekstremnih vrednosti i strana politpope **P**, redom.

5.1.2 *Piecewise linear* funkcije Ljapunova

Posmatrajmo prekidački sistem dat sa [66, 67]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}) \in \mathrm{conv}\,\{\mathbf{A}_1\,\mathbf{x},\ \mathbf{A}_2\,\mathbf{x}, \cdots,\ \mathbf{A}_Q\,\mathbf{x}\} \tag{5.1}$$

gde je $\mathbf{x} \in \mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ vektor promenljivih stanja, a Q broj podsistema u sistemu. Sa conv $\{\cdot\}$ se označava konveksni omotač koji sadrži ekvilibrijum $\overline{\mathbf{x}} = 0$ kao unutrašnju tačku ove politope. Na sl. 5.1 je dat primer jednog polihedrona u čijoj unutrašnjosti se nalazi **0**.



Slika 5.1: *Polihedron kao primer.*

Neka je $\{\mathbf{F}_i\}_{i=1}^{I}$ skup svih stranica polihedrona **P**. Za svaku stranicu se može definisati konveksni konični omotač kao

$$\mathrm{cc}\ \mathbf{F}_i = \{\rho\,\mathbf{x} : \rho \geq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{F}_i\} \tag{5.2}$$

i piramida kao

$$\text{Pd } \mathbf{F}_i = \text{conv}\left\{\{0\} \cup \mathbf{F}_i\right\} \subseteq \text{cc } \mathbf{F}_i. \tag{5.3}$$

Označimo sa $\mathbf{L} = \{1, \cdots, l\}$ skup indeksa hiperravni $\left\{\mathcal{H}(\eta_j)\right\}_{j\in\mathbf{L}}$, $\mathcal{H}(\eta_j) = \left\{\mathbf{x} : \eta_j^T\,\mathbf{x} = 0\right\}$ koje presecaju 0 i sadrže stranice piramide Pd $\mathbf{F}_i$ za neko i, videti sl. 5.1 na kojoj su stranice označene debelom linijom.

Ako se sa $\mathbf{f}_i$ označi normala na stranicu $\mathbf{F}_i$ polihedrona $\mathbf{P}$, onda važi [68]

$$\mathbf{P} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{f}_i^T\,\mathbf{x} \leq 1, i = 1, \cdots L\right\}, \tag{5.4}$$

pa se funkcija Ljapunova može konstruisati tako da važi

$$V_P(\mathbf{x}) = \max_{1\leq j\leq L}\left\{\mathbf{f}_i\,\mathbf{x}\right\}. \tag{5.5}$$

Kao što je u [68] pokazano, važi i $\mathbf{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V_P(\mathbf{x}) \leq 1\}$.

Ukoliko je polihedron $\mathbf{P}$ simetričan i ograničen, naziva se politopa i važi da je

$$V_P(\mathbf{x}) = \|\mathbf{F}\,\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m}\left\{|\mathbf{f}_i\,\mathbf{x}|\right\}, \tag{5.6}$$

za $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, što odgovara beskonačnoj normi.

Stabilnost sistema se provera primenom sledeće teoreme.

Teorema 7. *Funkcija $V_P(\boldsymbol{x}) = \max_{1\leq j\leq L}\{\boldsymbol{f}_i\,\boldsymbol{x}\}$ je funkcija Ljapunova sistema*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

ako je ispunjen potreban i dovoljan uslov (i važi da je politopa $\boldsymbol{P}$ invarijantna u odnosu na dinamiku $\boldsymbol{A}$):

$$\boldsymbol{f}_i\,\dot{\boldsymbol{x}} \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \text{bd}\,\boldsymbol{P}, \quad i \in \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \left\{i \in \{1, \cdots, m\} : \boldsymbol{f}_i\,\boldsymbol{x} = V_P(\boldsymbol{x})\right\},$$

gde je $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ skup indeksa koji odgovaraju aktivnim stranicama.

Prethodna teorema 7 kaže da je za stabilnost konstruisane politope potreban i dovoljan uslov da je na njenim stranicama izvod funkcije Ljapunova negativan.

Razvijeni su brojni algoritmi za određivanje *piecewise linear* funkcije Ljapunova. Radovi [62, 65] daju procenu odgovarajuće matrice $\mathbf{Q}$ koja se koristi za stabilizaciju prekidačkog sistema koji se sastoji iz stabilnih podsistema.

Politopa $\mathbf{P}$ se može deliti na manje politope pomenutim hiperravnima na više različitih načina kako bi se dobila preciznija procena stabilnosti. Radovi [68–71] opisuju razvoj *ray-gridding* algoritma koji se zasniva na formiranju politope tako što se iz 0 povlače

prave pod različitim uglovima i proverava ispunjenost uslova o stabilnosti unutar formiranih hiperravni. Međutim, algoritam se može primeniti samo u slučaju kada sistem prekida između stabilnih podsistema.

Pored pomenutog, razvijeni su i brojni drugi algoritmi [44, 66, 67, 72]. Pristup [66] se zasniva na usitnjavanju politope **P**. Mana razvijenog algoritma iz rada [66] jeste zavisnost rezultata projektovanja funkcije Ljapunova od izbora početnog uslova vektora promenljivih stanja $\mathbf{x}(0)$. Osim toga pomenuti algoritam nema ni garanciju konvergencije sistema.

Sa druge strane u radu [44] se razmatra konstruisanje politope za podsisteme koji mogu biti i stabilni i nestabilni formiranjem odgovarajućih matrica $\mathbf{L}_q$ i $\mathbf{R}_q$. Naime, sistem promenljivih stanja **x** definisan sa

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{5.7}$$

se transformiše množenjem sa leve strane matricom $\mathbf{L}_q$ i sa desne strane matricom $\mathbf{R}_q$ u stabilan sistem novih promenljivih stanja $\xi = \mathbf{R}_q\,\mathbf{x}$

$$\dot{\xi} = \mathbf{L}_q\,\mathbf{A}\,\mathbf{R}_q\,\xi, \tag{5.8}$$

pri čemu je $\mathbf{L}_q\,\mathbf{A}\,\mathbf{R}_q < 0$ i $\mathbf{L}_q\,\mathbf{R}_q = \mathbf{I}$, gde je sa **I** označena jedinična matrica odgovarajućih dimenzija. Ovaj rezultat nije direktno primenljiv na DC-DC konvertore, zato što pored linearnog dela, diferencijalne jednačine sadrže i konstantnu matricu, to jest $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}$.

5.2 PLLF kontrola Ćuk konvertora

Kako se politopska funkcija Ljapunova konstruiše da Ćuk konvertor radi u CCM režimu, odnosno da preključuje između podsistema 1 i 2, može se napisati jednačina stanja svakog od podsistema kao

$$\dot{y} = \mathbf{A}_j\,(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}_j\,\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_j = \mathbf{A}_j\,\mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_j \tag{5.9}$$

za $j = 1, 2$. Na osnovu $\overline{B}_j = \mathbf{A}_j\,\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_j$ računaju se matrice

$$\overline{B}_1 = \left[\frac{v_{IN}}{L_1}\ \frac{v_{IN}}{L_2}\ -\frac{dv_{IN}}{(1-d)\,RC_1}\ 0\right]^T \tag{5.10}$$

i

$$\overline{B}_2 = -\frac{d}{1-d}\left[\frac{v_{IN}}{L_1}\ \frac{v_{IN}}{L_2}\ -\frac{dv_{IN}}{(1-d)\,RC_1}\ 0\right]^T = a\,\overline{B}_1, \tag{5.11}$$

gde je $a = -\frac{d}{1-d}$. Kako se upravljanje projektuje da konvertor radi samo u kontinualnim režimima, mogu se posmatrati obe varijante Ćuk konvertora sa sl. 2.2.

Definišimo funkciju Ljapunova Ćuk konvertora kao

$$V(\mathbf{y}) = \max_{i \in \mathbf{I}} \{|k_i\, y_i|\} \tag{5.12}$$

gde je $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$ varijacija vrednosti promenljivih stanja oko ekvilibrijuma, sa ekvilibrijumom predstavljenim kao $\overline{\mathbf{x}} = \left[\frac{d^2\, v_{IN}}{(1-d)^2\, R} \;\; \frac{d\, v_{IN}}{(1-d)\, R} \;\; \frac{v_{IN}}{1-d} \;\; -\frac{d\, v_{IN}}{1-d}\right]^T$. U jednačini (5.12) sa $\mathbf{I}$ je označen neprazni podskup indeksa promenljivih stanja koje je moguće kontrolisati $\mathbf{I} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Pod pretpostavkom da se za $j \in \mathbf{I}$ dobija maksimalna apsolutna vrednost u izrazu (5.12):

$$V(\mathbf{y}) = |k_j\, y_j| = k_j\, y_j\, \mathrm{sgn}(k_j\, y_j), \tag{5.13}$$

računa se izvod funkcije Ljapunova kao

$$\dot{V}_i(\mathbf{y}) = k_j\, \dot{y}_j\, \mathrm{sgn}(k_j\, y_j) = k_j\, \mathrm{sgn}(k_j\, y_j)\, (\mathbf{A}_i\, \langle j, 1:4 \rangle\; \mathbf{y} + \overline{B}_i\, \langle j \rangle), \tag{5.14}$$

gde je $i = 1, 2$ zavisno od podsistema u CCM-u u kome radi Ćuk konvertor.

Za stabilnost sistema je potrebno da izvod funkcije Ljapunova iz jednačine (5.14) bude negativan.

Za definisanu *piecewise linear* funkciju Ljapunova (5.12) se dobija politopa $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 : |k_i\, y_i| \leq 1,\; i \in \mathbf{I}\right\}. \tag{5.15}$$

na osnovu koje je zakon prekidanja dat sa

$$q = \begin{cases} 0 & \text{ako je 1 i } k_i\, y_i \geq 1, \\ \{0, 1\} & \text{ako je } \{0, 1\} \text{ i } -1 \leq k_i\, y_i \leq 1, \\ 1 & \text{ako je 0 i } k_i\, y_i \leq -1, \end{cases} \qquad i \in \mathbf{I}. \tag{5.16}$$

Kako je apsolutna promena vrednosti promenljivih stanja u ustaljenom stanju u CCM-u

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{v_{IN}\, d\, T_S}{L_1}, \\ \Delta y_2 &= \frac{v_{IN}\, d\, T_S}{L_2}, \\ \Delta y_3 &= \frac{v_{IN}\, d^2\, T_S}{(1-d)\, R\, C_1}, \\ \Delta y_4 &= 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

i važi da je u trenucima promene stanja prekidača S $t = 0$, $t = d\, T_S$ i $t = T_S$ na jednoj

periodi prekidanja T_S (pri čemu je za početni trenutak uzeto $t_0 = 0$):

$$\begin{aligned} &y_1(d\,T_S) \geq 0, && y_1(0) = y_1(T_S) \leq 0, \\ &y_2(d\,T_S) \geq 0, && y_2(0) = y_2(T_S) \leq 0, \\ &y_3(d\,T_S) \leq 0, && y_3(0) = y_3(T_S) \geq 0, \\ &y_4(0) = y_4(d\,T_S) = y_4(T_S) \leq 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Potrebno je još napomenuti da se stanje prekidača S, koje je označeno sa q, menja sa 0 na 1 u trenucima $t = 0$ i $t = T_S$, a sa 1 na 0 u trenutku $t = d\,T_S$.

S' obzirom da je CCM režim Ćuk konvertora ostvaren kao preključivanje između granično stabilnih podsistema 1 i 2, može se odrediti koje je vrednosti potrebno da imaju koeficijenti funkcije Ljapunova k_i iz jednačine (5.15). Sledeća teorema 8 pokazuje kako je potrebno izabrati pomenute koeficijente da bi Ćuk konvertor upravljan *piecewise-linear* funkcijama Ljapunova bio stabilan.

Teorema 8. *Za prekidanje definisano jednačinom (5.16) i primenjenu politopu* $\boldsymbol{P}$ *definisanu jednačinom (5.15) se dobija stabilan sistem ako su koeficijenti* k_j, $j \in \boldsymbol{I}$ *dati izrazima*

$$\begin{aligned} &k_1 = \tfrac{2\,L_1}{d v_{IN} T_S} > 0, \\ &|k_2| < \tfrac{2\,L_2}{d v_{IN} T_S} \lesseqgtr 0, \\ &k_3 = -\tfrac{(1-d)\,RC_1}{d^2 v_{IN} T_S} < 0, \\ &|k_4| < \tfrac{8 L_2 C_2}{d v_{IN} T_S^2} \lesseqgtr 0. \end{aligned}$$

Dokaz. Da bi sistem bio stabilan, potrebno je dokazati da su na stranama politope $k_j\,y_j = 1$ i $k_j\,y_j = -1$ izvodi funkcije Ljapunova (5.13) dati sa (5.14) suprotnog znaka i da je nakon prekidanja izvod funkcije Ljapunova negativan.

Posmatraćemo prvo slučaj promenljive stanja y_1 koja ima nestabilnu dinamiku, što se vidi posmatranjem matrica $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Na osnovu zakona prekidanja (5.16), kada je $k_1\,y_1 \leq -1$ prekidač S se uključuje i sistem preključuje iz podsistema 2 u podsistem 1. Tada je $\mathrm{sgn}(k_1\,y_1) = -1$ i potrebno je da važi

$$\dot{V}_1(\mathbf{y}) = -k_1\,(\mathbf{A}_1\,\langle 1, 1:4\rangle\,\mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_1\,\langle 1\rangle) = -\frac{k_1\,v_{IN}}{L_1} < 0, \tag{5.19}$$

što je moguće ako je $k_1 > 0$.

Drugi slučaj, kada sistem preključuje iz podsistema 1 u podsistem 2, daje $k_1\,y_1 \geq 1$, pa je

$$\dot{V}_2(\mathbf{y}) = k_1\,(\mathbf{A}_2\,\langle 1, 1:4\rangle\,\mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_2\,\langle 1\rangle) = k_1\left(-\frac{y_3}{L_1} + \frac{a\,v_{IN}}{L_1}\right) < 0 \tag{5.20}$$

što je zadovoljeno ako je $y_3 > a\, v_{IN}$, odnosno treba da bude promena napona y_3 u ustaljenom stanju u toku podsistema 1

$$\frac{a\, v_{IN}\, T_S}{2\, RC_1} > a\, v_{IN}, \tag{5.21}$$

što daje kao uslov za izbor periode prekidanja $T_S < 2\, RC_1$.

Dinamika promenljive y_3 je u direktnoj vezi sa dinamikom y_1 u podsistemu 2 i zato su ove dve promenljive ponovo kritične. Kada je $k_3\, y_3 \geq 1$, sistem preklјučuje iz podsistema 1 u podsistem 2 i važi

$$\dot{V}_2(\mathbf{y}) = k_3\, (\mathbf{A}_2\, \langle 3, 1:4\rangle\ \mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_2\, \langle 3\rangle) = k_3 \left(\frac{y_1}{C_1} + \frac{a^2\, v_{IN}}{RC_1}\right) < 0, \tag{5.22}$$

što je ispunjeno za $k_3 < 0$ i $y_1 > -\frac{a^2\, v_{IN}}{R} = -\overline{x}_1$. Uslov za vrednost y_1 je ispunjen uvek, zato što je $x_1 \geq 0$, osim u početnom trenutku kada je $y_1 = -\overline{x}_1$. Međutim u početnom trenutku je uključen prekidač S, pa na osnovu podsistema 1 se vidi da y_1 linearno raste dok se ne ispuni uslov za prekidanje.

Kada se preklјučuje iz podsistema 2 u podsistem 1 za $k_3\, y_3 \leq -1$ važi

$$\dot{V}_1(\mathbf{y}) = -k_3\, (\mathbf{A}_1\, \langle 3, 1:4\rangle\ \mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_1\, \langle 3\rangle) = -k_3 \left(-\frac{y_2}{C_1} - \frac{a\, v_{IN}}{RC_1}\right) < 0, \tag{5.23}$$

što je opet ispunjeno za $k_3 < 0$ i $y_2 > -\frac{a\, v_{IN}}{R} = -\overline{x}_2$.

