

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Звонко М. Радосављевић

**ПРИДРУЖИВАЊЕ ПОДАТАКА  
СИНГЕРОВИМ МЕМОРИЈСКИМ  
ФИЛТРОМ ЗА ПРАЋЕЊЕ ПОКРЕТНИХ  
ЦИЉЕВА У ГУСТОМ КЛАТЕРУ**

докторска дисертација

Београд, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Zvonko Radosavljevic

**SINGER MEMORY FILTER DATA  
ASSOCIATION FOR MOVING TARGET  
TRACKING IN HEAVY CLUTTER**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015.

## **МЕНТОР**

др Бранко Ковачевић, редовни професор  
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

## **ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ**

др Бранко Ковачевић, редовни професор  
Електротехнички факултет у Београду

др Стевица Граовац, ванредни професор  
Електротехнички факултет у Београду

др Горан Дикић, ванредни професор  
Универзитет одбране у Београду

др Миодраг Поповић, редовни професор  
Електротехнички факултет у Београду

др Бојан Зрнић, редовни професор  
Универзитет одбране у Београду

Датум одбране:

---

## **ЗАХВАЛНИЦА**

Аутор се захваљује проф. др Бранку Ковачевићу, на указаном поверењу током вођења тезе, као и корисним сугестијама током израде дисертације.

Аутор се захваљује упокојеном проф. др Дарку Мушичком, Ханјанг Универзитет, Ан Сан, Јужна Кореја, за пуну подршку током формирања и истраживања теме, без чије помоћи ова теза не би била реализована. Посебну захвалност аутор дугује професору др Таек Лиул Сонгу са Ханјанг Универзитета, Ан Сан, Јужна Кореја, који је окупивши научни тим из Аустралије, Србије и Јужне Кореје водио истраживања. Аутор дугује захвалност Ву Чан Киму као и колективу катедре за Електронске системе Ханјанг Универзитета, на вишегодишњој научној и стручној сарадњи и топлини и гостопримству који су ми пружили приликом боравка у Јужној Кореји.

Током израде тезе, подршку аутору пружили су гоподин Премил Илић и Раденко Илић из предузећа ”Трнићи Инвест”.

Посебну захвалност аутор дугује колективу Електротехничког факултета у Београду, на стрпљењу током вођења поступка током израде дисертације, као и Министарству Одбране Републике Србије, на указаном поверењу и стрпљењу током дуготрајних експеримената као и на финансијској и техничко-административној подршци током реализацију дисертације.

На крају, аутор се захваљује породици на подршци и разумевању, којој је уједно посвећена ова теза.

## **ПРИДРУЖИВАЊЕ ПОДАТАКА СИНГЕРОВИМ МЕМОРИЈСКИМ ФИЛТРОМ ЗА ПРАЋЕЊЕ ПОКРЕТНИХ ЦИЉЕВА У ГУСТОМ КЛАТЕРУ**

### Резиме

Предмет истраживања ове дисертације је поступак придруживања података у процесу праћења покретних циљева. У основи, познато је да сензори обезбеђују мерења, на основу којих се може извршити процена (естимација) параметара и стања система. У већини случајева је тачно познат извор мерења тако да се процена врши стандардним методама (*Kalman-Bucu* филтер). Асоцијација података је неопходна у ситуацијама када није познат извор мерења, као што је осматрање простора радаром или сонаром. Радар шаље импулс електромагнетске енергије и процесира примљене одјеке. Када снага примљеног сигнала пређе одређени праг, долази до детекције. Детекције се пројектују у осматрачке координате које постају улазна мерења за блок праћења циљева. Та мерења могу потицати од циљева, али исто тако и од случајних објеката и феномена. Извор сваког мерења је непознат. Мерења која потичу од циљева ("тачна" мерења) нису поуздана, јер су у сваком интервал мерења присутна само са одређеном вероватноћом детекције. Нежељена мерења се обично зову "клатер", она се појављују случајно, и обично се моделирају као Поасонов процес описан густином броја клатер мерења у простору осматрања.

Број циљева и њихово постојање су типично "а priori" непознати, тако да је примарни задатак алгоритма асоцијације података одређивање постојања и броја циљева у простору осматрања. То подразумева примену теоријских метода које из скупа пристиглих мерења у току једног временског циклуса окретања антене издвајају оне подскупове које потичу од постојећих циљева или које потичу од неких нових циљева. Остале детекције могу се сматрати "лажним алармом" и последица су утицаја клатера и шума у каналу. Примена ових метода подразумева припремне радње, као што је формирање тзв. "прозора праћења" односно сужавање целокупног простора осматрања на област од интереса, итд. Због а priori незнања броја и положаја циљева, трагови се иницијализују користећи непоуздана мерења.

Поред тачних трагова (који прате циљеве), иницијализују се и лажни трагови (који не прате циљеве). Неопходни део алгоритама за праћење покретних циљева јесте дискриминација лажних трагова; тј. процедура која треба да потврди број тачних трагова, и избрише (већину) лажних трагова. Предложена методологија праћења покретних циљева (*Integrated Track Splitting-ITS*), предмет је интензивног истраживања. *ITS* филтер рекурзивно рачуна вероватноћу постојања трага у сваком скену, која се користи за дискриминацију лажних трагова. Један рекурзивни циклус *ITS* алгорита састоји се из три корака. Први корак је пропагација стања циља. У овом кораку, компоненте трага, пропагирају као *Markov* процес (корак предикције Калмановог филтра). Следи корак селекције мерења компонента трага из претходног скена. Свака пропагирана компонента трага селекује мерења пристигла у текућем скену. На крају, корак естимација стања трага где се *pdf* естимација стања трага добија се као комбинација међусобно искључивих компоненти естимације стања *pdf*-а, која је условљена постојањем циља и историјом припадности компоненте мерењима пристиглим у  $N$  претходних скенова. На тај начин, свако ново мерење, упарено са компонентом из претходног скена, даје нову компоненту.

Историјат настанка компоненти трага утиче на тачност праћења, нарочито при ниским вероватноћама детекције циља. Недостатак теоријског и практичног поређења између различитих дубина историје компоненти трага, један је од проблема који се јављају у практичним применама праћења покретних циљева.

Други проблем реализације је методологија "искуства" код одређивања параметара филтра. С друге стране треба смањити нумеричку комплексност. Комплексност оптимална имплементација *ITS* алгоритама расте експоненцијално са временом, па је потребно изабрати под-оптималну имплементацију. Систематска теоријска обрада и практична упутства примене *ITS* филтера нису објављени. Праћење у окружењу клатера иницира стварне (који прате циљ) и лажне (који не прате циљ) трагове. Одбацивање лажних трагова (*FTD-False Track Discrimination*) је веома важна особина система за праћење. *ITS* филтер је ефикасна метода за аутоматско праћење циљева у окружењу клатера. Праћење трага у *ITS* методи такође укључује естимацију трајекторије циља у облику скупа међусобно

искључивих компоненти (Гаусиана). Број компоненте трага расте експоненцијално у сваком скену као резултат њихове интеракције са пристиглим мерењима (мерења потичу од циља или шума). Контрола броја компоненти се остварује 'отсецањем' слабих компоненти (*prune*) или 'сједињавањем' компоненти са блиским трајекторијама циља (*merge*). Однос између *FTD* и контроле компонената је део истраживања које треба да резултује практичним упутством за коришћење *ITS* филтра.

У дисертацији биће дате теоријске и практичне основе *ITS* алгоритама при коришћењу Сингерове методе дубине историје мерења трага. Биће дат теоријски приказ трага као уније компоненти. Естимација стања сваке компоненте је излаз филтра који даје једно мерење у сваком скену. Репрезент сваке компоненте је историја припадности мерења циљу, исказана преко одговарајуће вероватноће. Зато што су оне међусобно искључиве, збир вероватноћа свих компонената трага једнак је јединици. Свако стање компоненте се састоји од вероватноће постојања компоненте и функције густине вероватноће стања компоненте *pdf*, под условом да компонента постоји.

Стандардним претпоставкама праћења циља сензором коначне резолуције (мерење потиче од једног извора) и тачкастог циља (циљ може да креира једно мерење по скену са вероватноћом детекције). У сваком скену, сензор даје одређени случајни број клатер мерења, дефинисан густином клатера. Трагови се иницијализују у сваком скену коришћењем мерења од два консеквентна скена у складу са захтевом максималне брзине циља. Формирани *ITS* траг се рекуривно ажурира у сваком скену. Вероватноћа постојања трага се користи за потврђивање или гашење сваког трага насталог у суседним скеновима. Утицај клатера доводи до одређене греске при потврђивању трагова. Неки од потврђених трагова могу бити и лажни. Резултат *FTD* процеса је потврђивање или гашење неких трагова.

Функција густине вероватноће трајекторије стања трага (*pdf*) апроксимира се одређеним бројем компоненти трага (Гаусиана). Ова апроксимација доспева у контролу компонената трага. Побољшање апроксимације трајекторије резултује побољшањем *FTD* перформанси као и повећањем броја 'задржаних' компоненти са повећањем рачунарских захтева. Компромис између *FTD* и расположивих

рачунарских ресурса је додатни циљ дисертације. Теоријско и практично поређење различитих дубина историје *ITS* алгоритама је неопходно да би се утврдило њихово настајање и узајмна ограничења.

Дисертација дефинише проблеме које треба да реши асоцијација података, док се у наставку унапређује *ITS* предлагањем оптимална методе асоцијације података подоптималном имплементацијом.

**Кључне речи:** асоцијација података, праћење покретних циљева, алгоритам сједињавања компонената трага, Сингеров меморијски филтер

**Научна област:** обрада сигнала, системи аутоматског управљања, теорија естимације

**Ужа научна област:** праћење циљева

**УДК број:** 621.3



## **SINGER MEMORY FILTER DATA ASSOCIATION FOR MOVING TARGET TRACKING IN HEAVY CLUTTER**

### Abstract

The subject of the research topic presented in this doctoral dissertation is data association of moving target tracking. Basically, it is known that sensors provide the measurement, which results can effectively be used for evaluation (estimation) of the parameters and state of the system. In most cases, the exact source of measurement is known, thus estimation is performed by using standard methods (Kalman-Bucy filter). Data association is necessary in scenarios where source of measurements is not known, such as the observation of radar or sonar. Radar sends a pulse of electromagnetic energy and processes the received echoes. When the power of the received signal exceeds a certain threshold, there is a detection. Detections are projected in the observation coordinates which then become input measurements for the target tracking system. This measurement may derive from the targets, but also from random objects and phenomena. Source of each measurement is unknown. Measurements derived from targets ("true" measurements) are not reliable, because in each measurement interval they are present only with a certain probability of detection. Adverse measurements are commonly called "clutter", they appear randomly, and are usually modeled as a Poisson process described Clutter number density measurements in space observation.

Number of targets and their existence are typically 'a priori' unknown, thus primary task of data association algorithms is to determine the existence and the number of targets in the space of observation. This includes the application of theoretical methods which, from a set of measurements received during a cycle time of turning the antenna, allocate subsets that derive from existing targets or from some new targets. Other detection can be considered as a 'false' alarm and is consequence of clutter and noise influence in the channel. Application of these methods involves preparatory activities, such as the formation of the so-called 'monitoring window ' or narrowing of the entire

observation space on area of interest only, and so on. Because the number and positions of targets are not a priori known, tracks are initialized using unreliable measurements. In addition to accurate tracks (which follow the target), false tracks are also initialized (which do not follow targets). A necessary part of moving targets tracking algorithms is discrimination of false tracks; procedure which should confirm (most of) accurate tracks and delete (most of) false tracks. The proposed methodology for moving targets tracking -Integrated Track Splitting (ITS) is the subject of intensive research. ITS filter recursively calculates probability of the existence for each track in each scan, and this is used to discriminate false tracks. A recursive cycle ITS algorithm consists of three steps. The first step is the propagation of the target state. In this step, tracks components, are propagated as a Markov process (step prediction of Kalman filter). Next step is selection of track components measurements from previous scan. Each component tracks from previous scan, selects the number of measurements in the current scan. Finally, the state estimation step follow, where tracks pdf estimation is obtained as a combination of mutually exclusive components of state estimation pdf's, which is conditioned by the existence of target history and belonging component measurements arrived in N previous scans. Thus, each new measurement, paired with the component from the previous scan, provides a new component.

History of the tracks components affects the accuracy of tracking, especially at low probabilities of targets detection. The lack of theoretical and practical comparisons between various depth history of tracks components, is one of the problems that arise in practical applications of moving targets tracking.

Another problem is the implementation of the 'experience' methodology in determining the parameters of the filter. On the other hand, numerical complexity should be reduced. The complexity of optimal implementation of ITS algorithms grows exponentially with time, so it is necessary to select a sub-optimal implementation. The theoretical analysis and practical application instructions for ITS filters were not disclosed yet. Tracking the surrounding clutter initiate true (which follow the target) and false (which do not follow the target) tracks. The rejection of the false track (FTD-False Track Discrimination) is a very important feature of targets tracking systems. ITS filter is an efficient method for automatic targets tracking in clutter environment. Tracks control

in the ITS method also includes the estimation of target trajectories in the form of a set of mutually exclusive components (Gaussian). Number of tracks components grows exponentially in each scan as a result of their interaction with the incoming measurements (measurements originate from a target or clutter). Control of the number of components is achieved by excision of weak components (prune) or conjoining component with close target trajectories (merge). The relationship between FTD and control of components is part of the research, which should result in practical guidelines for the use of ITS filter. The dissertation provides theoretical and practical foundation in the use of ITS algorithms with Singer method of depth of history. Also, dissertation provides theoretical view of track as Union of components. Estimation of each component is the output of the filter that gives one measurement at each scan. Representative of each component is the history of belonging of the measured track to target, expressed through appropriate probabilities. Because they are mutually exclusive, the sum of the probability of all track components is equal 'one'. Each state of component consists of the probability of existence and probability density functions of component state estimation pdf, provided that the component exists. The usual assumptions of target tracking is a final resolution sensor (measurement comes from a single source) and the 'point' target (target can create one measurement per scan with a probability of detection). In each scan, the sensor provides a certain number of random measurements clutter, defined by its density. Tracks are initialized in each scan using measurements from the two consequential scans, in accordance with the requirement of 'maximum target velocity'.

Each ITS track recursively updates every scan. The probability of the track existence is used to confirm or decline all tracks generated in the consequently scans. The effect of clutter leads to some errors when acknowledging the tracks. Some of the confirmed tracks can be false. The result of the FTD process is to 'confirm' or 'terminate' some tracks. Track trajectory pdf is approximated by a number of tracks components (Gaussian).

This approximation is due to the control of tracks components. Improving approximation trajectories results with improvement of FTD performance and increases the number of 'retained' components with increasing computational demands.

Compromise between FTD and available computing resources is an additional aim of the dissertation. Theoretical and practical comparison of different depths of history ITS algorithms it is necessary to determine their formation and contract, the mutual constraints.

The dissertation defines the problems that should be addressed by the data association, while below improves ITS proposing optimal methods of sub-optimal implementation.

**Keywords:** data association, moving target tracking, Integrated Track Splitting, Singer memory filter

**Scientific area:** signal processing, automatic and control systems, theory of estimation

Specific scientific area: target tracking

**UDK number:** 621.3

## ПОЈМОВИ И СКРАЋЕНИЦЕ

<i>KF</i>	- <i>Kalman Filter</i>
<i>DA</i>	- <i>Data Association</i>
<i>FTD</i>	- <i>False Track Discrimination</i>
<i>IPDA</i>	- <i>Integrated Probabilistic Data Association</i>
<i>ITS</i>	- <i>Integrated Track Splitting</i>
<i>JITS</i>	- <i>Joint Integrated Track Splitting</i>
<i>LM ITS</i>	- <i>Linear Multitarget Integrated Track Splitting</i>
<i>MHT</i>	- <i>Multiple Hypothesis Testing</i>
<i>pdf</i>	- <i>Probability Density Function</i>
<i>NHPP</i>	- <i>Non Homogenous Poisson Process</i>
<i>STT</i>	- <i>Single Target Tracking</i>
<i>MTT</i>	- <i>Multi Target Tracking</i>

## ОЗНАКЕ И СИМБОЛИ:

$x_k$	- вектор стања циља
$Z^k$	- кумулативни скуп пристиглих мерења закључно са $k$ скеном
$z_k$	- скуп пристиглих мерења у $k$ -том скену
$y_k$	- вектор модела мерења
$\hat{y}_k$	- естимација вектора мерења циља у $k$ -том скену
$\chi_k$	- догађај да траг прати циљ
$\bar{\chi}_k$	- догађај да траг не прати циљ
$P_D$	- вероватноћа детекције циља
$P_G$	- вероватноћа да се циљ налази у гејту
$P\{\cdot \cdot\}$	- условна вероватноћа догађаја
$N[;\cdot;]$	- Гаусова расподела
$P_{k k-1}$	- коваријанса предикције стања циља
$\hat{x}_k$	- естимација вектора стања циља
$p(x_{k-1} \cdot)$	- условна <b>pdf</b> предикованог стања циља
$p(x_k \cdot)$	- апостериорна условна <b>pdf</b> стања циља
$C_k(c)$	- $c$ -ти елемент скупа свих компонента трага
$N_k$	- број компонената трага у $k$ -том скену
$p(y_k \cdot)$	- апостериорна <b>pdf</b> мерења циља
$\xi_{k-1}^c$	- вероватноћа компоненте

- $F$  - транзициона матрица прелаза стања
- $H$  - матрица мерења
- $Q$  - коваријанса шума процеса
- $R$  - коваријанса шума мерења
- $m_k$  - укупан број мерења пристиглих у  $k$ -том скену
- $\Psi_{k|k-1}$  - априори вероватноћа постојања циља
- $p(x_{k-1}|\chi_{k-1}, c, Z^{k-1})$  - априорна **pdf** стања компоненте,
- $p(x_{k-1}|\chi_{k-1}, Z^{k-1})$  - априорна **pdf** стања трага
- $p(y_k|\chi_k, Z^{k-1})$  - априорна **pdf** мерења циља целог трага:
- $\Delta_{11} = P(\chi_k|\chi_{k-1})$  - вероватноћа прелаза Марковљевог ланца Првог реда
- $\Delta_{21} = P(\chi_k|\bar{\chi}_{k-1})$  - вероватноћа прелаза Марковљевог ланца Првог реда
- $\kappa^k = \{\kappa_k^i, \kappa^{k-1}\}$  - скуп историја мерења до  $k$ -тог скена
- $\kappa_k^i$  - догађај да у скену  $k$  сел. мерење  $i \geq 0$  потиче од циља
- $\kappa_k^0$  - догађај: у скену  $k$  нема сел. мерења која потичу од циља
- $\rho_k^i$  - густина клатера у тачки  $i$
- $\rho(z_k|\chi_{k \dots})$  - густина мерења која потичу од циља
- $\rho(z_k|\bar{\chi}_k, \dots)$  - густина мерења која не потичу од циља
- $\lambda_k, \Lambda_k$  - однос веродостојности

# САДРЖАЈ

Списак слика .....	xviii
Списак табела.....	xx
Предговор.....	xxi
<b>1. Увод.....</b>	<b>2</b>
1.1. Проблем праћења покретних циљева .....	3
<b>2. Алгоритми за праћење једног циља.....</b>	<b>7</b>
2.1. Моделирање кретања циља и избор координатног система .....	7
2.2. Калманов филтар .....	11
2.2.1. Корак предикције: .....	12
2.2.2. Корак корекције: .....	12
2.3. Алгоритам сједињавања асоцијативних вероватноћа .....	13
2.3.1. IPDA са Марковљевим ланцем Првог реда .....	15
2.3.2. IPDA са Марковљевим ланцем другог реда .....	16
<b>3. Алгоритам сједињавања честица .....</b>	<b>18</b>
3.1. Уводна разматрања.....	18
3.2. Претпоставке и модели .....	19
3.3. Модел мерења од циља .....	20
3.3.1. Модел клатер мерења .....	20
3.4. Алгоритам сједињавања честица .....	20
3.4.1. Прорачун филтра са честицама .....	21
3.5. Иницијализација функције густине вероватноће трага .....	21
3.5.1. А) Иницијализација трага сваком опсервацијом .....	22
3.5.2. Б) Иницијализација разликом сукцесивних опсервација .....	24
3.5.3. Пример 1: Two Point Difference Initializing, .....	25
3.6. Алгоритам сједињавања честица за праћење једног циља (IPF-Single Target Tracking) .....	26
3.6.1. Корак предикције: .....	27
3.6.2. Поновно одабирање (resampling) .....	28
3.6.3. Израчунавање излаза .....	29
<b>4. Алгоритам сједињавања компонената трага.....</b>	<b>30</b>
4.1. Дефиниција и статистика трага .....	30
4.2. Концепција компоненти .....	31



4.3. Опис итеративног ITS алгоритма .....	32
4.4. Однос веродостојности густине мерења .....	38
4.5. Кораци алгоритма .....	40
4.5.1. Корак предикције: .....	40
4.5.2. Корак селекције мерења .....	40
4.5.3. Корак корекције: .....	41
4.5.4. ITS-сједињавање компонената Сингеровим меморисјким филтром на нивоу историје из претходног сцена (N=1) .....	41
4.5.5. Контрола (сједињавање) компонената .....	42
.	
<b>5. Сједињавање компонената Сингеровим меморијским филтром</b> .....	44
5.1. Сједињавања компонената трага ITS алгоритма .....	44
5.2. Филтри са меморијом од N-периода .....	45
5.3. Акционе формуле ITS алгорита .....	47
5.3.1. Корак корекције .....	48
<b>6. Алгоритми за праћење више циљева</b> .....	50
6.1. ITS МТТ за праћење више циљева .....	52
6.2. Придруживања података у алгоритмима за праћење више циљева.. .....	53
6.2.1. Метода сједињавања заједничких компонената трага .....	53
6.2.2. Метода линеарног сједињавања компонената трага за праћење више циљева.....	54
6.2.3. Лнеарна метода придруживања вероватноћа за више циљева.....	56
<b>7. Резултати симулација</b> .....	58
7.1. Опис експеримената .....	58
7.1.1. Поступак одбацивања ‘дуплих’ трагова .....	60
7.2. Мерење успешности задржавања и сједињавања циља .....	60
7.2.1. Статистика задржававања циља (Retention Table) .....	61
7.3. Резултати симулација праћења једног циља (STT) .....	62
7.4. Резултати симулација за праћење више циљева (МТТ) .....	64
7.4.1. Резултати експеримената за симулациони сценарио кретања пет циљева.....	65
7.4.2. Резултати експеримената за симулациони сценарио са петнаест циљева.....	67
7.4.3. Резултати експеримената за симулациони сценарио педесет циљева.....	70
7.5. Експериментални резултати оптималне дубине Сингерове меморије.....	72
<b>8. Закључак и даља истраживања</b> .....	74
<b>9. Литература</b> .....	76
Прилог 1: Критеријум одабира оптималне дубине Сингер меморије.....	80
Прилог 2: Елементи теорије вероватноће .....	84
П2.1 Статистичка дефиниција вероватноће .....	84
П2.2 Условне вероватноће и независност догађаја .....	84
Дефиниција 2.1. ....	85
Дефиниција 2.2.....	85

Дефиниција 2.3 .....	86
Тотална вероватноћа и Бајесова формула .....	86
Теорема 2.1 .....	86
Теорема 2.2 .....	87
Функција расподеле .....	87
Дефиниција 2.4. ....	87
Теорема 2.3. ....	88
Доказ: .....	88

## СПИСАК СЛИКА

Слика 1.1. Шематски приказ система за праћење циљева. ....	3
Слика 2.1. Приказ прелаза из Декартовог координатног система у Кинематички координатни систем. ....	8
Слика 2.2. Инерцијални, покретни и везани координатни систем. ....	11
Слика 3.1. Скуп честица после иницијализације разиком између две тачке. ....	26
Слика 5.1. Приимер сједињавања компонената. ....	45
Сингеровим меморијским филтром (илустрација у к-1-ом скену). ....	46
Слика 5.2. Приимер сједињавања компонената. ....	46
Сингеровим меморијским филтром (к-скен) ....	46
Слика 7.2.1: Симулациони сценарио -један циљ. ....	63
Слика 7.2.2: Дијаграм стварних потврђених трагова. ....	63
Слика 7.2.3. Средња квадратна грешка позиције. ....	64
Слика 7.3.1.1: Симулациони сценарио кретања пет циљева. ....	65
Слика 7.3.1.2. Дијаграм стварних потврђених трагова ITS. ....	65
Слика 7.3.1.3: Дијаграм стварних потврђених трагова LMITS. ....	66
Слика 7.3.1.4. Дијаграм стварних потврђених трагова (ITS-LMITS). ....	66
Слика 7.3.1.5. Дијаграм лажних потврђених трагова (ITS). ....	66
Слика 7.3.1.6. Средња квадратна грешка праћење. ....	67
Слика 7.3.2.1: Симулациони сценарио кретања- петнаест циљева. ....	68
Слика 7.3.2.2. Дијаграм стварних потврђених трагова ITS- параметар дубина Сингер меморије. ....	68
Слика 7.3.2.3. Параметарски дијаграм стварних потврђених трагова (LMITS). ....	69
Слика 7.3.2.4. Упоредни параметарски дијаграм стварних потврђених трагова (ITS-LMITS). ....	69
Слика 7.3.2.5. Параметарски дијаграм лажних потврђених трагова LMITS. ....	69
Слика 7.3.2.6. Упореди дијаграм средње квадратне грешке позиције ITS-LMITS параметар- дубина Сингерове меморије. ....	70
Слика 7.3.3.1. Симулациони сценарио кретања 50 циљева. ....	71
Слика 7.3.3.2. Дијаграм стварних потврђених трагова (ITS –IPF). ....	71
Слика 7.3.3.3. Дијаграм средње квадратне грешке позиције. ....	72
Слика 7.3.3.4. Упоредни дијаграм стварних потврђених трагова ITS-LMITS. ....	72
параметар дубина Сингер меморије. ....	72
Слика П1.а: Зависност коефицијента $a=(I - KH)$ уз мерења у задњих $n$ сканова I, б) коваријанса Калман филтер када конвергира ка steady-state стању. ....	83

## СПИСАК ТАБЕЛА

Табела 7.2.1: Статистика задржавања циља-један циљ са неуниформним клатером.....	70
Табела 7.3.1: Статистика задржавања циља-пет циљева.....	73
Табела 7.3.2. Статистика задржавања циља- петнаест циљева.....	76
Табела 7.3.3. Статистика задржавања циља -педесет циљева.....	78
Табела 7.4. Оптимална дубина Сингеровог меморијског филтра.....	79

## ПРЕДГОВОР

Предмет овог истраживања је поступак придруживања података у процесу праћења покретних циљева. Може се користити у цивилним или војним системима за праћење циљева. Комерцијалне или цивилне примене су најчешће контрола ваздушног или друмског саобраћаја, управљање покретним објектима, док се у војним применама најчешће користи у управљању и праћењу објеката на мору, копну или ваздуху, у зависности од изабраних сензора. Врши се процена параметара и стања система. Ако је познат извор мерења, може се вршити процена стандардним методама. Асоцијација података је неопходна у ситуацијама када није познат извор мерења, као што је осматрање простора радаром или сонаром.

Када снага примљеног сигнала пређе одређени праг, долази до детекције резултујући координатама, које су улазна мерења за праћења циљева.

Спроведена истраживања разматрају настанак циљева и њихово постојање. Примарни задатак асоцијације података је одређивање постојања и броја циљева у простору осматрања. Применом теоријских метода, из скупа пристиглих мерења у току једног временског циклуса окретања антене, издвајају се подскупови које потичу од постојећих циљева или које потичу од неких нових циљева.

Остале детекције се сматрају "лажним алармима" и последица су утицаја клатера и шума у каналу. А приори незнање броја и положаја циљева резултују у то да се трагови иницијализују користећи непоуздана мерења.

Поред мерења која прате циљеве, иницијализују се и лажни трагови који не прате циљеве. За испитивање порекла трага користе се методе дискриминација лажних трагова; тј. процедура која треба да потврди број тачних трагова, и избрише лажне трагове. У дисертацији је предложена методологија праћења покретних циљева названа "сједињавање компонента трага (ITS). Овај филтер рекурзивно рачуна вероватноћу постојања трага у сваком скену, која се користи за дискриминацију лажних трагова. Историјат настанка компоненти трага утиче на тачност праћења, нарочито при ниским вероватноћама детекције циља.

Недостатак теоријског и практичног поређења између различитих дубину историје компоненти трага, један је од проблема који се јављају у практичним применама праћења покретних циљева. За испитивање проблема придруживања података обично се користи методологија 'искуства'. С обзиром да је потребно смањити нумеричку комплексност, потребно је одабрати под-оптималну имплементацију. Праћење у окружењу клатера иницира стварне и лажне трагове. Одбацивање лажних трагова (у даљем тексту FTD) је важна особина система за праћење.

Праћење трага у ITS методи такође укључује естимацију трајекторије циља у облику скупа међусобно искључивих компоненти. Број компоненте трага расте експоненцијално у сваком скену као резултат њихове интеракције са пристиглим

мерењима (мерења потичу од циља или шума). Контрола броја компоненти се остварује 'отсецањем' слабих компоненти (prune) или 'сједињавањем' компоненти са блиским трајекторијама циља (merge). Однос између FTD и контроле компонентата је део истраживања које треба да резултује практичним упутством за коришћење ITS филтра. У дисертацији биће дате теоријске и практичне основе ITS алгоритама при коришћењу Сингерове методе дубине историје.

У дисертацији је предложен теоријски приказ трага као уније компоненти. Естимација стања сваке компоненте је излаз филтра који даје једно мерење у сваком скену. Репрезент сваке компоненте је историја припадности мерења циљу, исказана преко одговарајуће вероватноће. Зато су оне међусобно искључиве. Стање компоненте се састоји од вероватноће постојања компоненте и функције вероватноће естимације стања компоненте, под условом да компонента постоји.

Дисертација се бави рекурзивним циклусом ITS алгорита (датим у три корака). Први корак је пропација стања циља, у коме компоненте трага, пропацирају као Markov процес, иза кога следи корак селекције мерења компонента трага из претходног скена. Свака пропацирана компонента трага селектује мерења пристигла у текућем скену.

На крају, корак естимација стања трага где се естимација стања трага добија као комбинација међусобно искључивих компоненти естимације стања, која је условљена постојањем циља и историјом припадности компоненте мерењима. На тај начин, свако ново мерење, упарено са компонентом из претходног скена, даје нову компоненту.

Трагови се иницијализују у сваком скену коришћењем мерења од два консеквентна скена у складу са захтевом максималне брзине циља. Формирани ITS траг се рекурзивно ажурира у сваком скену. Вероватноћа постојања трага се користи за потврђивање или гашење сваког трага насталог у суседним скеновима. Утицај клатера доводи до одређене грешке при потврђивању трагова.

Функција густине вероватноће трајекторије стања трага апроксимира се одређеним бројем компоненти трага. Побољшање апроксимације трајекторије резултује побољшањем FTD перформанси као и повећањем броја компоненти са повећањем рачунарских захтева. Компромис између FTD и расположивих рачунарских ресурса је додатни циљ дисертације. Теоријско и практично поређење различитих дубина историје ITS алгоритама је неопходно да би се утврдило њихово настајање и узајмна ограничења.

