

Универзитет у Београду
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Бојан Ч. Милановић

**Одређивање карактеристика
оптичких филтара са
микро-прстенастим резонатором
методом коначних елемената**

докторска дисертација

4. март 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Bojan Č. Milanović

**Characterization of Optical Filters
Based on Micro-ring Resonator by
Finite Element Method**

Doctoral Dissertation

4. March 2015.

МЕНТОР:

др Јован Елазар, ванредни професор
Државни универзитет у Новом Пазару

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Јован Елазар, ванредни професор
Државни универзитет у Новом Пазару

др Бранко Колунџија, редовни професор
Универзитет у Београду - Електротехнички факултет

др Бранислав Рађеновић, научни саветник
Универзитет у Београду - Институт за физику

др Јасна Црњански, доцент
Универзитет у Београду - Електротехнички факултет

др Дејан Гвоздић, редовни професор
Универзитет у Београду - Електротехнички факултет

Датум одбране

Одређивање карактеристика оптичких филтара са микро-прстенастим резонатором методом коначних елемената

Резиме

У докторату је дат приказ моделовања оптичких филтара са микро-прстенастим резонатором применом методе коначних елемената. Предложени су алгоритми за одређивање параметара микро-прстенастог резонатора који би резултирали жељеном преносном карактеристиком.

Полупречник прстена је одређен из дводимензионалног модела на основу резонатне фреквенције прстена и слободног спектралног опсега микро-прстенастог резонатора (FSR - "Free Spectral Range").

Резонатна фреквенција микро-прстенастог резонатора, добијеног из поступка моделовања, упоређена је са сопственим вредностима ("Eigenvalue") Хелмхолцове једначине осно-симетричног дводимензионалног модела. Како осно-симетрични модел има експерименталну верификацију, искоришћен је за верификацију предложених модела. Ред конвергенције решења је одређен из дводимензионалног основносиметричног модела.

Растојање између прстена и праволинијског светловода је одређено из тродимензионалног модела. Тродимензионални модел је такође верификован помоћу осно-симетричног модела. Комбинацијом методе коначних елемената и методе спрегнутих модела зависних од времена, одређене су преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора.

За моделовање оптичких филтара на бази микро-прстенастих резонатора, предложен је 2,5 димензиони модел и метода са одређивањем параметара расејања на дискретном скупу фреквенција.

Кључне речи: микро-прстенасти резонатор, метод коначних елемената, теорија спргнутих модова зависних од времена, оптички филтри, оптичка влакна

Научна област: Техничке науке, Електротехничко и рачунарско инжињерство

Ужа научна област: Физичка електроника

UDK број: 621.3

Characterization of Optical Filters Based on Micro-ring Resonator by Finite Element Method

Abstract

Dissertation presents the modeling of optical filters with micro-ring resonators using finite element method. Algorithms for determining the parameters of the micro-ring resonator that would meet the desired transmission characteristics are proposed.

The radius of the ring is determined from the two-dimensional model based on the resonant frequency of the ring and the free spectral range of micro-ring resonator (FSR - "Free Spectral Range").

Resonant frequency of micro-ring resonators, resulting from the process of modeling, was compared to Eigenvalues of Helmholtz's equation of axial-symmetric two-dimensional model. Since, axysymmetric model is experimentally verified, it was used to verify the proposed model. Convergence order of solutions is determined from the two-dimensional axisymmetrical model.

The distance between the ring and the BUS waveguide is determined from a three-dimensional model. A three-dimensional model is also verified by using the axially-symmetrical model. By combining the finite element method and the method of temporal coupled modes, transmission characteristics of micro-ring resonators was determined.

For the modeling of optical filters, based on micro-ring resonators, 2.5 dimensional model is proposed and method of determining the scattering parameters by excitation of ring resonator at discrete set of frequencies.

Key words: microring resonator, finite element method, temporal coupling mode theory, optical filters, optical fibers

Scientific area: Technical sciences, Electrical engineering

Specific scientific area: Physical electronics

UDK 6poj: 621.3

Захвалница

Овај докторат је резултат мог истраживања на пољу моделовања микро-прстенстих резонатора методом коначних елемената у протеклих пет година. Нумеричким методама и микро-прстенстим резонатором сам почео да се бавим захваљујући сарадњи са др Браниславом Рађеновићем, на чему сам му бескрајно захвалан.

Са др Јованом Елазаром сам започео сарадњу 2010. године када смо, за потребе карактеризације под-површинских дефеката методом импулсне термографије, користили нумеричку методу коначних разлика у временском домену ("Finite Difference Time Domain - FDTD"). Др Јовану Елазару, дугујем огромну захвалност на помоћи око формулације проблема истраживања и смерницама које су ми помогле да ово истраживање приведем крају.

Велику захвалност дугујем др Радивоју Биљићу, чије су ми сугестије, при изради доктората, биле од пресудног значаја.

Највећу захвалност дугујем својој породици, која ми је дала довољно времена и подршке да све своје слободно време усмерим на истраживање.

Бојан Милановић
Београд, Србија
4. март 2015.

Садржај

1	Увод	1
2	Микро-прстенасти резонатори	7
2.1	Микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом	9
2.2	Микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода	13
2.3	Параметри микро-прстенастих резонатора	15
2.3.1	Резонантна таласна дужина	16
2.3.2	Слободан спектрални опсег ("Free Spectral Range" - FSR)	16
2.3.3	Ширина резонантне криве FWHM - "Full Width at Half Maximum"	17
2.3.4	"Финеса" - F	17
2.3.5	Фактор доброте Q-фактор	17
2.4	Конфигурација са хоризонталним спрезањем	18
2.5	Конфигурација са вертикалним спрезањем	19
2.6	Каскадна конфигурација	20
2.6.1	Серијска конфигурација	20
2.6.2	Паралелна конфигурација	21
2.7	Таласна једначина	21
2.8	TE, TM модови таласа	22
2.8.1	Рачунање резонантне учестаности и фактора доброте преко сопствене вредности	24
2.8.2	Савршено прилагођен слој	24
2.9	Параметри расејања	27
2.9.1	Гранични услови на приступима	27
3	Методе које се користе за прорачун микро-прстенастих резонатора	29
3.1	Метод коначних елемената	29
3.2	Општи алгоритам методе коначних елемената	30

3.3	Генерисање мреже	30
3.3.1	Конвергенција решења	31
3.3.2	Адаптивно прилагођавање мреже	32
3.4	Развој у коначан број базних функција	32
3.5	Формирање резидуала	33
3.5.1	Вариациона формулација	33
3.5.2	Метод тежинских резидуала	34
3.6	Метода спрегнутих модова зависних од времена	35
3.7	Метод коначних разлика у временском домену	38
4	Моделовање микро-прстенастог резонатора - 2D модел	40
4.1	Одређивање полупречника прстена	40
4.2	Осносиметрични модел	47
5	Моделовање микропрстенастог-резонатора - 3D модел	55
5.1	Процена конвергенције тродимензионалног модела	55
5.2	Растојање прстена и светловода - модел са два праволинијска светловода	59
5.3	Комбинација методе коначних елемената и методе спрегнутих модова зависних од времена	62
5.4	Растојање прстена и светловода - модел са једним праволијским светловодом	67
5.5	Преносна карактеристика вертикално спрегнутог резонатора	70
6	Моделовање микро-прстенастог резонатора - 2,5D модел	74
6.1	2,5D модел са побудом	78
6.2	Микро-прстенасти филтри вишег реда	81
6.2.1	Два спрегнута прстена	81
6.3	Захтеви за ресурсима рачунара	85
7	Закључак	86
8	Прилог 1	90
9	Прилог 2	93
10	Прилог 3	96
11	Прилог 4	101

Листа скраћеница и симбола

α	Коефицијент слабења интензитета светлости
α_l, γ_l	Коефицијенти спреге праволинијског светловода и прстена
β	Коефицијент простирања фазе
δ	Губици резонатора
δ_D	Дираков импулс
δ_{PML}	дебљина савршено прилагођеног слоја
Γ	Коефицијент рефлексије
λ	Таласна дужина
λ_{eig}	Сопствена вредност
λ_r	Резонантна таласна дужина
μ	Пермеабилност средине
∇	Набла оператор
ω	Кружна учестаност
σ	Проводност
τ	Временска константа губитка енергије резонатора
ε	Пермитивност средине
φ	Фазни померај
ϱ	Слободна наелектрисања
\vec{B}	Вектор магнетске индукције
\vec{D}	Вектор електричне индукције