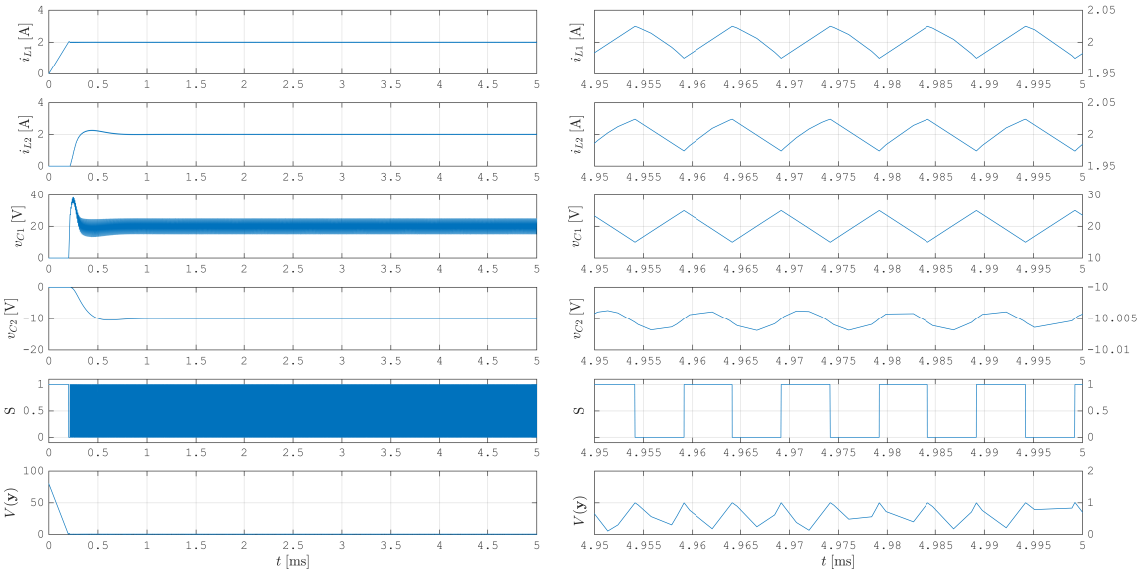
Kako su promenljive y_1 i y_3 kritične, to će se procena $k_i,\ i \in \mathbf{I}$ vršiti ograničavanjem ovih promenljivih. Da bi se dobila željena vrednost periode prekidanja u ustaljenom stanju na osnovu (5.17) se računa

$$\begin{aligned} k_1 &= \tfrac{2}{\Delta y_1} = \tfrac{2\, L_1}{d v_{IN} T_S}, \\ k_3 &= -\tfrac{2}{\Delta y_3} = -\tfrac{(1-d)\, RC_1}{d^2 v_{IN} T_S}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

U oba podsistema CCM-a promenljive y_2 i y_4 imaju međusobno zavisnu dinamiku. Ove dve promenljive su stabilne i samim tim nisu kritične prilikom projektovanja kontrole sistema. Za promenljivu y_2 se može odrediti koeficijent k_2 posmatrajući sledeća dva uslova. Kada je $k_2\, y_2 \geq 1$, sistem preklјučuje iz podsistema 1 u podsistem 2, pa je

$$\dot{V}_2(\mathbf{y}) = k_2\, (\mathbf{A}_2\, \langle 2, 1:4\rangle\, \mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_2\, \langle 2\rangle) = k_2\, \frac{a\, v_{IN} + y_4}{L_2} < 0, \tag{5.25}$$

što je ispunjeno za $k_2 < 0$ i $y_4 < -\overline{x}_4$ ili $k_2 > 0$ i $y_4 > -\overline{x}_4$, i moguće samo dok konvertor ne uđe u ustaljeno stanje. Kada je $k_2\, y_2 \leq -1$, sistem preklјučuje iz podsistema 2 u podsistem



(a) *(b)*

Slika 5.2: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*

1, pa je

$$\dot{V}_1(\mathbf{y}) = -k_2 \left(\mathbf{A}_1 \langle 2, 1:4 \rangle \mathbf{y} + \overline{\mathbf{B}}_1 \langle 2 \rangle\right) = -k_1 \frac{v_{IN} + y_3 + y_4}{L_2} < 0, \tag{5.26}$$

i ispunjeno je za $k_2 < 0$ i $y_4 + y_3 < -v_{IN} = -\overline{x}_3 - \overline{x}_4$ ili $k_2 > 0$ i $y_3 + y_4 > -v_{IN}$, a važi dok konvertor ne uđe u ustaljeno stanje.

Dinamika promenljive y_4 je uvek daje izvod funkcije Ljapunova

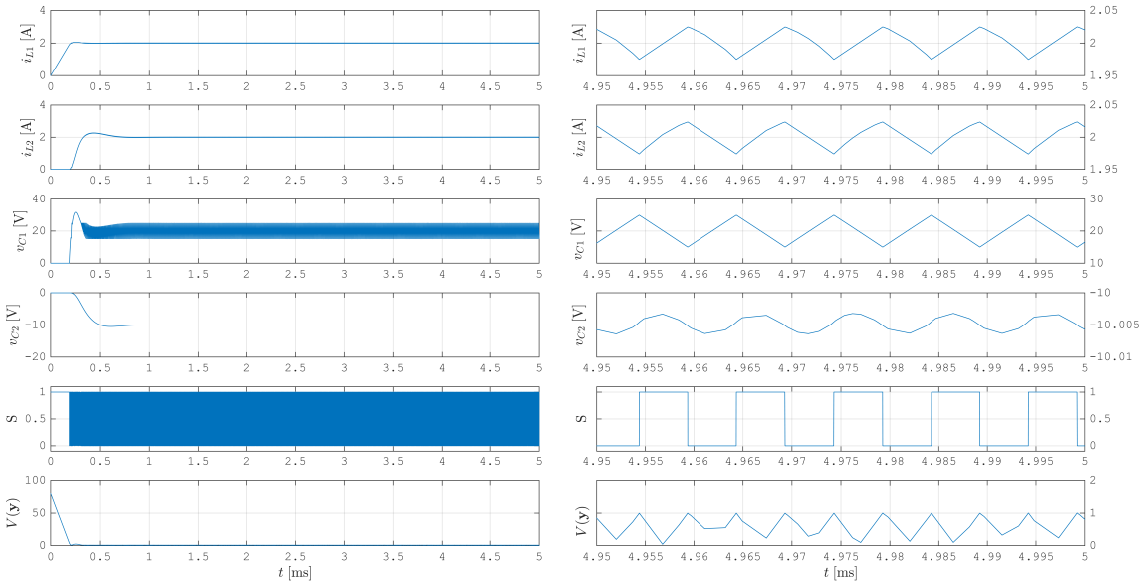
$$\dot{V}_{1,2}(\mathbf{y}) = \pm k_4 \frac{y_2 R + y_4}{RC_2}, \tag{5.27}$$

koji ima negativnu vrednost za $k_4 < 0$. Međutim i ova promenljiva može da daje maksimalnu apsolutnu vrednost funkcije Ljapunova (5.13) samo u toku tranzijenta prilikom uključenja kola. Zbog toga se vrednosti k_2 i k_4 mogu izabrati proizvoljnog znaka i treba ih izabrati tako da važi

$$\begin{aligned} |k_2| &< \frac{2}{\Delta y_2} = \frac{2L_2}{dv_{IN}T_S}, \\ |k_4| &< \frac{2}{\Delta y_4} = \frac{16L_2C_2}{dv_{IN}T_S^2}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

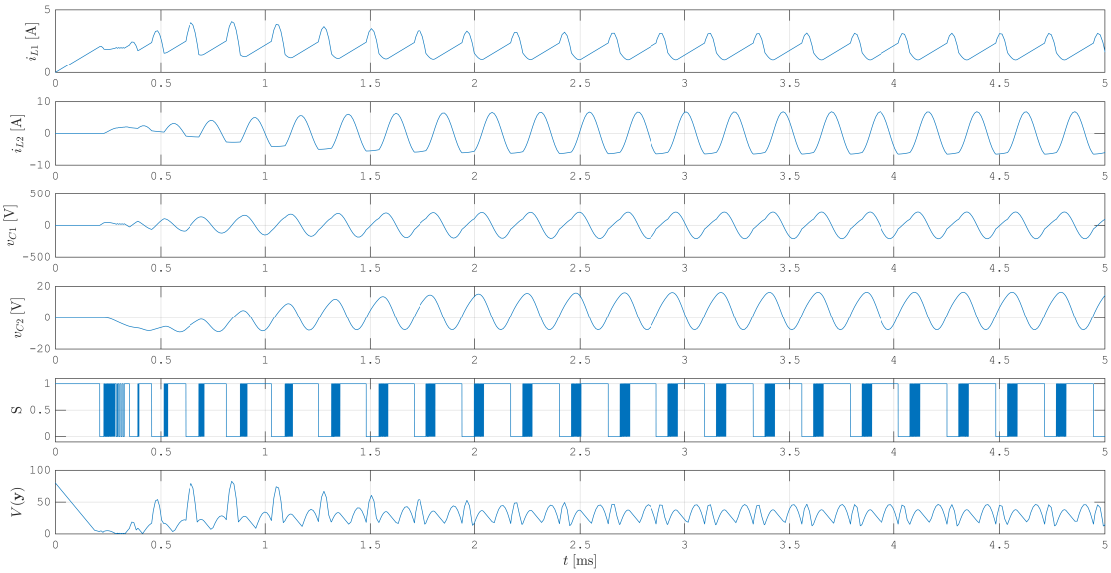
čime je završen dokaz. □

Na osnovu teoreme 8 može se projektovati politopska funkcija Ljapunova za primer Ćuk konvertora čije su vrednosti $L_1 = L_2 = 1$ mH, $C_1 = 1$ μF, $C_2 = 20$ μF, $R = 5$ Ω i $v_{IN} = 10$ V. Sve funkcije Ljapunova koje rezultuju dijagramima na sl. 5.2-5.9 su projektovane za periodu prekidanja u ustaljenom stanju $T_S = 10$ μs i faktor ispunjenosti impulsa $d = 0.5$, pa je vektor promenljivih stanja u ustaljenom stanju $\overline{\mathbf{x}} = [2\text{ A}\ \ 2\text{ A}\ \ 20\text{ V}\ \ -10\text{ V}]$,



(a) *(b)*

Slika 5.3: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\ A^{-1}$ i $k_3 = -0.2\ V^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*



(a) *(b)*

Slika 5.4: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\ A^{-1}$ i $k_3 = 0.2\ V^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*

a ripl $\overline{\mathbf{x}} = [50\text{ mA } 50\text{ mA } 10\text{ V } 3.125\text{ mV}]^T$. Primenom teoreme 8 se računaju koeficijenti PLLF $k_1 = 40\ \text{A}^{-1}$ i $k_3 = -0.2\ \text{V}^{-1}$.

Na sl. 5.2 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora i funkcije Ljapunova u toku prvih 5 ms kada se upravlja samo strujom kalema x_1, $\mathbf{I} = \{1\}$,

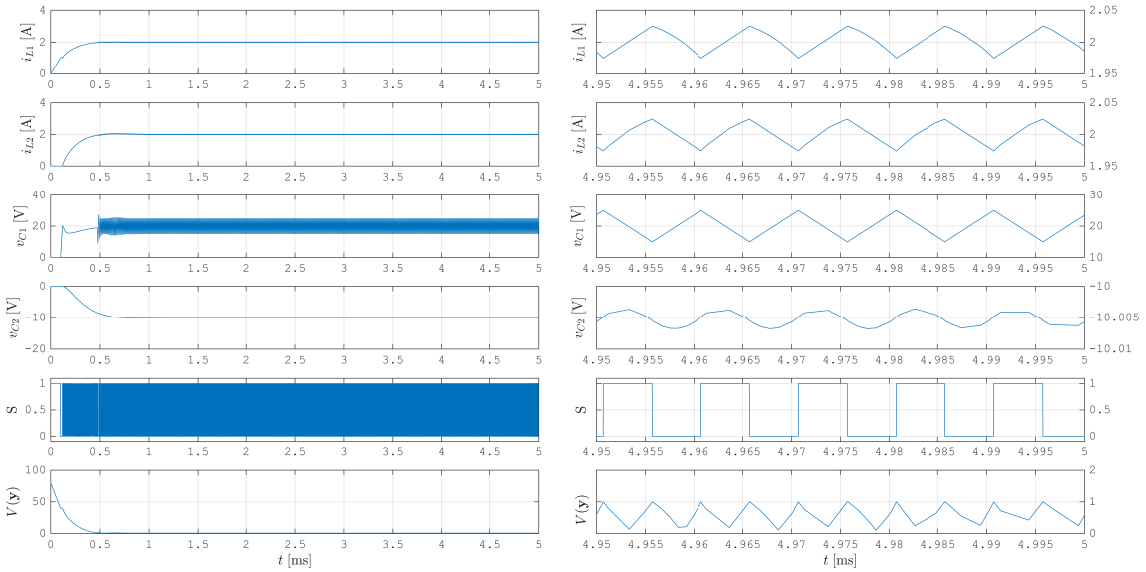
pa se koristi samo koeficijent k_1. Vidi se da se dobija stabilan sistem željenog ustaljenog stanja i periode, kao i faktora ispunjenosti impulsa. Kako bi se bolje videla perioda prekidanja na sl. 5.2a su prikazani uvećani vremenski dijagrami u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms dijagrama sa sl. 5.2b.

Na sl. 5.3 i sl. 5.4 su prikazani vremenski dijagrami promenljivih stanja i funkcije Ljapunova kada se politopa formira pomoću dve promenljive stanja $\mathbf{I} = \{1, 3\}$ pri čemu je radi demonstracije zaključaka teoreme 8 uzeto da je za slučaj sa sl. 5.3 $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = -0.2\ \mathrm{V}^{-1}$, dok je za sl. 5.4 $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = 0.2\ \mathrm{V}^{-1}$. Na sl. 5.3a i sl. 5.4a su prikazani dijagrami u toku 5 ms, dok su na sl. 5.3b i sl. 5.4b uvećani dijagrami u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. Očigledno je za $k_3 > 0$ sistem nestabilan kao što se vidi sa sl. 5.4. Na sl. 5.3 se vidi da je dobijeno željeno ustaljeno stanje, perioda prekidanja i ispunjenost impulsa. Ujedno je u poređenju sa sl. 5.2 dobijen manji „preskok" napona kondenzatora C_1.

Na sl. 5.5 i sl. 5.6 su prikazani vremenski dijagrami Ćuk konvertora i funkcije Ljapunova kada je $\mathbf{I} = \{1, 2\}$ i $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $|k_2| = 20\ \mathrm{A}^{-1}$. Na sl. 5.5a i sl. 5.6a su prikazani vremenski dijagrami u toku prvih 5 ms, dok su na sl. 5.5b i sl. 5.6b isti samo uvećani vremenski dijagrami kako bi se bolje videle vrednosti u ustaljenom stanju. Može se zaključiti da za $k_2 < 0$ napon na kondenzatoru C_1 nema preskok i stoga je ova kontrola manje kritična za rad komponenata u kolu nego kada je $k_2 > 0$. U oba slučaja se dobija stabilan sistem.