Теза је организована на следећи начин. У уводним разматрањима биће дефинисан проблем који треба решити асоцијацијом података, као и претпоставке које ће се при томе користити.

Одмах после уводних разматрања, у Глави 2 биће дате теоријске основе алгоритама за праћење једног циља. Између осталог биће презентован Калманов филтар као и алгоритам сједињавања асоцијативних вероватноћа трага- IPDA.

У наставку дисертације, у Глави 3, дат је теоријски модел алгоритма сједињавања честица трага (Integrated Particle Filter-IPF).

Глава 4 посвећена је алгоритму сједињавања компонентата трага (ITS), док је у Глави 5 дата методологија придруживања података применом контроле компонентата помоћу Сингеровог меморијског филтра.

Проширење стандарног оптималног ITS алгоритма, који се користи у праћењу више покретних циљева, коришћењем Сингерове методе ће бити детаљно презантиран у Глави 6, после чега следе подооптималне имплементације и практични резултати применом предложених алгоритама и дати су у резултатима симулација у Глави 7.

На крају тезе, биће дата закључна разматрања као и предлози за даља истраживања.

Коначно, у Прилогу дисертације дате су основне дефиниције и теореме теорије вероватноће, које су неопходне за разумевање суштине проблема.





*Дарку Мушицком, с поштовањем ...*

# 1. УВОД

У свету је током последње деценије дошло до експанзије система са фузијом података од више сензора. Ипак, примарни сензори који се користе за детекцију и праћење циљева од интереса, односно претрагу жељеног простора су радарски сензори, као активни сензори, али се они све више допуњавају пасивним сензорима као што су инфрацрвене камере и акустични сензори. Сигнали који пристижу са већег броја сензора исте или различите врсте се обрађују у циљу естимације, предикције и праћења покретних објеката у ваздуху изнад територија земаља или неких ограничених региона од интереса. Стога не чуди брз развој софистицираних алгоритама за праћење циљева који се базирају на рекурзивним линеарним и нелинерним филтрима.

Проблем праћења покретних циљева везан је процесом естимације вектора стања објекта који се прати. Крајем прошлог века, а нарочито појавом Калмановог [1] филтра, дошло је до експанзије ефикасних математичких модела за естимацију положаја, брзине и убрзања циљева у ваздуху. Већина метода за праћење покретних објеката базира се на претпоставци да је модел кретања стохастички процес и да је промена брзине и убрзања случајан процес. Један од првих али и најзначајнијих модела кретања циља поставио је Сингер (*Singer*) [2]. Овај модел је заснован на претпоставци да убрзање има експоненцијално корелисани шум. За процену стања коришћен је управо Калманов филтер (*Kalman Filter*).

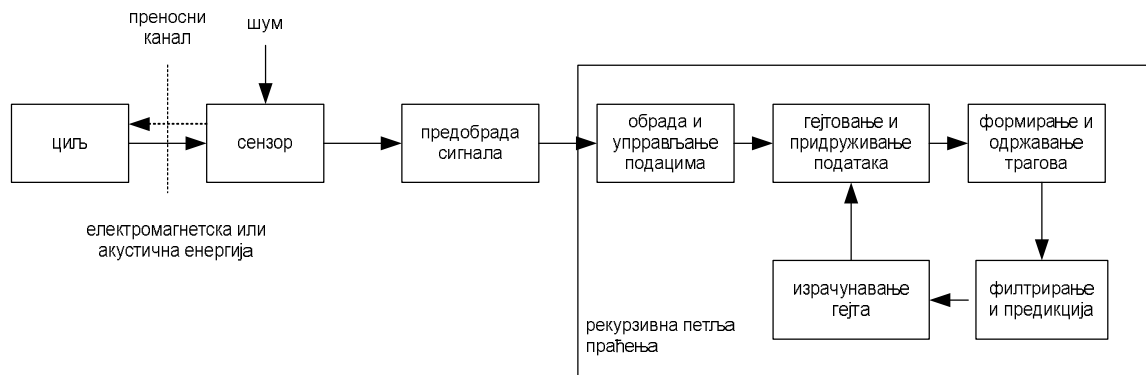
Избор сензора и параметара одређује избор оптималне методе за естимацију стања. Алгоритми за праћење покретних циљева развијани су најчешће за потребе (*TWS- Track While Scan*) осматрачког радара као сензора. *TWS* радарски систем за праћење је специјалан случај такозваног *MTT (Multiple Target Tracking)* система [3,4], у коме се подаци са пријемне антене примају у тачно дефинисаним временским интервалима. У практични применама, често се користи као сензор телевизијска (видео надзор, друмски саобраћај, ауто индустрија, итд.) или термовизијска (војна индустрија, медицина, метеорологија, итд.) камера. У односу на начин скенирања, осматрачки радар се деле на радаре са покретном платформом и радаре са електронским скенирањем.

Хронолошки гледано, радар са покретном платформом су се први појавили. Њихов рад се заснива на синхронном окретању покретне платформе на

којој се налазе фиксирани предајне и пријемна радарска антена [5]. Платформа се окреће константном брзином, односно константном периодом окретања.

## 1.1. Проблем праћења покретних циљева

Проблем праћења је суштини проблем естимације вектора стања, када је вектор стања у окружењу шума. Типичан систем за праћење садржи циљ (циљеве), сензор, предобраду сигнала (података) и као што показује Слика 1.1.



Слика 1.1. Шематски приказ система за праћење циљева.

Поступак праћења покретних циљева се може поделити у неколико корака. После почетне иницијализације система, приступа се естимацији вектора стања. Први корак приликом естимације представља корак предикције [7,8]. Циљ овог корака је формирање статистичког прозора око предиковане вредности вектора стања. Поред статистичког прозора, уобичајено је да се израчунава резидуал односно разлика између предиковане вредности и мерења пристиглог у текућем скену. Ова вредност је, заједно са коваријационом матрицом улазни параметар приликом налажења функције густине вероватноће (*pdf*). Она има велики значај приликом развоја сложенијих метода за естимацију стања које користе више од једног филтра. Уколико се у прозору посматраног трага нађе више од једне опсервације, ситуација се додатно компликује. За потребе издвајања трага у оваквим ситуацијама, развијене су методе назване алгоритмима за придруживање (асоцијацију) података. Естимација будућих стања и асоцијација података представља део комплетног система за праћење, који се најчешће назива модулом за одржавање трагова. Поред овог модула, системи за праћење садрже и модуо за иницијализацију трагова и модуо за брисање трагова са Појавом естиматора стања са вишеструким моделима за праћење маневришућих циљева.

Сензори обезбеђују мерења, на основу којих се може извршити процена (естимација) параметара и стања система. У већини случајева је тачно познат извор мерења тако да се процена врши стандардним методама, на пример добро познати *Kalman-Vucu* филтер [1]. Асоцијација података је неопходна у ситуацијама када

није познат извор мерења. Типични пример јесте осматрање простора користећи радар или сонар као сензор. На пример, активни радар шаље импулс електромагнетске енергије ограничен у времену и учестаности, и процесира примљене одјеке. Када снага примљеног сигнала пређе одређени праг, долази до детекције. Детекције се пројектују у осматрачке координате које постају улазна мерења за блок праћења циљева. Та мерења могу потицати од циљева, али исто тако и од случајних објеката и феномена. Извор мерења је непознат. Мерења која потичу од циљева ("тачна" мерења) нису поуздана, јер су у сваком интервалу мерења присутна само са одређеном вероватноћом детекције. Нежељена мерења се обично зову "клатер", она се појављују случајно, и обично се моделирају као Поасонов процес карактерише се густином броја клатер мерења у простору осматрања.

Број циљева, па чак и њихова егзистенција (постојање) су типично *a priori* непознати, тако да је примарни задатак алгоритама асоцијације података да се одреди постојање и број циљева у простору осматрања. То подразумева примену теоријских метода које из скупа пристиглих мерења у току једног временског периода окретања антене издвајају оне подскупове које потичу од постојећих циљева или које потичу од неких нових циљева. Остале детекције могу се сматрати "лажним алармом" и последица су утицаја клатера и шума у каналу. Примена ових метода подразумева припремне радње, као што је формирање тзв. "прозора праћења" односно сужавање целокупног простора осматрања на област од интереса, итд [9].

Због *a priori* незнања броја и положаја циљева, трагови се иницијализују користећи мерења са одређеном непоузданошћу. Поред тачних трагова (који прате циљеве), иницијализују се и лажни трагови (који не прате циљеве). Неопходни део алгоритама за праћење покретних циљева јесте дискриминација лажних трагова; тј. процедура која треба да потврди (највећи број) тачних трагова, и избрише (већину) лажних трагова [12].

Предложена методологија праћења покретних циљева, алгоритам сједињавања честица (*Integrated Track Splitting-ITS*) [11,13], предмет је интензивног истраживања. *ITS* филтер рекурзивно рачуна вероватноћу постојања трага у сваком скену, која се користи за дискриминацију лажних трагова. С друге стране, историјат настанка компоненти трага утиче на тачност праћења, нарочито при ниским вероватноћама детекције циља. Недостатак теоријског и практичног поређења између различитих дубина историје компоненти трага, један је од узрока проблема који се јављају у практичним применама праћења покретних циљева.

Други узрок проблема реализације јесте 'искуствена' методологија одређивања параметара филтера. Једна од најважнијих процедура примене *ITS* алгоритама јесте контрола алгоритамске и нумеричке комплексности. Оптимална имплементација *ITS* алгоритама има комплексност која расте експоненцијално са временом, тако да је избор под-оптималне имплементације *ITS* нужно зло. Систематска теоријска обрада и практична упутства примене *ITS* филтера нису објављени.

Праћење у окружењу клатера иницира стварне (који прате циљ) и лажне (који не прате циљ) трагове. *FTD (False Track Discrimination)* је веома важна особина система за праћење и односи се на процедуру одбацивања лажних и

потврђивања стварних трагова. *ITS (Integrated Track Splitting)* филтер је ефикасна метода за аутоматско праћење циљева у окружењу клатера (шума). Праћење трага у *ITS* методи такође укључује естимацију трајекторије циља у облику скупа међусобно искључивих компоненти (Гаусиана). Број компоненте трага расте експоненцијално у сваком скену као резултат њихове интеракције са пристиглим мерењима (мерења потичу од циља или шума). Контрола броја компоненти се остварује 'отсецањем' слабих компоненти (*pruning*) или 'сједињавањем' компоненти са блиским трајекторијама циља (*merging*).

Предмет истраживања је дефинисање граница изводљивости праћења циљева у окружењу густог клатера при малим вероватноћама детекције циља. Однос између *FTD* и контроле компоненти је део истраживања које треба да резултује практичним упутством за коришћење *ITS* филтра.

У дисертацији биће дате теоријске и практичне основе *ITS* алгоритама при коришћењу Сингерове методе за прорачун дубине историје компоненте трага. Биће дат теоријски приказ трага као уније компоненти. Естимација стања сваке компоненте је излаз филтра који даје једно мерење у сваком скену. Репрезент сваке компоненте је историја припадности мерења циљу, исказана преко одговарајуће вероватноће. Зато су оне међусобно искључиве. Збир вероватноћа свих компоненти трага једнак је јединици [14]. Свако стање компоненте се састоји од вероватноће постојања компоненте и функције густине вероватноће (*probability density function-pdf*) естимације стања компоненте под условом да компонента постоји.

Један рекурзивни циклус *ITS* алгорита састоји се из три корака:

- *корак пропагације* стања циља. У овом кораку, компоненте трага, пропагирају као Марковљев ланац (*Markov processes*), и пролазе кроз корак предикције Калмановог филтра.
- *корак селекције* мерења компонента трага из претходног скена. Свака пропагирана компонента трага селектује мерења пристигла у текућем скену.
- *естимација стања* трага. Функција густине вероватноће естимације стања трага добија се као комбинација међусобно искључивих компоненти *pdf* естимације стања, која је условљена постојањем циља и историјом припадности компоненте мерењима пристиглим у  $N$  претходних скенова. На тај начин, свако ново мерење, упарено са компонентом из претходног скена, даје нову компоненту.

На основу стандардне претпоставке праћења циља сензором коначне резолуције, свако мерење потиче од једног извора и тачкастог циља (сваки циљ може да креира једно мерење по скену са вероватноћом детекције). У сваком скену, сензор даје одређени случајни број клатер мерења, дефинисан густином клатера. Трагови се иницијализују у сваком скену коришћењем мерења од два консеквентна скена у складу са захтевом максималне брзине циља. Сваки *ITS* траг се рекурзивно ажурира у сваком скену. Вероватноћа постојања трага се користи за потврђивање или гашење сваког трага насталог у суседним скеновима (*FTD*).

Утицај клатера (шума) доводи до одређене грешке при потврђивању трагова. Неки од потврђених трагова могу бити и лажни. Резултат *FTD* процеса је потврђивање и гашење неких трагова. Функција густине вероватноће трајекторије стања трага апроксимира се одређеним бројем компоненти трага (у даљем тексту - Гаусиана).

Услед нагомилавања броја компоненти, током великог броја рекурзија алгоритма, потребно је извршити 'контролу' компонената трага. Побољшање апроксимације трајекторије резултује побољшањем *FTD* перформанси.

С друге стране, побољшање апроксимације трајекторије резултује повећањем броја 'задржаних' компоненти са повећањем рачунарских захтева. Ово је такође један од циљева – налажење компромиса између *FTD* перформанси и расположивих рачунарских ресурса.

Теоријско и практично поређење различитих дубина историје *ITS* алгоритама је неопходно да би се утврдиле њихов "генеалошки" однос и узајамна ограничења. Први део дисертације посвећен је поставци и дефинисању проблема који треба да реши асоцијација података. Други део дисертације биће посвећен унапређењу *ITS* алгоритама. Биће предложена оптимална метода асоцијације података на основу теоријске и практичне анализе подоптималне имплементације као и границе применљивости предложена методе.

Теза је организована на следећи начин.

У уводним разматрањима дисертације биће дефинисан проблем који треба решити асоцијацијом података, као и претпоставке које ће се при томе користити.

Одмах после уводних разматрања, у Глави 2 биће дате теоријске основе алгоритама за праћење једног циља. Између осталог, биће презентован Калманов филтар као и алгоритам сједињавања асоцијативних вероватноћа трага- *IPDA*.

У наставку дисертације, у Глави 3, дат је теоријски модел алгоритма сједињавања честица трага (*Integrated Particle Filter-IPF*).

Глава 4 посвећена је алгоритму сједињавања компонената трага (*ITS*), док је у Глави 5 дата методологија придруживања података применом контроле компонената помоћу Сингеровог меморијског филтра.

Проширење стандарног оптималног *ITS* алгоритма, који се користи у праћењу више покретних циљева, коришћењем Сингерове методе ће бити детаљно презентуран у Глави 6, после чега следе подоптималне имплементације и практични резултати применом предложених алгоритама и дати су у резултатима симулација у Глави 7.

На крају тезе, биће дата закључна разматрања као и предлози за даља истраживања. Коначно, у Прилогу дисертације дате су основне дефиниције и теореме теорије вероватноће, које су неопходне за разумевање суштине проблема.

## 2. АЛГОРИТМИ ЗА ПРАЋЕЊЕ ЈЕДНОГ ЦИЉА

У овом поглављу биће дате теоријске основне алгоритма за праћење покретних циљева. На самом почетку, биће укратко описани модели динамике кретања циља, а затим хронолошки, алгоритми за праћење једног циља (*STT -Single Target Tracking*).

### 2.1. Моделирање кретања циља и избор координатног система

Ефикасност праћења покретних циљева у основи је везана са познавањем динамике кретања циља. Дефинисање динамичких једначина покретних објеката представља први корак поступка дизајнирања алгоритма за праћење.

Поред тога, креирање карактеристичних тест путања помажу објективној провери алгоритма. Избор координатног система директно утиче на сложеност и тачност израчунавања координата циља у ваздуху, без обзира о којем сензору је реч. Највећи део специјалних софтвера за праћење покретних циљева базиран је на подацима о координатама које су дате у Декартовом координатном систему (ДКС). Међутим, радарски сензор даје податке о координатама у сферном координатном систему (СКС). У овом делу, детаљније је описана конверзија преласка из једног у други координатни систем.

Предност кинематског координатног система је у томе што се вектор брзине циља поклапа са његовом  $x$  координатом, тако да се овај координатни систем динамички креће заједно са циљем. Декартов и сферни координатни систем и релације које повезују ова два координатна система, представљене су формулама које се директно користе у симулационим моделима. Резултати мерења (опсервације) су дати у сферном координатном систему (преко растојања, азимута и елевације), а за конверзију у ДКС могу да се користе следећи изрази:

$$x = r \cos \psi \cos \theta \quad (2.1)$$

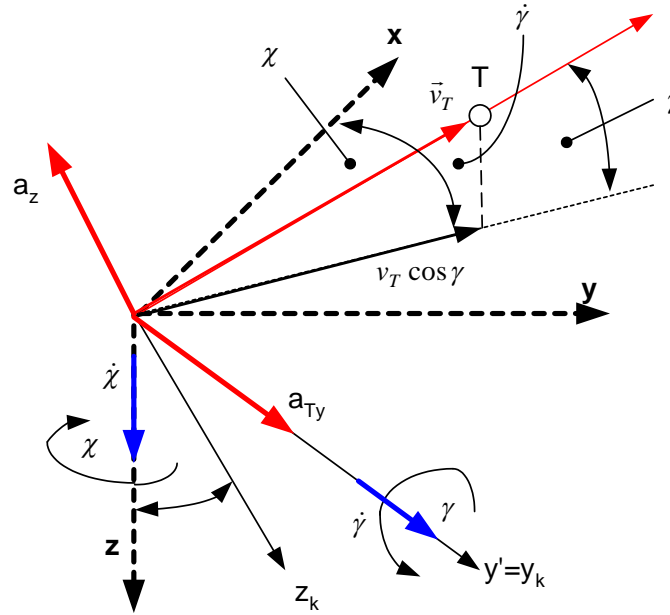
$$y = r \sin \psi \cos \theta \quad (2.2)$$

$$z = r \sin \theta \quad (2.3)$$

где је са  $r$  - дато растојање циља у односу на координатни почетак (положај сензора),  $\psi$  - азимутни угао циља,  $\theta$  - елевациони угао циља.

Радар не обезбеђује податак о елевацији, праћење се своди на дводимензионални а не на тродимензионални проблем, па се стога елевациони угао не даје као податак. Кинематички координатни систем (*ККС*) се добија ротирањем

Декартовог координатног система за угао по азимуту и за угао по елевацији, све док се његове осе не покlope са вектором брзине кретања циља. Кретањем циља, *ККС* се креће заједно са њим, при чему се у случају убрзаног кретања циља јавља угаона компонента по убрзањима за азимутни и елевациони угао, респективно, као што је показано на Слици 2.1.



Слика 2.1. Приказ прелаза из Декартовог координатног система у Кинематички координатни систем.

На Слици 2.1 се може уочити да је вектор брзине кретања циља ( $v_T$ ) увек колинеаран са  $x$  осом новог *ККС* координатног система, и да се положај циља динамички мења са променом овог вектора.

Правци нових  $z$  и  $y$  оса ( $z_k, y_k$ ) се добијају примењујући правило десног завртња на векторе угаоног убрзања за ове две осе. На овај начин може се, решавањем система од 7 линеарних диференцијалних једначина, доћи до моделирања било које путање кретања циља.

Компоненте убрзања циља по  $y$  и  $z$  оси координатног система, означене су са  $a_{Ty}$  и  $a_{Tz}$ , респективно. Једначине за прелаз из једног у други координатни систем дате су помоћу:

$$X(t) = [v_y(t) \ v_z(t) \ \gamma(t) \ \chi(t) \ x(t) \ y(t) \ z(t)]^T \quad (2.4)$$

Ако претпоставимо да је временски облик улазног сигнала  $x(t)$ , овај систем диференцијалних једначина може се написати у матричном облику, као:



$$\frac{dX}{dt} = \left[ \frac{dv_y}{dt} \quad \frac{dv_z}{dt} \quad \frac{d\gamma}{dt} \quad \frac{d\chi}{dt} \quad \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right]^T \quad (2.5)$$

У случају који је третиран у овој дисертацији, с обзиром да је кретање циља дводимензионално, проблем се своди на решавање три диференцијалне једначине дате као :

$$\begin{cases} \frac{dv_y}{dt} = a_{Ty} \\ \frac{dv_z}{dt} = a_{Tz} \\ \frac{d\gamma}{dt} = -g \frac{a_{Tz}}{v_T} \end{cases} \quad (2.6)$$

при чему је  $a_{Ty}$  – убрзање циља по  $y$  оси,  $a_{Tz}$  – убрзање циља по  $z$  оси,  $g$  – гравитационо убрзање ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ). Треба напоменути да је динамика кретања војних циљева вишеструко комплекснија од цивилних, па су и путање прилагођене оштрим динамичким променама кретања циљева.

Једначине најважнијих координатних система и математичке релације које их међусобно повезују, општи нелинеарни математички модел кретања летелице као и неколико најчешћих модела кретања потенцијалних циљева у ваздуху, биће дати у наставку. Ови модели кретања погодни су за примену у алгоритмима за праћење јер омогућавају (естимацију) процену кинематских величина циља, углавном позицију, брзину и убрзање у дискретним временским интервалима везаним за периоду окретања радарске антене. За потребе праћења циља, односно процену вектора стања циља, најпогодније је користити, правоугли инерцијални координатни систем. Међутим, он је непогодан са становишта моделирања кретања циља. Основни разлог за ову појаву је чињеница да се током сложеног кретања циља мењају моменти инерције циља у односу на осе непокретног координатног система, па би математички модел кретања циља у овом координатном систему био сложен и непогодан за практичну примену. Зато се при математичком моделирању користе следећи десни Декартови координатни системи:

- Инерцијални или правоугли координатни систем  $(Oxyz)$  је најповољнији за примену у системима за праћење са становишта једноставности математичких прорачуна. Наиме,  $x$ -оса је произвољно оријентисана, најчешће према северу, а  $z$ -оса је усмерена вертикално нагоре, као што је показано на Слици 2.1.
- Покретни координатни систем  $(C_{x_p, y_p, z_p})$  – углавном је везан за посматрани циљ (летелицу). Координатни почетак је у центру масе летелице, осе су паралелне осама инерцијалног координатног система, али је  $C_{x_p}$  има смер  $Ox$ , а  $C_{y_p}$  и  $C_{z_p}$  имају смерове супротне смеровима  $Oy$  и  $Oz$  (Сл. 3.1.).
- Везани координатни систем  $(C_{x_v, y_v, z_v})$  – везан је за летелицу, координатни почетак је у центру масе објекта (летелице),  $x_v$ -оса је

уздужна оса авиона, усмерена у правцу носа летелице,  $z_v$ -оса је у равни симетрије летелице, усмерена на доле. Овај координатни систем се добија ротацијом непокретног координатног система око осе  $x_p$  за угао скретања  $\psi$ , а затим тако добијеног координатног система око осе  $y_1$  за угао нагиба  $\theta$ , и на крају ротацијом око осе  $x_2$  за угао ваљања  $\varphi$ .

- Брзински координатни систем  $(C\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k\mathbf{z}_k)$  – је настао ротацијом везаног координатног система око  $y_v$ -осе за вредност нападног угла  $\alpha_k$ , а затим ротирањем око  $z_k$ -осе за вредност угла клизања  $\beta_k$  летелце.  $x_k$ -оса је усмерена у правцу кретања летелице

Одговарајуће математичке релације које повезују наведене координатне системе дате су помоћу следећих релација:

$$(x_v \ y_v \ z_v)^T = \mathbf{T}_{p-v} (x_p \ y_p \ z_p)^T \quad (2.7)$$

$$(x_k \ y_k \ z_k)^T = \mathbf{T}_{v-k} (x_v \ y_v \ z_v)^T \quad (2.8)$$

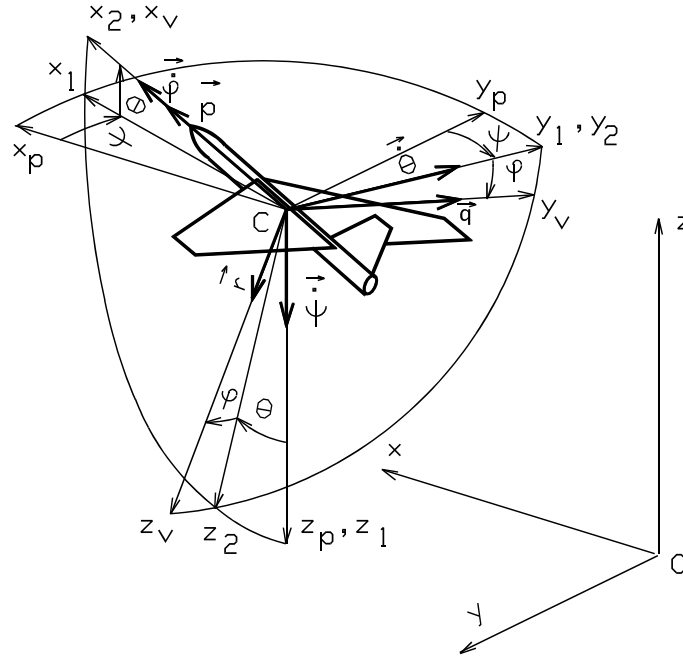
$$\begin{pmatrix} x^{(i)} \\ y^{(i)} \\ z^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p^{(i)} \\ y_p^{(i)} \\ z_p^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i=1,2 \quad (2.9)$$

где су:

$$\mathbf{T}_{p-v} = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\theta & \sin\psi \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\varphi \cos\psi \sin\theta - \cos\varphi \sin\psi & \sin\varphi \sin\psi \sin\theta + \cos\varphi \cos\psi & \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \cos\psi \sin\theta + \sin\varphi \sin\psi & \cos\varphi \sin\psi \sin\theta - \sin\varphi \cos\psi & \cos\varphi \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T}_{v-k} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_k \cos\beta_k & \sin\beta_k & \sin\alpha_k \cos\beta_k \\ -\cos\alpha_k \sin\beta_k & \cos\beta_k & \sin\alpha_k \sin\beta_k \\ -\sin\alpha_k & 0 & \cos\alpha_k \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Матрице трансформације  $\mathbf{T}_{n-g}$  и  $\mathbf{T}_{g-k}$  су ортогоналне, т.ј. инверзија и транспозиција дају исти резултат:  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ .



Слика 2.2 Инерцијални, покретни и везани координатни систем.

Основна претпоставка приликом трансформације из једног у други координатни систем је да се ради о крутом телу са шест степена слободе кретања, и да је маса летелице током трансформације константна. Поред тога, убрзање у брзинском координатном систему се може написати следећом скаларном једначином:

$$\ddot{x}_k = \dot{V} \quad (2.11)$$

$$\ddot{y}_k = V(r_k + \dot{\beta}_k) \quad (2.12)$$

$$\ddot{z}_k = V\dot{\alpha}_k \cos \beta_k - Vq_k \quad (2.13)$$

## 2.2. Калманов филтар

Претпоставимо да имамо линеарни дискретни процес, дат векторском диференцијалном једначином:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k u_k + v_k \quad (2.14)$$

где је  $\mathbf{x}$ -вектор стања,  $\mathbf{u}$ -вектор детерминистичких улаза,  $\mathbf{v}$ -вектор шума процеса. Нека је  $\mathbf{w}$  бели Гаусов шум нултог математичког очекивања и коваријансе  $\mathbf{Q}$ , тада је математичко очекивање у дискретном временском тренутку  $k$  дато као:

$$E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T(k)] = \mathbf{Q} \quad (2.15)$$

односно посматрано у два различита дискретна временска интервала

$$E[\mathbf{w}_{k_1} \mathbf{w}_{k_2}^T] = 0, \quad k_1 \neq k_2 \quad (2.16)$$

Препоставимо да је пристигло мерење у тренутку  $k$  дато једначином:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.17)$$

где је  $\mathbf{y}$  је вектор мерених величина,  $\mathbf{v}$  вектор шума мерења. Нека је  $\mathbf{v}$  бели Гаусов шум нултог математичког очекивања и коваријансе  $\mathbf{P}$ , тада је математичко очекивање у дискретном временском тренутку  $k$  дато као:

$$E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{R}_k \quad (2.18)$$

односно посматрано у два различита дискретна временска интервала

$$E[\mathbf{v}_{k_1} \mathbf{v}_{k_2}^T] = \mathbf{0}, \quad k_1 \neq k_2 \quad (2.19)$$

Проблем се своди на налажење оптималне оцене стања. Другим речима, потребно је пронаћи такву процену  $\mathbf{x}$ , да је њена коваријациона матрица дата у облику:

$$\mathbf{P}_k = E\{[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k][\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k]^T\} \quad (2.20)$$

има минималну вредност. Даље, дефинишимо "осмотрив" процес условом који треба да задовољи ранг матрице  $(\mathbf{C}^T \quad \mathbf{F}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{F}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{F}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T)$  т.ј. да буде једнак реду процеса, односно рангу матрице  $\mathbf{F}$  [3], онда Калманов филтер даје оптималну процену стања односно естимацију вектора стања  $\mathbf{x}$ . Калманов филтер представља рекурентан процес. Према томе, цео процес процене стања неког случајног вектора  $\mathbf{x}$  се може поделити у два корака:

- корак предикције (*предиктион*) и
- корак корекције процене (*упдате*) стања.

Његове једначине могу се описати следећим изразима [1]:

### 2.2.1. Корак предикције:

предикција вектора стања:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = F_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} + G_k \mathbf{u}_{k-1} \quad (2.21)$$

предикција коваријационе матрице грешке

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = F_k \mathbf{P}_{k-1/k-1} F_k^T + G_k \mathbf{Q}_{k-1} G_k^T \quad (2.22)$$

### 2.2.2. Корак корекције:

Корекција процене стања:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k [y_k - C_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}] \quad (2.23)$$

корекција коваријансе процене стања

$$\mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{k/k-1} - K_k C_k \mathbf{P}_{k/k-1} \quad (2.24)$$

Калманово појачање:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} C_k^T [C_k \mathbf{P}_{k/k-1} C_k^T + \mathbf{R}_k]^{-1} \quad (2.25)$$

С обзиром на претпоставку да шум процеса и шум мерења има Гаусову расподелу, на основу особина Гаусових процеса датих у [6], следи да и процена вектора стања добијена Калмановим филтром такође има Гаусову расподелу. Сада се може дефинисати појам иновације (*ресидуал, инноватион*) као разлика вектора мерења и његове оцене, помоћу израза [7]:

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{y}_k - C_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \quad (2.26)$$

Ова величина је од великог значаја у статистичкој теорији алгоритмима за праћење. Она предсавља бели Гаусов шум, чија се коваријанса може дати изразом:

$$\mathbf{P}_k^{\boldsymbol{\gamma}} = E[\boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{\gamma}_k^T] = C_k \mathbf{P}_{k/k-1} C_k^T + \mathbf{R}_k \quad (2.27)$$

Ако је посматрани систем осмотрив, може се сматрати да је Калманов филтер асимптотски стабилан. Уколико се коваријанса система система  $\mathbf{Q}_k$  држи довољно велика, Калманов филтер тада може да компензује евентуалне грешке настале у систему током рекурзивног процеса праћења. С друге стране  $\mathbf{Q}_k$  не сме да буде превише велика, јер ће онда у оцени стања бити присутан неприхватљиво велики шум. Уколико се посматра нека макроскопска појава, тада се шумови

процеса могу сматрати макроскопским случајним процесима, настали суперпозицијом већег броја микроскопских случајних процеса.