\vec{E}	Вектор јачине електричног поља
\vec{H}	Вектор јачине магнетног поља
\vec{J}	Вектор густине струје
A	Амплитуда поља у прстену
c_0	Брзина простирања светлости
d	Растојање праволинијског и прстенастог светловода
e	Ојлерова константа
E_h	Амплитуда хоризонтално поларисане компоненте електричног поља
E_{inc}	Поље на побудном приступу
E_{out}	Поље на приступу светловода на коме нема побуде
E_v	Амплитуда вертикално поларисане компоненте електричног поља
F	Финеса
f_ξ	Базна функција методе коначних елемената
f_r	Резонатна фреквенција
$FWHM$	Опсег фреквенција на половини максимума
I	Интензитет светлости
j	Имагинарна јединица $\sqrt{-1}$
k	Таласни број за вакуум
k_{sp}	Коефицијент спреге праволинијски светловод прстен
k_{ss}	Коефицијент трансмисије у праволинијском светловоду спрежњака
L	Дужина светловода
L_C	Дужина спрежњака
L_p	Дужина лучног светловода
M	Мод таласа у прстенастом светловоду

N	Број коначних елемената
n_g	Групни индекс преламања
n_{eff}	Ефективни индекс преламања
p	Ред конвергенције методе коначних елемената
P_a	акумулирана енергија резонатора
P_g	губици енергије резонатора
P_i	Приступ светловода
PML	Савршено прилагођен слој
Q	Фактор доброте
R	Полупречник прстенастог светловода
r, φ	Кординате сферног координатног система
S	Параметар матрице расејања
s_+	Амплитуда таласа праволинијског светловода у смеру ка прстену
s_-	Амплитуда таласа праволинијског светловода у смеру од прстена
t	Време
TE	Трансверзални електрични мод
TEM	Трансверзални електо-магнетни мод
W_ξ	Тежинска функција
x, y, z	Кординате Декартовог координатног система
Z_T	Таласна импеданса
FDTD	Метод коначних разлика у временском домену
FEM	Метод коначних елемената
FSR	Слободан спектрални опсег
h	Највећа димензија коначног елемента

ITU Међународна телекомуникациона унија
n Индекс преламања
SOI Силицијум на изолатору
TM Трансверзални магнетни мод
WDM Мултиплексирање по таласним дужинама

Списак слика

1.1	Микро-прстенасти резонатор са једним и два праволинијска светловода фотографисан под електронским микроскопом [1, 2].	1
2.1	Микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом.	9
2.2	Еквивалентна шема микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом.	10
2.3	Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом за вредности које су блиске критичној спрези ($k_{ss} = 0.9$, $a = 0.85$).	12
2.4	Микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода.	13
2.5	Модел микропрстенастог резонатора са два праволинијска светловода.	14
2.6	Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода.	14
2.7	Вертикално спрегнут микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода.	19
2.8	Серијска конфигурација микро-прстенастих резонатора.	20
2.9	Паралелна конфигурација микро-прстенастих резонатора.	21
3.1	ФЕМ мрежа 3D модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода (ваздушни омотач је уклоњен како би се видели светловоди).	31
3.2	Шема спреге прстена са праволинијским светловодима према теорији спрегнутих модова зависних од времена.	36
4.1	Модел микро-прстенастог резонатора са два латерално спрегнута праволинијска светловода.	41
4.2	Утицај слободног спектралног опсега на преношење мултиплекса.	42
4.3	Геометрија модела коришћеног за рачунање ефективног индекса преламања.	43

4.4	Амплитуда електричног поља доминатног мода, на фреквенцији $f = 193.1THz$	44
4.5	Компоненте електричног поља, а) хоризонтална (Eh), δ) вертикална (Ev) поларизација, за мод на фреквенцији $f = 193.1THz$ ($n_{eff} = 2, 261394$).	44
4.6	Компоненте електричног поља, а) хоризонтална (Eh), δ) вертикална (Ev) поларизација, за мод на фреквенцији $f = 193.1THz$ ($n_{eff} = 1, 534162$).	45
4.7	Зависност групног индекса преламања (n_g) од таласне дужине.	47
4.8	Геометрија осносиметричног модела.	50
4.9	Амплитуда електричног поља доминатног мода на фреквенцији $193.0656THz$, а) цео модел, δ) доминатан мод.	51
4.10	Утицај густине мреже на конвергенцију решења.	52
4.11	Позиција мода у односу на осу.	52
4.12	Зависност резонантне фреквенције од полупречника прстена.	53
4.13	Зависност резонантне фреквенције од индекса преламања супстрата.	54
5.1	Геометрија 3Д модела прстена.	56
5.2	Амплитуда поља у тродимензионалном моделу прстена добијена као сопствени вектор из Хелмхолцове једначине.	59
5.3	Геометрија тродимензионалног модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.	60
5.4	Мрежа тродимензионалног модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.	61
5.5	Преносна карактеристика $S_{41}(dB)$ микропрстенастог резонатора у функцији растојања прстена и праволинијског светловода.	63
5.6	Преносна карактеристика $S_{21}(dB)$ микропрстенастог резонатора у функцији растојања прстена и праволинијског светловода.	64
5.7	Преносна карактеристика микропрстенастог резонатора за растојање прстена и праволинијских светловода $d = 25nm$	64
5.8	Расподела амплитуде електричног поља у околини спрежњака.	66
5.9	Геометрија микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом.	67
5.10	Мрежа микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом.	68
5.11	Амплитуда електричног поља прстена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.	70

5.12	Геометрија прстена вертикално спрегнутог са праволинијским светловодима.	71
5.13	Преносна карактеристика вертикално спрегнутог микро-прстенастог резонатора.	72
5.14	Амплитуда електричног поља резонатног мода вертикалне спреге.	73
6.1	Геометрија 2,5D модела прстена.	75
6.2	Амплитуда резонатног мода 2,5D модела прстена.	76
6.3	Геометрија 2,5D модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.	76
6.4	Амплитуда електричног поља на резонатној фреквенцији у околини $192THz$, а) 2D модел, б) 3D модел ($d=25\text{ nm}$).	77
6.5	Геометрија дводимензионалног модела са побудом.	79
6.6	Преносна карактеристика микропрстенастог резонатора са два светловода.	79
6.7	Амплитуда електричног поља дводимензионалног модела када прстен није у резонанци.	80
6.8	Амплитуда електричног поља дводимензионалног модела са побудом на резонатној фреквенцији.	80
6.9	Амплитуда електричног поља резонатног мода 2,5D модела два спрегнута прстена.	82
6.10	Преносна карактеристика филтра са два прстена.	82
6.11	Амплитуда електричног поља филтра са два спрегнута прстена.	83
6.12	Амплитуда електричног поља филтра са три спрегнута прстена.	84
6.13	Преносна карактеристика филтра са три прстена пре корекције.	84
6.14	Преносна карактеристика филтра са три прстена након корекције.	85
8.1	Спрега модова у прстену	90

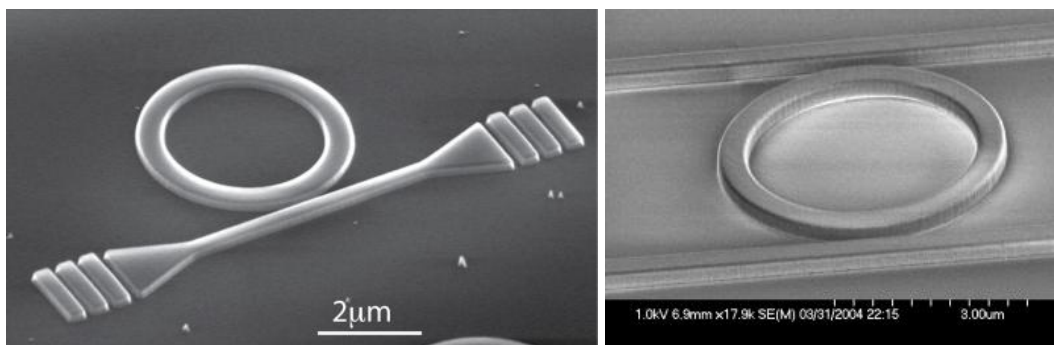
Списак табела

4.1	Промена резонантне фреквенције која одговара моду $M=31$ настала због промене густине мреже.	51
5.1	Резонантне фреквенције прстена одређене из тродимензионалног модела.	57
5.2	Резонантне фреквенције прстена одређене из тродимензионалног модела за густину мреже 64 nm.	58
5.3	Резонантна фреквенција и фактор добротe за различита растојања прстена и праволинијских светловода.	61
5.4	Резонантна фреквенција и фактор добротe за различита растојања прстена и праволинијског светловода.	62
5.5	Три суседне резонантне фреквенције и фактор добротe прстена спрегнутог са два светловода за растојање $d=25\text{nm}$	65
5.6	Резонантна фреквенција и фактор добротe прстена са два светловода.	65
5.7	Резонантна фреквенција и фактор добротe микро-прстенaстог резонатора са једним праволинијским светловодом, за различита растојања прстена и светловода.	68
5.8	Резонантна фреквенција и фактор добротe за различита растојања прстена и праволинијског светловода.	69
5.9	Резонантна фреквенција и фактор добротe прстена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.	69
5.10	Резонантна фреквенција и фактор добротe прстена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.	70
5.11	Резонантна фреквенција и фактор добротe вертикално спрегнутих светловода, за растојање прстена и светловода од 250 nm.	71
6.1	Упоредни приказ резонантних фреквенција и фактора добротe тродимензионалног и 2,5D модела.	77
6.2	Резонантна фреквенција и фактор добротe два спрегнута прстена.	81

1 Увод

Због предности у погледу селективности, ефикасности и димензија, оптички филтри са микро-прстенастим резонатором су привукли велику пажњу. Оптички филтри су неизбежне компоненте оптичких комуникационих мрежа које раде на принципу мултиплексирања по таласним дужинама (WDM - "Wavelength Division Multiplexing"). Биосензори са оптичким резонатором су најосетљивији сензори микро организама. Релативно мале димензије микро-прстенастих резонатора, и технологија израде на силицијумским основама, микро-прстенасте резонаторе чине погодним елементима при изради оптичких интегрисаних кола.