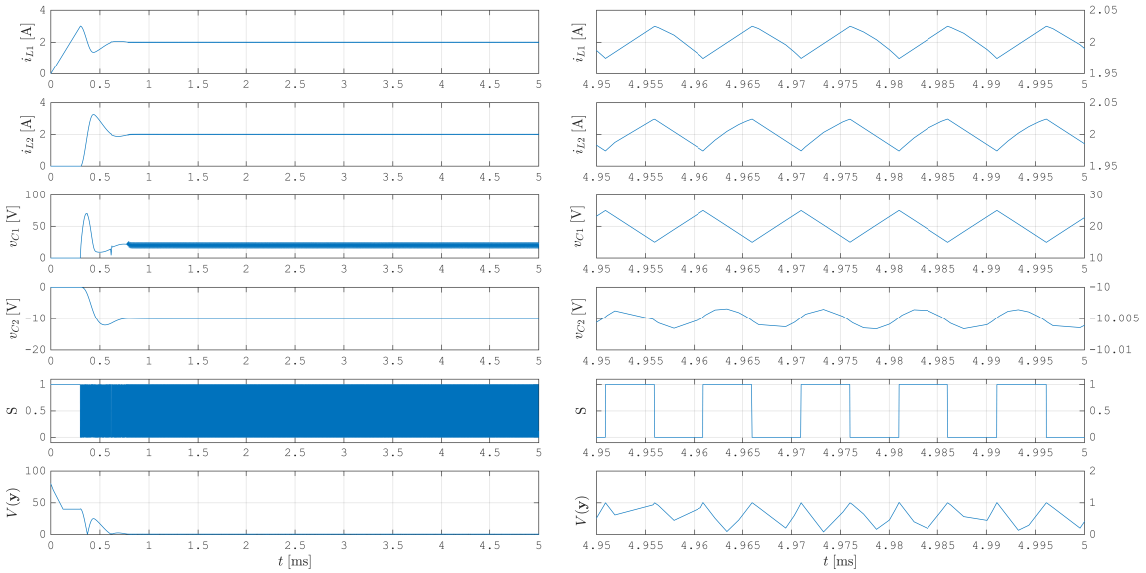
Na sl. 5.7 i sl. 5.8 su prikazani vremenski dijagrami Ćuk konvertora i funkcije Ljapunova kada je $\mathbf{I} = \{1, 4\}$ i $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$ i $|k_4| = 0.8\ \mathrm{V}^{-1}$. Opet su na sl. 5.7 i sl. 5.8 levo označenim sa (a) prikazani vremenski dijagrami u toku prvih 5 ms, a desno označenim sa (b) isti uvećani vremenski dijagrami u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms. Može se zaključiti da za $k_4 > 0$ tranzijent kraće traje i napon na kondenzatoru C_1 ima manji preskok, pa je ova kontrola manje kritična za rad komponenata u kolu nego kada je $k_4 < 0$. U oba slučaja se dobija stabilan sistem.

Kako bi se videlo da se doadatna poboljšanja dobijaju uvođenjem više kontrolnih promenljivih na sl. 5.9 je prikazan slučaj kada je $\mathbf{I} = \{1, 2, 3\}$ i $k_1 = 40\ \mathrm{A}^{-1}$, $k_2 = -20\ \mathrm{A}^{-1}$ i $k_3 = 0.2\ \mathrm{V}^{-1}$. Vidi se da nijedna promenljiva stanja nema „premašaj". Dalje poboljšanje kontrole se može dobiti uvođenjem i promenljive x_4.



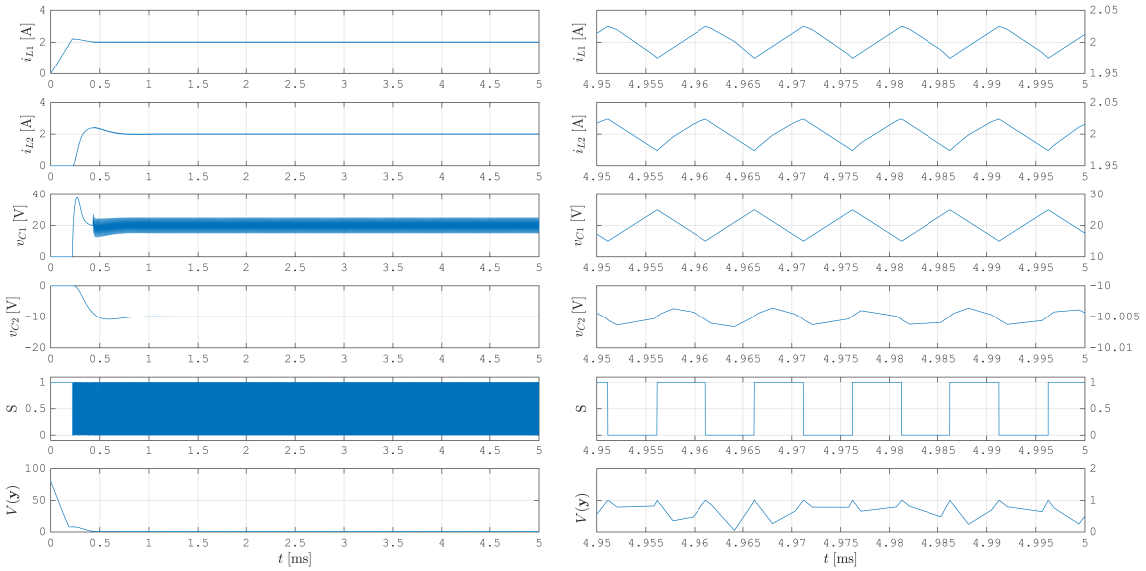
(a) *(b)*

Slika 5.5: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_2 za $k_1 = 40\ A^{-1}$ i $k_2 = -20\ A^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*



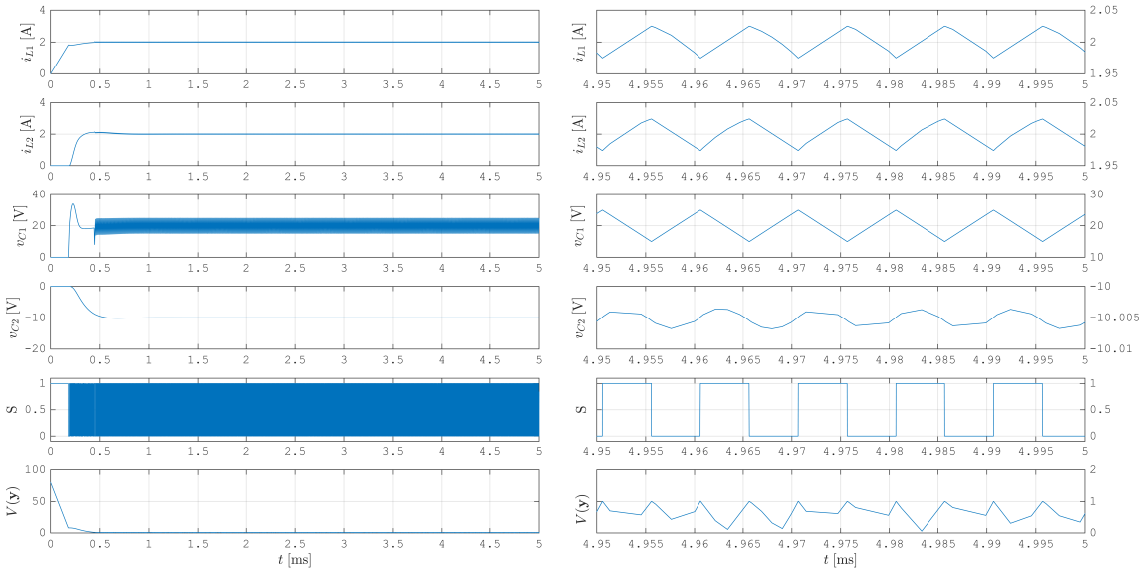
(a) *(b)*

Slika 5.6: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_2 za $k_1 = 40\ A^{-1}$ i $k_2 = 20\ A^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*



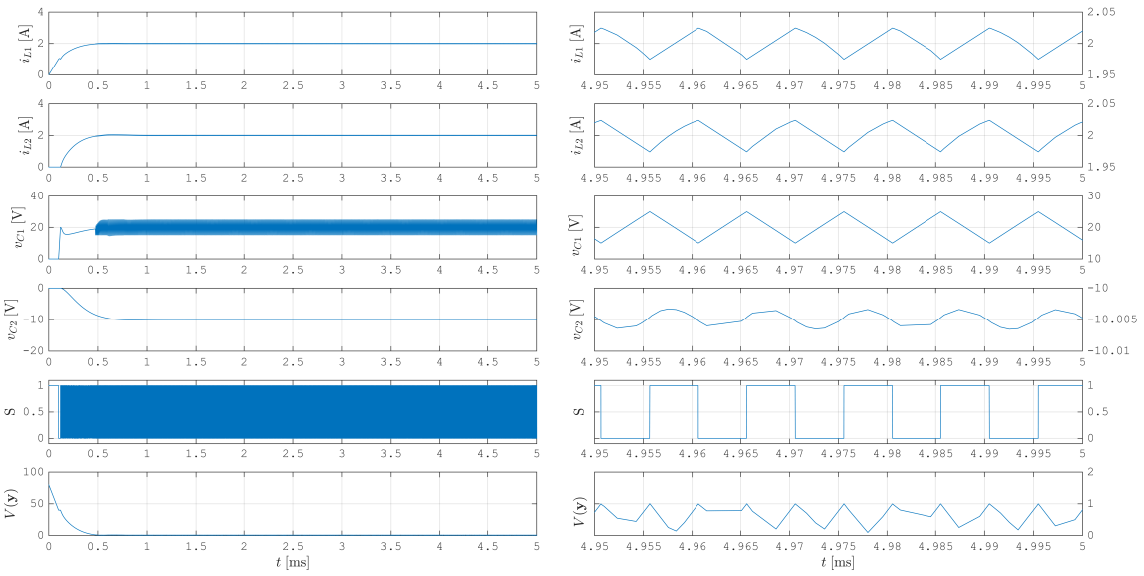
(a) *(b)*

Slika 5.7: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_4 za $k_1 = 40\,A^{-1}$ i $k_4 = -0.8\,V^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*



(a) *(b)*

Slika 5.8: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujom kalema x_1 i naponom kondenzatora x_4 za $k_1 = 40\,A^{-1}$ i $k_4 = 0.8\,V^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*



(a) *(b)*

Slika 5.9: *Vremenski dijagrami promenljivih stanja Ćuk konvertora kada se upravlja strujama kalemova x_1 i x_2 i naponom kondenzatora x_3 za $k_1 = 40\,A^{-1}$, $k_2 = -20\,A^{-1}$ i $k_3 = 0.2\,V^{-1}$: (a) u toku prvih 5 ms i (b) u intervalu vremena 4.95 ms – 5 ms.*

5.2.1 Zaključak

U ovoj glavi je opisana konstrukcija *piecewise linear* funkcija Ljapunova na primeru Ćuk konvertora. Izvedeni su uslovi koje je potrebno da zadovoljavaju koeficijenti konstruisane politope PLLF tako da se dobije stabilan sistem. Pokazano je da se uvođenjem više *piecewise linear* funkcija Ljapunova pomoću kojih sistem preključuje, postiže brža konvergencija sistema ka ustaljenom stanju, a sam sistem ima i bolje dinamičke karakteristike.

Glava 6

Realizacija i eksperimentalna verifikacija kontrole DC-DC konvertora

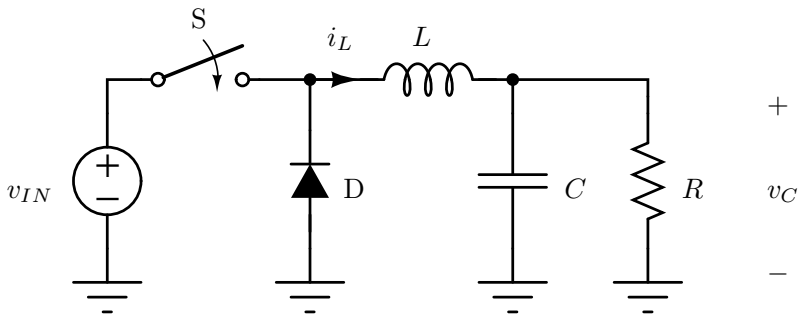
Kontrole DC-DC konvertora opisane u prethodnim poglavljima: *sliding mode* kontrola 3, histerezisna kontrola 4 i kontrola pomoću *piecewise linear* funkcija Ljapunova 5 su demonstrirane na primeru Ćuk konvertora koji predstavlja jedan od najkompleksnijih DC-DC konvertora, ali su sve primenljive i na druge DC-DC konvertore. Sve bržim razvojem digitalnih procesora signala i mikrokontrolera raste tendencija da se kontroleri realizuju digitalno. Pomenute kontrole su pogodne za realizaciju korišćenjem mikrokontrolera, kao što će biti pokazano u nastavku ove glave.

Sliding mode kontrola buck konvertora je bila čest predmet istraživanja i do sada je realizovana i opisana u brojnim publikacijama [73, 74]. U pomenutim radovima [73, 74] se kontrola samog konvertora vrši analogno. Međutim, sa sve bržim razvojem mikrokontrolera, digitalna kontrola uzima sve većeg maha u primeni. Česta su istraživanja koja se odnose na mogućnosti primene digitalne regulacije i njene preciznosti kada je u pitanju kontrola DC-DC konvertora [75, 76]. U radovima [75, 76] se analizira *fuzzy sliding mode* kontrola na primeru boost konvertora.

U ovom poglavlju će biti demonstrirana realizacija sliding mode kontrole buck konvertora korišćenjem mikrokontrolera. Sliding mode kontrola buck konvertora je analizirana i projektovana, a zatim i eksperimentalno potvrđena. Realizovani buck konvertor ima konstantnu frekvenciju prekidanja, a sliding mode kontrola je implementirana korišćenjem mikrokontrolera STM32F4-DISCOVERY [77] uz razvoj odgovarajućeg mikrokontrolerskog programa kojim je realizovan algoritam upravljanja.

6.1 Analiza buck konvertora

Buck konvertor, pored boost i buck-boost konvertora, predstavlja jedan od osnovnih konvertora. Sastoji se od dva prekidača: jednog tranzistora i jedne diode i ima dva reaktivna elementa: kalem i kondenzator. Na sl. 6.1 je prikazan buck konvertor.



Slika 6.1: *Buck konvertor.*

Buck konvertor ima tri režima rada, odnosno tri podsistema. Podsistem 1 je kada je prekidač S uključen, a dioda isključena, podsistem 2 kada je prekidač S isključen i dioda D uključena, a podsistem 3 kada su i S i D isključeni.

Pod pretpostavkom da je vektor promenljivih stanja $\mathbf{x} = [i_L\ v_C]^T$, mogu se napisati jednačine stanja svakog od tri podsistema. Prilikom pisanja jednačina modela stanja smatraće se da su sve korišćene komponente kola idealne, odnosno da na njima nema gubitaka. U podsistemu 1 je uključen predkidač S, a isključena dioda D, pa je

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_{IN}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U podsistemu 2 je isključen prekidač S, a dioda D uključena, pa su matrice jednačine modela stanja

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko konvertor radi u kontinualnom režimu (CCM), konvertor u toku jedne periode prekidanja prvih $d\,T_S$ radi kao podsistem 1, a u ostatku periode, tokom intervala dužine $(1-d)\,T_S$, radi kao podsistem 2. Vidi se da oba podsistema i 1 i 2 imaju sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}}\right)$. Ove sopstvene vrednosti su za uobičajene vrednosti komponenata kola konjugovano-kompleksne sa negativnim realnim delom, što znači da su podsistemi 1 i 2 stabilni.

Podsistem 3 se javlja u slučaju kada u toku rada kao podsistem 2, struja kalema padne na nulu. Tada se isključuje i dioda D, pa nijedan prekidač nije uključen. Matrice koje

opisuju model stanja u ovom podsistemu su

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidi se da je podsistem 3 granično stabilan sa jednom sopstvenom vrednošću jednakom nula, $\lambda_1 = 0$, i jednom negativnom realnom $\lambda_2 = -\frac{1}{RC} < 0$.