У том случају, ма какву расподелу имали микроскопски процеси, резултујући макроскопски процеси, према *централној граничној теорем*, имаће нормалну (Гаусову) расподелу.

### 2.3. Алгоритам сједињавања асоцијативних вероватноћа

Алгоритам сједињавања асоцијативних вероватноћа (*Integrated Probabilistic Data Association-IPDA*) представља ефикасну технику асоцијације или придруживања података и настала је на темељима постојећег *PDA (Probabilistic Data Association)* алгоритма за асоцијацију података по вероватноћи. Технике асоцијације обично иду заједно са неким од естиматора стања. Један од добрих примера спреге ових техника је *IMMPDA (Interacting Multiple Model Probabilistic Data Association)*, који је предложио *Bar-Shalom*[13]. Наиме, он користи два модела *PDA* филтра:

- први подразумева да је циљ видљив са познатом вероватноћом детекције  $P_D$ .
- други модел филтра подразумева да циљ није видљив и да је његова вероватноћа детекције једнака нули ( $P_D = 0$ ).

Постериорна вероватноћа сваког модела се израчунава у рекурзивној петљи а вероватноћа модела видљивог циља се користи као квалитативна мера при одређивању припадности мерења траговима.

*IPDA* алгоритам, који је први предложио *Мушицки* [7], има две опције у односу при избору модела *Марковљевог ланца* о простирању постојања једног циља. *Марковљев ланац првог реда* по дефиницији има две вероватноће:

- циљ може да постоји или
- циљ не постоји и видљив је са неком вероватноћом детекције.

*Марковљев ланац другог реда* препознаје вероватноћу постојања циља, али циљ не мора да буде видљив. Овај случај има једну хипотезу више од преходног модела, т.ј. циљ постоји али није видљив. Алгоритам *IPDA* се може применити под одређеним претпоставкама. То су:

- Расподела клатера се може описати униформном Поасоновом расподелом унутар гејта. Густина пристиглих мерења клатера је непозната и може се описати параметарским моделом.
- Функција густина вероватноће естимација се може апроксимирати једнодимензионалном Гаусовом функцијом.
- У току једног сцена може постојати само један циљ.
- Само једна опсервација може бити циљ.

У општем случају, у теорији праћења покретних циљева, трајекторија циља се може описати преко једначине:

$$x_{k+1} = Fx_k + \varpi_k \quad (2.28)$$

при томе једначина мерења се може написати као:

$$y_k = Hx_k + v_k \quad (2.29)$$

где је:

- $x_k$  описана кинаматика кретања циља (положај, брзина и убрзање) ,
- $F, H$  познате матрице прелаза стања и мерења респективно,
- $\varpi, v$  бели независни шум система и мерења респективно, дат Гаусовом расподелом помоћу :

$$\varpi = N(\omega_k; 0, Q_k) \quad (2.30)$$

$$v_k = N(v_k; 0, R_k) \quad (2.31)$$

Проблем праћења покретних циљева се заснива на налажењу условне густине вероватноће да се стање циља  $p(x_k|Y_k)$  налази у скупу примљених опсервација током периоде  $k$ . Постојање клатера се описује скупом мерења као:

$$Y^k = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\} \quad (2.32)$$

где је са  $Y_k = \{y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^{m_k}\}$ ,  $m_k \geq 0$ , означен скуп мерења пристиглих у  $k$ -том скену. За разлику од класичног PDA алгоритма, IPDA филтер [14] моделује постојање циља помоћу теорије Марковљевих ланаца, и разликују се два случаја.

*Марковљев ланац првог реда* – узима два дискретна стања.

То су следећа дискретна стања:

- Циљ постоји и он је увек детектабилан, т.ј. у сваком временском тренутку његова опсервација је презентована помоћу вероватноће детектабилности  $P_D$

- Циљ не постоји.

*Марковљев ланац другог реда* – узима три дискретна стања. То су :

- Циљ постоји и детектабилан је,
- Циљ постоји али тренутно није видљив,
- Циљ не постоји.

Сваки од ових случајева описан је преносном матрицом вероватноћа постојања циља између  $k$ -тог и  $k-1$ -ог скена.

У овом дисертацији предлаже се разматрање само првог случаја т.ј. случај *Марковљев ланац Један*.

Исход ова три догађаја моделује се са два *Марковљева* стања, преко транзиционе матрице.

### 2.3.1. IPDA са Марковљевим ланцем Првог реда

*PDA* алгоритам [26] добијен је на основу *PDA* алгоритма, укључивањем концепта постојања циља. Предпостављена су два међусобно искључива и свеобухватна догађаја у вези постојања циља, која се моделују преко случајне варијабле  $E_k$ ,

- $E_k$ , циљ постоји и видљив је у  $k$ -том скену,
- $\bar{E}_k$ , циљ не постоји у  $k$ -том скену,

Представљање ова два догађаја се може моделовати преносном матрицом вероватноћа са Марковљевим ланцем два стања, преко

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

где је :

$$\pi_{ij} = P\{E_k = j | E_{k-1} = i\}, \quad i, j = \{1, 2\} \quad (2.34)$$

преносна вероватноћа за  $(i, j)$ -ти улаз а  $P^{(*)}$  означава вероватноћу. Догађаји при асоцијацији података су међусобно искључиви :

- $\theta_0$  - сва пристигла мерења представљају лажне аларме,
- $\theta_i$  -  $i$ -та опсервација потиче од циља а остале опсервације су лажни аларми.

Средња вредност опсервација унутар гејта  $V_k$  дата је помоћу:

$$m_k = \begin{cases} 0, & m_k = 0, \\ m_k - P_D P_G P\{E_k | Y^{k-1}\}, & m_k > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

где је  $P_D$  - вероватноћа детекције,  $P_G$  - вероватноћа остајања у гејту,  $P\{E_k | Y^{k-1}\}$  - предикована априорна вероватноћа постојања циља, која је везана са вероватноћом постојања циља у претходном скену  $P\{E_{k-1} | Y^{k-1}\}$ , т.ј.

$$P\{E_k | Y^{k-1}\} = \pi_{11} P\{E_{k-1} | Y^{k-1}\} + \pi_{21} P\{E_{k-1} | Y^{k-1}\} \quad (2.36)$$

Као и у стандардном *PDA* алгоритму, естимација стања циља је везана са његовим постојањем и његова асоцијативна коваријанса је дата као:



$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) \hat{x}_{k|k}^i \\ P_{k|k} &= \sum_{i=0}^{m_k} \beta_i(k) (P_{k|k}^i + \hat{x}_{k|k}^i \hat{x}_{k|k}^{i T}) - \hat{x}_{k|k}^i \hat{x}_{k|k}^{i T}\end{aligned}\quad (2.37)$$

где је  $\hat{x}_{k|k}^0 = x_{k|k-1}$ ,  $P_{k|k}^0 = (1 + q_0 KH)P_{k|k-1}$ , а корекција предикције грешке коваријансе  $1 \leq q_0 \leq 0$ . Сада се асоцијативне вероватноће могу добити помоћу израза:

$$\begin{aligned}\beta_0(k) &= \frac{1 - P_D P_G}{1 - \delta_k} \\ \beta_i(k) &= \frac{P_D P_G \frac{V_k}{\hat{m}_k} p_k^i}{1 - \delta_k}\end{aligned}\quad (2.38)$$

где је:

$$\delta_k = \begin{cases} P_D P_G \left[ 1 - \frac{V_k}{\hat{m}_k} \sum_{i=1}^{m_k} p_k^i \right], & m_k \neq 0, \\ P_D P_G, & m_k = 0 \end{cases}\quad (2.39)$$

односно:

$$p_k^i = p(y_k^i | E_k, Y^{k-1}, \theta_i) = \frac{1}{P_G} N(y_k^i; \hat{y}_k, S_k) \quad (2.40)$$

где је  $S_k$  коваријанса предикованог мерења  $\hat{y}_k$ . Сада се може израчунати постериорна вероватноћа постојања циља као:

$$P\{E_k | Y^k\} = \frac{(1 - \delta_k) P\{E_k | Y^{k-1}\}}{1 - \delta_k P\{E_k | Y^{k-1}\}} \quad (2.41)$$

### 2.3.2. IPDA са Марковљевим ланцем другог реда

За разлику од IPDA алгоритма са Марковљевим ланцем првог реда, узима у разматрање вероватноће опстанка трага уназад до  $k-2$ -ог скена.

На тај начин расте и његова поузданост, али по цену осетног повећања сложености алгоритма. Из тих разлога, он за сада неће бити тема детаљнијих разматрања, али остаје као могућност коју треба испитати.

Резултати симулације добијени применом IPDA алгоритма са Марковљевим ланцем првог реда у случају сталног прилива података и у случају изостанка појединих опсервација приказани су графички на Сл.2.1 и Сл.2.2, респективно.

## 3. АЛГОРИТАМ СЈЕДИЊАВАЊА ЧЕСТИЦА

У вом поглављу биће дате основе предложеног алгоритма асоцијације података сједињавањем честица (*Integrated Particle Filter*) за праћење покретних циљева помоћу осматрачких радара. После уводних разматрања, дате су теоријске основе модела циља, клатера и опсервација. Затим следе корасти алгоритма намењени лакшем разумевању теоријских принципа на коме се заснива алгоритам. На крају поглавља, дате су 'акционе' формуле алгоритма намењени практичној имплементацији алгоритма.

### 3.1. Уводна разматрања

Постојање циљева и естимација трајекторије циљева одређују се на основу мерења (опсервације) од сензора, без обзира од ког извора потичу та мерења. Свако пристигло мерење може да потиче од лажних или клатер (*clutter*) мерења од шума, или од циља. Сваки циљ се детектује (генерише мерења) у сваком скену (временском интервалу) са неком вероватноћом детекције. Траг се иницијализује коришћењем мерења са сензора, тако што оба, стварни трагови (који прате циљ) и лажни трагови (који не прате циљ) симултано настају.

Одбацивања лажних трагова (*False Track Discrimination-FTD*) је процедура која препознаје и гаси лажне трагове и препознаје и потврђује тачне трагове. Корисник претпоставља да је сваки потврђен траг у ствари тачан. Потребно је спровести мерење квалитета трага, како би се постигла успешна *FTD* процедура.

Алгоритми *MHT*, *IPDA* и *ITS* засновани су на изведеним претпоставкама линеарне порпагације трајекторије и линеарног модела мерења. Неке нелинеарности се могу свести конверзијом мерења [13] или заменом стандарног Калмановог филтра (*Kalman Filter -KF*) проширеним Калмановим филтром (*Extended Kalman Filter-EKF*) [14] или необрађеним Калмановим филтром (*Unscented Kalman Filter-UKF*) [15], [16] унутар *MHT*, *IPDA* и *ITS* алгоритма. Нелинеарна мерења као што су "праћење угловним координатама" (*Bearings Only*), "праћење временске разлике пристизања" (*Time Difference of Arrival-TDOA*), 'праћење узимањем података од групе антена (*Multistatic*), имају веродостојност мерења која немају Гаусову расподелу. Било која расподела може се апроксимирати Гаусовим комбиновањем [17], [18]. Ово се користи у *ITS* апроксимацији комбиновањем Гаусовске веродостојности мерења (*Gaussian Mixture Measurement likelihood approximation ITS -GMM-ITS*) [19], који апроксимира веродостојност мерења и *pdf* постериорног стања трајекторије помоћу комбинацијом Гаусових расподела. Апроксимација *GMM-ITS* се користи у веома сложеним ситуацијама праћења, где *EKF* и *UKF* не могу да постигну адекватне перформансе [20]–[23].

Честични филтар (*Particle Filter-PF*) [24] одабира нелинеарну (не-Гаусову) *pdf* стања скупом случајних честица. Они се прилагођавају нелинеарним мерењима и нелинеарној пропагацији стања. Филтер са честицама може се успешно применити у веома широком дијапазону примена.

Негативна страна овог филтра је често потреба за великим бројем честица за примену у комплексним вишедимензионим сценаријима кретања, који типично резултују у око два реда величине већим амплитудама рачунарске сложености у односу на *GMM-ITS* [25];

У ситуацијама где се могу применити оба алгорита. Међутим, убрзани развој технологије може овај проблем учинити мање важним. Филтер са честицама за праћење у окружењу клатера предложен је у литератури [26]–[28]. Међутим, у овим радовима, пажња је посвећена углавном естимацији трајекторије, без израчунавања и мерења квалитета трага и њихових укључивања у процес *FTD*. Шта више, сви они подразумевају униформну расподелу клатера, која се ретко јавља у реалним ситуацијама.

У тези је предложено решење у облику сједињавања честица (*Integrated Particle Filter-IPF*) за праћење циља у окружењу клатера. Свака *pdf* трајекторије трага је репрезентована преко раздвојеног скупа честица, и вероватноћа постојања циља се сједињује у јединствено стање трага, слично као у [29,30, 31, 32]. Вероватноћа постојања циља је мерење квалитета трага, и корисно је за *FTD*. Стандардни *IPF* је предвиђен за праћење једног циља.

### 3.2. Претпоставке и модели

Претпоставимо да суперскипт  $\tau$  означава траг. Траг се иницијализује и ажурира коришћењем случајних мерења, чије су порекло и настанак непознати, тако да сваки траг може да буде стварни траг (који прати циљ) или лажни траг. Постојање циља  $\tau$  у временском тренутку  $k$ ,  $\chi_k^\tau$  је случајан процес, за који се претпоставља да пропагира као Марковљев процес [33, 34] дефинисан помоћу:

$$P_{11} = P\{\chi_k^\tau | \chi_{k-1}^\tau\}, P\{\chi_k^\tau | \bar{\chi}_{k-1}^\tau\} = 0 \quad (3.1)$$

где је  $\bar{\chi}_k^\tau$  комплемент  $\chi_k^\tau$ . Поред тога, претпоставимо да сваки циљ прати модел константан модел трајекторије између временских интервала, и може да се пребаци у било који други модел у било којем временском интервалу.

$$x_k^\tau = g(x_{k-1}^\tau, \sigma_k^\tau, v_k^\tau) \quad (3.2)$$

где је  $g(\cdot)$  је потенцијално нелинеарна функција  $\sigma_k^\tau \in [1, M]$  и где је  $M$  редни број модела пропације трајекторије и  $v_k^\tau$  је шум процеса са познатом *pdf*  $p_v(v_k^\tau; \sigma_k^\tau)$ . Модел линеарне пропације је специјалан случај:

$$x_k^\tau = F_{\sigma_k^\tau} x_{k-1}^\tau + v_k^\tau(\sigma_k^\tau) \quad (3.3)$$

где адитивни шум процеса  $v_k^\tau(\sigma_k^\tau)$  је бела Гаусова секвенца шума нулте средње вредности и коваријансе  $Q_{\sigma_k^\tau}$  претпоставимо, такође, да је модел пропагације трајекторије Марковљев процес са:

$$P\{\sigma_k^\tau = \sigma_2 \mid \sigma_{k-1}^\tau = \sigma_1\} = \pi_{\sigma_1, \sigma_2} \quad (3.3)$$

### 3.3. Модел мерења од циља

Сваки циљ  $\tau$  у сваком временском интервалу  $k$ , генерише једно мерење  $y_k^\tau$  са вероватноћом детекције  $p_D(x_k^\tau)$  који зависи од стања трајекторије циља. Једначина мерења у општем случају дата је изразом:

$$y_k^\tau = h(x_k^\tau, \omega_k^\tau) \quad (3.4)$$

где је  $h(\cdot)$  потенцијално нелинеарна функција и  $\omega_k^\tau$  означава шум мерења, за који се претпоставља да је бели шум. Линеарни модел мерења је специјалан случај:

$$y_k^\tau = Hx_k^\tau + \omega_k^\tau \quad (3.5)$$

где адитивни шум мерења  $\omega_k^\tau$  је секвенца белог Гаусовог шума нулте средње вредности са коваријационом матрицом  $R$ , некорелисан са секвенцом  $v_k^\tau$ . Коришћењем pdf  $P_\omega(\omega_k^\tau)$  и израза (3.5) може се израчунати [33] условна pdf  $P_{y|x_k}(y_k^\tau | x_k^\tau)$

#### 3.3.1. Модел клатер мерења

Клатер мерења у сваком скену прате Поасонову расподелу, која се може описати нехомогеном расподелом клатер мерења. Овде се претпоставља да је расподела клатер мерења  $\rho(y)$  у тачки  $y$  у простору мерења, позната или естимирана [34]. У сваком временском интервалу  $k$  случајни скуп мерења  $z_k$  је расположив, без претходне индикације од чега потиче мерење (од циља или од клатера). Означимо са  $z_{k,j}$   $j$ -то мерење из  $z_k$  и нека је  $\rho_{k,j} \equiv \rho(z_{k,j})$ . Означимо даље, са  $Z^k$  секвенцу скупова мерења закључно са  $z_k$ , укључујући и  $z_k$ , са  $Z^k = \{z_k, Z^{k-1}\}$

### 3.4. Алгоритам сједињавања честица

Сваки траг  $\tau$  се састоји од догађаја да циљ постоји  $\chi_k^\tau$ , стање трајекторије циља  $x_k^\tau$ , и модела стања трајекторије  $\sigma_k^\tau$ . Праћење циља пропагира и ажурира pdf стања за сваки траг помнаособ:

$$\begin{aligned} p[\chi_k^\tau, x_k^\tau, \sigma_k^\tau | Z^l] &= \\ &= P\{\chi_k^\tau | Z^l\} p[x_k^\tau, \sigma_k^\tau | \chi_k^\tau, Z^l] \end{aligned} \quad (3.6)$$

где је  $l = k - 1$  за пропагацију и  $l = k$  за ажурирање стања. Трајекорија и модел стања израчунавају се условно на постојање циља. Стање трага се развија између два скена као Марковљев процес и ажурира се у сваком скену са новим мерењима. Такође, из разлога једноставности, може се увести смена  $\bar{\psi}_k^\tau = P\{\chi_k^\tau | Z^{k-1}\}$ ; као и  $\hat{\psi}_k^\tau = P\{\chi_k^\tau | Z^{k-1}\}$ ;

### 3.4.1. Прорачун филтра са честицама

Означимо  $p[x_k^\tau, \sigma_k^\tau | Z^l]$  преко скупа од  $N$  честица.

$$\{w_l^{(\tau,i)}, x_k^{(\tau,i)}, \sigma_k^{(\tau,i)}\}_{i=1}^N \quad (3.7)$$

где је  $w_l^{(\tau,i)}$  релативна тежина  $i$ -те честице,  $x_k^{(\tau,i)}$  и  $\sigma_k^{(\tau,i)}$   $i$ -ти одбирок од  $x_k^\tau$  и  $\sigma_k^\tau$  и важи  $\sum_{i=1}^N w_l^{(\tau,i)} = 1$ . Даље, ми апроксимирамо:

$$p[x_k^\tau, \sigma_k^\tau | Z^l] \approx \sum_{i=1}^N w_l^{(\tau,i)} \delta(x_k^\tau - x_k^{(\tau,i)}) \delta[\sigma_k^\tau - \sigma_k^{(\tau,i)}] \quad (3.8)$$

где је са  $\delta(\cdot)$  означен Диракова делта функција (Dirac delta function), и  $\delta[\cdot]$  је Кронекерова делта (Kronecker delta). Занемаривањем малих вредности добијамо:

$$p(x_k^\tau | Z^l) \approx \sum_{i=1}^N w_l^{(\tau,i)} \delta(x_k^\tau - x_k^{(\tau,i)}) \quad (3.9)$$

$$P\{\sigma_k^\tau | Z^l\} \approx \sum_{i=1}^N w_l^{(\tau,i)} \delta[\sigma_k^\tau - \sigma_k^{(\tau,i)}] \quad (3.10)$$

Математичко очекивање стања трајекторије циља  $x_k^\tau$  може се апроксимирати изразом:

$$\mathcal{E}\{f(x_k^\tau) | Z^l\} \approx \sum_{i=1}^N w_l^{(\tau,i)} f(x_k^{(\tau,i)}) \quad (3.11)$$

## 3.5. Иницијализација функције густине вероватноће трага

Претпоставимо да је у  $k - 1$ -ом и  $k$  скену стигао скуп мерења са сензора, описан као:  $Z^{k-1} = \{z_{k-1,j}\}_{j=1}^{m_{k-1}}$ ,  $Z^k = \{z_{k,i}, Z^{k-1}\}_{i=1}^{m_k}$ , респективно и нека је

$$w_{k-1}^p = p(x_k^p | Z^{k-1}) \text{ и } w_k^p = p(x_k^p | Z^k), \quad p = 1, \dots, N_p \quad (3.12)$$

скуп тежина честица пре и после корака корекције, еспективно. Даље, нека је са  $R_k$  дата матрица шума мерења као:

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Означимо са  $\chi_k$  догађај да циљ постоји у скену  $k$ . Мерење које потиче од циља који постоји и који је детектабилан је дато са вероватноћом детекције  $P_D$ . Мерење од циља у скену  $k$  може се израчунати помоћу израза:

$$y_k = Hx_k + \omega_k \quad (3.14)$$

где је са  $y_k$  означена пројекција мерења од циља у простору обсервације,  $H$  је позната матрица мерења,  $\omega_k$  означава одбирок белог Гаусовог шума средње вредности 0 са познатом коваријансом шума  $R$ , који је некорелисан са секвенцом шума процеса трајекторије кретања циља  $v_k$ . Користи се модел пропагације трајекторије циља са константном брзином без маневра (straight line CV model). Иницијализација трага може се извршити углавном на два начина. То је:

- Иницијализација трага у једној тачки (*One Point Initializing*)
- Иницијализација трага *Two Point Differencing Initializing*

### 3.5.1. А) Иницијализација трага сваком опсервацијом

Методологија иницијализације трага сваком пристиглом опсервацијом са сензора заснована је на позицији добијеној од сваког мерења, тако да нема информација о брзини циља. Овде се углавном користи претпоставка о постојању униформне расподеле брзине. Униформна расподела се замењује Гаусовом функцијом расподеле, датом преко следеће једначине [1]:

$$\hat{x}_{k-1}^{(1)} = \begin{bmatrix} z_{k-1,j} \\ 0_{n,1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

где је  $z_{k-1,j}$  позиција мерења и  $0_{n,1}$  нула матрица ( $n=2$ ) и индекс <sup>(1)</sup> означава алгоритам иницијализације у једној тачки (One Point Initialization Algorithm). Свако мерење иницијализује скуп од  $N_p$  честица (**particles**) са нормалном расподелом са средњом вредношћу  $\hat{x}_{k-1}^{(1)}$  и коваријансом  $P_{(1)}$ , која је дата изразом:

$$x_{k-1}^p = N\left(\hat{x}_{k-1}^{(1)}, P_{(1)}\right) \quad (3.16)$$

повлачећи одбирок из нормалне расподеле, где је коваријациона матрица дата као:

$$P_{(III)} = \begin{bmatrix} R_k & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \frac{v_{\max}^2}{3} I \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

где је  $v_{\max}$  максимална брзина кретања циља,  $I$  јединична матрица ( $n \times n$ ). Стање трага после корака пропагације може се симболички написати као:

$$\{w_{k-1}^p, x_k^p\}_{p=1}^{N_p} \Rightarrow p(x_k | \chi_k, z_{k-1,j}) \quad (3.18)$$

Априорна функција густине вероватноће *pdf* у тренутку  $k$  је тежинска сума средње вредности честица која је дата као (применом теореме тоталне вероватноће):

$$\begin{aligned} p_{k,i} &= p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_p w_{k-1}^p p(z_{k,i} | x_k^p) \\ &= \sum_p w_{k-1}^p N(z_{k,i}; Hx_{k,i}^p, R_k) \end{aligned} \quad (3.19)$$

где је  $p_{k,i}^p = p(z_{k,i} | x_k^p) = N(z_{k,i}; Hx_{k,i}^p, R_k)$  функција густине вероватноће *pdf* мерења дата за пар мерење  $z_{k,i}$ -честица  $p$ . Функција густине вероватноће транзиције стања трајекторије је дата помоћу једначине

$$p(x_k | z_{k,i}) = \sum_p w_{k-1}^p \cdot \delta(\hat{x}_k - x_k^p) \quad (3.20)$$

Корак корекције трајекторије је дат као скуп честица (particles)  $\{w_k^p\}$  Бајесовом теоремом као:

$$\begin{aligned} w_k^p &= p(x_k^p | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) \\ &= \frac{p(z_k | x_k^p, Z^{k-1}) p(x_k^p | x_{k-1}^p, Z^{k-1})}{p(z_k | Z^{k-1})} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Модел вероватноће трајекторије циља од мерења  $z_{k,i}$  дат је као:

$$\beta_{k,i} = P\{\chi_{k,i} | \chi_k, Z^k\}_{i=0}^{m_k} \quad (3.22)$$

док се функција густине вероватноће трајекторије (*pdf*) може изразити преко једначине :

$$\begin{aligned}
 p(x_k^p | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{m_k} p(x_k^p, \chi_{k,i} | \chi_k, z_{k,i}, Z^{k-1}) \\
 &= \sum_{i=0}^{m_k} P\{\chi_{k,i} | \chi_k, Z^k\} p(x_k^p | \chi_{k,i}, \chi_k, z_k, Z^{k-1}) \\
 &= \beta_{k,0} p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} p(x_k^p | \chi_k, z_{k,i}, Z^{k-1}) \\
 &= \beta_{k,0} p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p(z_{k,i} | x_k^p, \chi_k, Z^{k-1}) p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1})}{p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1})} \\
 &= p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1}) \\
 &\quad \left[ \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p(z_{k,i} | x_k^p, \chi_k, Z^{k-1})}{p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1})} \right]
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

или кратко:

$$w_k^p = w_{k-1}^p \left[ \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p_{k,i}^p}{p_{k,i}} \right] \tag{3.24}$$

### 3.5.2. Б) Иницијализација разликом сукцесивних опсервација

Иницијализација разликом сукцесивних опсервација (*Two point differencing initializing*) користи мерења која се налазе у 'прозору' трага из два сукцесивна скена за иницијализацију трага. Ова процедура се понавља за сва мерења из скена  $k-1$ .

Посматрајмо тако мерење  $z_{k-1,j}$ . Нови траг се иницијализује помоћу мерења  $z_{k-1,j}$  и сваког селектованог мерења  $z_{k,i}$ , формирајући Гаусову функцију густине вероватноће са средљом вредношћу датом као:

$$\hat{x}_k^{(2)} = \left[ \begin{array}{c} z_{k,i} \\ \frac{z_{k,i} - z_{k-1,j}}{\Delta T_k} \end{array} \right] \tag{3.25}$$

где је  $\Delta T_k$  једна периода окретања антене радара. С обзиром да не постоји априорно познавање брзине циља, она се може моделовати униформне расподеле априорне *pdf* мерења у тренутку  $k$ . иницијализује се  $N_r$  честица средње вредности  $\hat{x}_k^{(2)}$ , симетричне и полуконачне коваријационе матрице  $P_{(2|2)}$  (пропагација шума честице), преко нормалне расподеле више променљивих (Слика 3.1):

$$x_k^p = N[\hat{x}_k^{(2)}; P_{(2|2)}] \tag{3.26}$$

где се иницијална коваријанса грешке стања израчунава под поретпоставком да нема шума процеса:



$$P_{(2,2)} = \begin{bmatrix} R_k & R_k / T \\ R_k / T & 2R_k / T^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Тежине честица се иницијализују на вредност  $1 / N_p$ . Иницијализација разликом две тачке даје стање трага после корака пропагације

$$\{w_{k-1}^p, x_{k-1}^p\}_{p=1}^{N_p} \Rightarrow p(x_k | \chi_k, z_{k,i}, z_{k-1,j}) \quad (3.28)$$

Апостериорна *pdf* у тренутку  $k$ , под условом да циљ постоји  $\chi_k$ , је тежинска сума честица дата (помоћу теореме тоталне вероватноће) као:

$$\begin{aligned} p_{k,i} &= p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_p w_{k-1}^p p(z_{k,i} | x_k^p) \\ &= \sum_p w_{k-1}^p N(z_{k,i}; Hx_k^p, R_k) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Функција густине вероватноће транзиционог модела стања је дата као:

$$p(x_k | z_{k,i}) = \sum_p w_{k-1}^p \cdot \delta(\hat{x}_k - x_k^p) \quad (3.30)$$

Број честица  $N_p$  је константан током целе симулације. Функција густине вероватноће трајекторије циља после корака корекције:

$$\begin{aligned} w_k^p &= p(x_k^p | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) \\ &= \frac{p(z_k | x_k^p, Z^{k-1}) p(x_k^p | x_{k-1}^p, Z^{k-1})}{p(z_k | Z^{k-1})} \end{aligned} \quad (3.31)$$

У истом тренутку, вероватноћа модела трајекторије је дата као:

$$\beta_{k,i} = P\{\chi_{k,i} | \chi_k, z_{k,i}, Z^k\}_{i=0}^{m_k} \quad (3.32)$$

Функција густине вероватноће трајекторије после корака корекције дата је као:

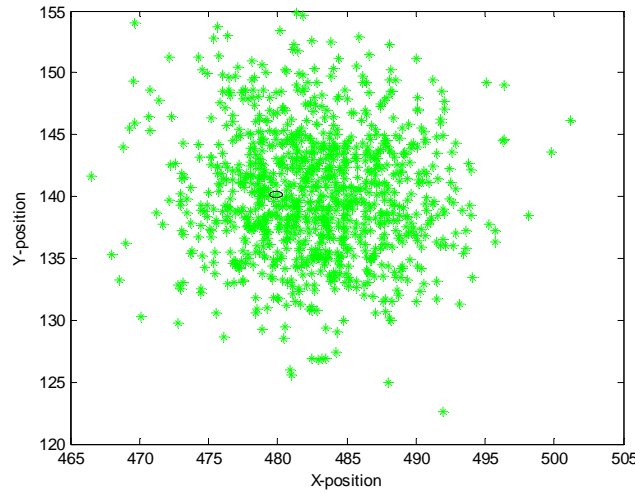
$$\begin{aligned} p(x_k^p | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) &= \sum_{i=0}^{m_k} p(x_k^p, \chi_{k,i} | \chi_k, z_{k,i}, Z^{k-1}) = \\ &= \beta_{k,0} p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1}) + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} p(x_k^p | \chi_k, z_{k,i}, Z^{k-1}) \\ &= p(x_k^p | \chi_k, Z^{k-1}) \left[ \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p(z_{k,i} | x_k^p, \chi_k, Z^{k-1})}{p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1})} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

После комбиновања овог израза са претходним, он добија следећу форму:

$$w_k^p = w_{k-1}^p \left[ \beta_{k,0} + \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{k,j} \frac{p_{k,j}^p}{p_{k,j}} \right] \quad (3.34)$$

### 3.5.3. Пример 1: Two Point Difference Initializing,

$N=1000$  particles,  $x_{\{k-1\}} = [482.9; -1.0; 140.2; -12.4]$ ;



Слика 3.1. Скуп честица после иницијализације разиком између две тачке.