Микро-прстенасти резонатор је оптички филтар, који се састоји од прстена (прстенастог светловода) и једног или два праволинијска светловода, при чему прстен и праволинијски светловоди нису у директном контакту (слика 1.1). Светловоди се налазе на субстрату мањег индекса преламања, а око светловода се често налази ваздух.



Слика 1.1: Микро-прстенасти резонатор са једним и два праволинијска светловода фотографисан под електронским микроскопом [1, 2].

Према доступној литератури, микро-прстенасти резонатори се најчешће анализирају или применом полу-аналитичких метода које се заснивају на теорији спрегнутих модова ("Coupled Mode Theory") [3] или применом нумеричких метода [4, 5]. Теорија спрегнутих модова се у начелу дели на теорију која посматра про-

сторну промену амплитуде електромагнетног таласа у спрежњаку ("Coupled Mode Theory") [6] и теорију која се односи на промену амплитуде електромагнетног таласа у времену ("Temporal Coupled Mode Theory") [7]. Метода спрегнутих модова која посматра промену амплитуде у простору, микро-прстенасти резонатор моделује у виду еквивалентног кола које представља спој спрежњака и лучних светлорова. Код ове методе елементи еквивалентног кола се описују матрицама преноса које се одређују применом нумеричких метода [8, 9]. Без обзира што се овом методом релативно лако могу добити преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора, ова метода не даје довољно информација о појавама које се дешавају унутар микро-прстенастих резонатора. Теорија спрегнутих модова зависних од времена прати промену амплитуде електромагнетног таласа у микро-прстенастом резонатору у времену. Услед предаје енергије из прстена праволинијским светловодима, амплитуда електромагнетног таласа у прстену опада. Промена амплитуде електромагнетног таласа у прстену је одређена фактором добротезонатора. Према теорији спрегнутих модова зависних од времена, преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора се може одредити на основу резонантне фреквенције прстена и фактора добротезонатора [10, 11]. Ова теорија је еквивалентна теорији петурбација зависних од времена из квантне механике.

За потребе детаљније анализе појава које се дешавају унутар самог микро-прстенастог резонатора, неопходна је примена нумеричких метода. Метода коначних разлика (FDTD - "Finite Difference Time Domain") је због једноставности алгоритма и могућности релативно једноставне кластеризације модела на више рачунара најчешће примењивана метода за анализу микро-прстенастих резонатора [4]. Међутим ова метода има ограничење у виду структуриране мреже, која закривљене ивице домена представља степенастом апроксимацијом чиме долази до нарушавања геометрије модела. Метода коначних елемената, са друге стране, користи неструктурирану мрежу, која је погодна за моделовање закривљених ивица, али је веома захтевна по питању ресурса рачунара [12, 13]. Проблем захтева према ресурсима рачунара се решава или применом методе простирања снопа (BPM - "Beam Propagation Method") [5], која се заснива на Падеовим ("Pade") апроксимацијама и знатно мање је захтевана по питању ресурса рачунара или кластеризацијом модела на мање делове, чиме се могу симулирати модели и са неколико стотина милиона елемената [14] или коришћењем дводимензионалних модела.

Како би се сачувале предности мање захтевних дводимензионалних модела, а

постигла прецизност тродимензионалног модела, развијени су 2.5-димензионални модели. Код ових модела, тродимензионална геометрија се трансформише у дводимензионални модел, при чему се ефективни индекси преламања новодобијеног модела, најчешће рачунају применом вариационог рачуна [15, 16, 17].

Спрега између прстена и праволинијског светловода може бити латерална, када су прстен и праволинијски светловоди у истој равни или вретикална, када се прстен налази изнад (испод) праволинијских светловода [18, 19, 20]. За резонатор са вертикалном спрегом, није могуће направити еквивалентан 2.5-димензионалан модел, тако да је примена тродимензионалног модела у овим ситуацијама неизбежна.

У овој дисертацији, истраживање је усмерено у више праваца:

1. Моделовање је усмерено на микро-прстенасте резонаторе који са једне стране имају релативно високу фреквенцију носиоца мултиплексираног сигнала према ITU G.692 стандарду ($193.1\text{THz} \pm n \cdot 100\text{GHz}$) и истовремено релативно уску ширину канала унутар мултиплексираног сигнала (100GHz)¹. Због релативно мале ширине канала, овај велики дисбаланс између фреквенције носиоца и ширине канала, поставља додатан захтев по питању прецизности приликом одређивања резонантне фреквенције. Већа прецизност при одређивању резонантне фреквенције, са друге стране повећава захтеве за ресурсима рачунара. Из тог разлога је део истраживања у овој дисертацији усмерен на одређивање одступања резултата добијених из симулација, који потичу од коначне густине мреже, ограничене ресурсима тренутно доступних рачунара.
2. Резонантна фреквенција и слободан спектрални опсег (FSR - "Free Spectral Range") прстена зависе од полупречника прстена, док пропусни опсег филтра зависи од растојања прстена и праволинијских светловода. У дисертацији је истражен алгоритам за одређивање параметара микро-прстенастог резонатора који би задовољио циљане карактеристике филтра.
3. Спрега прстена и праволинијских светловода доводи до промене резонантне фреквенције прстена, чиме се мења преносна карактеристика читавог резонатора. У зависности од растојања праволинијског светловода и прстена, мења се јачина спреге, а самим тим и резонантна фреквенција прстена.

¹ ширине канала према ITU стандардима могу бити и мање (50GHz , 25GHz) што додатно компликује ситуацију

Део истраживања у дисертацији је усмерен на одређивање утицаја растојања праволинијског светловода и прстена на резонантну фреквенцију прстена.

4. Услед релативно високе фреквенције сигнала, мале несавршености на зидовима домена могу изазвати рефлексије електромагнетних таласа, које могу, у мањој или већој мери утицати на одређивање преносне карактеристике. Ове рефлексије су најзначајније код прстена, код кога се због рефлексија формира рефлектован електромагнетни талас, који приликом суперпонирања са директним таласом доводи до ефекта раздвајања резонантне фреквенције. Из тог разлога се у прстену који нема савршено глатке зидове, уместо једне резонантне фреквенције, јављају две различите резонантне фреквенције. У дисертацији је анализиран утицај густине мреже на раздвајање резонантних фреквенција.
5. Део истраживања је усмерен на могућности примене методе коначних елемената на моделовање микро-прстенастих резонатора помоћу 2,5-димензионалног модела.

У [21, 22] где су публиковани одређени резултати из ове дисертације, су приказани резултати прорачуна преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора применом методе коначних елемената на 3D моделу. Ови радови су показали да је могуће спровести релативно захтевне прорачне и на просечном десктоп рачунару релативно скромних карактеристика. Преносна карактеристика микро-прстенастих резонатора код ових модела је одређена побудом доминантним модом на дискретном низу фреквенција или одређивањем фактора добротe. Резултати у радовима су дали квалитативну слику преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора, на којој је настављено даље истраживање.

Поред увода који представља прво поглавље и закључка, докторат садржи још пет поглавља.

У другом поглављу су приказане основне конфигурације микро-прстенастих резонатора. Дат је приказ типичних преносних карактеристика основних конфигурација и преглед основних параметара који описују микро-прстенасти резонатор. Приказане су основне једначине које описују простирање електромагнетних таласа у микро-прстенастом резонатору, као и једначине којима се моделује савршено прилагођен слој. Објашњен је поступак одређивања параметара расејања

на приступима микро-прстенастог резонатора.

Треће поглавље се бави методама које се користе за прорачун параметара микро-прстенастих резонатора. Дат је приказ општег алгоритма методе коначних елемената. У овом поглављу је приказан поступак који је касније искоришћен за одређивање реда конвергенције решења. Поред методе коначних елемената у овом поглављу су објашњене и теоријске основе методе спрегнутих модова зависних од времена. Изведени су изрази за одређивање преносне карактеристике микро-прстенастог резонатора помоћу фактора добротe и резонантне учестаности.