Uobičajeno je da se kontrola DC-DC konvertora projektuje tako da konvertor radi samo u kontinualnim režimima [74]. Prilikom projektovanja sliding mode kontrole je bitno da se posmatra svaki od podsistema i da se prekidačka površina postavi tako da se preključivanjem dobije stabilan sistem. Izjednačavanjem matrične jednačine podsistema 1 sa nulom, dobija se da je ekvilibrijum za podsistem 1 $\mathbf{x}_{eq1} = \left[v_{IN} \ \frac{v_{IN}}{R}\right]^T$, a putanja konvertora u ovom podsistemu je stabilan fokus ka ekvilibrijumu $\mathbf{x}_{eq1}$. Podsistem 2 ima ekvilibrijum $\mathbf{x}_{eq2} = [0 \ 0]^T$ i takođe u faznoj ravni opisuje stabilan fokus. Na sl. 6.2 je prikazan fazni portret buck konvertora kod koga je uzeto da je ulazni napon $v_{IN} = 10$ V, $L = 1$ mH, $C = 11$ μF i $R = 10$ Ω. Sa ove slike se vidi da plave putanje koje predstavljaju fazni dijagram konvertora u podsistemu 2 konvergiraju ka ekvilibrijumu $\mathbf{x}_{eq2} = [0 \ 0]^T$, a putanje podsistema 1 prikazane crnim linijama ka ekvilibrijumu $\mathbf{x}_{eq1} = [10 \text{ V } 1 \text{ A}]^T$. Prekidačku površinu je potrebno postaviti između ova dva ekvilibrijuma tako da se površini putanje podsistema 1 približavaju sa donje strane, a putanje podsistema 2 sa gornje strane prekidačke površine, kao što je prikazano na sl. 6.2.

Na osnovu analize koja je izvršena u glavi 3 se zaključuje da se sliding mode kontrola može realizovati za prekidaču površinu oblika $S(\mathbf{x}) = m_1 i_L + m_2 v_C - m_3$, gde je $m_3 = m_1 \bar{i}_L + m_2 \bar{v}_C$ određeno vrednošću promenljivih stanja u ustaljenom stanju. Na sl. 6.2 je prekidačka površina $S(\mathbf{x}) = 0$ za slučaj kada su koeficijenti $m_{1-3} > 0$ prikazana crvenom punom linijom.

Kao što je pokazano u glavi 3, zakon prekidanja se definiše tako da je

$$u = \begin{cases} 1 & S(\mathbf{x}) > 0, \\ 0 & S(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

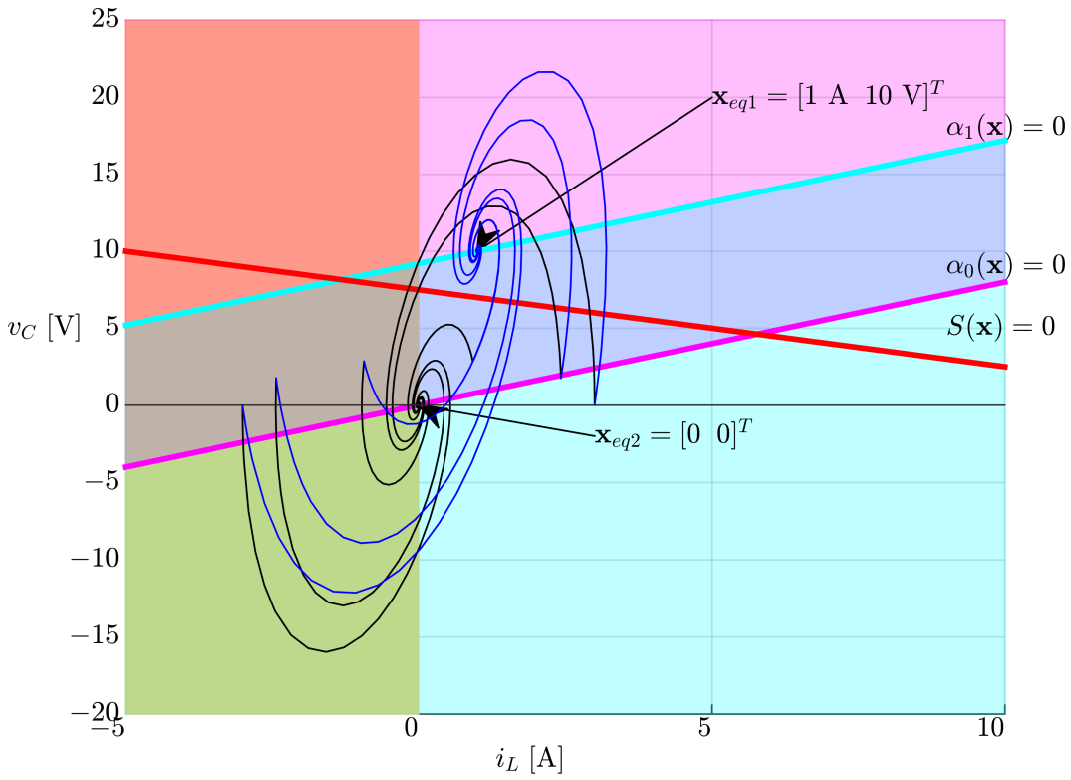
Sistem je stabilan ako važi

$$\lim_{S(\mathbf{x})\to 0} S(\mathbf{x})\,\dot{S}(\mathbf{x}) < 0, \tag{6.2}$$

odnosno ako je

$$\dot{S}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha_1(\mathbf{x}) = m_1 \dot{i}_L + m_2 \dot{v}_C < 0 & S(\mathbf{x}) > 0, \\ \alpha_0(\mathbf{x}) = m_1 \dot{i}_L + m_2 \dot{v}_C > 0 & S(\mathbf{x}) < 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Za definisano prekidanje (6.1) i uslov stabilnosti (6.3) se pod pretpostavkom da sistem



Slika 6.2: *Fazni dijagram buck konvertora.*

radi u kontinualnom režimu dobija

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathbf{x}) &= \frac{m_2\, i_L}{C} - \left(\frac{m_1}{L} + \frac{m_2}{RC}\right) v_C + \frac{m_1\, v_{IN}}{L} < 0, \\ \alpha_0(\mathbf{x}) &= \frac{m_2\, i_L}{C} - \left(\frac{m_1}{L} + \frac{m_2}{RC}\right) v_C > 0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Na sl. 6.2 su prave $\alpha_1(\mathbf{x}) = 0$ i $\alpha_0(\mathbf{x}) = 0$ prikazane cijan i ljubičastom bojom, redom. Oblast ispod prave $\alpha_1(\mathbf{x}) = 0$ koja zadovoljava uslov iz jednačine (6.4) je takođe cijan boje. A oblast iznad prave $\alpha_0(\mathbf{x}) = 0$ je ljubičaste boje. Pomenute oblasti daju vrednosti vektora $\mathbf{x}$ za koje je zadovoljen uslov stabilnosti. Kako je nemoguće da je struja kalema u toku rada kondertora $i_L < 0$, ova oblast levo od prave $i_L = 0$ je osenčena tamnijim bojama, sl. 6.2.

U ustaljenom stanju se primenom *Volt-second balance* i *Ampere-second balance* [1] dobija

$$\begin{aligned} \bar{i}_L &= \frac{\bar{v}_C}{R} = \frac{d\, v_{IN}}{R}, \\ \bar{v}_C &= d\, v_{IN}, \end{aligned}$$

gde je d ispunjenost impulsa periodičnog PWM signala periode T_S. Kako vrednost pro-

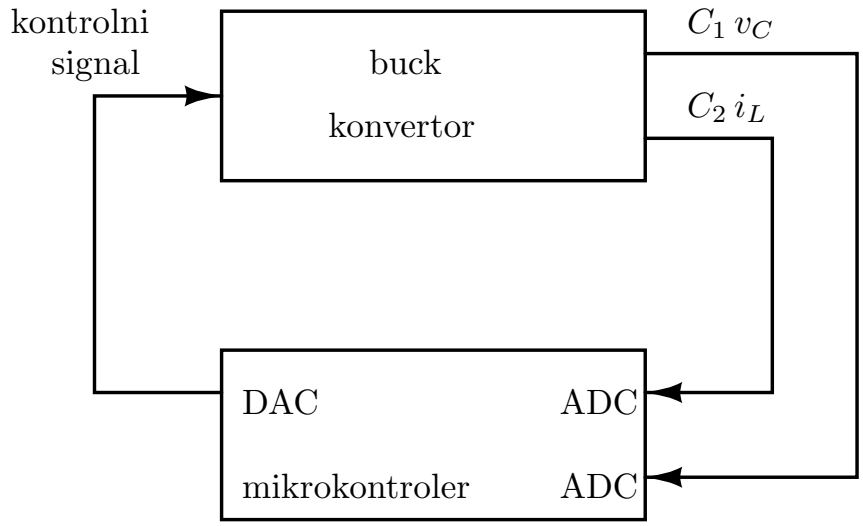
menljivih stanja u ustalenom stanju ujedno predstavlja i ekvilibrijum na prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = 0$, lako se pokazuje da je

$$\begin{aligned} \bar{i}_L &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 R}, \\ \bar{v}_C &= \frac{m_3 R}{m_1 + m_2 R}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Jednačina (6.5) će se koristiti prilikom projektovanja odgovarajuće sliding mode kontrole.

6.2 Projektovanje i realizacija kontrole buck konvertora

Ovo poglavlje opisuje realzaciju kontrole buck konvertora. Buck konvertor se realizuje korišćenjem diskretnih komponenata, dok je kontrola digitalna korišćenjem mikrokontrolera.



Slika 6.3: *Blok šema realizacije kontrole buck konvertora.*

Na sl. 6.3 je prikazana blok šema realizacije kontrole buck konvertora. DC-DC konvertorima se upravljanje realizuje poređenjem vrednosti promenljivih stanja sa referentnom, željenom vrednošću. Promenljive stanja buck konvertora su struja kalema i_L i napon kondenzatora v_C, sl. 6.1. Zato su izlazne veličine koje se dovode na A/D konvertor mikrokontrolera $C_1\, i_L$ i $C_2\, v_C$, gde su C_1 i C_2 pozitivne realne konstante. Mikrokontroler u zavisnosti od vrste upravljanja (kontrole), poređenjem vrednosti promenljivih stanja sa referentnim, generiše kontrolni signal preko D/A konvertora. Kontrolni signal predstavlja ulazni signal u kolo buck konvertora, sl. 6.3.

6.2.1 Projektovanje i realizacija buck konvertora

U ovom poglavlju je opisana hardverska realizacija buck konvertora i njegove kontrole. Buck konvertor sa sl. 6.1 se sastoji od dva prekidača: jednokvadrantnog prekidača S, realizovanog korišćenjem tranzistora, i diode D, i dve reaktivne komponente: kalema i kondenzatora. Prekidač S se upravlja PWM signalom i vezuje redno u kolo između ulaza kola, odnosno naponskog izvora v_{IN}, i kalema L. S' obzirom da sors, odnosno emitor, tranzistora S nije vezan za masu kola, za uključivanje tranzistora je potrebno da se na njegov gejt, odnosno bazu, dovede PWM signal čiji je visoki naponski nivo dovoljan za uključenje tranzistora. Zbog toga se za uključenje tranzistora S pravi specijalno kolo koje se zove *higd side driver*.

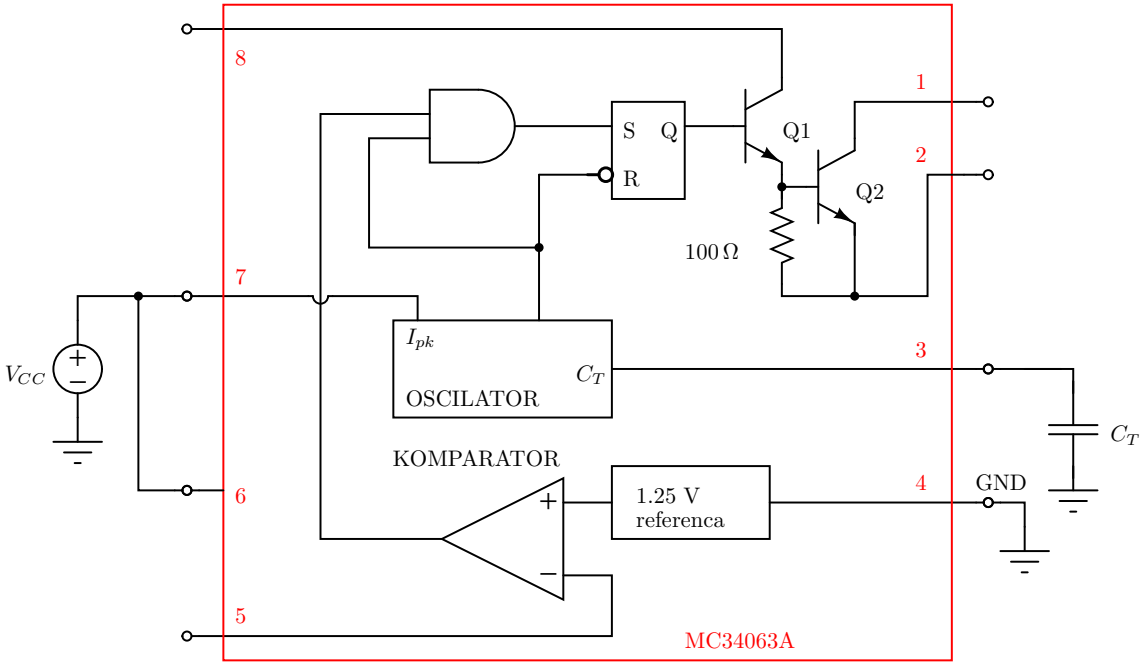
Prekidač S zajedno sa *high side driver* kolom je dostupan u čipu MC34063A [78]. MC34063A ima interni oscilator čija se frekvencija može podešavati dodavanjem kondenzatora između pina 3 i mase, označenog sa C_T. U tabeli 6.1 je data izmerena zavisnost frekvencije oscilatora f_{OSC} od kapacitivnosti C_T za kolo MC34063A čiji su pinovi 1, 5 i 8 otvoreni, a na pin 7 se dovodi napon $V_{CC} = 12$ V kao na sl. 6.4.

Tabela 6.1: *Zavisnost frekvencije oscilatora kola MC34063A od kapacitivnosti C_T pri naponu $V_{CC} = 12$ V*

C_T	f_{OSC}
0	162 kHz
1 nF	35 kHz
100 nF	508 Hz
220 nF	235 Hz

U kolu MC34063A Darlingtonov spoj tranzistora Q1 i Q2 predstavlja jednokvadrantni tranzistorski prekidač. Na prekidač S se dovodi PWM signal frekvencije internog oscilatora f_{OSC}, odnosno periode $T_{OSC} = 1/f_{OSC}$. Poslednju sedminu periode na izlazu SR leča je logička nula, pa su tranzistori Q1 i Q2 zakočeni. Prvih $\frac{6T_{OSC}}{7}$ je na izlazu SR leča logička nula (nizak naponski nivo) ili logička jedinica (visok naponski nivo) u zavisnosti od vrednosti napona na izlazu komparatora sa sl. 6.4. Naime, dokle god je napon na pinu 5 kola MC34063A, označen kao v_5, veći od 1.25 V, koji se dovodi na neinvertujući ulaz komparatora, prekidač je isključen. Kada je napon v_5 veći od 1.25 V, prekidač je uključen. Ispravnim projektovanjem povratne sprege je u ustaljenom stanju srednja vrednost napona na pinu 5 kola MC34063A jednaka $\overline{v}_5 = 1.25$ V.