Функција густине вероватноће трајекторије циља сада се може написати помоћу следећих израза за Иницијализацију трага у једној тачки и Иницијализацију трага у две тачке:

$$p(x_{k,p}, x_{k,v} | \chi_k, z_k, Z^{-1}) = w_{k-1}^p \left[ \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p_{k,i}^i}{p_{k,j}} \right] \quad (3.35)$$

$$p(x_{k,p}, x_{k,v} | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) = w_{k-1}^p \left[ \beta_{k,0} + \sum_{i=1}^{m_k} \beta_{k,i} \frac{p_{k,i}^j}{p_{k,i}} \right] \quad (3.36)$$

респективно.

### 3.6. Алгоритам сједињавања честица за праћење једног циља

У овом делу тезе биће дате акционе формуле новог алгоритма сједињавања честица (*IPF-Single Target Tracking*) за праћење једног циља. На самом почетку. Потребно је увести неколико претпоставки. То су:

- Нове честице могу настати могу настати искључиво опоступком ре-одабирања (resampling);
- "Јаке" честице се мултиплицирају, а "слабе" потискују,
- Мерења се користе за кориговање тежина честица и вероватноће постојања циља

Приметимо да се  $N_{k-1} = N_k = N$  број честица из  $(k-1)^{th}$  не мења од скена до скена. Скуп  $\{x_{k-1}^i, w_{k-1}^i\}$ ,  $i = 1, \dots, N_{k-1}$  - репрезентује честице из  $(k-1)^{th}$  скена преко средње вредности и тежине. Нека је  $m_k$  - број мерења пристиглих у  $k^{th}$  скену.  $N_p = N$  - број честица после ре-одабирања. Нека је  $p_D(x_k) = P_D$  вероватноћа детекције циља. У принципу функција стања трајекторије. У принципу, претпоставка за праћење једног циља:

$$\tilde{P}_D = \sum_i w_{k-1}^i P_D(x_k^i) = P_D \sum_i w_{k-1}^i = P_D \quad (3.37)$$

Претпоставимо да се циљ креће праволинијски без убрзања, и да су транзициона матрица и матрица мерења дате као:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

респективно, док су матрица мерења, и адитивни шум мерења :

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

респективно.

### 3.6.1. Корак предикције:

На самом почетку вероватноћа егзистенције циља може се наћи као:

$$\Psi_{k|k-1} = \Delta_{11} \cdot \Psi_{k-1|k-1} \quad (3.40)$$

Док је средња вредност честица дата је као.

$$\mathbf{x}_k^i = f(\mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{v}_k^i) = F\mathbf{x}_{k-1}^i + \mathbf{v}_k^i \quad (3.41)$$

Пропагација шума честице је Гаусова расподела средње вредности '0' и коваријансе  $Q$ :

$$\mathbf{v}_k^i \approx N(0, Q) \quad (3.42)$$

У овом тренутку пристижу мерења са сензора, датим као скуп  $Z_k = \{z_k^1, \dots, z_k^{m_k}\}$ , За разлику од стандардног ITS алгоритма, у *IPF*-у нема гејта трага а самим тим ни селекције мерења. У овом тренутку израчунава се веродостојност мерења. Први корак је израчунавање естимације мерења  $\hat{y}_k^i$ , помоћу израза :

$$\hat{y}_k^i = H\mathbf{x}_k^i \quad (3.43)$$

На основу естимације  $i$ -те естимације мерења и  $j$ -тог мерења, може се израчунати статистичка дистанца као:

$$d_{ij}^2 = (z_{k,j} - \hat{y}_k^i)^T (R_k)^{-1} (z_{k,j} - \hat{y}_k^i), \quad j=1, \dots, m_k \quad (3.44)$$

помоћу које се може израчунати функција густине вероватноће, помоћу израза:

$$p_{k,j}^i = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi R_k)}} \exp[-0.5 \cdot d_{ij}^2] \quad (3.45)$$

Сада се може наћи веродостојност сваког мерења мерења, преко суме:

$$p_{k,j} = \sum_i w_{k-1}^i \cdot p_{k,j}^i \quad (3.46)$$

На почетку корака корекције ,Однос веродостојности на нивоу трага:

$$\Lambda_k = 1 - P_D + P_D \sum_j \frac{p_{k,j}}{\rho_{k,j}} \quad (3.47)$$

Док се корекције, релативних вероватноћа компоненти трага израчунава за случај да нема мерења од трага и за случај да су стигла мерења од сензора, помоћу познатог израза:

$$\beta_{k,j} = \frac{1}{\Lambda_k} \begin{cases} 1 - P_D, & j = 0 \\ P_D \frac{p_{k,j}}{\rho_{k,j}}, & j > 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Кориговане тежине честица за корекцију трајекторије циља може се израчунати преко израза:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \cdot \left( \beta_{k,0} + \sum_{j=1}^{M_k} \beta_{k,j} \frac{p_{k,j}^i}{p_{k,j}} \right) \quad (3.49)$$

На крају једног корака рекурзије и на крају корака корекције, може се израчунати вероватноћа постојања трага, као:

$$\Psi_{k|k} = \frac{\Lambda_k \Psi_{k|k-1}}{1 - (1 - \Lambda_k) \Psi_{k|k-1}} \quad (3.50)$$

### 3.6.2. Поновно одабирање (*resampling*)

На крају једног рекурзије итеративног *IPF* алгоритма, који је у ствари корак 'честичног' филтра *PF* (*Particle Filter*), налази се поновно одабирања (*resampling*). Почетно стање (улаз у корак поновног одабирања) је пар који карактерише сваку честицу, средња вредност  $x_k^i$  и тежина  $w_k^i$ , односно  $\{x_k^i, w_{k,i}^i\}$ . Процес поновног одабирања формира исти број излазних честица, тако што мултиплицира јаке а уклања слабе честице, што се може означити као:

$$\{x_k^i, w_k^i\} \Rightarrow \left\{ x_k^I, w_k^I = \frac{S_w}{N_p} = \frac{1}{N} \right\}, I = 1, 2, \dots, N \quad (3.51)$$

где је са  $S_w$  дата сума свих улазних тежина.

$$S_w = \sum_{i=1}^{N_{k-1}} w_k^i = 1 \quad (3.52)$$

Нове тежине имају униформну расподелу:

$$u_1 = U \left[ 0, \frac{1}{N} \right] \quad (3.53)$$

Итеративно, израчунавају се пролазне тежине  $u_l$  на основу израза,

$$u_l = u_1^l + (l-1) \frac{1}{N}, i_c = i_{c-1} + w_k^i, i = 1, \dots, N \quad (3.54)$$

тако да се на излазу из ре-одабирања добија нови пар средња вредност-тежина као:

$$\{x_k^l = x_k^i, w_k^l = 1/N\}, \text{ while } u_l > i_c, l = 1, \dots, N \quad (3.55)$$

### 3.6.3. Израчунавање излаза

Стање трага, вектор стања и коваријанса грешке на излазу из *IPF* филтра  $\{\hat{x}_k, P_k\}$ , може се израчунати као сума производа тежина сваке честице трага и средње вредности те честице трага, добијених из корака ре-одабирања, помоћу израза:

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{l=1}^{Np} w_k^l x_k^l \quad (3.56)$$

Док се коваријанса трага може израчунати као:

$$P_k = \left( \sum_{l=1}^{Np} w_k^l \cdot x_k^l \cdot x_k^{lT} \right) - \hat{x}_k \cdot \hat{x}_k^T \quad (3.57)$$

## 4. АЛГОРИТАМ СЈЕДИЊАВАЊА КОМПОНЕНАТА ТРАГА

Алгоритам сједињавања компонената трага *ITS (Integrated Track Splitting)* је итеративни алгоритам у основи намењен праћењу једног покретног циља. Сваки од потенцијалних трагова формира своје независно 'дрво' хипотеза о кретању циља, свака са својом релативном вероватноћом, при чему свака хипотеза (односно компонентга) садржи своју тврдњу о детекцији циља. Поред вероватноће догађаја, у алгоритму се често користи и функцију густине вероватноће догађаја *pdf (probability density function)*. 'Дрво' хипотеза индивидуалних потенцијалних циљева се даље грана и свака нова хипотеза се третира одвојено.

### 4.1. Дефиниција и статистика трага

У општем случају, током процеса праћења циља, систем за праћење нема информацију о стварном постојању циља, већ кроз трагове формиране на показивачу. Другим речима, основни задатак праћења је формирање трагова који прате један или више циљева. Траг је скуп историје мерења, укључујући и текући скен, која се везују за један циљ који се прати. Стварна трајекторија и траг могу да се укрштају или да иду упоредо. Стари трагови су сви трагови из претходног скена, а нови трагови су естимације из текућег скена које су приписане старим траговима. Мерења или опсервације су подаци који стижу са сензора у току једне периоде окретања антене. Када се естимација која представља излаз из филтра, придружи неком од пристиглих мерења, онда се она проглашава трагом. Током праћења, константно (рекурзивно током сваког скена, односно окретаја антене радара, или неког другог сензора) се ажурира статус трага. У односу на статус, трагови се деле на стварне (*True*) или лажне (*False*) односно на потврђене (*Confirmed*) и непотврђене (*no confirmed*). После сваког скена, траг може бити:

- Стварни потврђен (*True / Confirmed*)
- Лажни потврђен (*False / Confirmed*)
- Потенцијалан (*True / No confirmed*)

Један циклус итеративног **ITS** алгоритма састоји се од три корака. То су:

- предикција,
- селекција мерења и
- поправка или корекција.

На самом почетку, претпоставимо следећи скуп догађаја који описују постојање циља:

- $\chi_k$  -догађај да траг прати циљ и циљ постоји,
- $\bar{\chi}_k$  -догађај када траг не прати циљ и циљ не постоји
- $\kappa_k^0$  -догађај када нема мерења која потичу од циља,
- $\kappa_k^i$  -догађај у коме је мерење  $z_{k,i}$  детекција циља, ( $i$ -то мерење селектовано од стране компоненте)

## 4.2. Концепција компоненти

Компонента је основни елемент сваког трага *ITS* алгоритма. Услов да би се рачунале компоненте је претпоставка да циљ постоји, као и да једна и само једна од компоненти садржи праву секвенцу мерења циља. Свака компоненте карактерише се средњом вредношћу, коваријансом и вероватноћом. Средња вредност одеђује стање (позиција и брзина) компоненте, коваријанса грешку а вероватноћа компоненте је релативна вероватноћа да је та компонента тачна. Ако циљ постоји, претпоставља се да је барем једна компонента тачна. Сума свих релативних вероватноћа по свим компонентама мора бити једнака јединици. Другим речима, у скен се улази са старим компонентама, а у сваком скену се генеришу нове компоненте. На тај начин излаз сваког скена даје нове компоненте трага и из скена се излази само са новим компонентама. Концепција настанка нове компоненте се састоји у интеракцији (спаривању) старе компоненте са селектованим мерењем (од те компоненте). Тако се средња вредност и коваријанса нове компоненте добија помоћу Калман филтра, као корак ажурирања (*Update*), где постоји једно мерење (то је то селектовано мерење), а где је предикција у ствари предикција старе компоненте. Свако мерење из претходног циклуса то уради за свако своје селектовано мерење, и генерише, у основи, много нових компоненти.

Прва група нових компонента настаје спаривањем старе компоненте и "нул'мерења, односно без мерења од сензора, за случај да не буде пристиглих мерења у новом скену. Средња вредност и коваријанса те компоненте јесте предикција старе компоненте, док другу и остале групе компонента чине компоненте настале спаривањем старих компонента и сваког појединачног мерења пристиглог у текућем скену, које се налази у зони обсервирања посматраног трага. Вероватноћа циља је део стања трага, који пропагира и који се ажурира у кораку ажурирања Калман Филтра. Естимација трага се врши условно, на вероватноћу постојања циља. Сви елементи трага се рачунају под условом да циљ постоји. То укључује средње вредности компонента, коваријансе компонента (а и целог трага), као и релативне вероватноће компоненти. Израчунавање компоненти врши се само под претпоставком да циљ постоји, као и да једна и само једна од компоненти садржи праву секвенцу мерења циља. Поред тога, релативна вероватноћа компоненте је независна од вероватноће постојања циља.

Сума свих релативних вероватноћа компоненти једнака је јединици, јер је једна и само једна компонента тачна. У моменту иницијализације, постоји само

једну компонента. Свака компонента која тренутно постоји, пропагира као Калман, без обзира како је настала. Свака компонента која је настала спаривањем старе компоненте и "нул" мерења, има естимацију која је идентична предикцији старе компоненте. Свака компонента која је настала спаривањем старе компоненте и конкретног мерења има естимацију Калман филтра, где се то конкретно мерење 'везује' на предикцију те старе компоненте. Јасно је да се после настанка нових компонената, старе компоненте се одбацују.

На крају сваке рекурзије алгоритма рачуна се апостериорна *pdf* естимације стања трага дата је применом теореме о тоталној вероватноћи:

$$p(x_k | \mathcal{X}_k, Z^k) = \sum_i p(x_k | \mathcal{X}_k, \kappa_k^i, Z^k) P(\kappa_k^i | \mathcal{X}_k, Z^k) \quad (4.1)$$

Означимо са  $c_{k-1} = \{c\}_{c=1}^{C_{k-1}}$  скуп компонената трага из  $k-1$ -ог сцена. На почетку, сваки пар {стара компонента-селектовано мерење (или "нул" мерење)},  $(\{c_{k-1}(c), z_{k,i}(z_{k,0})\})$  прави нову компоненту, која затим пролази кроз корак поправке стандардног *KF*. Почетно стање трага (добито из претходног  $k-1$ -ог циклуса који се завршава кораком поправке), а чини га априори вероватноћа опстанка циља  $\Psi_{k-1|k-1}$ , компоненте  $c_{k-1}(c), c = 1, \dots, C_{k-1}$ , дате преко средње вредности  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  и коваријансе  $P_{k-1|k-1}$ , и вероватноћа компоненте  $\xi_{k-1}^c$ , тако да важи  $\sum_{c=1}^{C_k} \xi_{k-1}^c = 1$ .

### 4.3. Опис итеративног ITS алгоритма

Улаз у једну итерацију *ITS* алгоритма у временском тренутку  $k$ , чине:

- скуп мерења (опсервација) који стижу са сензора,
- апостериорна вероватноћа постојања циља у тренутку  $k-1$ ,  $\Psi_{k-1|k-1}$ ,
- апостериорна естимација стања трајекторије циља у тренутку  $k-1$ ,  $p(x_{k-1} | \mathcal{X}_{k-1}, Z^{k-1})$ .

Свака компонента из временског тренутка  $k-1$ , дефинише се преко:

- А) апсолутне вероватноће да је та компонента тачна,  $P(c_{k-1}(c) | \mathcal{X}_{k-1}, Z^{k-1}), c = 1, \dots, C_{k-1}$
- Б) апостериорна естимација стања трајекторије сваке компоненте у тренутку  $k-1$ ,  $p(x_{k-1} | \mathcal{X}_{k-1}, c_{k-1}(c), Z^{k-1})$ .



На самом почетку нове итерације *ITS* алгоритма, у *кораку предикције*, користе се параметри из претходног скена. То је вероватноћа егзистенције постојања трага  $\Psi_{k-1|k-1}$ . Априорна вероватноћа постојања трага је дата као:

$$\Psi_{k|k-1} = \Delta_{11} \Psi_{k-1|k-1} \quad (4.2)$$

као и *pdf* естимације трага  $p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, Z^{k-1})$ , који је у ствари тежинска сума производа стања свих компонената и њихових вероватноћа. С друге стране, *pdf* пропагације трајекторије циља дата је помоћу Гаус функције:

$$p(x_k | x_{k-1}, \chi_k) = N[x_k; Fx_{k-1}, Q] \quad (4.3)$$

А **pdf** стања трага је тежинска сума дата помоћу следећег израза:

$$p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{C_{k-1}} p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) P(c_k(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) \quad (4.4)$$

где је предикована вероватноћа компоненте дата као:

$$\xi_{k-1}^c = P(c_k(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) = P(c_k(c) | \chi_k, Z^{k-1}), c = 1, \dots, C_k \quad (4.5)$$

Функција густине вероватноће *pdf* предикције трага добија се преко Гаусове суме производа вероватноће компоненте и априорне *pdf* сваке појединачне компоненте, помоћу следећег израза:

$$p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{C_k} \xi_{k-1}^c \cdot p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) \quad (4.8)$$

Сада се а-приорна *pdf* стања трага може израчунати помоћу израза:

$$\begin{aligned} p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}) &= \int_{x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}, \chi_k) p(x_{k-1} | \chi_k, Z^{k-1}) dx_{k-1} = \\ &= \int_{x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}, \chi_k) \sum_{c=1}^{C_k} \xi_{k-1}^c p(x_{k-1} | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) dx_{k-1} = \\ &= \sum_{c=1}^{N_k} \xi_{k-1}^c \int_{x_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}, \chi_k) N(x_{k-1}; \hat{x}_{k-1|k-1}^c, P_{k-1|k-1}^c) dx_{k-1} = \\ &= \sum_{c=1}^{C_k} \xi_{k-1}^c p(x_k | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

при чему је а-приорна *pdf* стања сваке компоненте дата у облику Гаус функције:

$$p(x_k | \chi_k, c_k(c), Z^{k-1}) = N[x_k; \hat{x}_{k|k-1}^c, P_{k|k-1}^c] \quad (4.7)$$

где је пар  $\hat{x}_{k|k-1}^c, P_{k|k-1}^c$ , Калман предикција стања и коваријансе грешке сваке компоненте трага, датих помоћу следећих израза

$$\hat{x}_{k|k-1}^c = F\hat{x}_{k-1|k-1}^c \quad (4.8)$$

$$P_{k|k-1}^c = FP_{k-1|k-1}^c F^T + Q_k \quad (4.9)$$

респективно.

Апостериорна *pdf* стања трага дата је као производ *pdf* предикованог стања трага и тоталне вероватноће појаве трага, помоћу израза:

$$p(x_k, \chi_k | Z^k) = P(\chi_k | Z^k) p(x_k | \chi_k, Z^k) \quad (4.10)$$

Вероватноћа егзистенције трага:

$$\psi_{k|k-1} = P(\chi_k | Z^{k-1}) \quad (4.11)$$

*Корак селекције мерења* у временском интервалу  $k$ , започиње по пристизању скупа мерења (опсервација),  $z_k = \{z_{k,i}\}_{i=1}^{m_k}$  са сензора. На почетку, применом теореме о тоталној вероватноћи добије се апостериорна *pdf* естимације стања трага као:

$$p(x_k | \chi_k, Z^k) = \sum_{c=1}^{C_k} p(x_k | \chi_k, c_k(c), Z^k) P(c_k(c) | \chi_k, Z^k) \quad (4.12)$$

Априорна *pdf* мерења циља целог трага, дата је помоћу израза:

$$\begin{aligned} p(y_k | \chi_k, Z^{k-1}) &= \int_{x_k} p(y_k | x_k) p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}) dx_k \\ &= \int_{x_k} N(y_k; H\hat{x}_k, R) \sum_{c=1}^{C_k} p(x_k | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) P(c_k(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) dx_k \\ &= \int_{x_c} N(y_k; H\hat{x}_k, R) \cdot \sum_{c=1}^{C_k} p(x_k | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) \xi_k^c dx_k \quad (4.13) \\ &= \sum_{c=1}^{C_k} \xi_k^c \int_{x_k} p(x_k | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) N(y_k; H \cdot x_k, R) dx_k \\ &= \sum_{c=1}^{C_k} \xi_k^c p(y_k | \chi_{k-1}, c_k(c), Z^{k-1}) \end{aligned}$$

где је  $R$  коваријанса шума мерења. А-приорна *pdf* мерења циља за сваку појединачну компоненту може се израчунати помоћу израза:

$$p(z_{k,i} | c_k(c), \chi_k, Z^{k-1}) = N[y_k; \hat{y}_k^c, S_k^c] \quad (4.14)$$

где је  $z_{k,i}$  мерење циља пристигло у тренутку  $k$  и селектовано од стране компоненте  $c$ . Даље, може се израчунати естимација мерења  $\hat{y}_k^c$  као и коваријанса грешке мерења, помоћу сва израза који следе, репективно:

$$\hat{y}_k^c = H\hat{x}_{k|k-1}^c \quad (4.15)$$

$$S_k^c = HP_{k|k-1}^c H^T + R_k \quad (4.16)$$

У кораку селекције мерења,  $pdf$  за сваку компоненту трага може се израчунати као:

$$p_{k,i}(c) = \frac{1}{P_G} p(z_{k,i} | \chi_k, c_k(c), Z^{k-1}), c = 1, \dots, C_k \quad (4.17)$$

где је  $m_k$ -укупан број елемената скупа селектованих мерења  $z_k$ ,  $z_{k,i}$   $i$ -ти члан а  $C_k$  укупан број компонената у  $k$ -том скену. С друге стране веродостојност мерења  $i$  селектованог од стране компонената трага, дато је изразом:

$$p_{k,i} = p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{C_k} p_{k,i}(c) P\{c_k(c) | \chi_k, Z^{k-1}\} \quad (4.18)$$

где је  $P_G$  вероватноћа да је пристигло мерење упада у гејт трага. Априорна вероватноћа компоненте дата је помоћу израза:

$$\xi_{k-1}^c = P\{c_k(c) | \chi_k, Z^{k-1}\} = \frac{P\{c_{k-1}(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}\}}{\sum_{c=1}^{C_k} P\{c_k(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}\}} \quad (4.19)$$

при чему је именилац разломка једнак "1". На крају корака корекције, потребно је израчунати а-постериорну вероватноћу постојања циља, за следећу итерацију:

$$\psi_{k|k} = P(\chi_k | Z^k) = \lambda_k \frac{\psi_{k|k-1}}{1 - (1 - \lambda_k) \psi_{k|k-1}} \quad (4.20)$$

где је однос веродостојности мерења циља дат помоћу:

$$\lambda_k = \frac{p(y_k | \chi_k)}{p(y_k | \bar{\chi}_k)} = 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_{k,i}}{p_{k,i}} \quad (4.21)$$

С друге стране, естимација броја мерења у  $k$ -том скену,  $\hat{m}_k$ , унутар задатог волумена  $V$  дата је преко густине клатер мерења:

$$\hat{m}_k = \int_V \rho(z_k) dV \quad (4.22)$$

Пре свега из разлога што је у овом кораку потребно знати априорну *pdf* броја мерења, између осталог за израчунавање односа веродостојности, који генерално није познат. У ту сврху потребно је увести појам густине мерења пристиглих у  $k$ -том скену,  $\rho(z_k)$ . Даље, нека је са  $\kappa_{k-1}$  означен скуп свих историја мерења закључно са  $k-1$ -тим скеном. Даље, нека је  $\kappa_k^i$  догађај да мерење са индексом  $i \geq 0$  потиче од циља и  $\kappa_k^0$  догађај да нема мерења која потиче од циља.

Тада је веродостојност стања циља дата као сума производа вероватноће настанка компоненте и а-приориорне *pdf* вероватноће да компонента припада трагу, помоћу следећег израза:

$$p(x_k | \chi_k, Z^k) = \sum_{i=0}^{m_k} P(\kappa_k^i | \chi_k, Z^k) p(x_k | \kappa_k^i, \chi_k, Z^k) \quad (4.23)$$

при чему је:

$$p(x_k, \kappa_k^i | \chi_k, Z^k) = P(\kappa_k^i | \chi_k, z_k, Z^{k-1}) p(x_k | \kappa_k^i, \chi_k, Z^k) \quad (4.24)$$

Апостериори *pdf* стања циља може се развити као сума производа вероватноће сваке компоненте и *pdf* стања трага циља која потиче од ње саме, помоћу израза:

$$p(x_k | \chi_k, Z^k) = \sum_{i=0}^{m_k} P\{\kappa_{k,i} | \chi_k, Z^k\} p(x_k | \chi_k, \kappa_{k,i}, Z^k) \quad (4.25)$$

Ако је испуњен услов  $i > 0$  (т.ј. постоје мерења која потичу од циља) тада се а-постериорна вероватноћа компоненте може израчунати као однос запреминске густине клатера мерења пристиглих у  $k$ -том скену ( $z_k$ ) која потичу од циља и селектованих од стране те компоненте и запреминске густине клатера свих мерења пристиглих у  $k$ -том скену на следећи начин:

$$P\{\kappa_k^i | \chi_k, Z^k\} = \frac{\rho(z_k, \kappa_k^i | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})} \quad (4.26)$$

С друге стране, тотална густина свих мерења једнака је производу густина појединих мерења. Ако се цео израз на десној страни подели запреминском густином клатера мерења која не потичу од циља  $\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})$  уз услов да је позната сва историја пристиглих мерења закључно са скеном  $k-1$ , ( $Z^{k-1}$ ), добија се израз у облику производа три чиниоца:

$$P(\kappa_k^i | \chi_k, Z^k) = \rho(z_k, \kappa_k^i | \chi_k, Z^{k-1}) \frac{1}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})} \frac{1}{\frac{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})}} \quad (4.27)$$

где  $z_k$  означава укупан број пристиглих мерења у скену  $k$ .

*Први чинилац* је густина мерења, која могу да потичу од циља или да буду клатер (не потичу од циља). Густина мерења циља, под условом да је мерење циља  $z_k^i$  може се израчунати као:

$$\rho(z_k, \kappa_k^i | \chi_k, Z^{k-1}) = P_D P_G P_k^i \quad (4.28)$$

што је условљено постојањем циља у претходним мерењима. Густина мерења у некој тачки волумена под условом да је то клатер мерење јесте густина мерења клатера  $\rho^{ga}(z_k^i)$  у тој тачки и може се израчунати као:

$$\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1}) = \rho(z_k | \kappa_k^0, \chi_k, Z^{k-1}) = \prod_j \rho^{fa}(z_k^j) \quad (4.29)$$

*Други чинилац* се може описати густином клатера као

$$\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1}) = \frac{\prod_{j=i} \rho^{fa}(z_k^j)}{\prod_{j \neq i} \rho^{fa}(z_k^j)} = \rho_k^i \quad (4.30)$$

*Трећи чинилац* је укупан однос веродостојности густине клатера мерења дат и може се дефинисати као:

$$\Lambda_k = \frac{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})} \quad (4.31)$$

На крају, заменом познатих величина из сва три претходна израза, добије се израз за тоталну вероватноћу селектованог мерења:

$$P(\kappa_k^i | \chi_k, Z^k) = P_D P_G \frac{P_k^i}{\rho_k^i} \frac{1}{\Lambda_k} \quad (4.32)$$

На исти начин, за услов  $i = 0$  ('null' мерење, односно циљ постоји али нема мерења селектованих од стране компоненти) а-постериорна вероватноћа компоненте је дата помоћу израза:

$$\begin{aligned}
 P\{\kappa_k^0 | \chi_k, Z^k\} &= \frac{\rho(z_k | \chi_k, \kappa_k^0, Z^{k-1}) P(\kappa_k^0 | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})} \\
 &= \frac{\rho(z_k | \chi_k, \kappa_k^0, Z^{k-1}) P(\kappa_k^0 | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})} \\
 &= \frac{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})} \\
 &= \frac{P(\kappa_k^0 | \chi_k, Z^{k-1})}{\Lambda_k} \\
 &= \frac{1 - P_D P_G}{\Lambda_k}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Сада се може се израчунати апотериорна *pdf* стања циља, преко тежинске суме производа *pdf* појединих компоненти трага:

$$\begin{aligned}
 p(x_k | \chi_k, Z^k) &= \sum_{i=0}^{m_k} P\{\kappa_k^i | \chi_k, Z^k\} p(x_k | \chi_k, \kappa_k^i, Z^k) = \\
 &P\{\kappa_k^0 | \chi_k, Z^k\} p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}) + \\
 &+ \sum_{i=1}^{m_k} P\{\kappa_k^i | \chi_k, Z^k\} p(x_k | \chi_k, \kappa_k^i, Z^k) = \\
 &= (1 - P_D P_G) p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}) + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} p(x_k | \chi_k, z_k^i, Z^{k-1})
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

#### 4.4. Однос веродостојности густине мерења

Гутина клатера мерења који не потиче од циља у  $k$ -том скену (назван ‘null’ мерења) може се дефинисати као производ густина појединих мерења у тој тачки, помоћу израза:

$$\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1}) = \rho(z_k | \kappa_k^0, \chi_k, Z^{k-1}) = \prod_j \rho^{fa}(z_k^j) \tag{4.35}$$

С друге стране густина мерења која потиче од циља може се израчунати као сума производа два узајамно искључива догађаја. Односно тоталне вероватноће догађаја да у скену  $k$  нема мерења која су детекција циља и његове густине и тоталне вероватноће догађаја да је једно мерење детекција циља и одговарајуће густине тог догађаја, помоћу следећег израза:

$$\begin{aligned}
 \rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1}) &= P\{\kappa_k^0 | \chi_k, Z^{k-1}\} \rho(z_k | \kappa_k^0, \chi_k, Z^{k-1}) \\
 &+ P\{\bar{\kappa}_k^0 | \chi_k, Z^{k-1}\} \rho(z_k | \bar{\kappa}_k^0, \chi_k, Z^{k-1})
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Вероватноћа догађаја да ниједно мерење није детекција циља може се израчунати као:

$$P\{\kappa_k^0 | \chi_k, Z^{k-1}\} = 1 - P_D P_G \quad (4.37)$$

односно, њему комплементарног догађаја да је само једно мерења потиче од циља:

$$P\{\bar{\kappa}_k^0 | \chi_k, Z^{k-1}\} = P_D P_G \quad (4.38)$$

Сада се може израчунати густина догађаја да је у  $k$ -том скену само једно мерење потиче од циља као сума производа одговарајућих густина сваког мерења које не потиче од циља и једног мерења које је детекција циља, примењена за свако од  $m_k$  пристиглих мерења. на основу једначине.