Четврто поглавље је посвећено моделовању микро-прстенастог резонатора помоћу 2D модела. Дат је приказ поступка одређивања полупречника прстена који би испунио циљане карактеристике микро-прстенастог резонатора. Дат је приказ модова којима се побуђује праволинијски светловод и осетљивост прорачуна на промене појединих параметара. За потребе верификације предложеног алгоритма, искоришћен је осно-симетричан модел који је верификован експерименталним резултатима у другим истраживањима. На дводимензионалном моделу је тестирана конвергенција решења.

У петом поглављу је приказан 3D модел. 3D модел је такође верификован поређењем са осно-симетричним моделом. Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора је одређена комбиновањем методе спрегнутих модова зависних од времена и методе коначних елемената. У овом поглављу је приказан утицај растојања праволинијских светловода на резонантну учестаност прстена. Приказан је ефекат раздвајања резонантне учестаности који је директна последица дискретизације граница геометрије прстена. Приказан је и поступак одређивања преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора са вертикалном спрегом.

У шестом поглављу је дат осврт на 2.5D модел микро-прстенастих резонатора. Дате су основе модела и одређене преносне карактеристике неколико карактеристичних структура. Приказано је доста добро поклапање резултата добијених из 2.5D модела са резултатима 2D и 3D модела. У овом поглављу је предложен поступак одређивања преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора поבודом структуре одговарајућим модом низом дискретних фреквенција.

У закључку, који представља седмо поглавље, описана је методологија којом је спроведено истраживање приликом израде докторске дисертације и истакнути

су њени главни доприноси.

2 Микро-прстенести резонатори

У системима са мултиплексирањем по таласним дужинама (WDM - "Wavelength Division Multiplexing"), битну улогу имају уређаји са резонаторима, који се користе за мултиплексирање и демултиплексирање сигнала [23, 24, 11]. Према [11], резонатор са стојећим таласом као што је Брагов ("Bragg") резонатор, спрегнут са сигналним светловодом, може издвојити само половину снаге канала који се издваја из мултиплексираног сигнала. За потпуно издвајање канала из мултиплексираног сигнала, непходно је коришћење два резонатора. За разлику од резонатора са стојећим таласима, код прстенестих резонатора или резонатора са диском, код којих се јавља прогресивни талас, помоћу једог прстена или диска, спрегнутог са праволинијским светловодима, може се у потпуности издвојити одређени канал из мултиплексираног сигнала, што микро-прстенестим резонаторима даје предност у односу на резонаторе са стојећим таласима.

Најпростија конфигурација микро-прстенестих резонатора се састоји од једног прстена и једног праволинијског светловода. Ова конфигурација се користи као "све-пропусни" ("all-pass") филтар за компензацију дисперзије или као оптичка линија за кашњење [25, 26, 27].

Микро-прстенести резонатор са филтарским својствима обично подразумева конфигурацију са два праволинијска светловода [28]. Код ове конфигурације, светлосни сигнал на резонантној фреквенцији прстена прелази из једног праволинијског светловода преко прстена у други праволинијски светловод. Истовремено се, на упражњено место у првом праволинијском светловоду, преко другог праволинијског светловода и прстена, може убацити нов сигнал. Због тога се микро-прстенести резонатор са два праволинијска светловода означава са "додај-издвој" ("add-drop") филтар и може се користити као мултиплексер (демултиплексер) [26, 29, 30].

Фреквенције носиоца система за мултиплексирање по таласним дужинама се распоређују према ITU ("International Telecommunication Union") стандарду G.692.

Према овом стандарду, референтна фреквенција је 193.100THz (што одговара таласној дужини 1552.524 nm), док се следећи носиоц додаје на сваких 100 GHz [31].

Резонантна фреквенција микро-прстенастог резонатора зависи од полупречника и диелектричних својстава прстена. Због кружног облика прстена, резонантна фреквенција се периодично понавља. Периода понављања резонантне фреквенције прстена, представља слободан спектрални опсег (FSR - "Free Spectral Range"). Што је веће растојање између две суседне резонантне фреквенције, шири је слободан спектрални опсег. Како би се приликом издвајања једног канала из мултиплексираног сигнала избегло нарушавање неког другог канала, потребно је да резонантне фреквенције буду на довољно великом растојању, чиме би се цео мултиплексирани сигнал могао сместити између две суседне резонантне фреквенције. Шири слободан спектрални опсег се добија смањењем полупречника прстенастог светловода [32, 33].

Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора, око резонантне фреквенције, је облика Лоренцове ("Lorentz") функције. Батервортова ("Butterworth") или Чебишевљева ("Chebyshev") преносна карактеристика филтра, се може добити каскадном спрегом два или више прстенаста светловода. Укупна преносна карактеристика каскадно спрегнутих светловода зависи од геометрије, физичких својстава као и међусобног растојања прстенастих светловода [11, 34, 35, 36]. Поред тога, према теорији Фано ("Ugo Fano") резонанце (Прилог 2), због међусобне спреге прстенастих светловода, као и због спреге прстенастих и праволинијских светловода, долази до померања резонантне фреквенције сваког од спрегнутих прстенова. Из тог разлога се након прелиминарног прорачуна, јавља потреба за додатном корекцијом параметара микро-прстенастих резонатора [37, 38, 39].

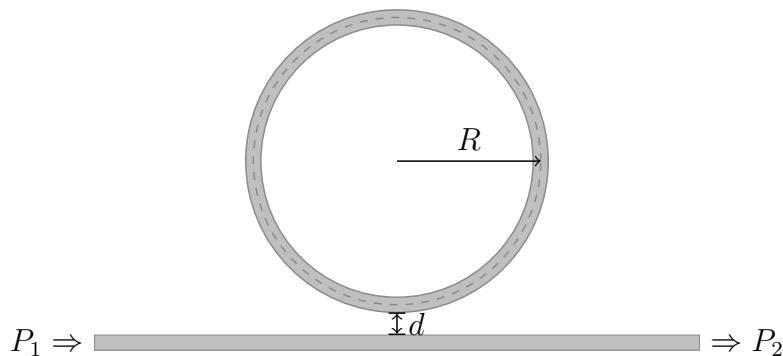
За појачање сигнала, у колима са микро-прстенастим резонаторима, најчешће се користе фибер-оптички појачавачи. Фибер допиран Ербијумом је најзаступљенији фибер-оптички појачавач за трећи оптички прозор. Овај појачавач ради у опсезима таласних дужина ширине 30nm . За мултиплексирање и демултиплексирање сигнала опсега 30nm , потребно је обезбедити слободан спектрални опсег микро-прстенастог резонатора већи од 30nm , што се постиже смањењем полупречника прстена. Микро-прстенасти резонатори који имају слободан спектрални опсег већи од 30 nm морају бити полупречника $5\ \mu\text{m}$ или мањег [11, 33].

Силицијумски микро-прстенасти резонатори су пример филтара малих димен-

зија. Мале губитке у прстену малог полупречника (полупречника мањег од $5\mu m$), могуће је обезбедити великом разликом индекса преламања између језгра и супстрата. Материјали на бази силицијума на изолатору (SOI - "Silicon On Insulator"), су материјали за које се може рећи да имају велику разлику индекса преламања језгра и супстрата ($n_{Si} = 3,47$, $n_{SiO_2} = 1,44$) [40, 41]. Код њих је могуће задржати светлост у језгру светловода субмикронских димензија, при чему је типична димензија силицијумског светловода мања од $500nm$. Овако мала димензија светловода је неопходна да би се остварило мономодно простирање светлости у опсегу таласних дужина од $1,3\mu m$ до $1,6\mu m$.

2.1 Микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом

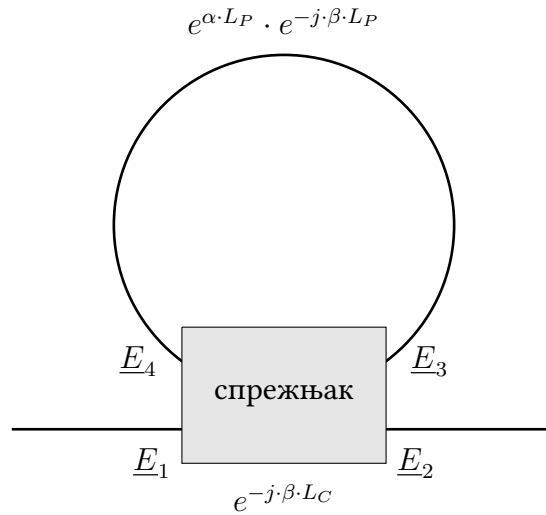
Микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом представља конфигурацију која се састоји од резонатора (прстенасти светловод) спрегнутог са једним праволинијским светловодом (слика 2.1). Има један улазни и један излазни приступ. Приступи су на слици означени са P_1 и P_2 . Полупречник резонатора је на слици означен са R и рачуна се до средње линије прстена, док је најкраће растојање између праволинијског светловода и прстена, на слици обележено са d .