Na sl. 6.5 je prikazan realizovani buck konvertor. Kontrola buck konvertora se realizuje poređenjem vrednosti promenljivih stanja sa željenom referentnom vrednošću. U slučaju buck konvertora promenljive stanja su struja kalema i napon na kondenzatoru, kao što je prikazano na blok šemi sa sl. 6.3. Struja kalema i_L se ne može meriti direktno. Zato



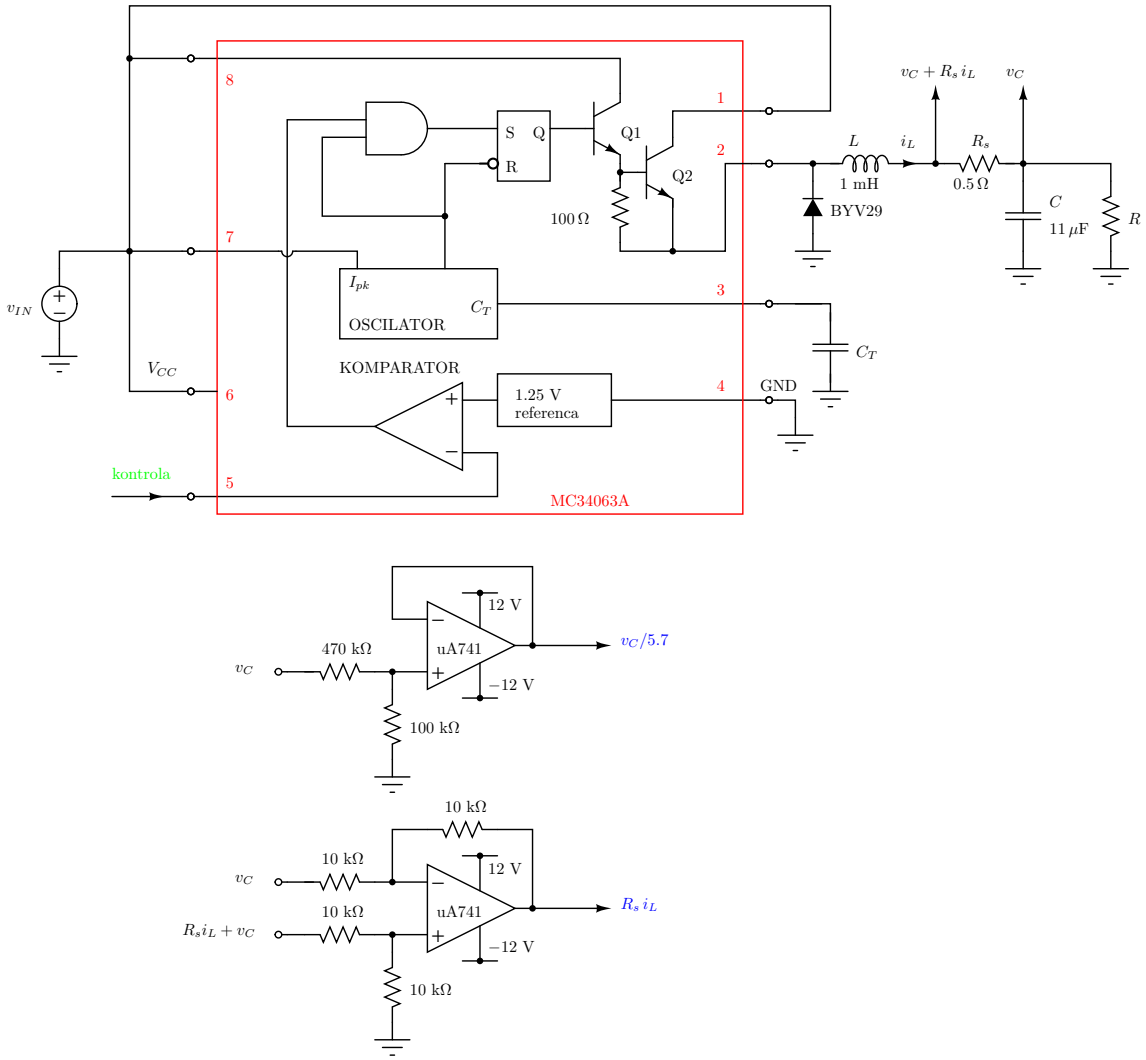
Slika 6.4: *Merenje frekvencije rada internog oscilatora čipa MC34063A.*

je dodat otpornik šanta R_s na čijim krajevima se meri napon $R_s\, i_L$. Napon na kondenzatoru v_C se meri direktno. Na sl. 6.5 je sa kontrola označen pin 5 na koji se dovodi upravljački napon, a sa $v_C/5.7$ i $R_s\, i_L$ izlazni naponi koji se koriste prilikom projektovanja kontrole.

Za buck konvertora koji radi na maksimalnoj frekvenciji PWM signala $f_{OSC,max}$ = 35 kHz se na pin 3 čipa MC34063A vezuje kondenzator C_T = 1 nF. Izabrane se uobičajene vrednosti komponenata C = 11 μF, L = 1 mH, R_s = 0.5 Ω i R = 12 Ω, a ulazni napon je v_{IN} = 12 V, sl. 6.5.

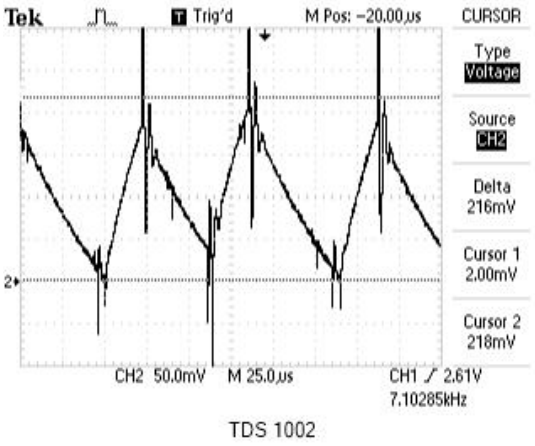
Rad buck konvertora sa sl. 6.5 je proveren realizacijom povratne sprege između napona na kondenzatoru v_C i pina 5 čipa MC34063A na koji je preko razdelnika napona doveden napon $v_5 = \frac{v_C}{2}$. U ustaljenom stanju je na pinu 5 kola MC34063A srednja vrednost upravljačkog signala $\overline{v}_5$ = 1.25 V. To znači da je srednja vrednost napona na kondenzatoru $\overline{v}_C$ = 2.5 V. Može da se proceni da je ako se smatra da je u tom slučaju $\overline{i}_L = \frac{\overline{v}_C}{R}$ = 208.3 mA.

Na sl. 6.6 su prikazani vremenski dijagrami napona šanta $R_s\, i_L$, napona na kondenzatoru v_C, upravljačkog napona na pinu 5 i napona na diodi. Merenjem je dobijeno da je srednja vrednost $\overline{i}_L$ = 200 mA, a Δi_L = 432 mA, što odgovara proračunu. Takođe srednja vrednost napona na kondenzatoru je $\overline{v}_C$ = 2.55 V, a srednja vrednost napona koji se dovodi na pin 5 je $\overline{v}_5$ = 1.27 V, što u potpunosti odgovara projektovanoj kontroli. Frekvencija prekidanja je f_S = 13.16 kHz sa ispunjenošću impulsa d = 0.34, što je očekivano jer za kondenzator C_T = 1 nF perioda prekidanja mora da bude celobrojni umnožak vrednosti iz tabele 6.1. Pod pretpostavkom da se provodna dioda može predstaviti red-

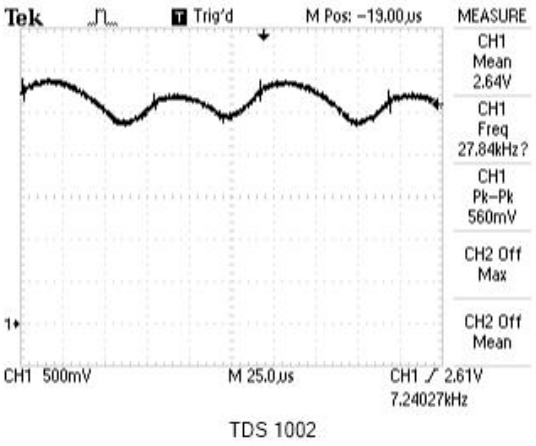


Slika 6.5: *Realizovani buck konvertor.*

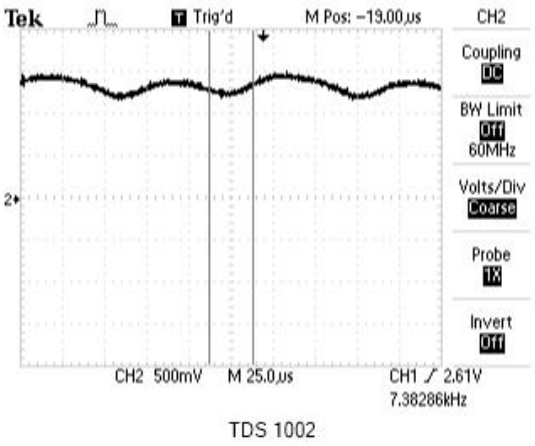
nom vezom otpornika r_D i naponskog generatora V_D, na osnovu merenja su procenjene vrednosti: $r_D = 181$ mΩ i $V_D = 608$ mV.



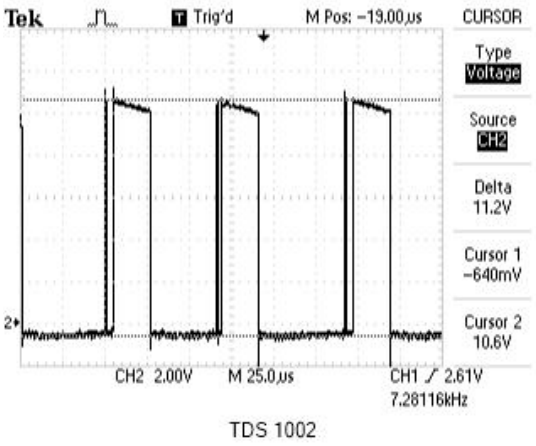
(a) Napon šanta $R_s\, i_L$.



(b) Ripl napona kondenzatora v_C.



(c) Upravljački napon v_5 pina 5 kola MC34063A.



(d) Napon na diodi.

Slika 6.6: *Eksperimentalni rezultati realizovanog buck konvertora.*

6.2.2 Realizacija kontrole korišćenjem mikrokontrolera

Prema blok šemi sa sl. 6.3 se kontrola realizuje digitalno unutar mikrokontolera ili digitalnog procesora signala. Mikrokontroler treba da ima mogućnost analogno-digitalne konverzije dva ulazna signala i generisanja izlaznog signala pomoću digitalno-analognog konvertora.

Za realizaciju kontrolera korišćen je mikrokontrolerski razvojni sistem STM32F4-DISCOVERY [77]. Razvojna pločica STM32F4-DISCOVERY sadrži 32-bitni ARM-ov procesor CORTEX M4 sa internim oscilatorom 168 MHz, ima 1-MB fleš memorije i 192 kB RAM memorije. Programira se i debaguje korišćenjem USB ST-LINK modula, a napaja se sa računara preko USB-a sa 3.3 V. Mikrokontroler STM32F4-DISCOVERY ima četrnaest programabilnih tajmera, tri A/D konvertora i dva D/A konvertora.

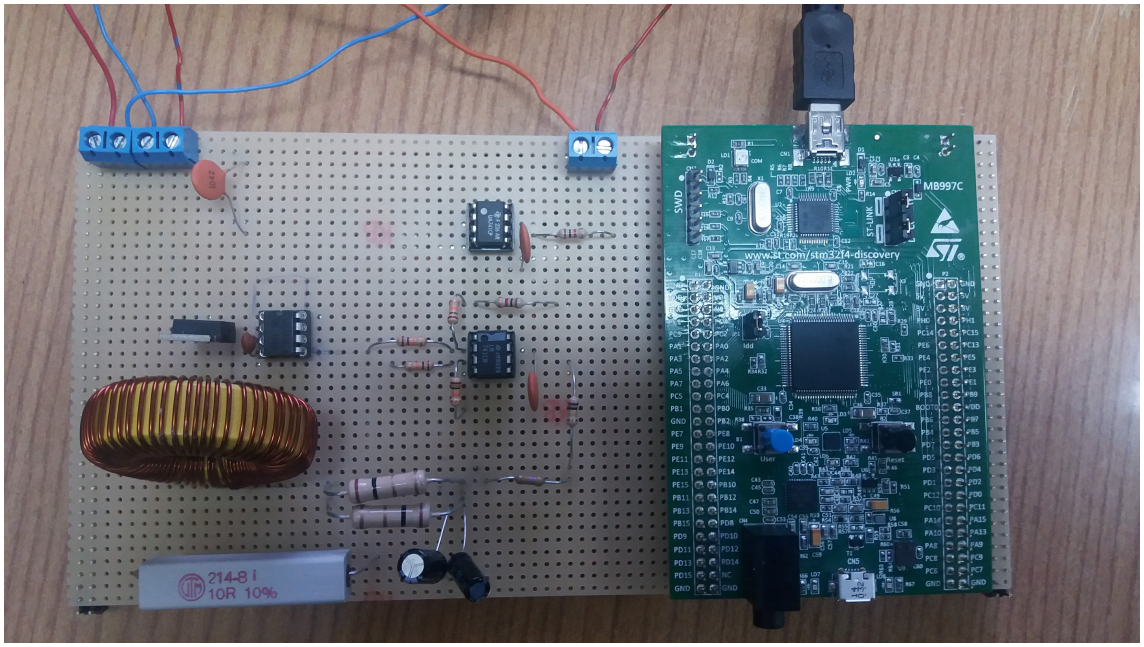
Kako je za realizaciju kontrole potrebno očitavati vrednosti napona sa sl. 6.5 označene sa $v_C/5.7$ i $R_s\, i_L$, koriste se dva A/D konvertora kojima se očitava napon na pinovima PA2 i PA3 mikrokontrolera. Očitane vrednosti napona se potom obađuju tako da se dobije željena kontrola, nakon čega se generiše upravljački napon korišćenjem D/A konvertora. Kao D/A konvertor se koristi DAC1 koji generiše napon na pinu PA4 mikrokontrolera STM32F4-DISCOVERY. Signal kojim se određuje stanje prekidača se dovodi na pin 5 kola MC34063A i njegova vrednost u slučaju da je veća od $v_5 > 1.25$ V, isključuje prekidač S, a kada je $v_5 < 1.25$ V, uključuje se prekidač S. Zato je projektovano da kada nisu ispunjeni uslovi za uključenje prekidača (ovo zavisi od vrste primenjene kontrole), D/A konvertor daje napon 2 V, a kada su ispunjeni uslovi, DA konvertor daje napon 0.5 V.

Mikrokontroler STM32F4-DISCOVERY ima interni oscilator na učestanosti 168 MHz, pa se može koristiti za kontrolu DC-DC konvertora čija je učestanost rada do 168 kHz, što je određeno vrednošću kondenzatora $C_T = 0$ sa sl. 6.5. U eksperimentima će se koristiti kondenzator $C_T \neq 0$, što čini zahteve za brzom obradom rezultata još manje zahtevnim. Očitavanje ulaza A/D konvertora se radi periodično u prekidnoj rutini tajmera u koju se ulazi sa periodom 1 μs, nakon čega se u istoj prekidnoj rutini računa vrednost koju je potrebno generisati na izlazu D/A konvertora.

Na sl. 6.7 je prikazan laboratorijski model buck konvertora sa kontrolom programiranom u mikrokontroleru STM32F4-DISCOVERY.

6.3 Verifikacija kontrole i karakteristika konvertora

U ovom poglavlju je opisana implementacija sliding mode kontrole buck konvertora. Korišćenjem analize iz poglavlja 6.1 i buck konvertora sa sl. 6.5 sa ulaznim naponom $v_{IN} = 12$ V, kondenzatorom $C_T = 11$ nF i izlaznom otpornošću $R = 10\ \Omega$, unutar mikrokontrolera se vrši upravljanje postavljanjem prekidačke površine. Razmatraće se



Slika 6.7: *Realizovani buck konvertor.*

prekidačke površine iz poglavlja 6.1 pomoću kojih se napon na kondenzatoru v_C održava konstantnim bez obzira na promenu opterećenja i ulaznog napona. To se postiže prekidačkim površinama $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$ i $S(\mathbf{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_3$.