Означимо са  $\rho_{k,j}^{fa}$  густину мерења клатера у тачки  $j$ , под условом да је то клатер мерење. Клатером се могу назвати сва мерења  $z_k$ , која нису  $j$ , управо због догађаја  $\kappa_k^i$ . Производ густина свих мерења која не потичу од циља је у ствари:

$$\rho(z_k | \bar{\kappa}_k^0, \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_{i=1}^{m_k} \left( p_k^i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m_k} \rho_{k,j}^{fa} \right) \quad (4.39)$$

Заменом места суме и производа добија се коначан израз за густину догађаја да постоји само једно мерење које потиче од циља:

$$\rho(z_k | \bar{\kappa}_k^0, \chi_k, Z^{k-1}) = \prod_{j=1}^{m_k} \rho_{k,j}^{fa} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k^i}{\rho_k^i} \quad (4.40)$$

Сада се може израчунати густина мерења целог трага помоћу следећег израза:

$$\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1}) = \prod_j \rho^{fa}(z_k^j) \left( 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k^i}{\rho_k^i} \right) \quad (4.41)$$

На основу претходних израза, коначан облик једначине односа веродостојности може се написати у следећем облику:

$$\Lambda_k = \frac{\rho(z_k | \chi_k, Z^{k-1})}{\rho(z_k | \bar{\chi}_k, Z^{k-1})} = \frac{\prod_j \rho^{fa}(z_k^j)}{\prod_j \rho^{fa}(z_k^j)} \left( 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_k^i}{\rho_k^i} \right) \quad (4.42)$$

Тако се веродостојност стања циља може изразити као последица утицаја два међусобно искључива догађаја: да нема селектованих мерења и да постоји мерење које је детекција циља, помоћу израза:

$$p(x_k | \chi_k, \kappa_k^i, Z^k) = \begin{cases} p(x_k | \chi_k, \kappa_k^i, z_k, Z^{k-1}) = p(x_k | \chi_k, z_k^i, Z^{k-1}), & i > 0 \\ p(x_k | \chi_k, \kappa_k^0, z_k, Z^{k-1}) = p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}), & i = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

## 4.5. Кораци алгоритма

### 4.5.1. Корак предикције:

Свака рекурзуја итеративног **ITS** алгоритма започиње кораком предикције. Израчунава се априорна релативна вероватноћа сваке компоненте:

$$\xi_{k-1}(c) = p(c_{k-1}(c) | \chi_k, Z^{k-1}) \quad (4.44)$$

Априорна *pdf* стања сваке компоненте дат је помоћу израза:

$$p(x_k | c_k(c), \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{C_{k-1}} p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | \chi_k, c_{k-1}(c), Z^{k-1}) \quad (4.45)$$

док се априорна **pdf** стања на бивоу трага израчунава помоћу израза:

$$p(x_k | \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{C_{k-1}} p(x_k | \chi_k, c_{k-1}(c), Z^{k-1}) P(c_{k-1}(c) | \chi_k, Z^{k-1}) \quad (4.46)$$

и вероватноћа егзистенције циља  $\Psi_{k|k-1}$ .

$$\Psi_{k|k-1} = \Psi_{k-1|k-1} \Delta_{11} \quad (4.47)$$

Под претпоставком коришћења Марковљевог ланца Првог реда, где су вероватноће прелаза  $\Delta_{11} = const$ ,  $\Delta_{21} = 0$ , тотална вероватноћа компоненте постаје:

$$\begin{aligned} P(c_{k-1}(c), \chi_k | Z^{k-1}) &= \Delta_{11} P(c_{k-1}(c), \chi_{k-1} | Z^{k-1}) \\ &= \Delta_{11} \Psi_{k-1|k-1} P(c_{k-1}(c) | \chi_{k-1}, Z^{k-1}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

### 4.5.2. Корак селекције мерења

У почетку корака селекције, по пристизању мерења из  $k$  тог сцена, селектују се мерења која се налазе у претходно дефинисаном гејту  $g = const$  старе компоненте трага:

$$d_{c,j}^2 = (z_{k,j} - \hat{y}_k^c)^T (S_k^c)^{-1} (z_{k,j} - \hat{y}_k^c) < g \quad (4.49)$$

израчунава се априорна *pdf* мерења циља за сваку компоненту појединачно:

$$\begin{aligned} p(z | \chi_k, c_{k-1}(c), Z^{k-1}) &= \\ \sum_{c=1}^{C_{k-1}} p(z | x_{k-1|k-1}(c)) P(x_{k-1|k-1}(c) | \chi_k, c_{k-1}(c), Z^{k-1}) & \quad (4.50) \end{aligned}$$



#### 4.5.3. Корак корекције:

У овом кораку, рачуна се апостериорна  $pdf$  стања сваке компоненте трага  $p(x_k | \chi_k, c_k(c), Z^k)$ , коваријанса и релативна вероватноћа компоненте  $P(c_k(c) | \chi_k, Z^k)$ , апостериорна вероватноћа егзистенције циља  $\Psi_{k|k}$  за следећу итерацију:

$$\Psi_{k|k} = \frac{\lambda_k \Psi_{k|k-1}}{1 - (1 - \lambda_k) \Psi_{k|k-1}} \quad (4.51)$$

Где је веродостојност на нивоу трага дата помоћу израза:

$$\lambda_k = 1 - P_D P_G - P_D P_G \sum_{i=1}^{n_k} \frac{p_i(k)}{\rho_i(k)} \quad (4.52)$$

односно, генерално за "нул" и селектована мерења, релатива вероватноћа селектованог мерења:

$$\xi_k = P(c_k(c) | \chi_k, Z^k) = \frac{P(c_{k-1}(c) | \chi_k, Z^{k-1})}{\lambda_k} \begin{cases} 1 - P_D P_G, & c_k^0 = 0 \\ P_D P_G \sum_{i=1}^{n_k} \frac{p_i(k)}{\rho_i(k)}, & c_k^i > 0 \end{cases} \quad (4.53)$$

Сад се може израчунати естимација стања трага:

$$p(x_k | c_k(c), Z^k) = \frac{p[z_i(k) | \chi_k, x_k, Z^{k-1}]}{p[z_i(k) | \chi_k, Z^{k-1}]} p(x_k | c_k(c), \chi_k, Z^{k-1}) \quad (4.54)$$

#### 4.5.4. ITS-сједињавање компонента Сингеровим меморисјким филтром на нивоу историје из претходног сцена ( $N=1$ )

На самом почетку, пролази се стандарни корак предикције Калмановог филтра:

$$\xi_{k-1}(c) = P(c_{k-1}(c) | \chi_k, Z^{k-1}) \quad (4.55)$$

$$\hat{x}_{k|k-1}(c) = F \hat{x}_{k-1|k-1}(c) \quad (4.56)$$

$$P_{k|k-1}(c) = F P_{k-1|k-1}(c) F^T + Q_k \quad (4.57)$$

Релативна вероватноћа нове компоненте се добија помоћу израза:

$$\xi_k(c^n) = P(\kappa_c^k | \chi_k, Z^{k-1}) = \frac{p(\kappa_c^k | \chi_{k-1}, Z^{k-1})}{\sum_{c=1}^{C_k} p(\kappa_c^k | \chi_{k-1}, Z^{k-1})} \quad (4.58)$$

На основу једначина корака корекције Калмановог филтра, може се израчунати естимација сваке компоненте на основу следећих израза.

Калманово појачање сваке компоненте:

$$K_c = P_{k|k-1}(c)H[HP_{k|k-1}(c)H^T + R]^{-1} \quad (4.59)$$

Коваријациона матрица шума мерења дата је помоћу једначине:

$$S_k^c = HP_{k|k-1}(c)H^T + R_k, c = 1, \dots, C_k \quad (4.60)$$

Коначно, излаз из филтра, стање трага и коваријанса грешке процене стања сваке компоненте дата је помоћу следећих израза, респективно:

$$\hat{x}_{k|k}(c^n) = \hat{x}_{k|k-1}(c) + K_c[\hat{z}_k - H\hat{x}_{k|k-1}(c)] \quad (4.61)$$

$$P_{k|k}(c^n) = [I - PH^T(S_k^c)^{-1}H]P_{k|k-1}(c) \quad (4.62)$$

#### 4.5.5. Контрола (сједињавање) компонента

Процес формирања нових компоненти, рекурзивно у свакој итерацији алгоритма *ITS*, стапан је процес. Током сваке нове итерације, стиже нови скуп мерења са сензора, расте број компоненти које селекују мерења. У једном тренутку може доћи до застоја у практичном извршењу алгорита, односно до недостатка рачунарских ресурса. Због тога је неопходно пронаћи ефикасне методе за смањење броја компоненти, али не по цену губитка квалитета праћења. У тези, тестиран је алгоритам за смањење броја компоненти који је први предложио Сингер, (*Singer*) 1970. године. Наиме, сједињавају се компоненте са истом секвенцом мерења.

После сједињавања компоненти, укупна вероватноћа сједињених компоненти,  $c^\mu$ , једнака је збиру појединих компонента. Нека су са  $c^n$  - означене нове компоненте пре сједињавања, а са  $c^\mu$  -компоненте после сједињавања нових компоненти и нека је  $M$  –број селекованих мерења у  $k$ -том скену. Јасно је да је укупан број нових компоненти за  $k-1$  скен може израчунати као  $C_{k+1} = (1 + M)C_k$ .

Сада се може израчунати релативна вероватноћа, средња вредност и коваријанса грешке сваке нове компоненте помоћу следећа три израза, респективно:

$$\xi_k(c^\mu) = \sum_{c^n=1}^{C_{k+1}} \xi_{k-1}(c^n) \cdot \frac{P_k(c^n)}{P_k} \quad (4.63)$$

$$\hat{x}_{k|k}(c^\mu) = \sum_{c^n(\varphi^\mu)} \hat{x}_{k|k-1}[c^n(\varphi^\mu)] + K^{c^n} \{ \hat{z}_k - H\hat{x}_{k|k-1}[c^n(\varphi^\mu)] \} \quad (4.64)$$

$$P_{k|k}(c^\mu) = \sum_{c^n(\varphi^\mu)} P_{k|k-1}[c^n(\varphi^\mu)] - KS^{c^n(\varphi^\mu)}K^T \quad (4.65)$$

Коначно, естимација на нивоу трага, после сједињавања компоненти, може се израчунати помоћу израза:

$$p(x_k | Z^k) = \sum_{c^\mu=1}^M \xi_k(c^\mu) N[x_k; \hat{x}_{k|k}(c^\mu), P(c^\mu)] \quad (4.66)$$

док су естимација стања и коваријациона матрица грешке на нивоу трага дате помоћу следећих израза, респективно:

$$\hat{x}_{k|k} = \sum_{c^\mu=1}^M \xi_k(c^\mu) \hat{x}_{k|k}(c^\mu) \quad (4.67)$$

$$P_{k|k} = \sum_{c^\mu=1}^M \xi_k(c^\mu) [P_{k|k}(c^\mu) + \hat{x}_{k|k}(c^\mu) \hat{x}_{k|k}(c^\mu)^T] - \hat{x}_{k|k} \hat{x}_{k|k}^T \quad (4.68)$$

Из претходног се може закључити да важи  $\sum_{c=1}^{N_k} \xi_{k-1}^c = 1$ . Такође, може се показати да

такође и за нове компонената важи  $\sum_{c+=1}^{N_k^+} \xi_k^{c+} = 1$ , где је  $c^+ = \{c, i\}$  индекс нове компоненте и  $N_k^+$  њихов укупан број. Полазећи до дефиниције релативних вероватноћа нове компоненте на излазу  $KF$  корака поправке:

$$\xi_k^{c,i} = \frac{\xi_{k-1}^c}{\lambda_k} \begin{cases} 1 - P_D P_G, & i = 0 \\ P_D P_G \frac{p_{k,i}^c}{\rho_{k,i}}, & i > 1 \end{cases} \quad (4.70)$$

добивамо да је:

$$\begin{aligned} \sum_{c+=1}^{N_k^+} \xi_k^{c+} &= \frac{\xi_{k-1}^c}{\lambda_k} \sum_{c=1}^{N_k} \left( \sum_{i=0}^{m_k} \xi_k^{c,i} \right) \\ &= \sum_{c=1}^{N_k} \left[ (1 - P_D P_G) \frac{\xi_{k-1}^c}{\lambda_k} + P_D P_G \frac{\xi_{k-1}^c}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_{k,i}^c}{\rho_{k,i}} \right] \\ &= \frac{(1 - P_D P_G)}{\lambda_k} \sum_{c=1}^{N_k} \xi_{k-1}^c + \frac{P_D P_G}{\lambda_k} \sum_{c=1}^{N_k} \left[ \xi_{k-1}^c \left( \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_{k,i}^c}{\rho_{k,i}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_k} (1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{i=1}^{m_k} \frac{p_{k,i}}{\rho_{k,i}}) = 1 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Чиме је доказано почетно тврђење.

## 5. СЈЕДИЊАВАЊЕ КОМПОНЕНАТА СИНГЕРОВИМ МЕМОРИЈСКИМ ФИЛТРОМ

Алгоритам *ITS* је скуп компоненти, које се карактеришу вероватноћом  $\xi_k$ , средњом вредношћу  $x_k$  и коваријансом  $P_k$ . У литератури, ове карактеристике компоненте симболички се записују као:  $\{\xi_k, x_k, P_k\}$ . Сваки корак рекурзије алгоритма позива и обрађује сваку компоненту посебно. То значи да се на почетку једне рекурзије ради Калман филтер- предикција сваке компоненте из претходног скена. У кораку селекције свака компонента селекује своја мерења, и за свако селековано мерење посебно рачуна веродостојност.

На тај начин, *ITS* онда за сваки траг прави скуп селекованих мерења као унију скупова селекованих мерења од компоненти тог трага. Исто тако се прави веродостојност сваког селекованог мерења као тежинска сума веродостојности тог мерења за сваку компоненту.

Корак корекција или ажурирања се ради на нивоу сваке компоненте. На крају сваке рекурзије, сваки траг понаособ направи унију селекованих мерења, као и веродостојност на нивоу трага. Исто тако, применом Сингеровог меморијског филтра, на крају сваке рекурзије, алгоритам *ITS* прави нове компоненте које се користе за естимацију сваког трага а уједно представљају улаз у следећу рекурзију.

На тај начин сваки траг се карактерише својом функцијом густине вероватноће pdf. Код алгоритма *IPDA*, та функција густине вероватноће је у ствари један Гаусиан, док је код *ITS*-а тај pdf у ствари тежинска сума Гаусиана (*Gauss Mixture-GM*).

Јасно је да се сваки елеменат те тежинска сума Гаусиана зове компонента, и да је дефинисана са релативном вероватноћом, средњом вредношћу и коваријансом. Исто тако, из претходног се може закључити да сума свих релативних вероватноћи компонента мора бити једнака 1.

У идеалном случају, свака компонента је условна естимација стања под претпоставком да је бар једна секвенца мерења тачна (и да циљ постоји), а релативна вероватноћа компоненте је вероватноћа да је та секвенца мерења тачна, под условом да циљ постоји.

### 5.1. Сједињавања компонента трага *ITS* алгоритма

Све "историје" селекованих мерења трага су потенцијални кандидати да садрже секвенцу стварног циља и имају вероватноћу појављивања већу од нула.

Укупан број свих "историја"  $L_H(k)$  под претпоставком правилне иницијализације трага почев од тренутка  $k = 0$  задовољавају једначину:

$$L_H(k) = \prod_{j=1}^k (1 + m_j) = (1 + m_k)L_H(k-1) \quad (5.1)$$

Историја трага у дискретном тренутку  $k$  се може добити из историје трага у тренутку  $k-1$  једног од укупно  $1 + m_k$  "селектованих мерења" из скупа свих пристиглих  $Z_i^k$ .

Илустрација процеса сједињавања компонента у  $k-1$ -ом скену дата је на Сл.5.1. док је на Сл.5.2. дат наставак сједињавања компоненти у  $k$ -том скену. Компонете су представљене различито обојеним квадратима. Квадрати исте боје представљају нове компоненте. Редни бројеви редова означавају ознаку мерења. Безбојна поља означавају мерења која нису селектована од стране компоненти (колоне).

## 5.2. Филтри са меморијом од N-периода

У  $(N+1)$ -ом временском одбирку траг се иницијализује помоћу историје

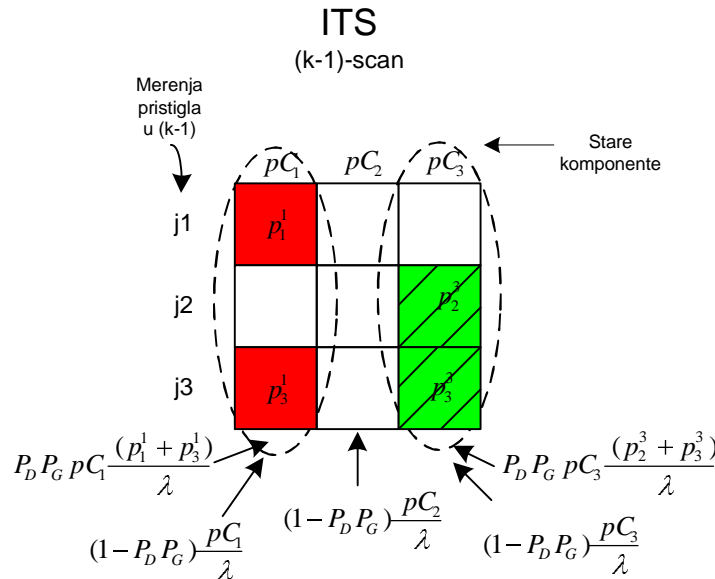
$$L_H(N+1) = (1 + m_{N+1})L_H(N) \quad (5.2)$$

За  $N=0$ , Постоји само једна компонента односно *ITS постаје IPDA*. Када је дубина Сингеровог меморисјког филтра  $N=1$ , укупан број компонента је :

$$C_k = 1 + m_k \quad (5.26)$$

док је за дубину Сингеровог меморисјког филтра  $N=2$ , укупан број компонента може израчунати помоћу израза

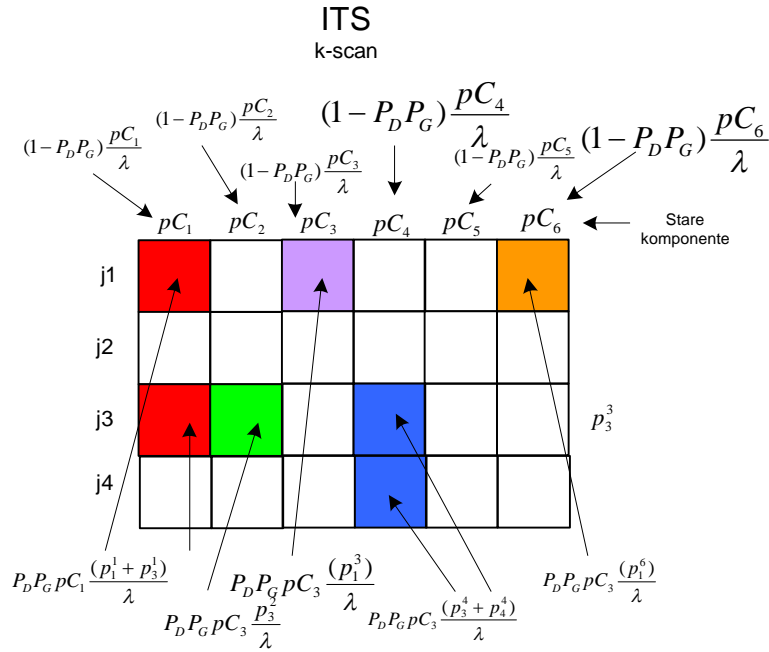
$$C_k = (1 + m_k) \cdot (1 + m_{k-1}) \quad (5.1a)$$



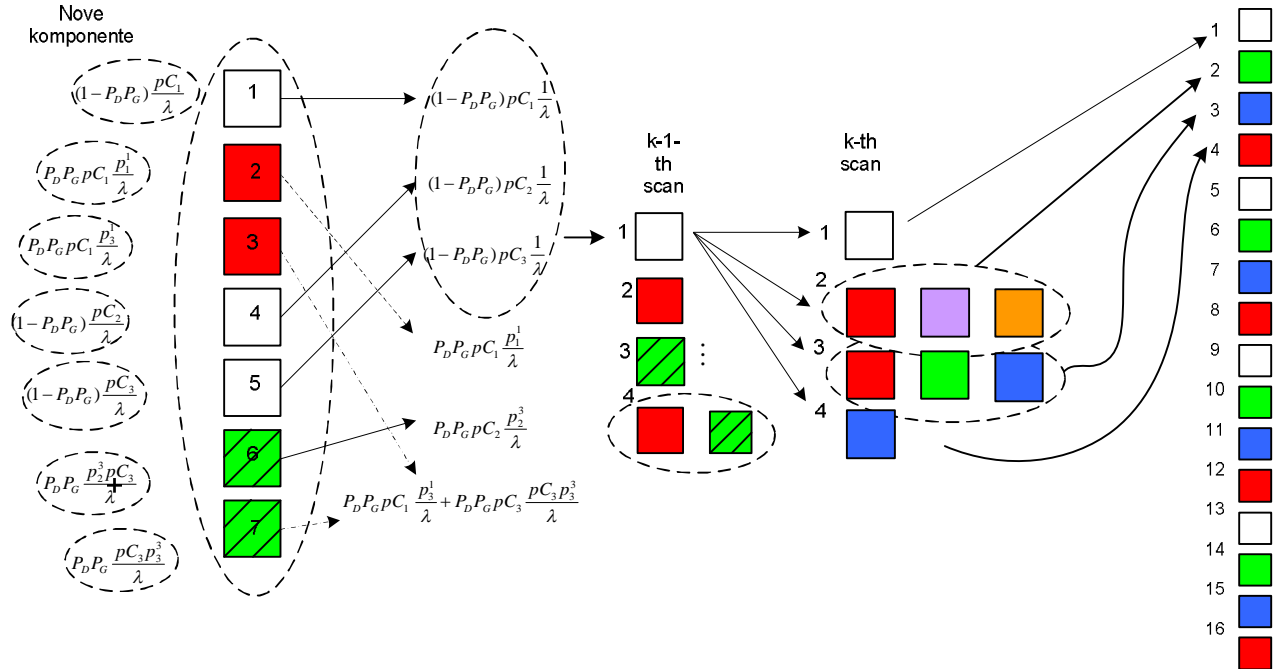
Слика 5.1 Пример сједињавања компонента

Сингеровим меморијским филтром (илустрација у  $k$ -1-ом скену)

На Слици 5.3 дата је комплетна илустрација процеса сједињавања компонената из  $k - 1$ -ог у  $k$ -ти скен. Обојени квадрати представљају селектована мерења поред којих су дате вредности релативне вероватноће нових компонената трага.



Слика 5.2 Пример сједињавања компонената Сингеровим меморијским филтром ( $k$ -скен)



Слика 5.3 Пример сједињавања компонента Сингеровим меморијским филтром-илустрација нових формирања компонента

### 5.3. Акционе формуле ITS алгорита

У наставку следи практична имплементација предложеног алгорита, за коју су потребне само крајње једначине, односно 'акционе' формуле. Оне су дате следећим једначинама, у три позната **ITS** корака: корак предикције, корак селекције мерења и корак ажурирања односно корекције. На самом почетку, у кораку предикције, израчунава се вероватноћа егзистенције циља:

$$\Psi_{k|k-1} = \Psi_{k-1|k-1} \Delta_{11} \quad (5.3)$$

где је  $\Delta_{11}$ -константа која означава вероватноћу опстанка трага (*Markov Chain One*). Када пристигну мерења у скену  $k$ , свака *pdf* компоненте пропагира по стандардном *Kalman* филтру (*KF*), при чему је средња вредност и коваријанса:

$$\hat{x}_{k|k-1}^c = F_k \hat{x}_{k-1|k-1}^c \quad (5.4)$$

$$P_{k|k-1}^c = F_k P_{k-1|k-1}^c F_k^T + Q_k \quad (5.5)$$

Даље, у овом кораку се израчунава предикована *pdf* стања сваке компоненте, која практично представља један Гаусов импулс:

$$p(x_k | \chi_k, c_k(c), Z^{k-1}) = N[x_k; \hat{x}_{k|k-1}^c, P_{k|k-1}^c] \quad (5.6)$$

У даљем развоју алгорита, по пристизању мерења са сензора, селекују се мерења која се налазе у претходно задатом гејту  $g = const$  сваке старе компоненте, односно потребно је да задовоље следећи услов:

$$d_{c,j}^2 = (z_{k,j} - \hat{y}_k^c)^T (S_k^c)^{-1} (z_{k,j} - \hat{y}_k^c) < g \quad (5.7)$$

где је средња вредност и коваријанса компоненте:

$$\hat{y}_k^c = H\hat{x}_{k|k-1}^c \quad (5.8)$$

$$S_k^c = HP_{k|k-1}^c H^T + R \quad (5.9)$$

Веродостојност мерења циља (пре сједињавања компонената) дата је као сума производа:

$$p_{k,i} = p(z_{k,i} | \chi_k, Z^{k-1}) = \sum_{c=1}^{N_k} \xi_{k-1}^c p_{k,i}^c \quad (5.10)$$

где је веродостојност сваке компоненте један Гаус:

$$p_{k,i}^c = p(z_{k,i} | \chi_k, C_k(c), Z^{k-1}) = N[z_{k,i}; \hat{y}_k^c, S_k^c] \quad (5.11)$$

### 5.3.1. Корак корекције

У овом кораку алгоритма ажурирају се *pdf* стања компонената.

Апостериорна *pdf* естимације стања нових компонената трага је Гаус дефинисан средњом вредношћу и коваријансом. За случај када нема мерења селектованих од стране компонената из претходног скена  $i = 0$ , естимација нове компоненте је једнака предикцији старе, односно:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{c,0} &= \hat{x}_{k|k-1}^c \\ P_{k|k}^{c,0} &= P_{k|k-1}^c \end{aligned} \quad (5.12)$$

Калманово појачаање свајеке нове компоненте, може се израчунати помоћу израза:

$$K^c = HP_{k|k-1}^c H^T + R \quad (5.13)$$

За  $i > 0$  поправљено стање циља и коваријациона матрица могу се израчунати помоћу израза за *KF* естимацију, где је  $\{c, i\}$ -индекс нове компоненте:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{c,i} &= \hat{x}_{k|k-1}^c + K^c (z_{k,i} - H\hat{x}_{k|k-1}^c) \\ P_{k|k}^{c,i} &= (I - K^c H) P_{k|k-1}^c (I - K^c H)^T + K^c R (K^c)^T \end{aligned} \quad (5.14)$$

апостериорна вероватноћа исте је:

$$\xi_k^{c,i} = \frac{\xi_{k-1}^c}{\lambda_k} \begin{cases} 1 - P_D P_G, & i = 0 \\ P_D P_G \frac{p_{k,i}^c}{\rho_{k,i}}, & i > 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Однос веродостојности мерења циља



$$\lambda_k = \frac{p(y_k | \mathcal{X}_k)}{p(y_k | \bar{\mathcal{X}}_k)} = 1 - P_D P_G + P_D P_G \sum_{j=1}^{m_k} \frac{p_{k,j}}{\rho_{k,j}} \quad (5.16)$$

Апостериорна *pdf* естимације стања циља за излаз, дата је помоћу израза:

$$p(x_k | \mathcal{X}_k, Z^k) = \sum_{c=1}^{N_k} p(x_k | \mathcal{X}_k, C_k(c), Z^k) P\{C_k(c) | \mathcal{X}_k, Z^k\} \quad (5.17)$$

На крају, израчунава се апостериорна вероватноћа постојања циља:

$$\psi_{k|k} = \frac{\lambda_k \psi_{k|k-1}}{1 - (1 - \lambda_k) \psi_{k|k-1}} \quad (5.18)$$

за следећу итерацију алгоритма.

## 6. АЛГОРИТМИ ЗА ПРАЋЕЊЕ ВИШЕ ЦИЉЕВА

Сваки потпуно аутоматски алгоритам за праћење треба да обезбеди стабилан рад у условима непознатог броја циљева, са непознатим тренуцима иницијализације и гашења трагова, лажним мерењима и могућим наглим променама трајекторије циља.

Приступ теоретском моделу праћењу који ће бити презентован у тези, заснива се на познатом (ITS) радном простору за праћење једног циља, који интегрише рекурзивно израчунавање вероватноћа егзистенције циља са естимацијом трајекторије у више временских одбирака. У тези ће бити презентована поменути алгоритам са две технике праћења више циљева

Прва техника је *метода сједињавања заједничких компонената трага (Joint Multitarget Tracking)* која је настала на темељима изводљивог глобалног додељивања мерења трагу који резултује у условно оптималном али потенцијално рачунарски захтевном техником.

Друга техника је *метода линеарна сједињавања компонената трага (Linear Multitarget - LMITS)*, постиже функционалност праћења више циљева путем подешавања густине клатер мерења. *LM* је подоптимална али рачунарски веома ефикасна техника. Симулациона студија на крају тезе треба да покаже ефикасност овог приступа у окружењу униформног клатера када се прате циљеви у окружењу кретања са веома оштрим маневрима. Мерења са сензора могу да потичу од случајног клатера и такође од циљева, чије је постојање као и облик трајекторије *a-priori* непознато. *Ове детекције циљева представљене су њиховом вероватноћом детекције, која је су  $P_D < 1$ .*

У сваком временском одбирку, пристижу мерења са сензора, чији је број такође априори непознат. Током рекурзивног процеса праћење циљева, формирају се све могуће хипотезе у односу на циљ и придруживање траг-мерење. Број ових хипотеза експоненцијално расте са временом, тако да било који практични метод праћења циљева мора да укључи технике за контролу и редукцију броја хипотеза, од којих су најчешће методе одсецања (*pruning*) и сједињавања (*merging*).

Праћење више циљева поседује још једну комплексност у следећој димензији. Полазећи од основних претпоставки од бесконачној резолуцији сензора, и са више од једним мерењем по циљу у сваком скену, број могућих глобалних придруживања пристиглих мерења постојећим траговима расте комбинаторично са бројем мерења и бројем опсервираних трагова. Оптимални приступ праћењу више циљева, који се у литератури назива "сједињено праћење више циљева" (Joint Multitarget Tracking) подразумева, обрађује и процењује све могуће глобалне 'мерење-траг' придруживање.

Аутоматско праћење у овом окружењу захтева иницијализацију и одржавање трагова, и процедуру дефинисања и раздвајања стварних од лажних трагова, названу 'одвајање лажних трагова' (*False Track Discrimination-FTD*). Алгоритми за праћење циљева морају да раде корекцију мерења квалитета трага, како би се олакшало процедура одбацивања лажних трагова.

Алгоритам праћења вишеструким хипотезама (*Multiple Hypothesis Tracker - MHT*) [3,4] генерално подразумева оптимални итеративни (*multiscan*) алгоритам за праћење више циљева у окружењу клатера. Такође, објављено је у литератури неколико верзија *MHT* алгорита које се могу груписати у две главне класе.

Први, *MHT* базиран на мерењима, познат као Реидов алгоритам (*Reid*) [3], формира нове хипотезе додељивања мерења постојећим траговима, распоређеним око мерења. Други, *MHT* базиран на траговима [4] формира хипотезе засноване на гранању трага. Без обзира која класа *MHT* алгоритма се користи, практичне имплементације морају се базирати на оптимизацији, тако да број хипотеза расте експоненцијално у односу на редни број сцена и могућих трагова.

Квалитет трагова, у *MHT* често се назива резултат трага, је веродостојност мерења одређене секвенце компоненте трага. Процедура одбацивања лажних трагова *FTD* у *MHT* алгоритму типично одабира највероватније хипотезе за потврђивање трага, па је *MHT* естиматор са максималном веродостојношћу егзистенције циља.

Мерење квалитета трага у "алгоритму придруживање података по вероватноћи" (*Probabilistic Data Association-PDA*) укључује могућност опсервирања циља, која је дата појмом алгорита *GPBI-PDA* (*generalized pseudo-Bayesian estimator*) [10,11] и детектабилности циља датој у алгоритму *IMM-PDA* (*Interacting Multiple Model-IMM*) [12, 13]. Оба алгоритма користе један додатни модел циља са вероватноћом детекције нула и израчунавају вероватноћу тог модела у стандардном *GPBI* и *IMM*-у респективно.