Слика 2.1: Микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом.

За анализу ове структуре користи се теорија спрегнутих модова, при чему се микро-прстенасти резонатор представља као спој спрежњака и лучног светловода. Еквивалентна шема микро-прстенастог резонатора је приказана на слици 2.2. Спрежњак је представљен матрицом преноса, док се преносна функција лучног светловода састоји од члана који уноси фазно кашњење ($e^{-j\beta \cdot LP}$) и члана који

уноси слабљење ($e^{\alpha \cdot L_P}$). Спрежњак спредставља део праволинијског светловода и прстена на коме долази до наизменичног преласка енергије. L_C и L_P су дужине спрежњака и лучног светловода респективно. Слабљење које уноси спрежњак, најчешће се представља у оквиру члана који описује слабљење лучног светловода. Метода се често назива и матрична метода или метода еквивалентног кола.



Слика 2.2: Еквивалентна шема микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом.

Матрица преноса спрежњака представља везу између вектора јачине електричних поља четири приступа спрежњака и она има облик¹:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_2 \\ \underline{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss} & j \cdot k_{sp} \\ j \cdot k_{sp} & k_{ss} \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot L_C} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_4 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Коефицијенти спреге, приказани у изразу (2.1) се добијају интеграцијом електричног поља у складу са Лоренцовом теоријом реципроцитета и пертурбационом теоријом.

$$k_{ss} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{4} \cdot \int_S \vec{E}_p \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p) \cdot \vec{E}_p dS \quad (2.2)$$

$$k_{sp} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{4} \cdot \int_S \vec{E}_p \cdot (\varepsilon - \varepsilon_q) \cdot \vec{E}_q dS \quad (2.3)$$

Интеграција иде по попречном пресеку спрежњака, а индекси р и q, означавају величину која се односи на праволинијски светловод, односно прстен.

¹ детаљније извођење је дато у Прилогу 1

При резонанци, електрично поље E_4 и E_3 су у фази. Како спрежњак не мења фазу, временом ће, при резонанци, амплитуда поља у прстену да расте.

Са друге стране, поље E_3 и поље E_1 су фазно померени за $\pi/2$ (имагинарна јединица $j = \sqrt{-1}$ у коефицијенту спрежњака). При резонанци ће и поље E_4 бити фазно померено за $\pi/2$ у односу на поље E_1 . Како у спрежњаку долази до померања фазе за $\pi/2$, због укупне фазне разлике која износи π , амплитуда поља у праволинијском светловоду иза спрежњака ће се смањивати. Тиме се постиже да се при резонанци, интензитет поља у прстену током времена повећава, док се интензитет поља у светловоду иза спрежњака смањује. У једном тренутку, успоставиће се равнотежа, односно поље у прстену ће бити на свом максимуму, док ће поље у светловоду иза спрежњака бити на свом минимуму [42, pp. 12-14],[40, pp. 12-19]. Имајући у виду да се равнотежа не постиже тренутно, јасно се може закључити да микро-прстенасти резонатор у преносној функцији има одређено кашњење.

У оптичким колима, микропрстенасти резонатор са једним светловодом се углавном користи за корекцију дисперзије, уношење слабљења или за уношење кашњења. Ретко се користи у филтерским функцијама. Амплитуда преносне карактеристике микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом је блиска јединици, тако да се његова примарна функција потиче од нелинеарности фазе.

Уколико се претпостави да је рефлексија у светловоду занемарљива, однос инцидентног електричног поља и трансмитованог електричног поља се може исказати релацијом²:

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{j \cdot (\pi + \varphi)} \cdot \frac{a - k_{ss} \cdot e^{-j \cdot \varphi}}{1 - k_{ss} \cdot a \cdot e^{j \cdot \varphi}} \quad (2.4)$$

где су:

$\varphi = \beta \cdot L$ - фазни померај

L - дужина петље

β - коефицијент простирања фазе у прстену

a - коефицијент везан за губитке простирања у прстену и губитке спреге, ($a^2 = e^{(-\alpha \cdot L)}$)

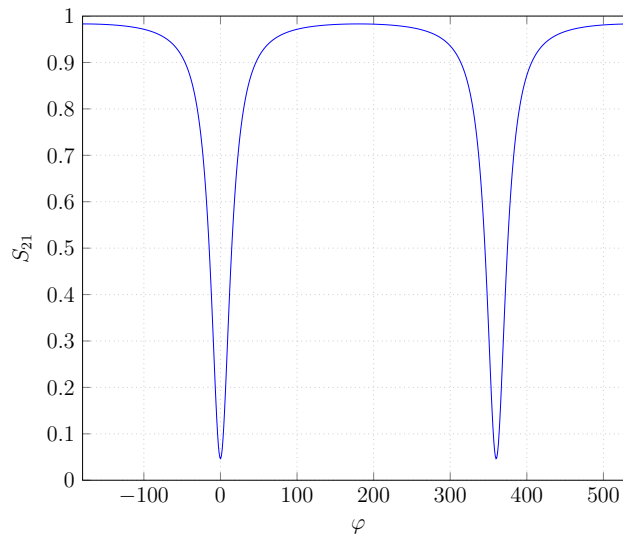
α - коефицијент слабљења интензитета светлости

² детаљније извођење је дато у Прилогу 1

Квадрирањем претходне једначине, добија се коефицијент трансмисије интензитета светлости:

$$S_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{a^2 - 2 \cdot k_{ss} \cdot a \cdot \cos(\varphi) + k_{ss}^2}{1 - 2 \cdot k_{ss} \cdot a \cdot \cos(\varphi) + (k_{ss} \cdot a)^2} \quad (2.5)$$

На слици (2.3), приказана је преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са једним светловодом, за случај $k_{ss} = 0.9$ и $a = 0.85$. Са слике (2.3) се види да је карактеристика у пропусном делу равна, док је у непропусном делу, за фреквенције за које је фаза са улаза прстена померена за $2 \cdot \pi$, преносна карактеристика облика Лоренцове функције. Што су вредности коефицијента спреге (k_{ss}) и слабљења (a) у светловоду, ближе једна другој, већа је дубина пика Лоренцове функције у преносној карактеристици. Са слике (2.3) се види да неће доћи до потпуног потискивања сигнала у праволинијском светловоду, зато што коефицијенти спреге и слабљења нису једнаки. У случају критичне спреге, када је $k_{ss} = a$, сигнал на излазу из спрежњака ће потпуно нестати. Међутим, микро-прстенасти резонатор са једним праволинијским светловодом се чешће користи у конфигурацији код које је $a \gg k_{ss}$, код које је амплитудна карактеристика једнака јединици, док је фазна карактеристика нелинеарна, тако да се може искористити за компензацију дисперзије [43].

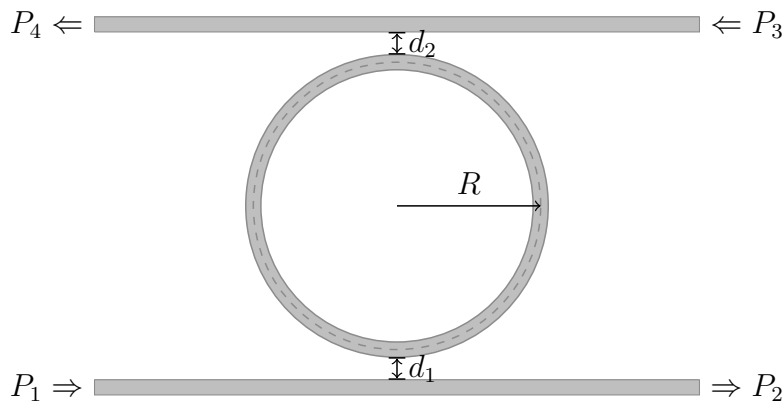


Слика 2.3: Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом за вредности које су блиске критичној спрези ($k_{ss} = 0.9$, $a = 0.85$).

2.2 Микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода

Конфигурација микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода се понаша као ускопојасни амплитудни филтар, који може додати или издвојити одређени фреквенцијски опсег улазног сигнала, па је из тог разлога назван ”додај-издвој” филтар.

Геометрија микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода је приказана на слици 2.4. Ознаке на слици, које се односе на димензије микро-прстенастог резонатора, имају исто значење као код прстена са спрегнутог са једним праволинијским светловодом. Једина разлика лежи у томе што се код прстена са два праволинијска светловода, у општем случају, могу јавити различита растојања између сваког од праволинијских светловода и прстена. Уколико се жели максималан пренос енергије од приступа P_1 до приступа P_4 , ова растојања морају бити идентична ($d_1 = d_2$) [26].