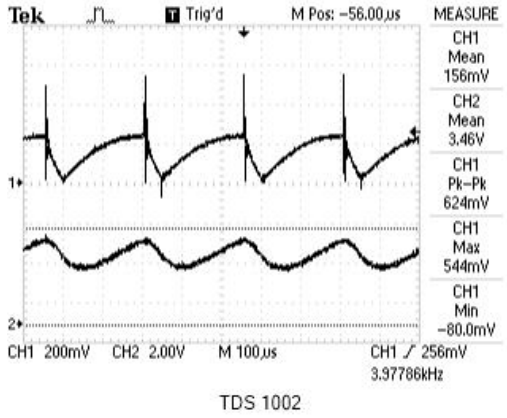
Algoritam realizovane kontrole na mikrokontroleru STM32F4-DISCOVERY je predstavljen listingom koji se nalazi u dodatku ove glave 6.5. U glavnom programu se inicijalizuju A/D konvertori: ADC1 i ADC2, D/A konvertor: DAC1 i tajmer TIM2 i nakon toga se ulazi u beskonačnu *while* petlju. Tajmer TIM2 ulazi u prekidnu rutinu na svakih 2 μs, unutar koje se očitava napon sa ulaza ADC1 (pin PA2) koji predstavlja $v_C/5.7$. Ovaj napon se množi sa 2 i poredi sa referentnom vrednošću 1.25 V. Ukoliko je očitani napon veći od 1.25 V, potrebno je da se isključi prekidač, pa DAC daje napon 1 V. Ukoliko je očitani napon manji od 1.25 V, DAC daje 0.5 V čime se postiže uključivanje prekidača buck konvertora.

Sliding mode kontrola određena prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$ održava izlazni napon v_C konstantinim i neosetljivim na promene otpornosti R i ulaznog napona v_{IN}. Realizovana je sliding mode kontrola buck konvertora korišćenjem prekidačke površine $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V. Za datu kontrolu je srednja vrednost izlaznog napona jednaka $\overline{v}_C = m_3 = \frac{5.7\times 1.25\text{ V}}{2}$, a srednja vrednost struje kalema je $\overline{i}_L = 365.25$ mA. Na sl. 6.8 su prikazani vremenski dijagrami napona na kondenzatoru v_C, napona šanta $R_s\, i_L$, napona na diodi i napona na izlazu D/A konvertora. Na sl. 6.8d je dat fazni dijagram $v_C(R_s\, i_L)$ i vidi se da odgovara dijagramu sa sl. 6.2. Merenjem je dobijeno da je srednja vrednost napona na kondenzatoru $\overline{v}_C = 3.46$ V, srednja vrednost struje kalema

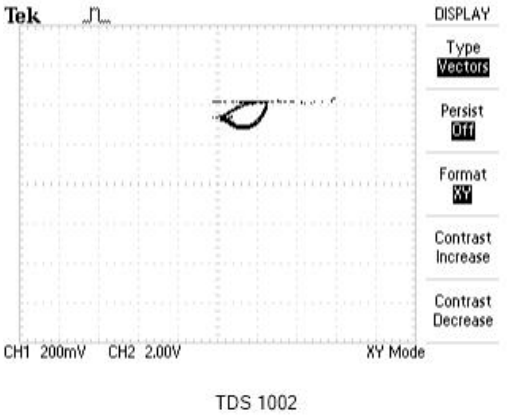
$\bar{i}_L = 316$ mA, a da je perioda prekidanja $T_S = 238$ μs, odnosno frekvencija $f_S = 4.2$ kHz. Sa dijagrama struje kalema na sl. 6.8a se vidi da je ispunjenost impulsa $d = 0.84$.

Isti eksperiment sa prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V, može da se ponovi ako se koristi kondenzator $C_T = 820$ pF za podešavanje frekvencije oscilacija internog oscilatora čipa MC34063A [78]. Pri ulaznom naponu $v_{IN} = 12$ V se dobijaju vremenski dijagrami sa sl. 6.9. Merenjem su dobijene veoma slične vrednosti kao u eksperimentu sa sl. 6.8. Izmerena vrednost napona na kondenzatoru u ustaljenom stanju je $\bar{v}_C = 3.73$ V i struje kalema $\bar{i}_L = 350$ mA. Perioda prekidanja je sada $T_S = 178$ μs, ispunjenost impulsa $d = 0.47$. Vidi se da u jednom delu periode koji traje $d_2\, T_S = 14$ μs konvertor radi kao podsistem 3, odnosno u diskontinualnom je režimu. Tada je struja kalema jednaka nuli, kao što se vidi sa sl. 6.9a. Razlika u odnosnu na dijagrame sa sl. 6.8 jeste kraća perioda i pojava „gličeva" na dijagramu struje kalema. „Gličevi" se javljaju kao posledica prekidanja tranzistora Q1 i Q2 kola MC34063A sa periodom T_{OSC} određenom kondenzatorom C_T. Naime, poslednju sedminu periode T_{OSC} se resetuje SR leč i isključuju tranzistori Q1 i Q2, sl. 6.5, što ima za posledicu isključenje celog kola MC34063A, odnosno prekidača S sa sl. 6.1, a uključenje diode D. Sa dijagrama sa sl. 6.9c-d se može videti opisan efekat pojave gličeva i kraće periode na naponu šanta, naponu koji generiše D/A konvertor i naponu diode.

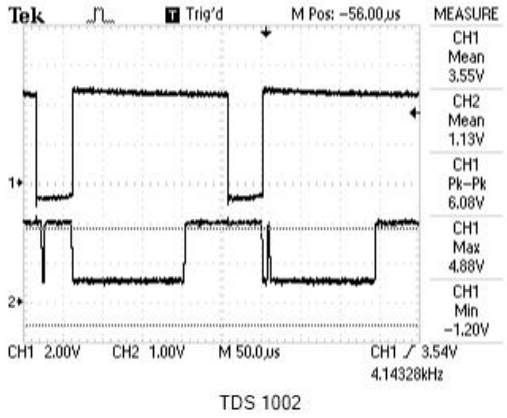
Iako se u slučaju manje periode oscilacija internog oscilatora kola MC34063A, pojavljuju gličevi na vremenskim dijagramima, kolo i dalje ima željenu funkciju. Naime, kretanje sistema po prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = x_2 - m_3$, gde je $m_3 = 3.5625$ V, nije poremećeno, kao što se može videti na osnovu faznog dijagrama sa sl. 6.9b. Sliding mode kontrola u opštem slučaju ne generiše sistem konstantne periode, pa zato samo odstupanje vrednosti periode i pomenuti gličevi ne utiču na realizaciju kontrole. Za razliku od prethodnog slučaja kada je korišćen kondenzator $C_T = 11$ nF za određivanje učestanosti, manja vrednost kondenzatora omogućava veću primenu kola da se dobije veći opseg vrednosti izlaznog napona. Pomenuti gličevi ne utiču na srednje vrednosti napona i struja u kolu.



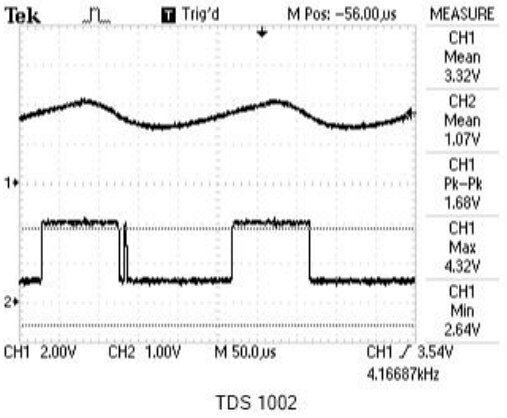
(a) CH1-napon na šantu $R_s\, i_L$ i CH2-napon na kondenzatoru v_C.



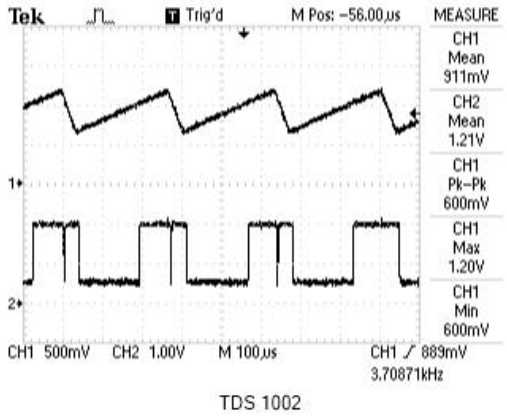
(b) Fazni dijagram $v_C(R_s\, i_L)$.



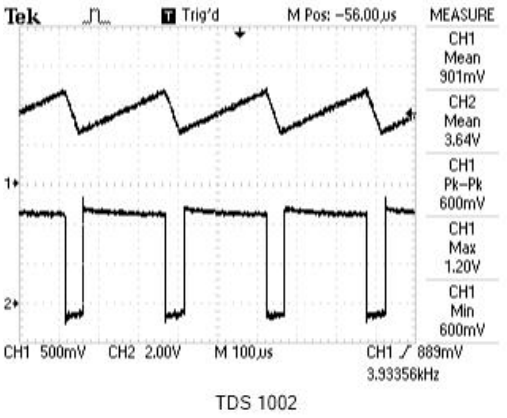
(c) CH1-napon na diodi i CH2-napon na kondenzatoru v_C.



(d) CH1-napon v_C i CH2-napon na pinu 5 kola MC34063A.

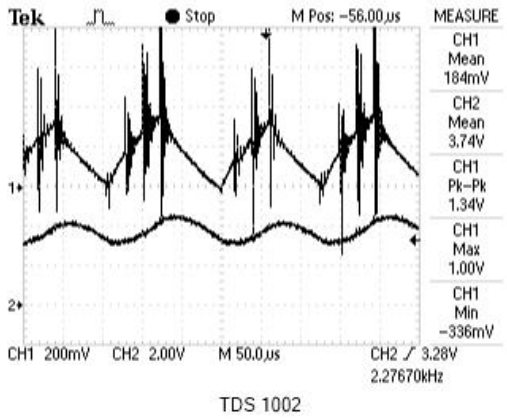


(e) CH1-napon na kondenzatoru C_T i CH2-napon na DA konvertoru.

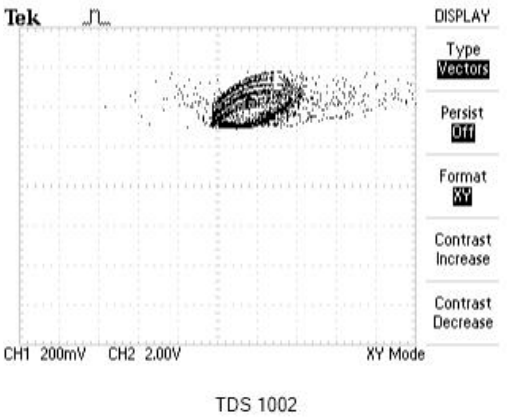


(f) CH1-napon na kondenzatoru C_T i CH2-napon na diodi.

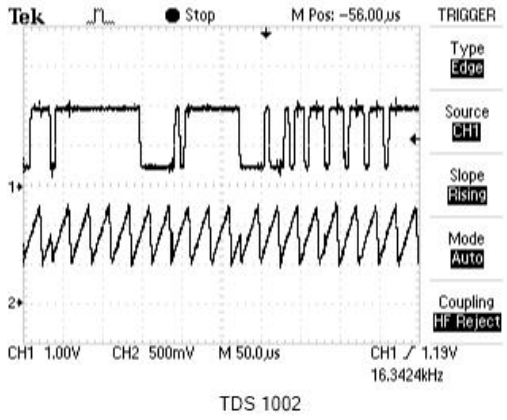
Slika 6.8: *Eksperimentalni rezultati sliding mode kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom* $S(\boldsymbol{x}) = x_2 - m_3$, *gde je* $m_3 = 3.5625$ *V. Ulazni napon je* $v_{IN} = 12$ *V, kondenzator* $C_T = 11$ *nF i izlazna otpornost* $R = 10\ \Omega$.



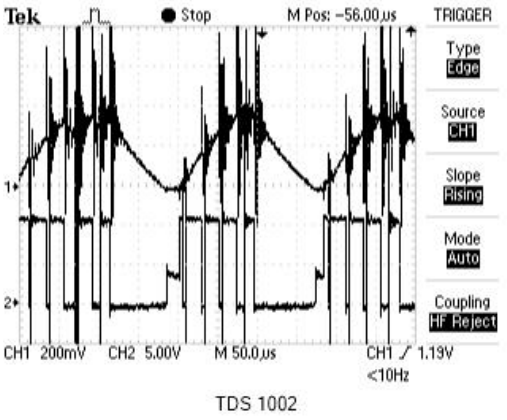
(a) CH1-struja kalema $R_s\, i_L$ i CH2-napon na kondenzatoru v_C.



(b) Fazni dijagram $v_C(R_s\, i_L)$.



(c) CH1-napon na DA konvertoru i CH2-napon na kondenzatoru C_T.



(d) CH1-napon $R_s\, i_L$ i CH2-napon na diodi.

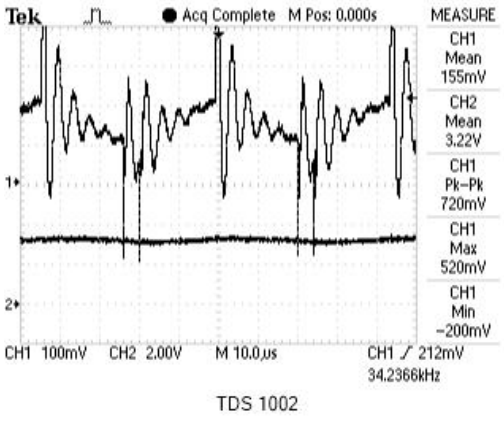
Slika 6.9: *Eksperimentalni rezultati sliding mode kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom* $S(\boldsymbol{x}) = x_2 - m_3$*, gde je* $m_3 = 3.5625$ *V. Ulazni napon je* $v_{IN} = 12$ *V, kondenzator* $C_T = 820$ *pF i izlazna otpornost* $R = 10\ \Omega$.

Sliding mode kontrola sa prekidačkom površinom $S(\mathbf{x}) = m_1\, i_L + m_2\, v_C - m_3$ omogućava kontrolu vrednosti obe promenljive stanja. Kako se komparatorom kola MC34063A u ustaljenom stanju postavlja da je vrednost napona v_5 na ulazu pina 5 jednaka 1.25 V, to je vrednost $m_3 = 1.25$ V. Vrednosti koeficijenata m_1 i m_2 se mogu postaviti tako da se dobije željena prekidačka površina.

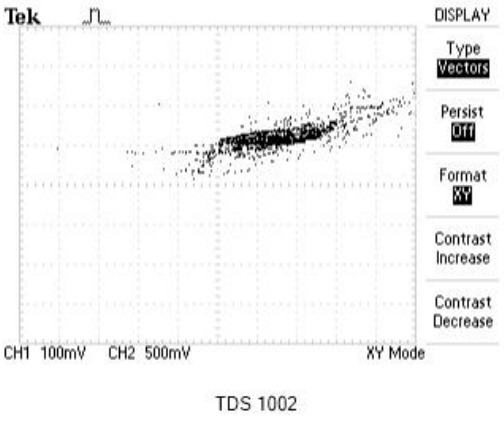
U ovom eksperimentu definisana je prekidačka površina kao $S(\mathbf{x}) = R_s\, i_L + 2\,\frac{v_C}{5.7} - 1.25$ V. Za kolo MC34063A se, radi postizanja veće periode internog oscilaota kola MC34063A, koristi kondenzator $C_T = 820$ pF. Za datu prekidačku površinu se ustaljeno stanje dobija za promenljive stanja $\bar{i}_L = 311.8$ mA i $\bar{v}_C = 3.12$ V.

Implementacijom željene kontrole u mikrokontroleru (pogledati listing u dodatku 6.5) tako što se očitani napon $v_C/5.7$ množi sa 2 i sabira sa naponom $R_s\, i_L$ i na osnovu njega se generiše vrednost DA konvertora se dobija „kretanje" sistema po željenoj prekidačkoj površini. Ukoliko je očitani napon veći od 1.25 V, potrebno je da se isključi prekidač, pa D/A konvertor daje napon 2 V. Ukoliko je očitani napon manji od 1.25 V, D/A konvertor daje 0.5 V čime se postiže uključivanje prekidača buck konvertora.