Вероватноће опсервабилности и детектабилности су у ствари комплемент вероватноће модела циља са нултом детекцијом. Естимација трага у оба алгоритма (*IMM-PDA* и *GPBI-PDA*) зависе од вероватноће постојања циља, вршећи 'комбиновање' (*mixing*) естимација појединих модела, у оба алгорита, *GPBI* и *IMM*. Укључивање постојања циља у итеративно праћење циља, први пут је публиковано у [14], где је резултујући филтер назван ' придруживање података редукацијом интегралног комбиновања (*Integrated Mixture Reduction Data Association-IMRDA*) филтер.

Међутим, теоретски модел за *IMRDA* се знатно разликују од теоретског модела за *ITS*. Главна разлика се састоји у томе да егзистенција циља код *IMRDA* на бази компонената трага, коришћењем односа веродостојности мерења које су обухваћених компонентама и тада се постојање циља добија коришћењем теореме тоталне вероватноће. У исто време *ITS* одређује егзистенцију циља коришћењем односа веродостојности мерења на нивоу целог трага.

Друга кључна разлика је да су у *IMRDA* филтру, априорне вероватноће компонената трага једнаке априорним вероватноћама трага под условом да циљ постоји, што није случај са *ITS*-ом. Алгоритам *ITS* одређује постојање циља на средњем односу веродостојности мерења, тако да, са благом злоупотребом терминологије, *ITS* филтар је 'естиматор усредњеног постојања циља'. Детаљно

поређење *MHT* и *ITS* је представљено у [6]. Они се разликују у третману компонената трага. У *MHT*-у, свака компонента трага има свој сопствени живот (и потврђује се и гаси индивидуално од осталих) до код *ITS*-а сваки траг је скуп међусобно повезаних компонената.

Потврђивање и гашење се догађа на нивоу трага, и утиче на све компоненте трага истовремено. Коначно, *ITS* и алгоритми изведени из њега *Joint ITS-JITS* и *Linear Multitarget ITS-LMITS* раздвајају иницијализацију и одржавање трага који значајно редукује нумеричку комплексноост алгоритма. У складу са високом рачунарском комплексношћу, *JITS* се користи у ситуацијама са малим бројем трагова и мерења. У захтевнијим ситуацијама, захтева се примена подоптималне методе.

*LMITS* је подоптимална апликација за праћење више циљева, која редукује рачунарску сложеност елиминацијом заједничких придруживања мерења и трагова. Приликом корекције стања трага, *LM* разматра могуће детекције од осталих циљева (трагова) као додатни клатер, и модулише густину клатер мерења као што је описано у литератури [16,17].

Модулисање клатера носи са собом релативно ниске захтеве у погледу рачунарске сложености, тако да је *LMITS* у погледу рачунарских ресурса сличан *ITS*-у за један покретан циљ (*STT*). Основни радни простор за оба од алгоритама (*LMITS* и *JITS*) ће бити презентован, где корекција трага користи асоцијативне вероватноће из *ITS*-а. Слична концепција користи се и код *ITS*-а за један покретан циљ.

## **6.1. ITS MTT -алгоритам за праћење више циљева**

Интегрални алгоритам сједињавања трага (*Integrated Track Splitting-ITS filter*) за праћење једног циља у клатеру [6], интегрише праћење у више периода окретања радара [7], са вероватноћом постојања трага која постаје мера квалитета трага [8] у *ITS* алгоритму.

Вероватноћа егзистенције трага је уведена по први пут у интегрални алгоритам асоцијативних вероватноћа (*Integrated Probabilistic Data Association - IPDA*) [8], повезаним са алгоритмом асоцијативних вероватноћа (*Probabilistic Data Association-PDA*) [9] као апроксимације естимације трага за једну периоду радара.

Естимације трага добијене из *IPDA* су условне у односу на егзистенцију трага. Оне зависе од селектованих мерења а не од вероватноће егзистенције трага, који је исто тако случај у *ITS*-у.

У тези ће бити разматране две варијанете алгоритам *ITS*-а за праћење више циљева:

- Заједнички интегрални алгоритма дељења трага (*Joint ITS*)
- Линеарни интегрални алгоритам дељења трага за више циљева (*Linear Multitarget ITS*).

## 6.2. Придруживања података у алгортимима за праћење више циљева

### 6.2.1. Метода сједињавања заједничких компонената трага

Алгоритам сједињавања заједничких компонената трага (*Joint Integrated Track Splitting-JITS*) примењује оптималну придруживању података у окружењу *ITS*. Основни недостатак је повећана рачунарска сложеност алгорита, повезана са повећањем броја додељивања мерења шпстојећим траговима. Као решење за смањење рачунарске сложености, користи се одвајање трага у појединачне кластере у сваком скену. Тада се *Joint ITS* примењује одвојено на сваки кластер. Кластер је изван скуп трагова у коме нема додељених мерења било ком постојећем трагу.

Тада кластер постаје домен из кога се могу расподелити мерења трагу. Тривијални клатер је скуп свих трагова. Међутим, у складу с веома нелинеарним повећањем броја додељивања мерења траговима, (и одговарајућим расположивим рачунарским ресурсима) сваки кластер треба да садржи само минимални скуп трагова који задовољавају горњу дефиницију [24]. Зона кластера је унија зона прозора селекције.

Скуп селектованих мерења  $z_k$  постаје унија мерења проверена од стране сваког трага припадајућег кластеру. Заједнички догађај  $\kappa$  представља додељивање мерења свим траговима унутар кластера у тренутку  $\mathbf{k}$ .

$$\varepsilon_k \equiv \bigcap_{\sigma=1}^T \kappa_k^\sigma \quad (6.1)$$

где је са  $T$  означен број трагова у кластеру. Остварљив број заједничких догађаја задовољава следећа ограничења:

- сваки траг је додељен једном или ниједном мерењу које се налази унутар гејта тог трага.
- свако мерење је додељено једном или ни једном трагу

Ова ограничења су настала из претпоставке да су сва мерења решена (придружена траговима). За сваки могући заједнички догађај  $\varepsilon_k = e$ , означимо са  $T_0(e)$  скуп трагова  $\tau$  у кластеру за који је  $\kappa_k^\tau = 0$ , т.ј. оне трагове који немају додељена мерења, и означимо са  $T_1(e)$  скуп трагова  $\tau$  у кластеру за који је  $\kappa_k^\tau > 0$ , т.ј. оне трагове који имају додељена мерења. Означимо са  $i(\varepsilon, \tau) \geq 0$  индекс мерења која су додељена трагу  $\tau$  преко догађаја  $e$ . Апостериорна pdf заједничког догађаја дата је као:

$$P(\varepsilon_k = e | Z^k) = c_k^{-1} \prod_{\tau \in T_0(e)} (1 - P_D^\tau P_w^\tau \psi_{k|k-1}^\tau) \cdot \prod_{\tau \in T_1(e)} \left( P_D^\tau P_w^\tau \psi_{k|k-1}^\tau \frac{P_{k,i(e,\tau)}^\tau}{\rho_{k,i(e,\tau)}} \right) \quad (6.2)$$

где је:

$$\sum_{\varepsilon=1}^E P(\varepsilon_k = e | Z^k) = 1 \quad (6.3)$$

$c_k$  -нормализациона константа и  $E$  број могућих заједничких догађаја у кластеру. Апостериорне појединачне вероватноће додељивања "траг-мерења"  $\kappa_k^\tau$  се добијају сумирањем апостериорних вероватноћа свих могућих заједничких догађаја које их садрже. Означимо са  $\Xi(\tau, i)$  скуп могућих заједничких догађаја који садрже  $\kappa_k^\tau = i, i = 1, 2, \dots, n_k$ . Апостериорне вероватноће додељивања "траг- мерења" су дате помоћу:

$$P(\kappa_k^\tau = 0 | Z^k) = \sum_{e \in \Xi(\tau, 0)} P(\varepsilon_k = e | Z^k) \quad (6.4)$$

$$P(\kappa_k^\tau = 0, \chi_k^\tau | Z^k) = P(\kappa_k^\tau = 0 | Z^k) \frac{(1 - P_D^\tau P_G^\tau) \psi_{k|k-1}^\tau}{1 - P_D^\tau P_G^\tau \psi_{k|k-1}^\tau} \quad (6.5)$$

$$P(\kappa_k^\tau = i > 0, \chi_k^\tau | Z^k) = \sum_{e \in \Xi(\tau, i)} P(\varepsilon_k = e | Z^k) \quad (6.6)$$

Излазне вредности ЈТС модула за придруживање података су дате као:

$$\psi_{k|k}^\tau = \sum_{i=0}^{n_k} P(\kappa_k^\tau = i, \chi_k^\tau | Z^k) \quad (6.7)$$

$$\beta_{i,k}^\tau = \frac{P(\kappa_k^\tau = i, \chi_k^\tau | Z^k)}{\psi_{k|k}^\tau} \quad (6.8)$$

### 6.2.2. Метода линеарног сједињавања компонената трага за праћење више циљева

Метода линеарног сједињавања компонената трага за праћење више циљева (*Linear Multitarget Integrated Track Splitting -LM ITS*) се користи за оптимизацију алгорита *ITS* за праћење када се у прозору трага појави више мерења које потичу од циља. У овом делу дисертације, биће укратко описан теоретски модел једне од ефикасних екстензија стандардног *ITS* алгорита намењен за праћење више циљева, који из скупа свих опсервација групише само оне опсервације које су селектоване од стране исте компоненте трага. За разлику од стандардних МТТ (*Multiple Target Tracking*) алгоритама, типични *STT* (*Single Target Tracking*) алгоритми су засновани на четири модела :

- модел динамике циља,
- модел процеса мерења ,
- модел еволуција вероватноће постојања циљ
- модел расподеле густине клатера мерења

Особина свих алгоритама за праћење је да се ажурирају у два корака:

*Први корак* је корак предвиђања и процене стања циља који претпоставља различите моделе кретања циља у односу на претходни скен,

*Други корак* врши корекција предвиђања стања на основу мерења пристиглих у текућем скену. У околини предвиђања, бира се 'прозор' у коме се очекује појава мерења односно подкупа свих пристиглих мерења која (теоретски и практично) могу да потичу од циља.

Филтри за поправку корака предвиђања од свих селектованих мерења израчунавају вероватноћу придруживања да управо то мерења потиче од циља.

Ова мерења, заједно са подацима о вероватноћи придруживања се користе за корекцију предвиђене процене стања циља. То резултира у настанку "а постериори" процене стања које се потом користи као улаз за корак предвиђања у следећем скену. На тај начин се формира рекурсивни процес који има за циљ формирање трагова за које се претпоставља да прате стварну трајекорију циља.

Кључна карактеристика сваког алгорита за праћење је начин на који се израчунавају вероватноће придруживања. *STT* алгоритми претпостављају да су изабрана мерења или генерисани од стране циља или су из клатера. Они не дозвољавају могућност да било мерења су пореклом из другог циља. Најједноставније *MTT* методе се заснивају на формирању банки филтара за праћење само једног циља, једна по трагу. Ова метода ретко показује задовољавајуће резултате у пракси. Конкретно, она је веома осетљива на праћење блиских циљева и траг се губи када су циљеви недовољно размакнути. Дуплирање трагова који прате један циљ су такође честе појаве у овој групи алгоритама.

Насупрот томе, тачнији *MTT* алгоритми посматрају порекло сваког мерења. Типично, они покушавају да јединствено доделе мерење сваком (потенцијалном) циљу. Број јединствено додељених пристиглих мерења свим постојећим траговима у датом скену се може одредити комбинаторике мерења и трагова.

Ако за тренутак занемаримо питање иницијализације и нестанка трагова, број јединствених придруживања  $m$  мерења према  $n$  трагова, укључујући и могућност да неки потенцијални циљеви нису детектовани је:

$$n! \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \binom{m}{n-i} \geq (m+1)n! \quad (6.9)$$

када је  $m \geq n \geq 1$  и:

$$m! \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \binom{n}{m-i} \geq (n+1)m! \quad (6.10)$$

кад је  $n \geq m \geq 1$ . Оптимална *MTT* захтева узимање у рачун и процену свих могућих заједничких мерења за праћење трага. Рачун постаје непрактичан када се усму у рачун укупан број комбинација, па се зато прибегава смањењу броја комбинација, коришћењем неких хеуристичких метода.

### 6.2.3. Линеарна метода придруживања вероватноћа за више циљева

Линеарна метода придруживања вероватноћа за праћење више циљева (*Linear Multitarget Probabilistic Data Association*) је у општем случају, типичан систем за праћење једног циља, има следеће кораке у сваком скену:

**1. корак предикције:** спроводи се пре појаве мерења у к-том скену:

А) естимација  $p(x_k^\tau | Z^{k-1})$  и све остале естимације повесане са тим трагом

Б) естимација  $p(z_k^\tau | Z^{k-1})$

Ц) естимација  $p(\chi_k^\tau | Z^{k-1})$

**2. корак корекције:** по пријему мерења у к-том скену:

А) селекција  $m_k$  мерења у околини  $\hat{z}_k^\tau | Z^{k-1}$

Б) израчунавање апостериорних вероватноћа придруживања т.ј. вероватноћа сваког мерења унутар гејта циља

Ц) израчунавање апостериорних естимација трага коришћењем асоцијативних вероватноћа и предикованих естимација трага.

Приметимо да за специјалан случај недоласка мерења ( $m_k^\tau > 0$ ) не може се разматрати праћење више циљева.

У оквиру линеарне МГТ методе, априорне асоцијативне вероватноће се апроксимирају првом претпоставком да постоји само један потенцијални циљ. Дефинишимо:

$$P_{k,i}^\tau \equiv P(\chi_{k,i}^\tau | Z^{k-1}) \quad (6.11)$$

где је  $P_{k,i}^\tau$  априорна вероватноћа да мерење  $i$  у к-том скену потиче од циља  $\tau$ . Ова вероватноћа се може апроксимирати помоћу израза:

$$P_{k,i}^\tau \approx P_D^\tau P_W^\tau P(\chi_k^\tau | Z^{k-1}) \left( \begin{array}{c} \frac{P_{k,i}^\tau}{\rho_i^\tau} \\ \sum_{j=1}^{m_k^\tau} \frac{P_{k,j}^\tau}{\rho_j^\tau} \end{array} \right) \quad (6.12)$$

где је:

$$\rho_i^\tau = \rho_{k,j} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \tau}}^T P_D^\sigma P_W^\sigma P(\chi_k^\sigma | Z^{k-1}) p_{k,j}^\sigma \quad (6.13)$$

а са  $T$  је означен укупан број трагова. Априорна густина мерења  $z_{k,i}$  после корекције (**update**) трага  $\tau$  је дата помоћу израза:

$$\tilde{\rho}_{k,i}^\tau = \rho_{k,j} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \tau}}^T p_{k,j}^\sigma \frac{P_{k,i}^\sigma}{1 - P_{k,i}^\sigma} \quad (6.14)$$



Модел Марковљевог ланца првог реда за пропагацију вероватноће постојања трага, за циљ  $\tau$  се може израчунати као:

$$P(\chi_k^\tau | Z^{k-1}) = \Delta_{11}P(\chi_{k-1}^\tau | Z^{k-1}) + \Delta_{21}[1 - P(\chi_{k-1}^\tau | Z^{k-1})] \quad (6.15)$$

Где су транзиционе вероватноће дефинисане помоћу израза:

$$\Delta_{11} \equiv P(\chi_k^\tau | \chi_{k-1}^\tau) \quad (6.16)$$

$$\Delta_{21} \equiv P(\chi_k^\tau | \bar{\chi}_{k-1}^\tau) \quad (6.17)$$

Узимајући у рачун претходне изразе, апостериорна вероватноћа постојања трага је дата помоћу израза:

$$P(\chi_k^\tau | Z^k) = \frac{(1 - \delta_k^\tau)P(\chi_k^\tau | Z^{k-1})}{1 - \delta_k^\tau P(\chi_k^\tau | Z^{k-1})} \quad (6.18)$$

где је:

$$\delta_k^\tau = P_D^\tau P_W^\tau \left( 1 - \sum_{j=1}^{m_k^\tau} \frac{P_{k,j}^\tau}{\tilde{\rho}_{k,j}^\tau} \right) \quad (6.19)$$

који је повезан са трагом  $\tau$  односом веродостојности мерења као што је дато следећим изразом:

$$\Lambda_k^\tau = \frac{p(z_k^\tau | \chi_k^\tau, Z^{k-1})}{p(z_k^\tau | \bar{\chi}_k^\tau, Z^{k-1})} = 1 - \delta_k^\tau \quad (6.20)$$

На крају, апостериорне вероватноће да циљ постоји и да је мерење  $i \geq 0$  је његова детекција ( $i = 0$  означава 'нула' мерења) је дата као:

$$P(\chi_k^\tau, \chi_{k,0}^\tau | Z^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_W^\tau)}{1 - \delta_k^\tau P(\chi_k^\tau | Z^{k-1})} P(\chi_k^\tau | Z^{k-1}) \quad (6.21)$$

$$P(\chi_k^\tau, \chi_{k,j}^\tau | Z^k) = \frac{(1 - P_D^\tau P_W^\tau)}{1 - \delta_k^\tau P(\chi_k^\tau | Z^{k-1})} \frac{P_{k,j}^\tau}{\tilde{\rho}_{k,j}^\tau} \cdot P(\chi_k^\tau | Z^{k-1}), \quad i > 0 \quad (6.22)$$

На крају ове дисертације, у делу експерименталних испитивања, тестираће се ефикасност предложене *LMITS* методе у делу праћења више покретних циљева.

## 7. РЕЗУЛТАТИ СИМУЛАЦИЈА

У овом делу дисертације, биће дати резултати интензивних експеримената. Због обимности и великог броја тестираних сценарија кретања циља, биће приказани само одабрани експерименти који треба ослустративно и резултатски да покажу ефикасност предложене методе. Пре свега, то су експерименти са пет, петнаест и педесет циљева који старују са обода круга о крећу се ка центру.

### 7.1. Опис експеримената

Одабрани експерименти су базирани на STT и MTT сценарију кретања циљева. Симулациони STT експерименти имају неуниформни клатер, док MTT експерименти имају адитивни бели Гаусов шум, који се додаје на вектор брзине, пре почетка сваке симулације (пролаза). На тај начин постигнут је ниво неуниформног клатра који се повећава идући ка центру круга (до 20-ог скена), а смањује када се циљеви (после 20-тог скена). С обзиром да је за практичан доказ оправданости примене Сингеровог меморијског филтра потребно обезбедити одређени број мерења у сваком скену, експеримент праћења једног циља је нешто другачији од експеримената за праћење више циљева. Код њега се за симулациони сценарио користи поред мерења која потичу од циља и густо Поасонов клатер. Експерименти за праћење више циљева не морају да имају посебан клатер, већ ту улогу преузимају суседни веома блиски циљеви који се сваким скеном све ближи једни другима. У свим експериментима, претпоставља се да је сензор линеаран у Декартовом правоуглом координатном систему, са адитивним шумом мерења чија је коваријанса  $R=25I_2$ , при чему  $I_2$  означава дводимензионалну јединичну матрицу. Вероватноћа детекције сваког циља је позната и износи 0.8. Присутан је значајан ниво клатера као и процедура аутоматске иницијализације трагова. Трагови се иницијализују сваким паром мерења у консеквентним скеновима тако да задовољавају критеријум максималне брзине под условом да нису селектовани од било ког другог трага. Сваком новом иницијализованом трагу се додељује иницијална вероватноћа детекције, која је детаљно описана у литератури [13]. На тај начин, ако циљ није праћен од стране трага, иницијализује се нови траг коришћењем његових детекција. Траг може да стартује пратећи исти циљ, или исту секвенцу мерења. Када се то догоди, естимација стања трајекторије треба да конвергира, и ти трагови ће бити сједињени.

У сваком скену, иницијализује се одређени број лажних трагова. У тој ситуацији, прва ствар коју алгоритам за праћење треба да уради јесте дискриминација или раздвајање између стварних и лажних трагова. Процедура одбацивања лажних трагова користи 'мерења квалитета трага' у циљу елеимисања

трагова са ‘лошим’ квалитетом и за њих се претпоставља да су лажни, док се у исто време потврђују трагови са ‘високим’ квалитетом и називају се стварним.

Многи алгоритми за аутоматско праћење циљева, користе вероватноћу постојања циља као меру квалитета трага, изузев алгоритма Вишеструких хипотеза (*MHT-Multiple Hypothesis Tracking*) који користи "успешност" трага.

У експериментима, када мера квалитета трага расте према прагу потврђивања, траг се потврђује и када мера квалитета трага опада према прагу гашења трага, траг се укида (гаси).

Сваки алгоритам у сваком експерименту треба да има различите прагове. Прагови се одређују експериментално, тако да буде задовољен апроксимативно исти број статистике лажних потврђених трагова, за сваки филтер за праћење, понаособ. Са апроксимативно истом статистиком лажних потврђених трагова, ниво успешности потврђених стварних трагова омогућава поређење перформанси одбацивања лажних трагова.

Описана процедура одбацивања лажних трагова одабрана је првенствено због своје једноставности и лаке примене. Сложеније процедуре могу бити интересантне у неким другим ситуацијама праћења циљева. Користи се следећа дефиниција стварних и лажних трагова.

- Сваки нови иницијализовани траг је лажан у односу на све постојеће циљеве,
- Лажни траг постаје тачан у односу на некуи циљ, када је естимација стања довољно близу стварном вектору стању циља,
- Траг остаји тачан у односу на циљ, онолико дуго, колико селекује детекције тог циља,

Сматра се да је траг довољно близу циља који прати ако је задовољен услов:

$$(v_k^{\tau,t})^T (P_{2|2}^{\tau})^{-1} (v_k^{\tau,t}) < t_{track} \quad (7.1)$$

где је  $v_k^{\tau,t} = \hat{x}_{k|k}^{\tau} - x_k^t$  резидуал, односно где  $x_k^{\tau}$  означава вектор стања циља  $t$ ,  $P_{2|2}^{\tau}$ , коваријациона матрица грешке стања трага после иницијализације трага ‘методом две тачке’, са вредношћу прага 20. Овде се користи  $P_{2|2}^{\tau}$  за разлику од  $P_{k|k}^{\tau}$  за превенцију да траг са великом матрицом коваријансе грешке не прође тест тачности трага.

Сваки симулациони експеримент садржи одређени број симулационих пролаза. У сваком симулационом пролазу, циљ понавља своју трајекторију. Међутим мерења, која се састоје од детекција (или недетекција) циља, шума и одређеног броја клатер секвенци, се генеришу независно.

Сваки алгоритам користи користи исти скуп мерења. На крају сваког пролаза, стврни трагови се гасе, односно бришу.

Међутим, лажни трагови се преносе из једног симулационог пролаза у наредни, у циљу продужавања и наставка процеса праћења.

### 7.1.1. Поступак одбацивања ‘дуплих’ трагова

У симулационој студији, само један циљ постоји за један траг и он прати модел униформног кретања. Сваки симулациони експеримент има 500 пролаза и сваки симулација садржи исти број скенова. Поређење се спроводи између разних дубина Сингерове меморије а одабрани су IPDA и ITS алгоритми за STT и ITS алгоритам за МТТ експерименте.

Практична имплементација алгоритма садржи у себи многе поступке који нису експлицитни део теоретског модела, али омогућавају несметано функционисање алгоритма. Једна од 'невидљивих' функција алгоритма је и поступак одбацивања 'дуплих' трагова, односно елиминисање ситуације у којој више од једног трага прате један исти циљ.

У овим ситуацијама, нема експлицитно дефинисане процедуре, већ се бира траг са највећом вероватноћом егзистенције. Поред тога, један од захтева повезаних са елиминацијом редундансе трага је да траг буде довољно дуго изнад прага потврђивања пре него што стварно постане потврђен.

Непараметарска верзија алгоритма се користи. Циљ ове симулационе студије је да покаже како се повећањем дубине Сингеровог меморијског филтра историје мерења трага постиже повећање успешности стварних потврђених трагова, као и да одреди ону дубину меморије за коју долази до засићења овог дијаграма, и означава се са  $N_{opt}$ . Ова дубина се сматра оптималном за одређену вероватноћу детекције циља и дату густину клатера.

## **7.2. Мерење успешности задржавања и сједињавања циља**

У свим експериментима са више циљева, циљеви се крећу униформно, и укрштају се око 20-ог сцена. У овој ситуацији, пред крај сваког пролаза, обично један или два сцена пред крај ( у нашем случају то је 38 скен), може се препознати одређени број међусобно искључивих догађаја, који се класификују као позитивни или негативни ефекти праћења. Они су директна мера квалитета праћења. То су следећи догађаји:

- Сви трагови настављају да прате свој оригинални циљ,
- Само неки од трагова настављају да прате свој оригинални циљ, док су се остали трагови изгубили,
- Одређени број трагова прати неки други (погрешан) циљ, али они би се пребацили на своје оригиналне циљеве
- Неки трагови настављају да прате своје циљеве, али би прешли на друге, док су остали циљеви изгунљени,
- Сви трагови су престали да прате било који циљ, односно могу се сматрати изгубљеним

За испитивање рада предложене методе одабрани су два сета специјалних експерименти са кретањем једног и више циљева. Основни мотив оваквог избора је интенција да се покаже побољшање стандардног ITS алгоритма коришћењем предложеног Сингеровог филтра са меморијом мерења селектованих од стране сваке компоненте трага. У том смислу, пореде се дијаграми стварних потврђених трагова за разне дубине меморије компоненте трага, када се држе константним броје лажних потврђених трагова на нивоу експеримента. У овом случају, одабран је експеримент са 500 Монте Карло пролаза, при чему сценарио са једним циљем

садржи 50 скенова а сценарио са праћењем више циљева 40 скенова, што даје укупно 25 000 односно 20 000 скенова, респективно. За иницијализацију трагова, користи се стандардна "Two Point Differencing" метода.

На нивоу експеримента, прагови поврђивања трага су фиксирани на 0.99 за експеримент са једним циљем и 0.95 за експеримент са више циљева, док је ниво иницијалне вероватноће трага вариран тако да се оствари укупно 20 (+/- 10 %) потврђених лажних трагова, на нивоу експеримента за праћење једног циља односно укупно 15 (+/- 10 %) потврђених лажних трагова, на нивоу експеримента за праћење једног циља.

Резултати симулација су презентовани по сложености експеримента, и то су:

- Праћење једног циља (STT) у окружењу неуниформног клатера, слабог Поасоновог клатера густине  $\rho = 1 \times 10^{-5} [1/m^2]$  и јаког Поасоновог клатера густине  $\rho = 2 \times 10^{-4} [1/m^2]$  са ниском вероватноћом детекције од  $P_D = 0.6$
- Праћење више циљева (MTT) без додатног клатера, са вероватноћом детекције  $P_D = 0.8$ .

Посебно, експеримент праћења више циљева подељен је у три случаја:

- Пет блиских циљева, распоређених на ободу круга пречника 450 метара и размакнутих за  $10^\circ$  (без додатног клатера)
- Петнаест блиских циљева, распоређених на ободу круга пречника 450 метара и размакнутих за  $10^\circ$  (без додатног клатера)
- Педесет блиских циљева, распоређених на ободу круга пречника 450 метара и размакнутих за  $7^\circ$  (без додатног клатера)

Сви циљеви полазе са обода круга ка центру круга полупречника 450 метара. Сваки од циљева се креће равномерном брзином од 25 [m/s] ка центру круга, у који би требало да стигне у 20-ом скену, након чега настављају униформним кретањем за још 20 скенова. Случајна (random) компонента се додаје само на вектор брзине сваког циља, тако да у скену 20, варијанса растојања између сваког циља и центра круга треба да буде двострука грешка шума мерења коваријансе матрица сензора.

Почетне позиције циљева су одвојене за  $10^\circ$ . Као мера квалитета праћења циља користи се дијаграм стварних потврђених трагова (*True Confirmed Tracks Diagram*), дијаграм лажних потврђених трагова (*False Confirmed Tracks Diagram*), дијаграм средње квадратне грешке праћења (*Root Mean Square Error*) и табела статистике задржавања трага (*Retention Table*).

### **7.2.1. Статистика задржавања циља (*Retention Table*)**

Статистика задржавања циља је добијена констатацијом да су идентификовани стварни потврђени трагови (ако их има) сваког од циљева на након 14 сцена. Ови идентификација се поново проверава у скену 38, и следеће статистике су акумулиране за сваки експеримент:

- $nCases$ : укупан број случајева да потврђени траг прати циљ у 14, скену,
- $nOK$ : проценат потврђених трагова који и даље прате циљ у скену 38
- $nSwitched$ : проценат трагова који прате други циљ у скену 38.
- $nLost$ : проценат трагова који не прате ни један циљ у скену 38,
- $nMerged$ : проценат трагова који су изгубљени сједињавањем са другим траговима убројаним у  $nCases$  између сцена 14. и 38.

### 7.3. Резултати симулација праћења једног циља (STT)

Симулациони сценарио за експеримент кретања једног циља је одабран тако се циљ креће праволинијски у **2D** равни, униформно брзином од 25 [m/s], у региону са неуниформним клатером (Сл.7.2.1). Симулациона студија пореди утицаје различитих дубина Сингеровог меморијског филтра на ефикасност потврђивања тачних трагова. Трајање симулације је 50 скенова а користе се 500 Монте Карло пролаза. Коваријанса шума мерења је  $\mathbf{R} = 25\mathbf{I}_2$  [m<sup>2</sup>]. Клатер је неуниформан, при чему се у региону слабог клатера, чија је густина је  $2 \times 10^{-5}$  [1/m<sup>2</sup>], генерише у просеку 6 клатер мерења по скену, док се у региону јаког клатера, чија је густина је  $2 \times 10^{-4}$  [1/m<sup>2</sup>], генерише у просеку 102 клатер- мерења по скену. Једноставна и ефикасна контрола раста броја компонената се врши 'коначном дубином' историје компонената трага. Допринос сваког мерења се ефективно држи одвојено током последњих  $N$ -сканова, после чега се сједињавају са доприносом осталих мерења исте "старости".