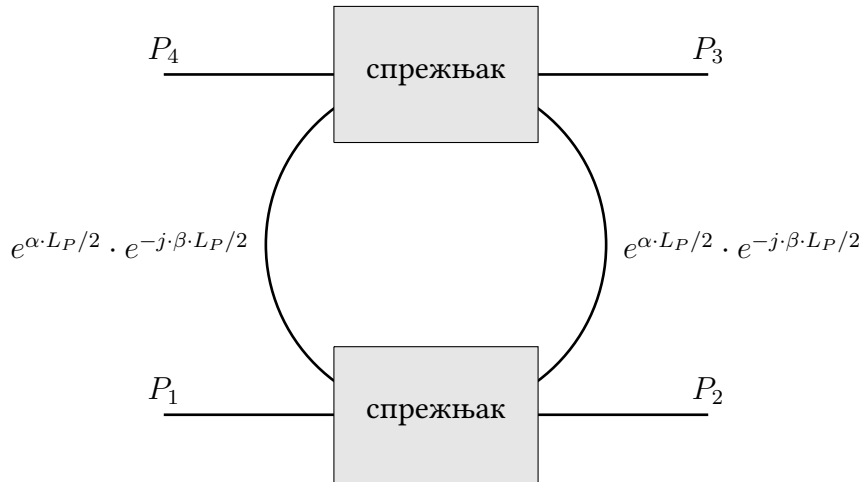


Слика 2.4: Микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода.

Еквивалентна шема микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода, неопходна за анализу методом спрегнутих модова, приказана је на слици 2.5, при чему оба спрежњака имају функцију преноса дату изразом (2.1).

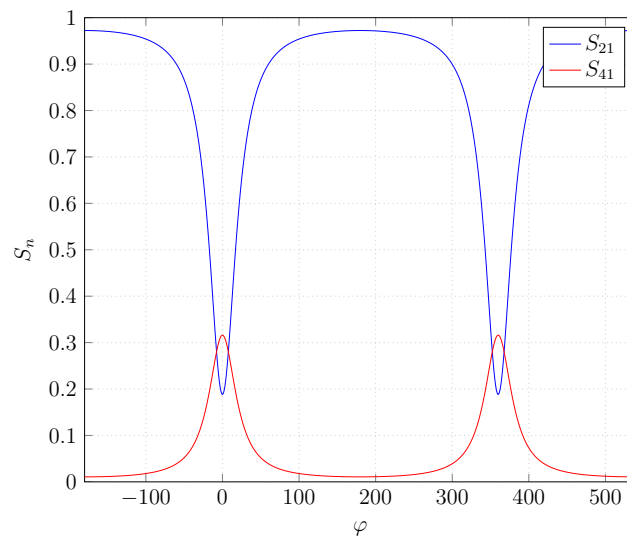
Коефицијенти трансмисије интензитета светлости, микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода дати су изразима [26, 43]:

$$S_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{k_{ss2}^2 \cdot a^2 - 2 \cdot k_{ss1} \cdot k_{ss2} \cdot a \cdot \cos\varphi + k_{ss1}^2}{1 - 2 \cdot k_{ss1} \cdot k_{ss2} \cdot a \cdot \cos\varphi + (k_{ss1} \cdot k_{ss2} \cdot a)^2} \quad (2.6)$$



Слика 2.5: Модел микропрстенастог резонатора са два праволинијска светловода.

$$S_{41} = \frac{I_4}{I_1} = \frac{a \cdot (1 - k_{ss1})^2 \cdot (1 - k_{ss2})^2}{1 - 2 \cdot k_{ss1} \cdot k_{ss2} \cdot a \cdot \cos\varphi + (k_{ss1} \cdot k_{ss2} \cdot a)^2} \quad (2.7)$$



Слика 2.6: Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода.

На слици (2.6), је приказана преносна карактеристика резонатора спрегнутог са два праволинијска светловода. Плавом бојом је приказана преносна карактеристика S_{21} , док је црвеном бојом приказана преносна карактеристика S_{41} , за случај $k_{ss1} = k_{ss2} = 0.9$ и $a = 0.85$. Са слике се види да ће интензитет светлости у праволинијском светловоду (плава линија) бити потиснут, али да неће бити једнак нули. Интензитет неће бити једнак нули зато што се коефицијет слабљења разликује од јединице, односно зато што има слабљења у лучном светловоду

($a^2 = e^{-\alpha \cdot L}$, $\alpha \neq 0$). У случају да је $a = 1$ уз $k_{ss1} = k_{ss2}$ коефицијент трансмисије S_{41} при резонатној фреквенцији би био једнак јединици. Како није могуће обезбедити да нема слабљења у прстену и да коефицијенти спреге оба праволинијска светловода са прстеном буду идентични, није могуће обезбедити да сва светлост из првог светловода у потпуности пређе у други.

2.3 Параметри микро-прстенастих резонатора

Пут који пређе талас кроз резонатор једнак је:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R \quad (2.8)$$

где је R растојање од осе резонатора до средине светловодног дела резонатора [44, рр. 5-9]. Фазна брзина мода који се простира кроз резонатор се може израчунати помоћу израза:

$$c = \frac{c_0}{n_{eff}} \quad (2.9)$$

где је c_0 брзина светлости у вакуму, док је n_{eff} ефективни индекс преламања.

Кружна учестаност се рачуна преко:

$$\omega = k \cdot c_0 \quad (2.10)$$

при чему је k таласни број за вакум, односно:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (2.11)$$

Користећи се дефиницијом таласног броја за вакум, ефективни индекс преламања се може увести преко израза:

$$\beta = k \cdot n_{eff} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_{eff}}{\lambda} \quad (2.12)$$

где је β фазни коефицијент простирања.

Микро-прстенасти резонатори се могу окарактерисати помоћу неколико параметара [45], међу којима су најзначајнији: резонатна талсна дужина, слободан спектрални опсег, фактор добротe, опсег резонанције и ”финеса”.

2.3.1 Резонантна таласна дужина

Основни параметар који описује микро-прстенасте резонаторе је резонантна таласна дужина прстенастог светловода. Резонантна таласна дужина се може израчунати према изразу:

$$\lambda_r = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot n_{eff}}{M} \quad (2.13)$$

где су:

- R - полупречник прстена
- n_{eff} - ефективни индекс преламања
- M - мод таласа у прстенастом светловоду

2.3.2 Слободан спектрални опсег ("Free Spectral Range" - FSR)

Слободан спектрални опсег оптичког резонатора представља растојање између две суседне резонантне таласне дужине. Упрошћен израз за рачунање слободног спектралног опсега се може добити помоћу фазног коефицијента простирања, занемарујући фреквенцијску зависност ефективног индекса преламања:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = -\frac{\beta}{\lambda} + k \cdot \frac{\partial n_{eff}}{\partial \lambda} \approx -\frac{\beta}{\lambda} \quad (2.14)$$

Што доводи до слободног спектралног опсега, који представља разлику између таласних дужина дефинисаних за вакуум, које одговарају резонантним учестаностима:

$$FSR = \Delta \lambda = -\frac{2 \cdot \pi}{L} \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)^{-1} \approx \frac{\lambda^2}{n_{eff} \cdot L} \quad (2.15)$$

Уколико се фреквенцијска зависност ефективног индекса преламања не може занемарити, фреквенцијска зависност се може укључити у израз за FSR преко групног индекса преламања n_g ,

$$\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} = -\frac{k}{\lambda} \cdot n_g \quad (2.16)$$

где је:

$$n_g = n_{eff} - \lambda \cdot \frac{\partial n_{eff}}{\partial \lambda} \quad (2.17)$$

тако да је:

$$FSR = \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{n_g \cdot L} \quad (2.18)$$

Групни индекс преламања се може користити уместо ефективног индекса преламања, избегавајући тиме апроксимације и добијајући прецизније вредности.

Уопштеније речено, слободан спектрални опсег резонатора који се састоји од више различитих средина, представља реципрочну вредност времена потребног импулсу да пређе читаву дужину резонатора.

Слободан спектрални опсег често ограничава оптички фреквенцијски опсег у коме се користи резонатор. Велика вредност слободног спектралног опсега је пожељнија, чиме би се омогућило преношење већег проја канала у опсегу између две суседне резонатне таласне дужине.