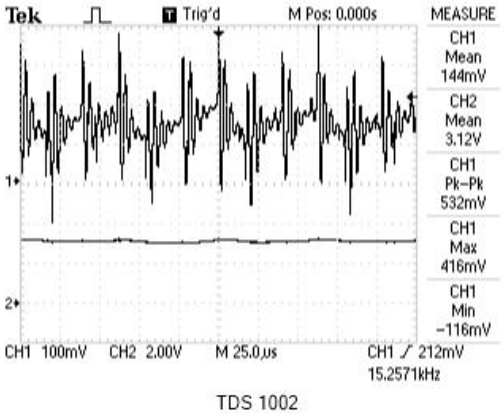
Radi demonstracije održavanja konstantne vrednosti napona kondenzatora i struje kalema bez obzira na ulazni napon, rađena su dva eksperimenta za dve različite vrednosti napona na ulazu konvertora $v_{IN} = 10$ V i $v_{IN} = 7.5$ V. Na sl. 6.10a-b su prikazani vremenski dijagrami $R_s\, i_L$, napona kondenzatora v_C i fazni dijagram $v_C/5.7(R_s\, i_L)$ za slučaj kada je ulazni napon $v_{IN} = 10$ V. Na faznom dijagram sa sl. 6.10b se vidi da sistem „klizi" po prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = R_s\, i_L + 2\,\frac{v_C}{5.7} - 1.25$ V $= 0$, a sa sl. 6.10a se vidi da srednje vrednosti napona kondenzatora, izmerene $\bar{v}_C = 3.22$ V i struje kalema, izmerene $\bar{i}_L = 310$ mA, odgovaraju očekivanim. Do istih zaključaka se može doći sa dijagrama sa sl. 6.10c-d za ulazni napon $v_{IN} = 7.5$ V. Sa sl. 6.10c se vidi da je srednja vrednost napona kondenzatora $\bar{v}_C = 3.12$ V, a struje kalema $\bar{i}_L = 288$ mA, što je očekivano. sl. 6.10d pokazuje da sistem ispravno preključuje po prekidačkoj površini $S(\mathbf{x}) = R_s\, i_L + 2\,\frac{v_C}{5.7} - 1.25$ V $= 0$ i opisuje putanje stabilnog fokusa u svakom od podsistema 1 i 2, kao što je prikazano na sl. 6.2.



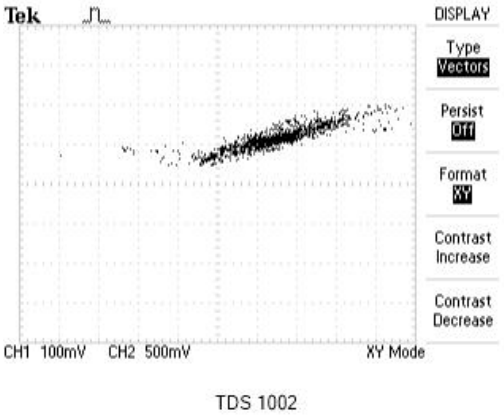
(a) CH1-napon šanta $R_s\, i_L$ i CH2-napon na kondenzatoru v_C za $v_{IN} = 10$ V.



(b) Fazni dijagram $v_C/5.7(R_s\, i_L)$ za $v_{IN} = 10$ V.



(c) CH1-napon šanta $R_s\, i_L$ i CH2-napon na kondenzatoru v_C za $v_{IN} = 7.5$ V.



(d) Fazni dijagram $v_C/5.7(R_s\, i_L)$ za $v_{IN} = 7.5$ V.

Slika 6.10: *Eksperimentalni rezultati sliding mode kontrolisanog buck konvertora sa primenjenom prekidačkom površinom* $S(\boldsymbol{x}) = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 - m_3$, *gde je* $m_3 = 3.5625$ *V. Kondenzator* $C_T = 820$ *pF, a izlazna otpornost* $R = 10\ \Omega$.

6.4 Zaključak

U ovom poglavlju je prikazana relizacija sliding mode kontrole na primeru buck konvertora. Data realizacija ima za cilj da pokaže jednostavnost digitalne implementacije jedne od analiziranih kontrola u prethodnim pogljavljima 3, 4 i 5. U tu svrhu je korišćena razvojna pločica STM32F4-DISCOVERY, a eksperimenti su rađeni na primeru buck konvertora zbog toga što je jedan od najčešće korišćenih DC-DC konvertora.

Merenja su pokazala da se sliding mode kontrola može relizovati korišćenjem mikrokontrolera i da se analitička rešenja, kao i rađene simulacije, poklapaju sa rezultatima dobijenim merenjem.

6.5 Dodatak

Primer programa pisanog za implementaciju sliding mode kontrole korišćenjem razvojne počice STM32F4-DISCOVERY .

```
#include "stm32f4xx.h"

uint16_t n = 0;

int main () {
  // GPIO clock enable, digital pin definitions
  RCC->AHB1ENR |= 0x00000001; // Enable clock for GPIOA
  RCC->AHB1ENR |= 0x00000010; // Enable clock for GPIOE
  GPIOE->MODER |= 0x00010000; // output pin PE08: time mark
  GPIOE->MODER |= 0x00040000; // output pin PE09: toggle
  GPIOA->MODER |= 0x00001000; // output pin PA06: LED D390

  // DAC set-up
  RCC->APB1ENR |= 0x20000000; // Enable clock for DAC
  DAC->CR |= 0x00010001; // DAC control reg, both channels ON
  GPIOA->MODER |= 0x00000f00; // PA04, PA05 are analog outputs

    // ADCset-up
  RCC->APB2ENR |= 0x00000100; // clock for ADC1
  RCC->APB2ENR |= 0x00000200; // clock for ADC2
  ADC->CCR = 0x00000006; // Regular simultaneous mode only
  ADC1->CR2 = 0x00000001; // ADC1 ON
  ADC1->SQR3 = 0x00000002; // use PA02 as input
  ADC2->CR2 = 0x00000001; // ADC1 ON
  ADC2->SQR3 = 0x00000003; // use PA03 as input
  GPIOA->MODER |= 0x000000f0; // PA02, PA03 are analog inputs

  // NVIC IRQ enable
  NVIC_EnableIRQ(TIM2_IRQn); // Enable IRQ for TIM2 in NVIC
  // Timer 2 set-up
  RCC->APB1ENR |= 0x0001; // Enable clock for Timer 2
  TIM2->ARR = 1; // Auto Reload value: 8400 == 100us
  TIM2->DIER |= 0x0001; // DMA/IRQ Enable Register - enable IRQ on
      update
  TIM2->CR1 |= 0x0001; // Enable Counting

  // endless loop - indefinite
  while (1) {
    if (GPIOE->IDR & 0x0001) GPIOA->ODR |= 0x0040; // LED on
    else GPIOA->ODR &= ~0x0040; // else LED off
```

```
    GPIOE->ODR |= 0x0200; // PE09 up
    GPIOE->ODR &= ~0x0200; // PE09 down
  };
}

// IRQ function
void TIM2_IRQHandler(void) // PASS takes approx 500ns of CPU time!
{
  GPIOE->ODR |= 0x0100; // PE08 up
  TIM2->SR &= ~0x00000001; // clear update event flag in TIM2

  /* code that is changed depending on the control method */
  n = ADC2->DR;
  n = n << 1;
  if (n > 0x06C7) DAC->DHR12R1 = 0x097D;
  else DAC->DHR12R1 = 0x0529;
 //DAC->DHR12R1 = ADC1->DR; // pass ADC -> DAC, also clears EOC flag
 //DAC->DHR12R2 = ADC2->DR; // pass ADC -> DAC, also clears EOC flag

  ADC1->CR2 |= 0x40000000; // simultaneous Start Conversion
  GPIOE->ODR &= ~0x0100; // PE08 down
}
```

Glava 7

Zaključak

DC-DC konvertori su kola energetske elektronike koja se koriste za efikasnu konverziju jednosmernog napona/struje u jednosmerni napon/struju. Kako je njihova namena veoma bitna i neophodna u elektronskim sistemima različitih oblasti primene, mnogi aspekti vezani za topologiju, kontrolu, stabilnost rada i dr. predstavljaju aktuelne oblasti istraživanja i usavršavnja.

DC-DC konvertori se realizuju korišćenjem reaktivnih elemenata i prekidača. U zavisnosti od stanja prekidača, konvertor radi kao linearni sistem koji može biti stabilan, nestabilan ili granično stabilan. Promenom stanja prekidača konvertor prelazi (ili preključuje) između više linearnih sistema formirajući time jedan ukupno nelinearan sistem. S obzirom na to da se stabilizacija nelinearnog sistema u opštem slučaju može postići nalaženjem zajedničke funkcije Ljapunova, fromiraju se različite vrste kontrole u zavisnosti od oblika funkcije Ljapunova i zakona preključivanja između linearnih režima rada DC-DC konvertora.

U ovoj disertaciji su analizirane različite vrste kontrole DC-DC konvertora u cilju realizacije stabilnog sistema. Razmatrane su *sliding mode* kontrola, histerezisna kontrola i kontrola korišćenjem *piecewise linear* funkcija Ljapunova. Svaka od ovih kontrola je analizirana i implementirana na primeru Ćuk konvertora, koji je izabran kao jedan od najkompleksnijih DC-DC konvertora. Kompleksnost Ćuk konvertora potiče od postojanja dva diskontnualna režima rada konvertora, kao i činjenice da nijedan od režima rada konvertora nije stabilan. Naime, svi režimi rada Ćuk konvertora su granično stabilni.

Sliding mode kontrola DC-DC konvertora po stabilnoj prekidačkoj površini koju je moguće realizovati rezultuje prekidačkim sistemom veoma dobrih dinamičkih karakteristika: smanjenim dinamičkim gubicima na prekidačima i velikom marginom faze funkcije prenosa kola povratne sprege DC-DC konvertora. Jednostavnom digitalnom implementacijom kontrolera se može ostvariti sliding mode kontrola DC-DC konvertora. U ovoj disertaciji je realizovana kontrola na primeru Ćuk konvertora za sve prekidačke površine

koje rezultuju stabilnim sistemom. Pokazano je da se sliding mode kontrola može projektovati tako da se dobije željeni ekvilibrijum. Kako je DC-DC konvertor nelinearni sistem, on se može linearizovati u okolini ekvilibrijuma i predstaviti kao zbir linearnog dela i nelinearnog ostatka. Ispravnom procenom ograničenja sektora nelinearnosti, koja se dobija nakon primene sliding mode kontrole i linearizacije sistema, se može proceniti frekvencija prekidanja i ripl promenljivih stanja u ustaljenom stanju konvertora. U ovoj disertaciji je pokazano da se ograničenje sektora nelinearnog ostatka može proceniti primenom linearnih matričnih nejednačina i da je dobijeno ograničenje u direktnoj vezi sa primenom *linear ripple* aproksimacije prilikom analize napona i struja u kolu DC-DC konvertora. Naime, dokle god je nelinearni ostatak unutar sektora, opravdana je primena *linear ripple* aproksimacije u analizi rada konvertora u svakom od podsistema. To znači da se u svakom od podsistema rada promenljive stanja mogu predstaviti kao linearne funkcije vremena (*linear ripple*). Ovaj rezultat se može koristiti za procenu praga histerezisa sliding mode kontrolera tako da se dobije DC-DC konvertor kod koga su vremenske konstante promene napona i struja u kolu mnogo veće od periode prekidanja upravljačkog PWM signala.

Posmatrajući DC-DC konvertor kao hibridni sistem, kod koga su promenljive stanja kontinualni deo sistema, a prekidač i njegov upravljački signal digitalni deo sistema, može se zadavanjem željenog zakona prekidanja prekidača implementirati histerezisna kontrola. Histerezisna kontrola kod koje je zakon prekidanja određen minimalnom vrednošću izvoda funkcije Ljapunova rezultuje stabilnim sistemom čija stabilnost je određena samim projektovanjem kontrole. Naime, nelinearni sistem kao što je DC-DC konvertor se može stabilisati tako što se nađe zajednička kvadratna funkcija Ljapunova za svaki od podsistema konvertora. Prekidanjem na osnovu minimuma izvoda kvadratne funkcije Ljapunova unutar definisanog histerezisa se, ukoliko postoji zajednička kvadratna funkcija Ljapunova, dobija stabilan sistem. U disertaciji je konstruisana histerezisna kontrola na primeru Ćuk konvertora i dat je postupak projektovanja. S obzirom da Ćuk konvertor preključuje između granično stabilnih podsistema, sam oblik zajedničke kvadratne funkcije Ljapunova je specifičan i izveden je u disertaciji, a objavljen je i u radu [58]. Prilikom rada Ćuk konvertor može da uđe u jedno od dva diskontinualna režima. U disertaciji je analiziran rad Ćuk konvertora koji se histerezisno upravlja kada uđe u diskontinualni režim. Izveden je uslov za izlazak konvertora iz diskontinualnog režima. Ta analiza je objavljena i u radu [79].

Formiranjem višestrukih funkcija Ljapunova, kao što je pokazano u ovoj disertaciji, može se postići stabilno upravljanje prekidačkim elektronskim kolima. Pri tome, posebna pažnja posvećena je formiranju i primeni višestruke funkcije Ljapunova linearne po segmentima (*Piecewise Linear Lyapunov Functions* - PLLF) i izvedeni su uslovi koje je

potrebno da zadovoljavaju koeficijenti linearnih funkcija Ljapunova tako da se dobija stabilan sistem. Pokazano je da uvodjenjem više funkcija Ljapunova pomoću kojih sistem preključuje, konvertor brže konvergira ka ustaljenom stanju i da ima i bolje dinamičke karakteristike. Za primer Ćuk konvertora je realizovana PLLF kontrola i procenjena su ograničenja koeficijenata funkcija Ljapunova.

Kontroleri nelinearnih prekidačkih elektronskih kola sa stabilnim upravljanjem, kojima se bavi ova disertacija, uglavnom su realizovane analogno. Na bazi analiza iznetih u ovoj disertaciji demonstriran je postupak digitalne realizacije sliding mode kontrole buck DC-DC konvertora. Sliding mode kontrola je implementirana korišćenjem mikrokontrolerskog razvojnog sistema. Realizovani sistem je eksperimentalno verifikovan čime je pokazano da se rezultati sliding mode kontrole buck konvertora dobijeni merenjem slažu sa teorijskom analizom.

U ovoj disertaciji se analizira više vrsta nelinearnih vrsta upravljanja DC-DC konvertora, koje su uopštene tako da se mogu primeniti na kompleksnije DC-DC konvertore. Data upravljanja se mogu koristiti da se dobije stabilan DC-DC konvertor željenih vrednosti napona i struja u kolu u ustaljenom stanju. Data je i procedura projektovanja kontrolera, a na primeru sliding mode kontrole ponuđena je i realizacija kontrolera. Kako se razvojem tehnologije, implementacija sistema pomera u smeru njegove integracije na čip, primena analiziranih vrsta upravljanja koje se mogu digitalno realizovati, dobija na značaju.

Nastavak na ovu disertaciju bi bio generalizacija analiziranih vrsta kontrole tako da mogu da se primene na druge vrste konvertora: poput ispravljača (AC/DC konvertora) ili invertora (DC/AC konvertora). Funkcija Ljapunova u tom slučaju bi bila zavisna od vremena, pa bi samo njeno računanje predstavljalo veoma interesantan i matematički zahtevan problem koji do sada nije viđen u literaturi.

Biografija

Aleksandra Lekić je rođena u Beogradu 21.09.1989. godine. Osnovnu i srednju školu je završila u Obrenovcu. Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, je upisala 2008. godine. Diplomirala je 2012. godine na smeru Elektronika sa prosečnom ocenom 10 i dobila nagradu student generacije Elektrotehničkog fakulteta školske 2011/2012. godine. Master akademske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, smer ELektronika, je završila 2013. godine sa prosečnom ocenom 10 i master radom „Simulacija prekidačkih konvertora na nivou srednjih vrednosti napona i struja u kolu". Doktorske akademske studije je upisala školske 2013/2014. godine na Elektrotehničkom fakultetu, smer Elektronika.