У симулационој студији, испитује се однос између крајње дубине  $N$  и  $FTD$  перформанси. У сваком симулационом пролазу, циљеви полазе из истог иницијалног стања, које је  $x_0 = [100 \ 16 \ 100 \ 4]'$ . Кретање циља је моделовано у правоуглом координатном систему (*Cartesian*) као:

$$x_{k+1} = Fx_k + v_k \quad (7.2)$$

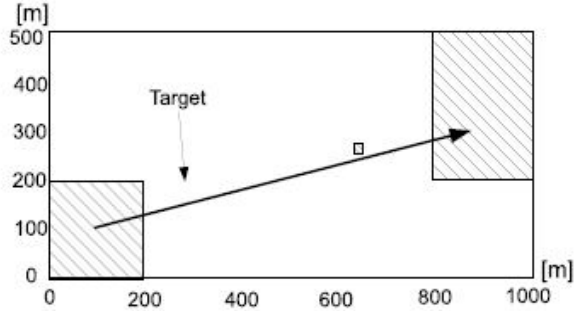
где је  $x_k$  вектор стања у тренутку  $\mathbf{k}$  и састоји се од позиције и брзине, свака са по две координате:  $x = [\xi \ \dot{\xi} \ \zeta \ \dot{\zeta}]'$ , где  $(\xi, \zeta)$  означава Картезиан координате са тзранзиционом матрицом  $F$  :

$$F = \begin{bmatrix} F_T & 0 \\ 0 & F_T \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

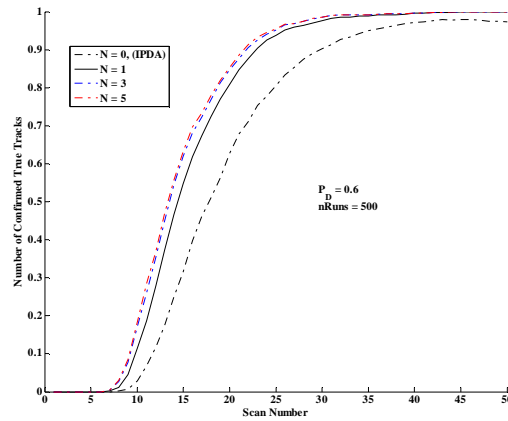
где  $T$  означава периоду одабирања од 1s. Шум процеса  $v_k$  представља бели Гаусов шум средње вредности нула и са познатом коваријансом  $E[v_k v_j'] = Q$ , где је

$$Q = q \begin{bmatrix} Q_T & 0 \\ 0 & Q_T \end{bmatrix} Q_T = \begin{bmatrix} T^4 / 4 & T^3 / 2 \\ T^3 / 2 & T^2 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

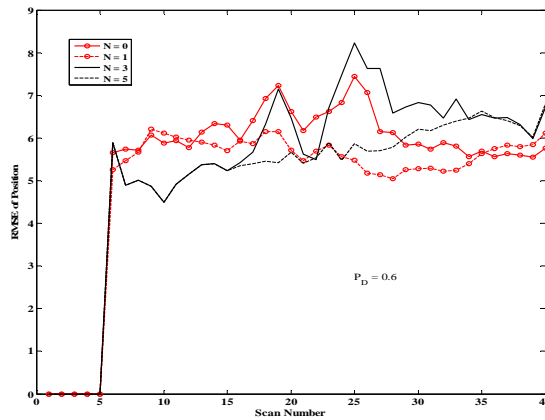
док је  $q = 0.75$ . Алгоритми користе Марковљев ланац првог реда са параметрима  $\Delta_{11} = 0.98$ ,  $\Delta_{21} = 0$ . Траг се иницијализује у сваком скену коришћењем мерења из садашњег и претходног скена.



Слика 7.2.1: Симулациони сценарио -један циљ



Слика 7.2.2: Дијаграм стварних потврђених трагова



Слика 7.2.3 Средња квадратна грешка позиције

Табела 7.2.1: Статистика задржавања циља-један циљ са неуниформним клатером

<i>N</i>		<i>nCases</i>	<i>nOK</i> [%]	<i>nSwitched</i> [%]	<i>nLost</i> [%]	<i>merged</i>	<i>CPU</i>
0	<i>IPDA</i>	229	95.63	0	4.36	0	7.12
1	<i>ITS</i>	256	98.04	0	1.96	0	4.22
2	<i>ITS</i>	276	96.73	0	3.27	0	4.38
3	<i>ITS</i>	285	97.54	0	2.46	0	4.46

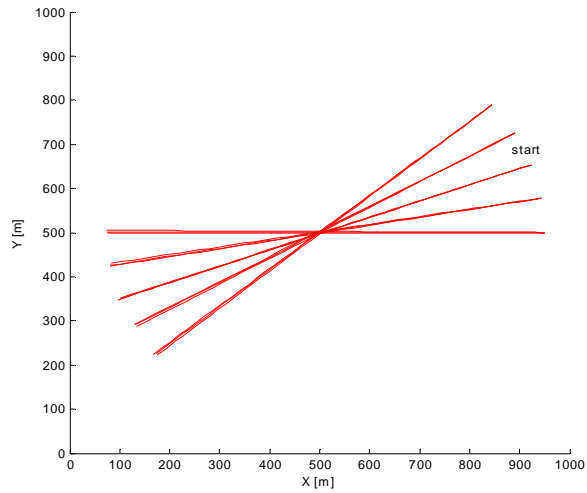
## 7.4. Резултати симулација за праћење више циљева (МТТ)

За симулациону студију је одабрана симулација кретања у дводимензионалном простору димензија 1000 m дужине и 1000 ширине [29]. У овом сценарију нема посебног клатера, већ близина суседних циљева и неодређеност дефинисана случајним Гаусовим шумом, додатом на брзину, пре првог сцена, чини сценарио веома сложеним, нарочито при великом броју циљева који се крећу ка центру. У близини центра, у који циљеви долазе скоро истовремено, густина "клатера" је веома велика. У сваком симулационом пролазу, циљеви полазе из истог иницијалног стања. Кретање циља је моделовано у правоуглом координатном систему (Cartesian) као и састоји се од позиције и брзине, свака са по две координате са транзиционом матрицом  $F$  датом помоћу израза (7.3). Шум процеса  $v_k$  представља бели Гаусов шум средње вредности нула и са познатом коваријансом  $E[v_k v_j'] = Q$ , док је  $q = 0.75$ . Алгоритми користе Марковљев ланац првог реда са параметрима  $\Delta_{11} = 0.98$ ,  $\Delta_{21} = 0$ . Траг се иницијализује у сваком сцену коришћењем мерења из садашњег и претходног сцена.

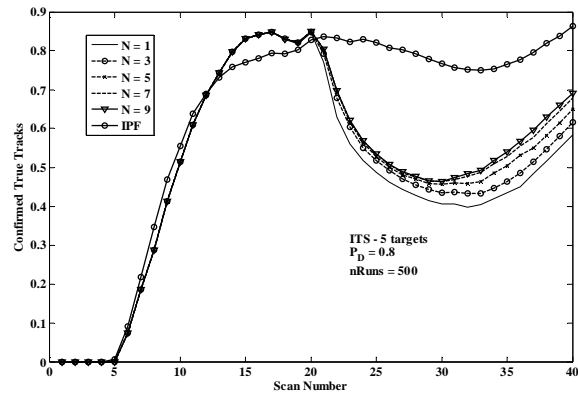
### 7.4.1. Резултати експеримента за симулациони сценарио кретања пет циљева

Пет блиских циљева се креће праволинијски без убрзања у простору [1000m 1000m], брзином од 25 [m/s]. Укупно трајање једног пролаза експеримента је 40 скенова а експеримент се понавља у 500 Монте Карло пролаза коришћењем случајних генератора са Гаусовим белим шумом. Сваки циљ се креће равномерном брзином ка центру круга, у који би требало да стигне у 20-ом сцену, након чега настављају униформним кретањем за још 20 скенова. Случајна (random) компонента се додаје на вектор брзине сваког циља, тако да у сцену 20, варијанса растојања између сваког циља и центра круга треба да буде двострука грешка шума мерења коваријансе матрица сензора. Почетне позиције циљева су одвојене за  $10^\circ$ .

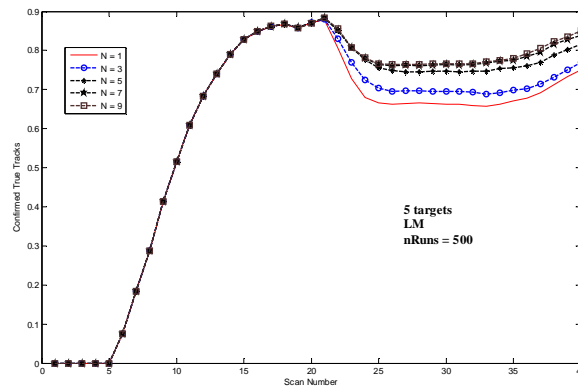




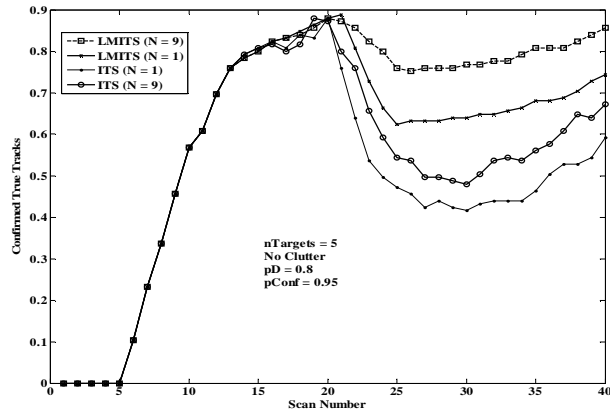
Слика 7.3.1.1: Симулациони сценарио кретања пет циљева



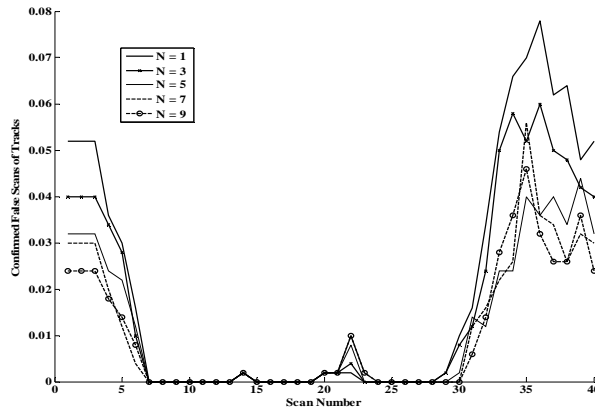
Слика 7.3.1.2: Дијаграм стварних потврђених трагова ITS



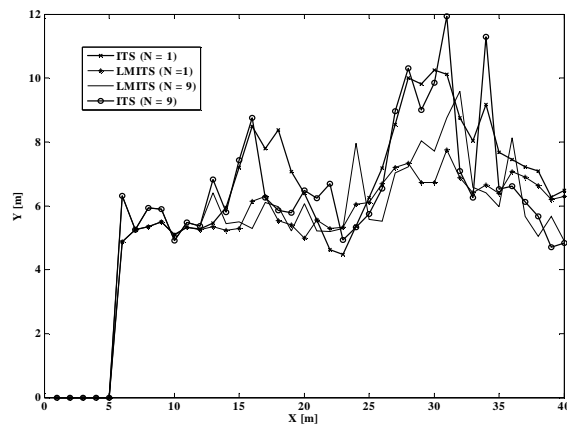
Слика 7.3.1.3: Дијаграм стварних потврђених трагова LMITS



Слика 7.3.1.4. Дијаграм стварних потврђених трагова (ITS-LMITS)



Слика 7.3.1.5 Дијаграм лажних потврђених трагова (ITS)



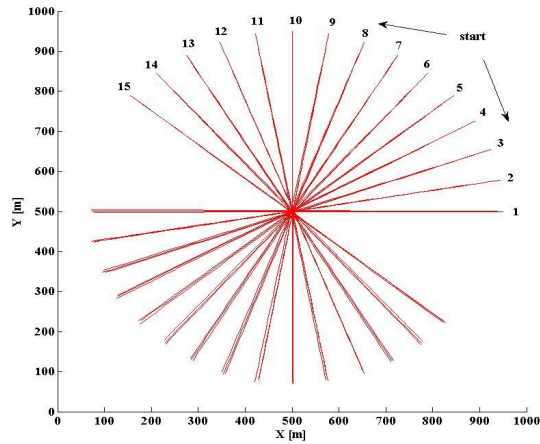
Слика 7.3.1.6. Средња квадратна грешка праћење

Табела 7.3.1: Статистика задржавања циља-пет циљева

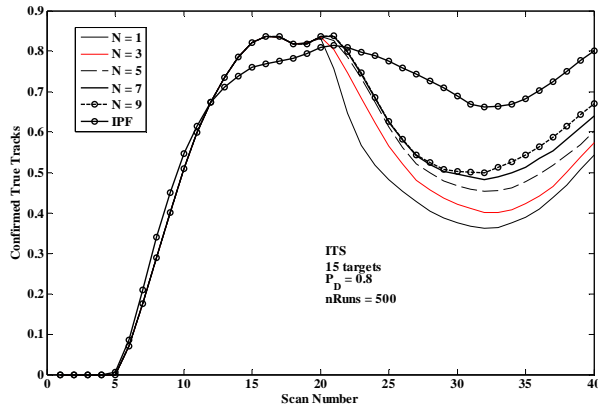
<i>N</i>		<i>nCases</i>	<i>nOK[%]</i>	<i>nSwitched[%]</i>	<i>nLost[%]</i>	<i>merged</i>	<i>CPU</i>
-	<b>IPF</b>	1897	72.58	6.64	20.78	75	46.27
1	<i>ITS</i>	1991	18.58	17.98	63.44	981	0.50
	<i>LMITS</i>	1976	48.78	21.10	30.12	469	0,87
3	<i>ITS</i>	1990	18.54	17.78	63.68	990	0.58
	<i>LMITS</i>	1976	52.98	21.10	25.92	439	1.03
5	<i>ITS</i>	1991	20.64	18.23	61.13	956	0.79
	<i>LMITS</i>	1976	58.90	20.64	20.46	346	1.21
7	<i>ITS</i>	1992	23.59	18.47	57.94	910	1.21
	<i>LMITS</i>	1976	<b>59.66</b>	<b>21.91</b>	<b>18.43</b>	<b>317</b>	<b>1.38</b>
9	<i>ITS</i>	1992	<b>24.39</b>	<b>18.37</b>	<b>57.24</b>	<b>899</b>	<b>1.28</b>
	<i>LMITS</i>	1976	59.66	21.91	18.43	315	1.35
11	<i>ITS</i>	1992	25.30	18.92	55.78	889	1.34
	<i>LMITS</i>	1976	60.52	21.30	18.18	313	1.57

#### 7.4.2. Резултати експеримента за симулациони сценарио са петнаест циљева

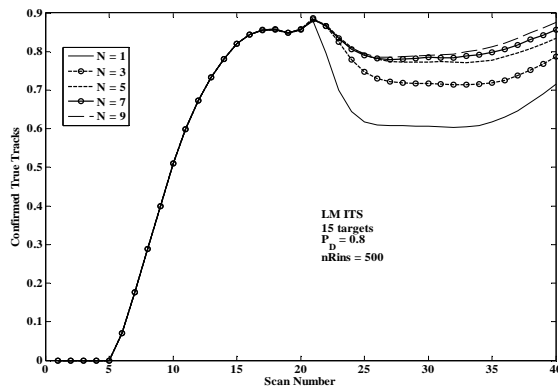
Петнаест (15) блиских циљева се креће праволинијски без убрзања у простору [1000m 1000m], брзином од 25 [m/s]. Укупно трајање једног пролаза експеримента је 40 скенова а експеримент се понавља у 500 Монте Карло пролаза коришћењем случајних генератора са Гаусовим белим шумом. Сваки циљ се креће равномерном брзином ка центру круга, у који би требало да стигне у 20-ом скену, након чега настављају униформним кретањем за још 20 скенова. Случајна (random) компонента се додаје на вектор брзине сваког циља, тако да у скену 20, варијанса растојања између сваког циља и центра круга треба да буде двострука грешка шума мерења коваријансе матрица сензора. Почетне позиције циљева су одвојене за 10°.



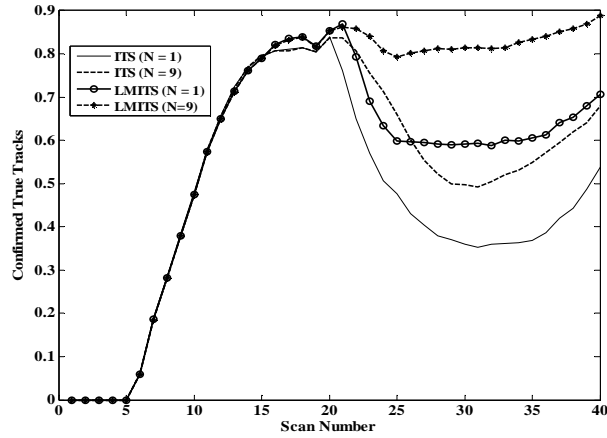
Слика 7.3.2.1: Симулациони сценарио кретања- петнаест циљева



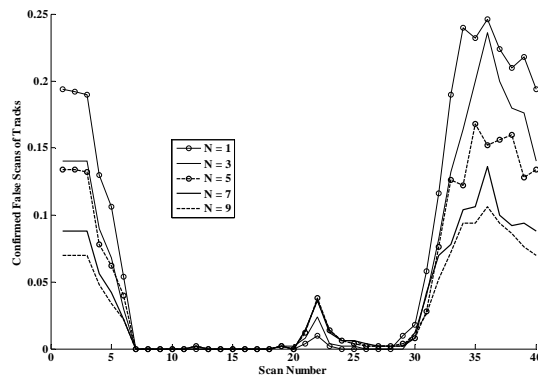
Слика 7.3.2.2. Дијаграм стварних потврђених трагова ITS- параметар дубина Сингер меморије



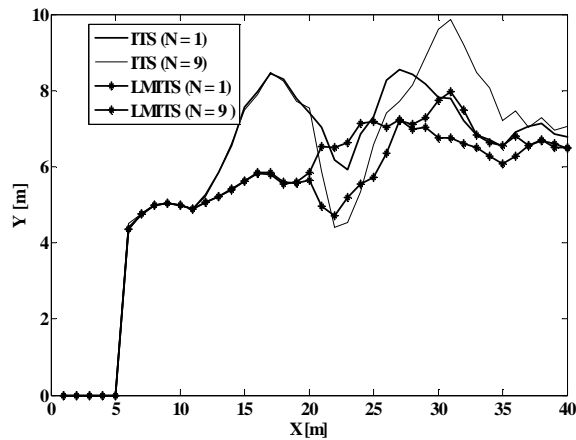
Слика 7.3.2.3. Параметарски дијаграм стварних потврђених трагова( LM ITS)



Слика 7.3.2.4. Упоредни параметарски дијаграм стварних потврђених трагова (ITS-LMITS)



Слика 7.3.2.5. Параметарски дијаграм лажних потврђених трагова LM ITS



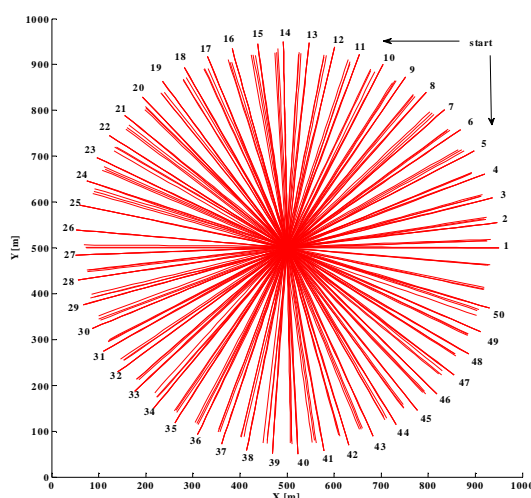
Слика 7.3.2.6. Упореди дијаграм средње квадратне грешке позиције ITS-LMITS параметар- дубина Сингерове меморије

Табела 7.3.2. Статистика задржавања циља- петнаест циљева

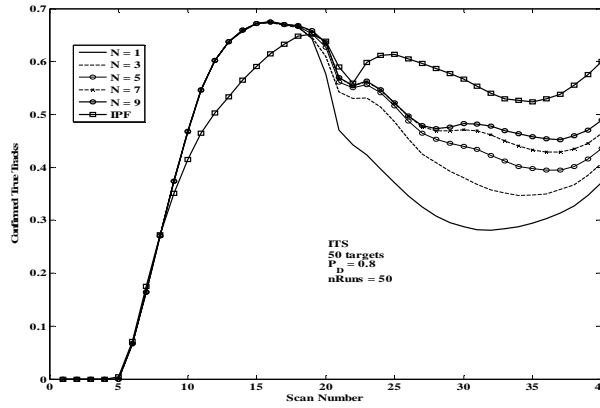
<i>N</i>		<i>nCases</i>	<i>nOK</i> [%]	<i>nSwitched</i> [%]	<i>nLost</i> [%]	<i>merged</i>	<i>CPU</i>
-	<b>IPF</b>	5542	3131	871	1640	520	128.2
1	<b>ITS</b>	5884	15.07	16.41	68.52	3153	1.82
	<b>LMITS</b>	5850	40.10	23.53	36.37	1768	2.13
3	<b>ITS</b>	5886	18.58	17.56	43.86	2939	3.52
	<b>LMITS</b>	5854	48.10	27.05	24.85	1181	4.12
5	<b>ITS</b>	5886	22.56	18.41	58.03	2478	4.41
	<b>LMITS</b>	5851	40.97	30.08	28.95	887	4.99
7	<b>ITS</b>	5886	25.11	18.79	56.1	2622	4.89
	<b>LMITS</b>	5851	50.81	31.87	17.32	819	5.48
9	<b>ITS</b>	5886	26.13	20.09	53.88	2551	5.17
	<b>LMITS</b>	5851	51.37	32.09	16.54	781	5.81

#### 7.4.3. Резултати експеримента за симулациони сценарио педесет циљева

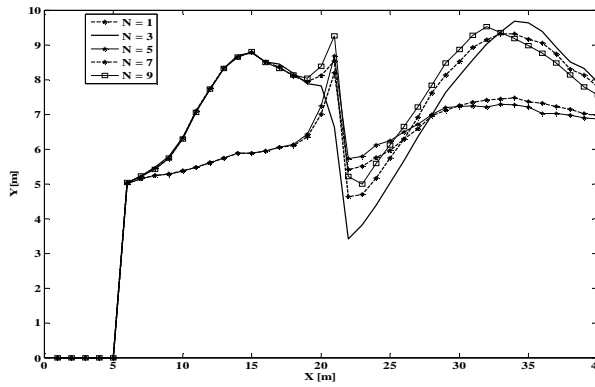
Педесет блиских циљева се креће праволинијски без убрзања у простору [1000m 1000m], брзином од 25 [m/s]. Укупно трајање једног пролаза експеримента је 40 скенова а експеримент се понавља у 500 Монте Карло пролаза коришћењем случајних генератора са Гаусовим белим шумом. Сваки циљ се креће равномерном брзином ка центру круга, у који би требало да стигне у 20-ом скену, након чега циљеви настављају униформним кретањем за још 20 скенова. Случајна (radom) компонента се додаје на вектор брзине сваког циља, тако да у скену 20, варијанса растојања између сваког циља и центра круга треба да буде двострука коваријанса грешка шума мерења сензора. Почетне позиције циљева су одвојене за 7°.



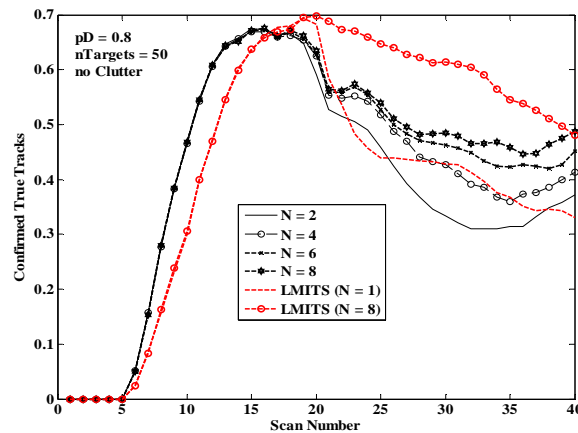
Слика 7.3.3.1. Симулациони сценарио кретања 50 циљева



Слика 7.3.3.2. Дијаграм стварних потврђених трагова (ITS –IPF)



Слика 7.3.3.3. Дијаграм средње квадратне грешке позиције



Слика 7.3.3.4. Упоредни дијаграм стварних потврђених трагова ITS-LMITS- параметар дубина Сингер меморије

Табела 7.3.3. Статистика задржавања циља -педесет циљева

<i>N</i>		<i>nCases</i>	<i>nOK</i> [%]	<i>nSwitched</i> [%]	<i>nLost</i> [%]	<i>merged</i>	<i>CPU</i>
-	<b>IPF</b>	14123	23.25	35.51	41.24	1633	402.58
1	ITS	16429	8.60	18.07	73.33	9268	9.02
	LMITS	17007	21.28	29.74	48.98	6949	11.01
3	ITS	16445	11.47	21.23	67.30	8355	17.24
	LMITS	17026	24.71	45.86	29.43	4032	21.80
5	ITS	16484	13.40	22.87	63.73	7791	20.82
	LMITS	17028	26.18	50.48	23.34	3188	25.73
7	ITS	16491	14.96	24.77	60.27	7334	22.64
	LMITS	17036	26.51	52.13	21.36	2914	27.77
9	ITS	16488	15.58	26.00	58.42	7152	23.56
	LMITS	17026	26.46	53.25	20.29	2749	28.96

## 7.5. Експериментални резултати оптималне дубине Сингерове меморије

Резултати симулација, дати преко упоредних дијаграма IPDA-ITS (један циљ) и ITS-LMITS (пет, петнаест и педесет циљева) стварних потврђених трагова и статистике задржавања циљева презентовани су у поглављима 7.2 и 7.3. За дато симулационо окружење, показано је да успешност дијаграма стварних потврђених трагова зависи од крајње дубине историје *N*. Алтернативно, крајња дубина историје Сингеровог филтра *N*, показује задовољавајуће праћење у датом окружењу, и за дате параметре сензора и параметре трајекторије циља. Ови резултати су постигнути уз веома рационалну потрошњу рачунарских ресурса. Крајњи резултати експеримената се могу изразити оптималном дужином Сингеровог меморијског филтра за предложени алгоритам, за сваку вероватноћу детекције као што је приказано у Табели 7.4.

Табела 7.4. Оптимална дубина Сингеровог меморијског филтра

Број циљева		$P_D$	Релативно повећање CPU	$N_{opt}$
1	ITS	0.6	1.05	3
5	ITS	0.8	2.56	9
	LMITS		1.58	7
15	ITS	0.8	2.84	9
	LMITS		2.57	7
50	ITS	0.8	2.61	7
	LMITS		2.52	5



Табела оптималне дубине Сингеровог меморијског филтра (Табела 7.4.) показује да се применом побољшаних метода за праћење више циљева постиже боља статистика трагова, али је оптимална дубина меморијског филтра остала иста. С друге стране, с повећањем броја циљева расте оптимална дубина меморијског филтра али до границе засићења (око 40 циљева) у зависности од вероватноће детекције циља, после које се не може већом дужином меморије постићи боља потврђеност трагова. Ова појава се може објаснити У исто време, рачунарска сложеност незнатно расте у границама толеранције.

## 8. ЗАКЉУЧАК И ДАЉА ИСТРАЖИВАЊА

У тези је предложен нов теоретски модел естиматора стања за праћење који се састоји од стандардног ITS алгоритма проширен Сингеровим меморијским филтром у домену дубине асоцијације података односно историје компонената трага.

Током интензивних експеримената праћења једног и више циљева, добијени резултати симулација, исказани кроз дијаграм стварних потврђених трагова, дијаграм средње квадратне грешке позиције и табела задржавања трага су показали пораст нивоа стварних потврђених трагова, са повећањем дубине Сингеровог меморијског филтра.

Посебно, експериментално је добијена одговарајућа дубина  $N_{max}$  меморије филтра, после које нема даљег повећања нивоа потврђености трага, за одговарајућу дату вероватноћу детекције циља. Другим речима, дијаграм улази у засићење, а ова вредност дубине меморије даје упутства кориснику за практичну примену ITS алгоритма. На тај начин, потврђена је оправданост примене Сингеровог меморијског филтра.

Допринос тезе може се сагледати кроз теоријски и практични аспект. У теоријском смислу, налажење математичих основа везе познатих *ITS* – као естиматора стања и познатог Сингеровог ‘N-scan-memory’ филтра примењеног у домену асоцијације података, допринео је проширењу теоријских могућности у системима за праћење покретних циљева, кроз спрега два ефикасна модела. У практичном делу тезе, упоређена је разлика *FTD* дијаграма узимањем различите дубине историје мерења за компоненте трага., на принципу ‘N-scan-memory’ филтра.

Током тестирања перформанси предложеног алгоритма за праћење, коришћене су интензивне Монте-Карло симулације, уз помоћ случајног Поасоновог (*Poisson*) генератора са 250 пролаза. Намењен је генерисању симулационог сценарија праволинијског кретања циља у 40 скенова. Симулације су показале оправданост примене веће дубине историје у циљу подизања нивоа стварних потврђених трагова. Такође, експериментално је одређена довољна дубина историје мерења од којих потиче компонента трага, при којој долази до засићења *FTD* дијаграма.

На тај начин, предложена докторска дисертација доприноси проширењу могућности практичне примене алгоритама асоцијације података, специјално у области даљинског осматрања. Границе практичне примене технике *ITS* (у смислу вероватноће детекције и густине мерења клатера) су испитане.

Подоптимална *ITS* метода је теоријски испитана, што се резултује кроз упутства за практичну примену. То ће умногоме олакшати практичну примену смањујући број параметара који се морају одредити методологијом случајних

узорака. Поред тога, теоријска веза и поређење техника класичног *ITS* алгоритма и алгоритма са Сингеровим сједињавањем компонената биће значајан допринос теорији асоцијације података у праћењу циљева.

У наредним корацима истраживања, потребно је испитати предложени меморијски филтар на граничним ниским вероватноћама детекције ( $P_D = 0.4$ ). У овом случају треба изменити одређени број параметара, првенствено методу иницијализације, односно уместо предложене иницијализације помоћу два сукцесивна мерења, користи се иницијализација трага за сваку пристиглу опсервацију.

Ова врста експеримената знатно је захтевнија у погледу рачунарских ресурса. Међутим, стална појава нових брзих процесора доприноси значајном смањењу процесорског времена потребног за савладавање повећање сложености алгоритма.

## 9. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kalman R.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transaction on ASME - Journal of Basic Engineering, Series 82D, pp. 35-45, Mar. 1960.
- [2] Singer R.: Estimate Optimal Tracking Filter Performance for Manned Maneuvering Targets, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, Vol. 6, No.4, 1970, July, 473-483.
- [3] S. Blackman, Multiple-target tracking with radar applications, Artech House, 1986.
- [4] Blackman, S., and Popoli, R. Design and Analysis of Modern Tracking Systems. Boston: Artech House, 1999.
- [5] D. B. Reid, An Algorithm for Tracking Multiple Targets', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol AC-24, pp. 843-854, December 1979.
- [6] R. Singer, R. Sea and K. Housewright: Derivation and evaluation of improved tracking filter for use in dense multitarget environments", IEEE Transactions on Information Theory. Vol. 20, no. 4, pp. 423-432. July 1974.
- [7] Salmond, D. J. Mixture reduction algorithms for target tracking in clutter. In SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets, vol. 1305, Orlando, FL, Apr. 1990, 434—445.
- [8] Kurien, T., Multitarget Multisensor Tracking, vol. 1. Boston: Artech House, 1990, 43—83.
- [9] D. Musicki, R. Evans and S. Stankovic, Integrated probabilistic data association , IEEE Transactions on Automatic Control Systems, Vol 37, No. 3, pp.1237--1241, June 1994.
- [10] S. J Julier, J. K. Uhlmann and H.F. Durrant-Whyte, A New Method for Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators", IEEE Trans. Automatic Control, Volume 45, Number 3, pp. 477--482, Mar 2000.
- [11] B. Ristic, S. Arulampalam, N.J. Gordon, Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications, Artech House, 2004.
- [12] D. Mušicki, Bearings only single-sensor target tracking using Gaussian mixtures, Automatica, Volume 45, Number 9, pp. 2088-2092, September, 2009.
- [13] Y. Bar Shalom and T.E. Fortman, Tracking and Data Association, Academic Press, San Diego, 1988.