2.3.3 Ширина резонантне криве FWHM - "Full Width at Half Maximum"

Опсег резонанције представља опсег фреквенција око резонатне фреквенције чије су амплитуде веће од половине амплитуде на резонантној фреквенцији, односно описује ширину пика око резонатне фреквенције. За резонанцу реда M добија се:

$$FWHM = 2 \cdot \delta\lambda = \frac{k^2 \cdot \lambda_r^2}{\pi \cdot L \cdot n_{eff}} \quad (2.19)$$

2.3.4 "Финеса" - F

Однос FSR и FWHM на одговарајућој резонанци представља "финесу" F ("Finesse").

$$F = \frac{FSR}{FWHM} = \frac{\Delta\lambda}{2 \cdot \delta\lambda} \quad (2.20)$$

2.3.5 Фактор добротe Q-фактор

Према аналогiji са електричним колама, фактор добротe представља количину енергије коју резонатор губи по једном оптичком циклусу.

$$Q = \omega \cdot \frac{P_a}{P_g} \quad (2.21)$$

где су:

- P_a - акумулирана енергија резонатора
- P_g - губици енергије резонатора

Фактор доброте се може посматрати као могућност резонатора да одржи поље у простору или времену. Овај параметар одређује оштрину резонанце. Дефинише се и као однос резонантне таласне дужине и FWHM-а.

$$Q = \frac{\lambda}{2 \cdot \delta\lambda} = \frac{n_{eff} \cdot L}{\lambda} \cdot F \quad (2.22)$$

тако да се за кружни резонатор полупречника R односно дужине $L = 2 \cdot \pi \cdot R$, добија $Q = k \cdot R \cdot n_{eff} \cdot F$.

Из израза (2.22) може се видети да фактор доброте зависи од димензија резонатора (L). Иста вредност фактора доброте за резонаторе различитих димензија, даје различиту ширину резонанце. Из тог разлога се за описивање ”оштрине” резонанце уместо фактора доброте чешће користи ”Финеса”.

Из израза (2.22) се такође може видети директна зависност између фактора добротe и FWHM, што се може искористити за прорачун опсега фреквенција резонатора помоћу фактора добротe.

2.4 Конфигурација са хоризонталним спрезањем

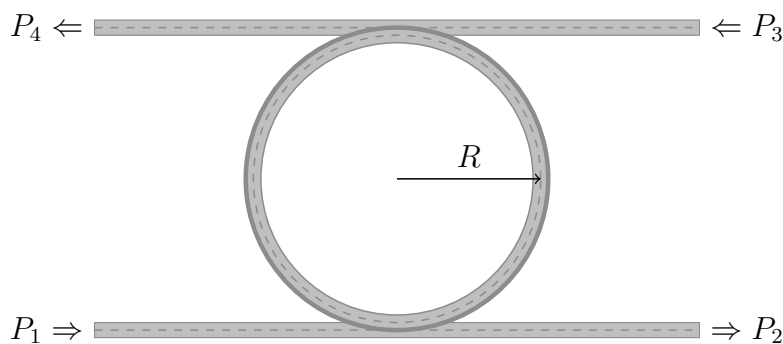
Код микропрстенастих резонатора са хоризонталним спрезањем, праволинијски светловод и прстен се налазе један поред другог у истој равни. Ова конфигурација је релативно једноставна за израду. Одговарајућа вредност коефицијента спреге се добија хоризонталним померањем праволинијског светловода у односу на прстен. Међутим, у неким применама се може јавити потреба за прецизно дефинисаним малим растојањима између праволинијског светловода и прстена. Таква растојања није могуће остварити конвенцијалном литографијом. Овај проблем се може решити коришћењем резонатора елиптичног облика или додавањем праволинијских сегмената прстену. Ове опције са друге стране доводе до смањивања полупречника прстена у циљу одржавања истог слободног спектралног опсега, што доводи до повећаних губитака у резонатору.

2.5 Конфигурација са вертикалним спрезањем

Код вертикалног спрезања, праволинијски светловод и прстен се налазе у различитим слојевима супстрата. Растојање између праволинијског светловода и прстена је дефинисано количином материјала који се нанесе изнад праволинијских светловода. Дебљина нанесеног материјала се може контролисати са великом прецизношћу и ови слојеви могу бити веома танки. На тај начин се коефицијент спреге, између праволинијског светловода и прстена, може прецизно подесити. Један од недостатака ове конфигурације су потешкоће при постављању прстена тачно изнад праволинијског светловода.

Преносна карактеристика вертикално спрегнутог резонатора, је еквивалентна преносној карактеристици хоризонтално спрегнутог резонатора, с тим што се коефицијенти спреге разликују. Због потребе за елиминацијом виших модова, вертикално спрегнути резонатор се најчешће прави са одређеним офестом између средње линије светловода прстена и средње линије праволинијског светловода.

По питању моделовања, латерална конфигурација има предност у односу на вертикалну конфигурацију, јер се код латералне конфигурације може извршити трансформација 3D проблема на 2D модел који је мање захтеван по питању ресурса рачунара. Са друге стране, код конфигурације са вертикалном спрегом, примена 3D модела је неизбежна.



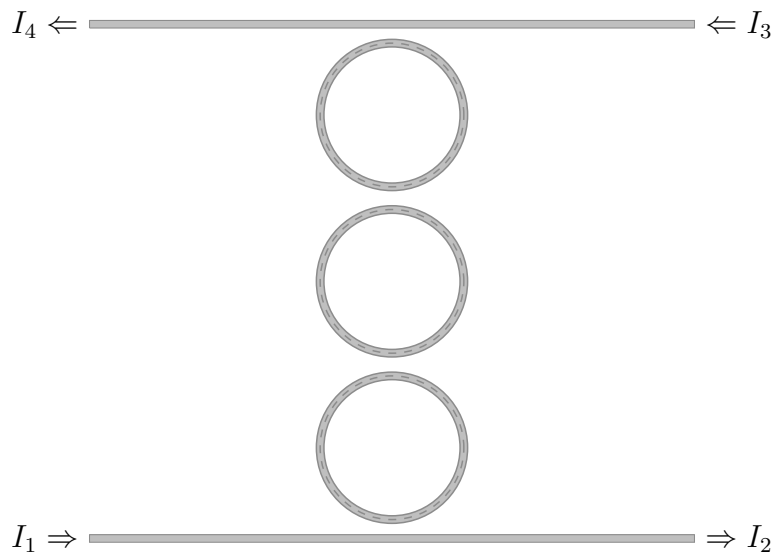
Слика 2.7: Вертикално спрегнут микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода.

2.6 Каскадна конфигурација

Преносна карактеристика микропрстенастог резонатора, било да је направљен у конфигурацији са вертикалним или хоризонталним спрезањем, је веома узана за многе примене. Код филтара, мултиплексера, демултиплексера, често је неопходна равна карактеристика у одређеном фреквенцијском опсегу. То се може постићи каскадном везом више прстенова. Каскадна веза може бити серијска или паралелна.

2.6.1 Серијска конфигурација

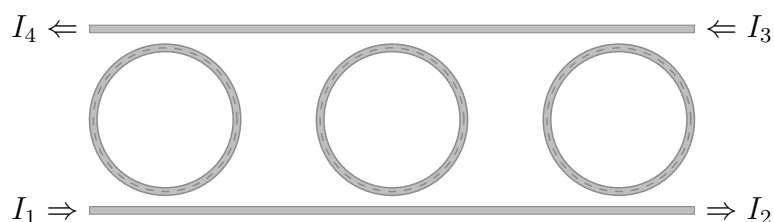
Серијска конфигурација је шематски приказана на слици 2.8. Суштина серијске конфигурације лежи у томе да је одређени број спрегнутих прстенова смештен између два праволинијска светловода, који представљају улазни и излазни приступ. Спрега између светловода и прстена и прстена међусобно дефинисана је коефицијентом спреге k . Полупречник прстена и растојање су означени са d и g . Светлост која се простире кроз улазни праволинијски светловод, делом наставља да се креће кроз тај светловод, а део путем спреге прелази у први прстен. Из првог прстена се путем спреге, предаје другом прстену и тако редом до излазног светловода. Код ове конфигурације је битно да сви прстенови буду истих резонантних учестаности [46].



Слика 2.8: Серијска конфигурација микро-прстенстих резонатора.

2.6.2 Паралелна конфигурација

За разлику од серијске конфигурације, код паралелне конфигурације прстенови су постављени један поред другог, тако да постоји спрега сваког од њих са праволинијским светловодима, али не постоји спрега између прстенова међусобно. Ова конфигурација има предност у односу на серијску конфигурацију у томе што није пресудно да прстенови буду са истим резонантним учестаностима. Међутим, како се сигнал на излазу добија интерференцијом сигнала који се добијају из спреге појединачних прстенова са излазним светловодом, растојање између прстенова игра велику улогу у обликовању карактеристике сигнала на излазу. Из тог разлога је ова конфигурација ускопојасна.



Слика 2.9: Паралелна конфигурација микро-прстенастих резонатора.

2.7 Таласна једначина

Електромагнетни талас који се простире кроз светловод, се може описати Максвеловим једначинама:

$$\nabla \cdot \vec{B}(r, t) = 0 \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(r, t) = \rho(r, t) \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \vec{E}(r, t) + \frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \vec{H}(r, t) - \frac{\partial \vec{D}(r, t)}{\partial t} = \vec{J}(r, t) \quad (2.26)$$

где су: $\vec{E}(r, t)$ и $\vec{H}(r, t)$ вектори електричног и магнетног поља, $\vec{D}(r, t)$ и $\vec{B}(r, t)$ вектори електричне и магнетске индукције, $\rho(r, t)$ и $\vec{J}(r, t)$ слободна наелектрисања и вектор густине струје.