Od decembra 2013. godine je zaposlena na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu pri Katedri za Elektroniku prvo kao saradnik u nastavi, a potom kao asistent. Držala je auditorne vežbe na više predmeta smera za Elektroniku.

U dosadašnjem istraživačkom radu se bavila analizom i simulacijom DC-DC konvertora, kao i projektovanjem njihove regulacije. Rad vezan za doktorsku disertaciju je objavljen u dva međunarodna časopisa i dva domaća časopisa.

- A. Lekić, D. Stipanović, "Hysteresis Switching Control of the Ćuk Converter," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I—Regular Papers*, vol. 63, no. 11, pp. 2048-2061, 2016.
  ISSN 1549-8328, IF = 2.393, doi: 10.1109/TCSI.2016.2600199

- A. Lekić, D. Stipanović, "Hysteresis Switching Control of the Ćuk Converter Operating in Discontinuous Conduction Modes," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II—Express Briefs*, to appear.
  ISSN 1549-7747, IF = 1.136, doi: 10.1109/TCSII.2016.2631510

- A. Lekić, D. Stipanović, "LMI Approach for Sliding Mode Control and Analysis of DC-DC Converters," *TEHNIKA*, vol. 71, no. 5, pp. 715-723, 2016.
  ISSN 0040-2176

- A. Lekić, D. Stipanović, "LMI Approach for Sliding Mode Control and Analysis of

DC-DC Converters," *Technics*, vol. 62, no. 1, pp. 69-76, 2016.
ISSN 0040-2176

Bibliografija

[1] R. W. Erickson and D. Maksimovic, *Fundamentals of Power Electronics*. Springer Science & Business Media, 2001.

[2] D. Maksimovic and S. Cuk, "Switching converters with wide dc conversion range," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 6, no. 1, pp. 151–157, 1991.

[3] S. M. Ćuk, "Modelling, analysis and design of switching converters," Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, 1977.

[4] M. D. Seeman and S. R. Sanders, "Analysis and optimization of switched-capacitor dc–dc converters," *IEEE transactions on power electronics*, vol. 23, no. 2, pp. 841–851, 2008.

[5] S. R. Sanders, "Nonlinear control of switching power converters," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1989.

[6] T. Martin and S. Ang, "Digital control for switching converters," in *Industrial Electronics, 1995. ISIE'95., Proceedings of the IEEE International Symposium on*, vol. 2. IEEE, 1995, pp. 480–484.

[7] B. J. Patella, A. Prodic, A. Zirger, and D. Maksimovic, "High-frequency digital pwm controller ic for dc-dc converters," *IEEE Transactions on Power electronics*, vol. 18, no. 1, pp. 438–446, 2003.

[8] J. Chen, A. Prodic, R. W. Erickson, and D. Maksimovic, "Predictive digital current programmed control," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 18, no. 1, pp. 411–419, 2003.

[9] A. Prodic, D. Maksimovic, and R. W. Erickson, "Design and implementation of a digital pwm controller for a high-frequency switching dc-dc power converter," in *Industrial Electronics Society, 2001. IECON'01. The 27th Annual Conference of the IEEE*, vol. 2. IEEE, 2001, pp. 893–898.

[10] M. He and J. Xu, "Nonlinear pid in digital controlled buck converters," in *APEC 07-Twenty-Second Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*. IEEE, 2007, pp. 1461–1465.

[11] A. Prodic and D. Maksimovic, "Design of a digital pid regulator based on look-up tables for control of high-frequency dc-dc converters," in *Computers in Power Electronics, 2002. Proceedings. 2002 IEEE Workshop on*. IEEE, 2002, pp. 18–22.

[12] D. Maksimović, A. M. Stanković, V. J. Thottuvelil, and G. C. Verghese, "Modeling and simulation of power electronic converters," *Proceedings of the IEEE*, vol. 89, no. 6, pp. 898–912, 2001.

[13] J. Mahdavi, A. Emaadi, M. Bellar, and M. Ehsani, "Analysis of power electronic converters using the generalized state-space averaging approach," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 8, pp. 767–770, 1997.

[14] A. Davoudi, J. Jatskevich, and T. De Rybel, "Numerical state-space average-value modeling of PWM DC-DC converters operating in DCM and CCM," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 21, no. 4, pp. 1003–1012, 2006.

[15] C. Tse, Y. Lai, and H. Iu, "Hopf bifurcation and chaos in a free-running current-controlled cuk switching regulator," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 47, no. 4, pp. 448–457, 2000.

[16] M. di Bernardo, F. Garefalo, L. Glielmo, and F. Vasca, "Switchings, bifurcations, and chaos in dc/dc converters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, no. 2, pp. 133–141, 1998.

[17] V. Utkin, "Sliding mode control of dc/dc converters," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 350, no. 8, pp. 2146–2165, 2013.

[18] Z. Chen, "PI and sliding mode control of a ćuk converter," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 8, pp. 3695–3703, 2012.

[19] R. Goebel, R. G. Sanfelice, and A. R. Teel, *Hybrid Dynamical Systems: modeling, stability, and robustness*. Princeton University Press, 2012.

[20] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel, "Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach," *International Journal of Systems Science*, vol. 32, pp. 1055–1061, 2001.

[21] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994, vol. 15.

[22] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge university press, 2004.

[23] M. S. Branicky, "Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 43, no. 4, pp. 475–482, 1998.

[24] R. Tymerski and V. Vorperian, "Generation, classification and analysis of switched-mode dc-to-dc converters by the use of converter cells," in *Telecommunications Energy Conference, 1986. INTELEC'86. International*. IEEE, 1986, pp. 181–195.

[25] H. K. Khalil and J. Grizzle, *Nonlinear systems*. Prentice hall New Jersey, 1996, vol. 3.

[26] D. Maksimović and S. Ćuk, "A unified analysis of PWM converters in discontinuous modes," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 6, no. 3, pp. 476–490, 1991.

[27] B. Kågström, "Bounds and perturbation bounds for the matrix exponential," *BIT Numerical Mathematics*, vol. 17, no. 1, pp. 39–57, 1977.

[28] V. A. Yakubovich, "S-procedure in nonlinear control theory," *Vestnik Leningrad University*, vol. 1, pp. 62–77, 1971.

[29] D. Šiljak and D. Stipanović, "Robust stabilization of nonlinear systems: the lmi approach," *Mathematical problems in Engineering*, vol. 6, no. 5, pp. 461–493, 2000.

[30] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212–232, 1988.

[31] I. U. Vadim, "Survey paper variable structure systems with sliding modes," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 22, no. 2, pp. 212–222, 1977.

[32] L. Martínez-Salamero, G. García, M. Orellana, C. Lahore, B. Estibals, C. Alonso, and C. E. Carrejo, "Analysis and design of a sliding-mode strategy for start-up control and voltage regulation in a Buck converter," *IET Power Electronics*, vol. 6, no. 1, pp. 52–59, 2013.

[33] S. R. Sanders and G. C. Verghese, "Lyapunov-based control for switched power converters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 7, no. 1, pp. 17–24, 1992.

[34] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont, 1999.

[35] K. M. Smedley and S. Cuk, "Dynamics of one-cycle controlled Cuk converters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 10, no. 6, pp. 634–639, 1995.

[36] M. Oppenheimer, I. Husain, M. Elbuluk, and J. De Abreu Garcia, "Sliding mode control of the Cuk converter," in *27th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1996. PESC'96 Record.*, vol. 2. IEEE, 1996, pp. 1519–1526.

[37] L. Martinez-Salamero, J. Calvente, R. Giral, A. Poveda, and E. Fossas, "Analysis of a bidirectional coupled-inductor Cuk converter operating in sliding mode," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 45, no. 4, pp. 355–363, 1998.

[38] S.-P. Huang, H.-Q. Xu, and Y.-F. Liu, "Sliding-mode controlled cuk switching regulator with fast response and first-order dynamic characteristic," in *20th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference, 1989. PESC'89 Record.* IEEE, 1989, pp. 124–129.

[39] H. Sira-Ramirez, "Sliding motions in bilinear switched networks," *IEEE Transactions on circuits and systems*, vol. 34, no. 8, pp. 919–933, 1987.

[40] J. Alimeling and W. P. Hammer, "Plecs-piece-wise linear electrical circuit simulation for simulink," in *Proceedings of the IEEE 1999 International Conference on Power Electronics and Drive Systems, 1999. PEDS'99.*, vol. 1. IEEE, 1999, pp. 355–360.

[41] A. Michel, K. Wang, and B. Hu, *Qualitative theory of dynamical systems*. CRC Press, 2001, vol. 239.

[42] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*. Springer Science & Business Media, 2012.

[43] H. Ye, A. N. Michel, and L. Hou, "Stability theory for hybrid dynamical systems," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 43, no. 4, pp. 461–474, 1998.

[44] H. Lin and P. J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 54, no. 2, pp. 308–322, 2009.

[45] G. Chesi, P. Colaneri, J. C. Geromel, R. Middleton, and R. Shorten, "A nonconservative lmi condition for stability of switched systems with guaranteed dwell time," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1297–1302, 2012.

[46] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye, "Cvx: Matlab software for disciplined convex programming," 2008.

[47] T. Theunisse, J. Chai, R. G. Sanfelice, W. Heemels *et al.*, "Robust global stabilization of the DC-DC Boost converter via hybrid control," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 62, no. 4, pp. 1052–1061, 2015.

[48] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Philadelphia, PA: Taylor & Francis Inc., 1999.

[49] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Cambidge, UK: Cambridge University Press, 1991.

[50] R. A. Horn and C. A. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambgidge, UK: Cambridge University Press, 1985.

[51] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1988.

[52] D. M. Stipanović and D. D. Šiljak, "Connective stability of discontinuous dynamic systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 115, pp. 711–726, 2002.

[53] C. King and R. Shorten, "A singularity test for the existence of common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable LTI systems," in *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, MA, 2004, pp. 3881–3884.

[54] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and S. A. Morse, "Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition," *Systems & Control Letters*, vol. 37, pp. 117–122, 1999.

[55] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. New York, NY: SIAM, 1994.

[56] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[57] R. Sanfelice, D. Copp, and P. Nanez, "A toolbox for simulation of hybrid systems in Matlab/Simulink: Hybrid Equations (HyEQ) Toolbox," in *Proceedings of the 16th international conference on Hybrid systems: computation and control*. ACM, 2013, pp. 101–106.

[58] A. Lekić and D. M. Stipanović, "Hysteresis switching control of the Ćuk converter," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 63, no. 11, pp. 2048–2061, 2016.

[59] A. El Aroudi, D. Giaouris, H. H.-C. Iu, and I. A. Hiskens, "A review on stability analysis methods for switching mode power converters," *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, vol. 5, no. 3, pp. 302–315, 2015.

[60] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo, "Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems," *European Journal of Control*, vol. 4, no. 2, pp. 140–147, 1998.

[61] Y. Ohta, H. Imanishi, L. Gong, and H. Haneda, "Computer generated lyapunov functions for a class of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 40, no. 5, pp. 343–354, 1993.

[62] A. P. Molchanov and Y. S. Pyatnitskiy, "Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory," *Systems & Control Letters*, vol. 13, no. 1, pp. 59–64, 1989.

[63] F. Blanchini, "Nonquadratic lyapunov functions for robust control," *Automatica*, vol. 31, no. 3, pp. 451–461, 1995.

[64] ——, "Survey paper: Set invariance in control," *Automatica (Journal of IFAC)*, vol. 35, no. 11, pp. 1747–1767, 1999.

[65] D. Liu and A. Molchanov, "Criteria for robust absolute stability of time-varying nonlinear continuous-time systems," *Automatica*, vol. 38, no. 4, pp. 627–637, 2002.

[66] Y. Ohta, "On the construction of piecewise linear lyapunov functions," in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001*, vol. 3. IEEE, 2001, pp. 2173–2178.

[67] Y. Ohta and K. Mori, "On the construction of piecewise linear lyapunov functions: Further improved results," in *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2006, pp. 1614–1619.

[68] C. A. Yfoulis and R. Shorten*, "A numerical technique for the stability analysis of linear switched systems," *International Journal of Control*, vol. 77, no. 11, pp. 1019–1039, 2004.

[69] C. Yfoulis, D. Giaouris, S. Voutetakis, and S. Papadopoulou, "Constrained switching stabilization of a dc-dc boost converter using piecewise-linear lyapunov functions," in *2013 21st Mediterranean Conference on Control & Automation (MED)*. IEEE, 2013, pp. 814–823.

[70] C. Yfoulis, D. Giaouris, F. Stergiopoulos, C. Ziogou, S. Voutetakis, and S. Papadopoulou, "Robust constrained stabilization of a boost dc-dc converter with lyapunov-based control and piecewise-linear lyapunov functions," in *2014 European Control Conference (ECC)*. IEEE, 2014, pp. 2170–2175.

[71] ——, "Robust constrained stabilization of boost dc–dc converters through bifurcation analysis," *Control Engineering Practice*, vol. 35, pp. 67–82, 2015.

[72] H. Lin and P. A. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, pp. 308–322, 2009.

[73] S.-C. Tan, Y. Lai, C. K. Tse, and M. K. Cheung, "A fixed-frequency pulsewidth modulation based quasi-sliding-mode controller for buck converters," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 20, no. 6, pp. 1379–1392, 2005.

[74] S.-C. Tan, Y.-M. Lai, M. K. Cheung, and C. K. Tse, "On the practical design of a sliding mode voltage controlled buck converter," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 20, no. 2, pp. 425–437, 2005.

[75] E. Vidal-Idiarte, L. Martinez-Salamero, F. Guinjoan, J. Calvente, and S. Gomariz, "Sliding and fuzzy control of a boost converter using an 8-bit microcontroller," *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, vol. 151, no. 1, pp. 5–11, 2004.

[76] P.-Z. Lin, C.-M. Lin, C.-F. Hsu, and T.-T. Lee, "Type-2 fuzzy controller design using a sliding-mode approach for application to dc–dc converters," *IEE Proceedings-Electric Power Applications*, vol. 152, no. 6, pp. 1482–1488, 2005.

[77] S. Microelectronics, "Stm32f4discovery," *STM32F4 high performance discovery board, User manual*, 2013.

[78] "Mc34063a, mc33063a, sc34063a, sc33063a, ncv33063a 1.5 a, step-up/down/inverting switching." [Online]. Available: http://www.onsemi.com/pub_link/Collateral/MC34063A-D.PDF

[79] A. Lekic and D. Stipanovic, "Hysteresis switching control of the ćuk converter operating in discontinuous conduction modes," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2016.

Prilog 1.

Izjava o autorstvu

Potpisana Aleksandra Lekić, broj upisa 2013/5001,

IZJAVLJUJEM

da je doktorska disertacija pod naslovom „Stabilno prekidačko upravljanje DC-DC konvertorima"

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni,
- da nisam kršila autorska prava i koristila intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 30.03.2017. Лекић Александра

Prilog 2.

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora	Aleksandra Lekić
Broj upisa	2013/5001
Studijski program	Elektronika
Naslov rada	Stabilno prekidačko upravljanje DC-DC konvertorima
Mentor	dr Vujo Drndarević, redovni profesor

Potpisana Aleksandra Lekić

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predala za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu**.
Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.
Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda:

U Beogradu, 30.03.2017. Лекић Александра

Prilog 3.

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković" da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom „Stabilno prekidačko upravljanje DC-DC konvertorima", koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilozima predala sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje. Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo.
2. Autorstvo – nekomercijalno.
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade.
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima.
5. Autorstvo – bez prerade.
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima.

(Kratak opis licenci dat je na sledećoj strani.)

U Beogradu, 30.03.2017.

Potpis doktoranda:

Лекић Александра

Prilog 3.

1. Autorstvo. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo - nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo - nekomercijalno - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. Autorstvo - bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu djela.

6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerade. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.