- [14] S. Challa, R. Evans, M. Morelande and D. Mušicki: Fundamentals of Object Tracking, Cambridge University Press 2011.
- [15] Bar-Shalom, Y., and Tse, E. Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. *Automatica*, 11 (Sept. 1975), 451—460.
- [16] Bar-Shalom, Y., Chang, K., and Blom, H. *Multitarget Multisensor Tracking*, vol. 1. Boston: Artech House, 1990, 25—42.
- [17] Houles, A., and Bar-Shalom, Y. Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 25, 2 (Mar. 1989), 176—189.
- [18] D. Musicki, and R. Evans, Integrated probabilistic data association - finite resolution, *Automatica*, Vol. 31, pp 559-570, April 1995.
- [19] Mušicki, D., and Evans, R. Clutter map information for data association and track initialization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 40, 2 (Apr. 2004), 387—398.
- [20] Mušicki, D., and Morelande, M., Gate volume estimation for target tracking. In 7th International Conference on Information Fusion, Fusion 2004, Stockholm, Sweden, June 28—July 1, 2004.
- [21] U. Orguner and F. Gustafsson, Target Tracking With Particle Filters Under Signal Propagation Delays, 2011, *IEEE Transactions On Signal Processing*, (59), 6, 2485-2495
- [22] Mušicki, D., Track score and target existence. In 9th International Conference on Information Fusion, Fusion 2006, Florence, Italy, July 2006.
- [23] Mušicki, D., La Scala, B., and Evans, R., The integrated track splitting filter—Efficient multi-scan single target tracking in clutter., *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 43, 4 (Oct. 2007), 1409—1425.
- [24] Smith, P., and Buechler, G., A branching algorithm for discriminating and tracking multiple objects. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2, AC-20 (Feb. 1975), 101—104.
- [25] Colegrove, S. B., and Ayliffe, J., An extension of probabilistic data association to include track initiation and termination. In *Proceedings of the 20th IREE International Convention*, Melbourne, Australia, 1985, 853—856.
- [26] Davey, S. J., Gray, D. A., and Colegrove, S. B., A Markov model for initiating tracks with probabilistic multi-hypothesis tracker. In 5th International Conference on Information Fusion, Fusion 2002, Annapolis, MD, July 2002, 735—742.
- [27] Houles, A., and Bar-Shalom, Y., Multisensor tracking of a maneuvering target in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 25, 2 (Mar. 1989), 176—189.
- [28] Ristic, B., and Aralumpalam, S., Multitarget mixture reduction algorithms with incorporated target recursions. In *SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets*, vol. 4048, Orlando, FL, Apr. 2000, 366—377.

- [29] Mušicki, D., Evans, R., and La Scala, B., Integrated track splitting suite of target tracking filters. In 6th International Conference on Information Fusion, Fusion 2003, Cairns, Queensland, Australia, July 2003.
- [30] Mušicki, D., and La Scala, B., Multi-target tracking in clutter without measurement assignment. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 44, 3 (July 2008), 877—896.
- [31] Mušicki, D., Mallick, M., La Scala, B., Strange, S., and Evans, R., LMITS as an efficient MHT. In SPIE: Signal and Data Processing of Small Targets, vol. 5913, San Diego, CA, Aug. 1—4, 2005, OV1—OV12.
- [32] Lerro, D., and Bar-Shalom, Y., Automated tracking with target amplitude information. In 1990 American Control Conference, San Diego, CA, 1990.
- [33] Lerro, D., and Bar-Shalom, Y., Interacting multiple model tracking with amplitude feature. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 29, 2 (1993), 494—509.
- [34] Ross, S., Stochastic Processes. New York: Wiley, 1983.
- [35] Li, N., and Li, X-R., Tracker perceivability and its applications. IEEE Transactions on Signal Processing, 49, 11 (Nov. 2001), 2588—2604.
- [36] Bar-Shalom, Y., and Li, X-R., Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software. Boston: Artech House, 1993.
- [37] Mušicki, D., and Evans, R., Joint integrated probabilistic data association—JIPDA. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 40, 3 (July 2004), 1093—1099.
- [38] Blom, H., and Bar-Shalom, Y., The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients., IEEE Transactions on Automatic Control, 33, 8 (Aug. 1988), 780—783.
- [39] Fortmann, T., Bar-Shalom, Y., and Scheffe, M., Sonar tracking of multiple targets using joint probabilistic data association. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 8, 3 (July 1983), 173—183.
- [40] Mušicki, D., Limits of linear multitarget tracking. In 8th International Conference on Information Fusion, Fusion 2005, Philadelphia, PA, July 2005.
- [41] Mušicki, D., and Suvorova, S., Tracking in clutter using IMM-IPDA based algorithms. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 44, 1 (Jan. 2007), 111—127.
- [42] T. L. Song, D. Mucki and D.S.Kim, Target Tracking with Target State Dependent Detection, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 59, no. 3, pp. 1063-1074, March 2011.
- [43] Z. Radosavljević, D. Mušicki, B. Kovačcević, W. C. Kim, and T. L. Song, Integrated particle filter for target tracking, in 13th International Conference on Electronics, Information and Communication, ICEIC 2014, Kota Kinabalu, Malaysia, January 15-18 2014.

- [44] Taek Lyul Song, Darko Mušicki, Da Sol Kim and Zvonko Radosavljević, Gaussian mixtures in multi-target tracking: a look at Gaussian mixture probability hypothesis density and integrated track splitting, IET proceedings on Radar Sonar and Navigation, Vol 6, no 5, pp. 359-364, June 2012.
- [45] Z. Radosavljević, D. Mušicki, Limits of target tracking in heavy clutter, ASIA-Pacific International Conference of Synthetic Aperture Radar APSAR 2011, Seoul, Republic of Korea., 2011.

## ПРИЛОГ 1: КРИТЕРИЈУМ ОДАБИРА ОПТИМАЛНЕ ДУБИНЕ СИНГЕР МЕМОРИЈЕ

У овом прилогу, биће укратко представљена теоретска основа одабира оптималне дубине Сингерове меморије, која је добијена емпиријски у тези. Она је суштински заснована на сатурацију Калман филтра, која треба да се догоди после  $N$  скенова итеративног меморијског поступка третмана историје сваке компоненте трага.

Динамички модел за линеарни дискретни стохастички систем дат је помоћу следећег израза:

$$x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k + v_k \quad (\text{П.1.1})$$

где се подразумева да су улазне матрице  $F_k$  и  $G_k$  познате, шум процеса  $v_k$  је случајна секвенца белог Гаусовог шума нулте средње вредности са коваријационом матрицом  $Q_k$ . Једначина мерења у дискретном временском одбирку дата је помоћу израза.

$$z_k = H_k x_k + w_k \quad (\text{П.2.1})$$

где је  $H_k$  матрица мерења и  $w_k$  је шум мерења – случајна секвенца са моментом

$$\begin{aligned} E[w_k] &= 0 \\ E[w_k w_j'] &= R_k \delta_{kj} \end{aligned} \quad (\text{П.3.1})$$

где је  $\delta_{kj}$  Диракова делта функција. С обзиром да су шум мерења и шум процес међусобно некорелисани, тада важи  $E[v_k w_j'] = 0, \forall k, j$ . Из претходних једначина, у временском тренутку  $k$  субституцијом  $x_{k-1}$  добијамо:

$$\begin{aligned} x_k &= F_{k-1} x_{k-1} + G_{k-1} u_{k-1} + v_{k-1} = \\ &= F_{k-1} [F_{k-2} x_{k-2} + G_{k-2} u_{k-2} + v_{k-2}] + G_{k-1} u_{k-1} + v_{k-1} = \\ &= F_{k-1} F_{k-2} x_{k-2} + F_{k-1} [G_{k-2} u_{k-2} + v_{k-2}] + \\ &+ G_{k-1} u_{k-1} + v_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{П.4.1})$$

Понављањем горње итерације, добијамо:

$$x_k = \left[ \prod_{j=0}^{k-1} F_{k-1-j} \right] x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left[ \prod_{j=0}^{k-i-2} F_{k-1-j} \right] G_i u_i + v_i \quad (\text{П.5.1})$$

Претходни производ матрица симболички се још може написати као:

$$\prod_{j=j_1}^{j_2} F_j = F_{j_1} F_{j_1+1} \cdots F_{j_2} \quad (\text{П.6.1})$$



На сличан начин, полазећи од израза за коваријациону матрицу грешке Алфа-Бета филтра, може се добити израз

$$P = \begin{bmatrix} \alpha\sigma_w^2 & \frac{\beta}{T}\sigma_w^2 \\ \frac{\beta}{T}\sigma_w^2 & \frac{\beta}{T^2}\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}\sigma_w^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha R & \frac{\beta}{T}R \\ \frac{\beta}{T}R & \frac{\beta}{T^2}\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}R \end{bmatrix} = \frac{R^2}{T^2} \left[ \frac{\alpha\beta(\alpha-\frac{\beta}{2})}{1-\alpha} - \beta^2 \right] \quad (\text{П.7.1})$$

Познато је да се коефицијент маневра може добити као:

$$\lambda = T^2 \frac{Q}{R} \quad (\text{П.8.1})$$

Полазећи од коваријансе грешке Калман филтра  $P_{k|k} = (I - KH)P_{k|k-1}$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + Kz - KH\hat{x}_{k|k-1} \\ &= (I - K_k H)\hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \\ &= (I - K_k H)F_k \hat{x}_{k-1|k-1} + K_k z_k \\ &= (I - K_k H)F_k [(I - K_{k-1} H)\hat{x}_{k-1|k-2} + \\ &\quad + K_{k-1} z_{k-1}] + K_k z_k = \\ &= (I - K_k H)F_k [(I - K_{k-1} H)F_k \hat{x}_{k-2|k-2} + \\ &\quad + K_{k-1} z_{k-1}] + K_k z_k \\ &= (I - K_k H)F_k [(I - K_{k-1} H)\{\hat{x}_{k-2|k-3} + \\ &\quad + K_{k-2} z_{k-2} - KH\hat{x}_{k-2|k-3}\} + K_{k-1} z_{k-1}] + K_k z_k = \\ &= \sum_{N=0}^M \left\{ \prod_{l=0}^N [(I - K_l H)F_l] K_{k-N} z_{k-N} \right\} \end{aligned} \quad (\text{П.9.1})$$

У идеалном случају, када у сваком скену постоји детекција циља, може се уочити да утицај мерења опада (са сваким семплом) са фактором  $(I - KH)$ .

Другим речима, важи да је поменути фактор коефицијент који се множи свако мерење, односно  $(I - KH) \cdot z_k$ .

Међутим, ствар се компликује у томе што не постоје детекције циља у сваком скену и што  $\mathbf{K}$  није константно. У том случају потребно је пронаћи адекватну апроксимацију којом се може описати поменути утицај мерења. С обзиром да испитујемо утицај дубине историје, односно броја семплова и вероватноће детекције на мерења, као прву апроксимацију можемо узети број семплова, у ствари производ број самплинг периода  $N$  и вероватноће детекције  $P_D$  односно  $(N * P_D)$ .

С друге стране, Калманово појачање  $\mathbf{K}$  се може узети у обзир из *steady-state* величине матрица.

То важи за тачну компоненту; то јест за компоненту која има само тачна мерења (или тачне недетекције). Што се тиче те компоненте, довољна дубина Сингера би била она где мерења  $N$  скана уназад много губе на утицају, односно  $(I - KH)^N \cdot P_D$  треба да падне на 5%. Ако занемаримо “слабе”, компоненте, односно компоненте које имају малу релативну вероватноћу, можемо да утицај клатера анализирамо на компонентама које имају само клатер мерења, види се да у моменту  $k$ ,

- мерење  $z_{k-1}$  има тежински фактор  $(I - KH)$ ,
- мерење  $z_{k-2}$  има тезински фактор  $(I - KH)^2$ , и тд:
- мерење  $z_{k-N}$  има тезински фактор  $(I - KH)^N$

Претпоставимо да је вектор стања једно-димензионални и да је Калман филтер ушао у *steady-state* стање. Тада је Калманово појачање  $K$  константа, и  $(I - KH) < 1$ .

Даље ако претпоставомо да је транзициона матрица константа ( $F = 1$ ), у сваком циклусу утицај прошлих мерења опада за тај фактор. На неки начин, систем се понаша као *low lass filter*, или као филтер пропусник ниских учестаности. Кренимо од једначине:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + K(z_k - Hx_{k-1}) = \\ &= x_{k-1} + Kz_k - KHx_{k-1} = \\ &= (I - KH)x_{k-1} + Kz_k \end{aligned} \quad (\text{П.10.1})$$

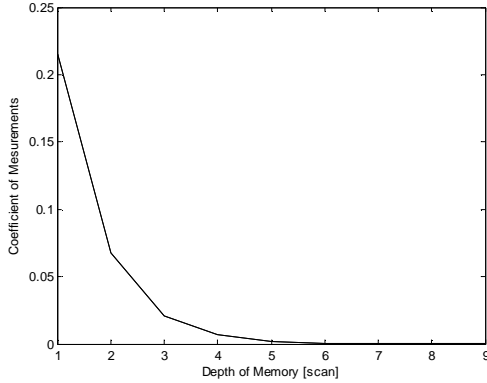
Ако увдемо смену  $a = (I - KH)$  у тренутку  $k$ , имамо:

$$\begin{aligned} x_k &= ax_{k-1} + (1 - a)z_k = \\ &= a(ax_{k-2} + (1 - a)z_{k-1}) + (1 - a)z_k = \\ &= a^2x_{k-2} + a(1 - a)z_{k-1} + (1 - a)z_k = \\ &= a^2(ax_{k-3} + (1 - a)z_{k-2} + az_{k-1}) + (1 - a)z_k = \\ &= a^3x_{k-3} + a^2(1 - a)z_{k-2} + a(1 - a)z_{k-1} + (1 - a)z_k \\ &\vdots \\ &= a^{N+1}x_{k-N+1} + a^N(1 - a)z_{k-N} + \dots + a(1 - a)z_{k-1} + (1 - a)z_k \end{aligned} \quad (\text{П.11.1})$$

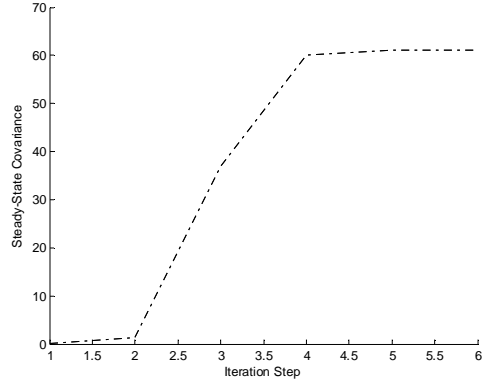
То значи да:  $z_k$  улази са појачањем  $(1 - a)$ ,

- $z_{k-1}$  са појачањем  $a \cdot (1 - a)$ , ...
- $z_{k-N}$  са појачањем  $a^N(1 - a)$ .

Другим речима, треба одредити довољну Сингер дубину за оне компоненте трага које имају у сваком моменту клатер мерење. Даље, пронађимо коваријансу при уласку филтра у 'засићење' (*steady-state*) (Слика П1.а) и њену од дубине Сингер историје (Слика П1.б).



а)



б)

**Слика П1.а: Зависност коефицијента  $a=(I - KH)$  уз мерења у задњих  $n$  сканова  $I$ , б) коваријанса Калман филтер када конвергира ка *steady-state* стању.**

Из претходног може се закључити да би довољна Сингер дубина она која чини да тежина те тотално лажне компоненте буде 5% тежине тачне компоненте. То је уједно предложена вредност за симулације. Поред тога коефицијент  $I - KH$  може се развити у следећи израз:

$$\begin{aligned}
 I - KH &= I - PH^T S^{-1} H = \\
 &= I - PH^T (HPH^T + R)^{-1} H = \\
 &= RH(HPH^T + R)^{-1} \approx \frac{\tau^2}{\tau^2 + \tau_{x_p}^2}
 \end{aligned}
 \tag{П.12.1}$$

## ПРИЛОГ 2: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ

### П2.1 Статистичка дефиниција вероватноће

Статистички приступ дефиницији вероватноће заснован је на великом броју експеримената. Претпоставимо да се при довољно великом броју од  $n$  опита догађај  $A$  реализовао  $m$  пута. У случају да је комплекс услова непромењен при овим експериментима, искуство је показало да се фреквенција догађаја  $A$  групише око количника  $m/n$  који се према класичној дефиницији вероватноће узима за вероватноћу реализације тог догађаја. При стабилним условима при извођењу експеримената одступање од количника је утолико мање, уколико је број опита  $n$  већи. На основу овог долази се до статистичке дефиниције вероватноће:

*Ако је  $m_n$  број појављивања догађаја  $A$  у серији од  $n$  експеримената изведених под истим условима, тада је*

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n}{n} \quad (\text{П.1.2})$$

### П2.2 Условне вероватноће и независност догађаја

Нека је  $(\Omega, \Phi, P)$  простор вероватноће и нека је  $A \in \Phi$  догађај чија реализација не зависи од наступања било ког другог догађаја из  $\Phi$ : У том случају вероватноћа овог догађаја зове се безусловна вероватноћа. Ако је реализација догађаја  $A$  условљена наступањем још неког другог догађаја  $B (P(B) \neq 0)$  тада се вероватноћа догађаја  $A$  под условом да се десио догађај  $B$  назива условном вероватноћом и означава се са  $P(A|B)$ . То значи да  $P(A|B)$  је вероватноћа догађаја  $A$  под условима који сигурно доводе до реализације догађаја  $B$ .

Посматрајмо експеримент са коначним бројем једнаковероватних елементарних догађаја. Означимо са  $n_A, n_B$  и  $n_{AB}$  број елементарних догађаја који доводе до реализација догађаја  $A, B, AB$  у  $n$  опита. Према класичној дефиницији вероватноће је

$$P(B) = \frac{n_B}{n}, \quad P(AB) = \frac{n_{AB}}{n} \quad (\text{П3.2})$$

Како је наступање случајног догађаја  $A$  условљено наступањем догађаја  $B$ ; то при одређивању условне вероватноће  $P(A|B)$  број  $n_B$  представља број свих могућних елементарних догађаја за наступање догађаја  $B$ , а  $n_{AB}$  онај број тих догађаја који доводе до реализације догађаја  $A$ : Зато је

$$P(A|B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0 \quad (\text{П4.2})$$

У случају да је догађај  $B$  условљен наступањем догађаја  $A$ , аналогно се доказује да је

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, P(A) > 0 \quad (\text{П4.2})$$

Из претходних израза добија се:

$$P(AB) = P(B)P(A | B) = P(A)P(B | A) \quad (\text{П5.2})$$

Претходна релација изражава теорему производа вероватноћа према којој је вероватноћа наступања два догађаја једнака производу безусловне вероватноће једног од тих догађаја и условне вероватноће другог, под условом да је наступио први догађај.

Формула производа вероватноћа може се уопштити и на случај више догађаја. На пример, за три догађаја,  $A, B, C$  вази:

$$P(ABC) = P(C | AB)P(A)P(B | A) \quad (\text{П6.2})$$

Применом математичке индукције претходне формуле се могу уопштити и на случај догађаја:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \quad (\text{П7.2})$$

### **Дефиниција 2.1.**

За случајан догађај  $A$  каже се да је независан од догађаја  $B$  ако је условна вероватноћа наступања догађаја  $A$  под условом да је наступио догађај  $B$ ; једнака безусловној вероватноћи догађаја  $A$ ; тј.  $P(A | B) = P(A)$ . Из дефиниције условне вероватноће (П2.3) следи:

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \quad (\text{П8.2})$$

одакле је:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (\text{П9.2})$$

Дакле, у случају када један догађај не зависи од другог, вероватноћа њиховог производа једнака је производу њихових вероватноћа.

Ова формула представља специјалан случај правила о производу вероватноћа датог помоћу (П2.7). Напоменимо да неки аутори узимају релацију (П2.9) за дефиницију независности два догађаја. На основу (П2.9) следи

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \quad (\text{П10.2})$$

Одавде закључујемо да ако догађај  $A$  не зависи од  $B$ ; тада ни  $B$  не зависи од  $A$ : Можемо рећи да су догађаји  $A$  и  $B$  независни ако је вероватноћа њиховог производа једнака производу њихових вероватноћа. Појам независности два догађаја може се проширити на коначан или највише пребројив скуп догађаја.

### Дефиниција 2.2

За догађаје  $A_1, A_2, \dots, \in \Phi$  каже се да су независни у паровима ако за сваки пар индекса  $((i, j)(i \neq j))$  важи

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (\text{П.11.2})$$

### Дефиниција 2.3

Догађаји  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \in \Phi$  су у целини независни ако за сваки коначан низ индекса  $k_1 < k_2 < \dots < k_n (k_i \in \{1, 2, \dots, \})$  и произвољно  $m \in N$  важи

$$P(A_m | A_{k_1} | A_{k_2} \dots A_{k_n}) = P(A_m) \quad (\text{П12.2})$$

што је еквивалентно са

$$P(A_{k_1} | A_{k_2} | \dots A_{k_n}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_n}) \quad (\text{П13.2})$$

Очигледно је да независност догађаја у целини имплицира независност у паровима, али обратно не важи.

## Тотална вероватноћа и Бајесова формула

Следеће две теореме имају велики значај у теорији вероватноће и њеним применама.

### Теорема 2.1

(Формула тоталне вероватноће)

Ако су  $H_1, H_2, \dots, H_n$  међусобно несагласни догађаји,

$P(H_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$  и  $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ ,

тада је

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i)$$

за сваки дигађај  $A \in \Phi$  (П14.2)

**Доказ.** Полазећи од једнакости  $A = A\Omega = A \sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i=1}^n AH_i$  на основу (П3.2)

и особине коначне адитивности, имамо:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^n AH_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A | H_i) \quad (\text{П15.2})$$

Вероватноће  $P(H_i)$  су обично познате унапред, пре реализације опита, па се често називају априорним вероватноћама, а сами догађаји хипотезама. Приметимо

да хипотезе  $H_i$  чине потпуни систем догађаја, тј. чине дисјунктно разбијање скупа  $\Omega$

### Теорема 2.2

(Бајесова формула).

Ако су  $H_1, H_2, \dots, H_n$  међусобно несагласни догађаји,

$P(H_i) > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ , тада је

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{\sum_{j=1}^n P(H_j)P(A | H_j)} \quad (i = 1, 2, \dots, n, \quad A \in \Phi) \quad (\text{П16.2})$$

**Доказ.** Како је:

$$P(H_i A) = P(H_i)P(A | H_i) = P(A)P(H_i | A) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Имамо:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)} \quad (\text{П17.2})$$

Примењујући теорему П2.1 за  $P(A)$  добијамо Бајесову формулу (П2.2).

### Функција расподеле

Из претходног излагања следи да је за сваки скуп  $S \in B(R)$  дефинисана функција:

$$P_X(S) = P(\{w | w \in \Omega, X(w) \in S\}) \quad (\text{П18.2})$$

На тај начин случајна променљива  $X$  „преноси“ на реалну праву  $R$  не само елементарне догађаје  $w \in \Omega$  него и структуру простора вероватноће  $(\Omega, \Phi, P)$ . Функција  $P_X$  је дефинисана на скупу подскупова од  $R$ , што представља извесно ограничење у примени многих метода математичке анализе у  $R$ .

Због тога се уводи један нови појам, функција расподеле  $F_X$  случајне променљиве  $X$ ; која у себи садржи све потребне информације о расподели вероватноћа над  $B(R)$ , али има погоднији облик јер представља реалну функцију реалне променљиве.

### Дефиниција 2.4.

Функција  $F_X : R \rightarrow [0,1]$  случајне променљиве  $X$ ; дефинисана са

$$F_X(x) = P(X < x) \quad (\text{П19.2})$$

која представља вероватноцу да случајна променљива  $X$  узме вредност мању од  $x$  за свако  $x \in R$ ; зове се функција расподеле вероватноћа случајне променљиве  $X$  или краће функција расподеле. Очигледно је да је функција расподеле  $F_X$  јединствена за сваку случајну променљиву  $X$ .

Обрнуто не мора да важи, наиме, различите случајне променљиве могу имати исту функцију расподеле. Ако је јасно о којој се случајној променљивој ради, уместо  $F_X(x)$  користимо ознаку  $F(x)$ :

### Теорема 2.3.

За функцију расподеле вероватноћа случајне променљиве  $X$  важи:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$
3.  $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a), \quad (a < b, a, b \in R)$
4. Функција расподеле је непрекидна слева, тј  $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$
5. Функција расподеле је монотono неопадајућа функција, тј. ако је  $x_1 < x_2$  тада је  $F(x_1) \leq F(x_2)$

### Доказ:

1.  $F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(-n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X < -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X < -n)\right) = P(\emptyset) = 0$
2.  $F(+\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X < n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X < n)\right) = P(\Omega) = 1$
3.  $F(b) = P(\{w \mid w \in \Omega, X(w) < b\}) = P(\{w \mid w \in \Omega, X(w) < a\}) + P(\{w \mid w \in \Omega, a \leq X(w) < b\}) = F(a) + P(a \leq X < b).$
4.  $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(a - 1/n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(x < a - 1/n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X < a - 1/n)\right) = P(X < a) = F(a)$
5. Ако је  $x_1 < x_2$  и ако је  $A = \{w \mid w \in \Omega, X(\Omega) < x_1\}$ ,  $B = \{w \mid w \in \Omega, X(\Omega) < x_2\}$



Очигледно је да важи

$$A \subseteq B, \text{ те је } F(x_1) + P(A) \leq P(B) = F(x_2).$$

На основу особина 1., 2., и 5. следи да са функцију расподеле важи:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ Звонко Радосављевић \_\_\_\_\_

број уписа \_\_\_\_\_ по старом програму \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

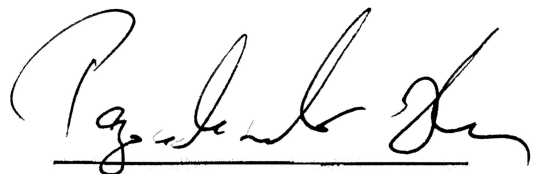
Придруживање података Сингеровим меморијским филтром за  
праћење покретних циљева у густом клатеру

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, \_\_\_\_\_ 30.04.2015. године



---

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Звонко Радосављевић

Број уписа \_\_\_\_\_ по старом програму

Студијски програм Управљење системима и обрада сигнала

Наслов рада Придруживање података Сингеровим меморијским филтром за  
праћење покретних циљева у густом клатеру

Ментор др Бранко Ковачевић, редовни професор, Универзитет у Београду,

Електротехнички факултет

Потписани Звонко Радосављевић

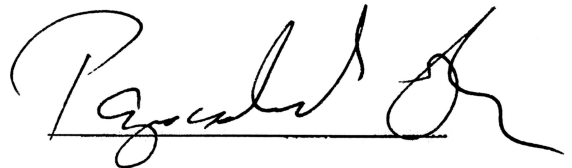
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 30.04.2015. године



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Придруживање података Сингеровим меморијским филтром за праћење покретних циљева у густом клатеру

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

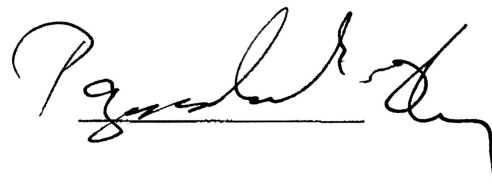
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 30.04.2015. године

Потпис докторанда



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.

**Биографија кандидата**  
мр Звонко Радосављевић, дипл.инж.

Звонко Радосављевић је рођен 16.маја 1960.год. у Београду. Основну школу "Милентије Поповић" и електротехничку школу "Никола Тесла" у Београду, завршио је као носилац Вукове дипломе. Године 1979. се уписао на Електротехнички факултет у Београду, на коме је дипломирао 1984. године, на Одсеку за Електронику, смер Телекомуникације. Тема дипломског рада је била "Прорачун вероватноће грешке у системима преноса оптичким влакнима". Годину дана касније уписао је постдипломске студије (по старом програму) на смеру Телекомуникације које је завршио и магистрирао 2000. године, са просечном оценом 8.71 у току студија. Тема магистарског рада је била "Откривање и детекција покретних циљева у ваздуху применом термовизије" код ментора академика проф. Александра Маринчића, децембра 2000. године. Овај магистарски рад урађен је у Војнотехничком Институту Београд, у коме је кандидат запослен од 1988. године. У звање истраживач сарадник кандидат је изабран 2006. године. Руководио је истраживачким задацима националног значаја под називом "Праћење и контрола суверенитета ваздушног простора изнад територије Републике Србије помоћу осматрачког радара" и учествовао истраживачким пројектима Владе Републике Србије, везаним за технолошка решења обезбеђења државне границе. Запослио се 1984. год. у ЕИ ПУПИН, у одељењу развоја комутационих система. Од 1988. год. кандидат је запослен у Војнотехничком Институту у Београду. Радио је на пословима истраживања обраде термовизијске слике. Током рада на пројектима, развио је низ алгоритама за статистичку анализу и сегментацију термовизијске слике у сврху откривања и праћења циљева. Резултати истраживања презентовани су и објављени су у више домаћих часописа од националног значаја као и на домаћим научним скуповима који се баве овом проблематиком.

У периоду од 2002. до 2004. године, на основу Уговора са Владом Републике Србије, ангажован сам на пословима израде *Главног Пројекта осавремењавања надзора Административне Линије према КиМ-у* у области Оптиелектронских система заштите. Од 2005. године, као руководилац радног тима задатка националног значаја *"Истраживање из система контроле ваздушног простора помоћу осматрачког радара"*, кандидат је публиковао више научних радова из области праћења покретних циљева.

Тема докторске дисертације настала је на основу функционалних и развојних задатака Војнотехничког института и истраживачког *'Истраживање у Области Фузије Података'*. Тренутно ради у Сектору за Електронске системе ВТИ на пројектовању алгорита за праћења ваздушних циљева и естимацију у оквиру текућих задатака Војске Србије.

Објавио је 31 рад, од тога 27 радова у часописима и конференцијама и 4 рада интерног карактера. У поменутих 27 радова се убрајају: магистарски рад, 5 радова у водећем часопису националног значаја, 6 радова у часопису националног значаја и 15 радова саопштених на скуповима националног и међународног значаја и штампаних у целини. Радови интерног карактера реализовани су у оквиру Научно-истраживачких задатака ВС. У последњих пет година објавио је 18 радова а 2 рада, су објављивање у иностраним часописима са SCI листе

У Београду, 29.04.2015. год.