За изотропне, ненамагнетисане материјале без губитака, какав је случај у микро-прстенастим резонаторима, веза између електричног поља и електричне индукције, односно између магнетног поља и магнетске индукције је линеарна, одно-

сно:

$$\vec{D}(r, t) = \varepsilon \cdot \vec{E}(r, t) = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E}(r, t) \quad (2.27)$$

$$\vec{B}(r, t) = \mu \cdot \vec{H}(r, t) = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(r, t) = \mu_0 \cdot \vec{H}(r, t) \quad (2.28)$$

Узимајући у обзир да у светловоду нема слободних наелектрисања и струја, Максвелове једначине ће имати облик:

$$\nabla \cdot \vec{H}(r, t) = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \cdot \vec{E}(r, t)) = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \vec{E}(r, t) + \mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \vec{H}(r, t) - \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.32)$$

Уколико се посматра хармонијска зависност електричног поља $\vec{E}(r, t) = \vec{E}(r) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$, једначине (2.29)-(2.32) добијају облик:

$$\nabla \cdot \vec{H}(r) = 0 \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \cdot \vec{E}(r)) = 0 \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \vec{E}(r) + j \cdot \mu \cdot \omega \cdot \vec{H}(r) = 0 \quad (2.35)$$

$$\nabla \times \vec{H}(r) - j \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot \vec{E}(r) = 0 \quad (2.36)$$

Применом оператора ротор, на једначину (2.35) и заменом (2.36), добија се Хелмхолцова једначина.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(r) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}(r) = 0 \quad (2.37)$$

односно

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(r) + k_0^2 \cdot n^2 \cdot \vec{E}(r) = 0 \quad (2.38)$$

где је k_0 , таласни вектор за вакуум ($k_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_0}$).

2.8 ТЕ, ТМ модови таласа

Приликом решавања једначине (2.38), за талас који се простире у правцу z осе, добијају се решења која се могу груписати у две основне групе решења:

- решења код којих је електрично поље у равни x-y (TE таласи)
- решења код којих је магнетно поље у равни x-y (TM таласи)

Код решења светловодних структура, из групе TE таласа, када се талас простира у правцу z осе, електрично поље се може представити у облику $\vec{E}(r) = \vec{E}(x, y) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$, где β представља константу простирања. Заменом у (2.38) добија се једначина облика:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial y^2} - (\beta^2 - k_0^2 \cdot n^2) \cdot \vec{E}(x, y) = 0 \quad (2.39)$$

Решавањем једначине (2.39), добијају се две основне информације о понашању електромагнетних таласа у светловоду. Добија се ефективни индекс преламања дефинисан са $n_{eff} = \frac{\beta}{k_0}$, који одговара сопственој вредности одговарајућег мода, као и профил мода који се састоји од векторских компоненти електромагнетног поља. За вођене модове у светловоду, ефективна вредност индекса преламања се налази између вредности индекса преламања светловода и супстрата.

Слично се добија и код TM таласа, стим што се једначине решавају за магнетно поље:

$$\frac{\partial^2 \vec{H}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}(x, y)}{\partial y^2} - (\beta^2 - k_0^2 \cdot n^2) \cdot \vec{H}(x, y) = 0 \quad (2.40)$$

Нумеричке анализе су показале да је слабљење *TM* модова веће од слабљења *TE* модова [47].

За диелектрични таласовод не постоји аналитичко решење једначине (2.39), већ се оно тражи апроксимативно (Маркатилијевим апроксимацијама) или нумерички (методом коначних разлика, методом коначних елемената).

Маркатилијева метода се заснива на одређивању ефективног индекса преламања на основу одговарајућих трансцедентних једначина за TE, односно TM модове. Једна од претпоставки од који полази Маркатилијева теорија, захтева да светловод буде шири у односу на своју висину.

Нумеричко одређивање ефективног индекса преламања се заснива на решавању једначина (2.39) и (2.40) по фазном коефицијенту (β). Фазни коефицијент ће бити једнак сопственим вредностима једначине (2.39) односно (2.40), за TE или TM модове, респективно, док ће сопствени вектор који се добија решавањем истих једначина, представљати мод поља у пресеку светловода. Ефективна вредности

индекса преламања се добија на основу релације:

$$\beta = n_{eff} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (2.41)$$

2.8.1 Рачунање резонантне учестаности и фактора добротe преко сопствене вредности

Рачунање резонантне учестаности и фактора добротe се најчешће своди на примену нумеричких метода за одређивање сопствених вредности Хелмхолцове једначине у комплексном домену:

$$\nabla^2 E + \lambda_{eig}^2 E = 0 \quad (2.42)$$

Решење ове једначине је сопствена вредност облика:

$$-\lambda_{eig} = \delta + j \cdot \omega \quad (2.43)$$

где је ω резонантна учестаност, док параметар δ представља губитке резонатора. Фактор добротe се може израчунати из сопствене вредности преко:

$$Q = \frac{\omega}{2 \cdot |\delta|} \quad (2.44)$$

Проблем одређивања фактора добротe код оваквих система лежи у чињеници да се талас који напусти резонатор рефлектује од границе домена назад према домену, формирајући тиме стојећи талас који не губи енергију. Према [48], за тачно одређивање фактора добротe резонатора неопходно је коришћење савршено прилагођеног слоја.

2.8.2 Савршено прилагођен слој

Због рефлексије од границе домена, решења Хелмхолцове једначине формирају стојеће таласе, што води ка бесконачној вредности фактора добротe. Бесконачна вредност фактора добротe није од користи приликом одређивања преносне карактеристике микропрстенастог резонатора.

Код проблема код којих поље експоненцијално слаби, савршени проводник на границама домена неће значајно утицати на коначно решење, јер ће талас бити довољно ослабљен, тако да ће се мала количина енергије рефлектовати назад у домен. О утицају рефлектованих таласа на укупно решење проблема, треба водити

рачуна код проблема код којих поље споро опада, идући ка границама домена. Код таквих проблема или треба узети довољно велики домен, или додатно ослабити поље приликом простирања према граници домена [49].

Због ограничене количине меморије рачунара, постоји граница повећања димензија домена. Да би се моделовали домени већих димензија, а да се при томе остане на мањем броју тачака, потребно је применити трансформацију кордината. Трансформација подразумева да се уместо кординате x користи трансформисана кордината $\tilde{x} = \tanh(x)$, чиме се област $x \in (-\infty, \infty)$ пресликава у област $\tilde{x} \in (-1, 1)$. На тај начин је домен бесконачних димензија преликан у домен коначних димензија при чему се једначине решавају у преликаном домену. Међутим, због осцилација, приликом решавања таласних једначина, трансформација кордината наилази на проблем, јер се добијају решења која осцилују бесконачно великом брзином [49]. Из тог разлога се уместо трансформације кордината прешло на решења која се односе на апсорпцију таласа.

Апсорпција таласа се може спровести у домену кроз који се простире талас, или на самој граници домена. До апсорпције таласа на самој граници домена долази због одговарајућих граничних услова, али је то могуће извести само ограничен број праваца простирања таласа.

Да би се апсорпција извршила за шири дијапазон углова простирања таласа, на граници домена се додају слојеви, који у одређеном делу простора апсорбују енергију таласа. Ови слојеви морају бити тако дефинисани да довољно ослабе прогресивни талас, а да при томе и они сами не унесу додатне рефлексије, односно да буду прилагођени на простор који им претходи.

Коначна дебљина апсорбујућег слоја омогућава да се део трансмитоване енергије ипак врати у домен прорачуна. Поред тога, дискретизација Максвелових једначина уноси грешке. Показало се да савршено прилагођен слој може довести до резултата са грешкама услед рефлексије од -80dB до -100dB.

Параметри конститутивних једначина који се односе на карактеристике савршено прилагођеног слоја се могу дефинисати преко:

$$[\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 \cdot [K] \quad (2.45)$$

$$[\bar{\mu}] = \mu_0 \cdot [K] \quad (2.46)$$

Тачан облик тензора који се појављује у конститутивним једначинама је производ облика:

$$[K] = [K]_x \cdot [K]_y \cdot [K]_z \quad (2.47)$$

где је компонента $[K]_\eta$, одговорна за слабљење у правцу η ($\eta = x, y, z$), а одговарајуће компоненте:

$$[K]_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_x} & 0 & 0 \\ 0 & k_x & 0 \\ 0 & 0 & k_x \end{bmatrix}, [K]_y = \begin{bmatrix} k_y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_y} & 0 \\ 0 & 0 & k_y \end{bmatrix}, [K]_z = \begin{bmatrix} k_z & 0 & 0 \\ 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_z} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Најпростији облик коефицијента k_η је према [50]

$$k_\eta = 1 + \frac{\sigma_\eta}{j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0}, \quad \sigma_\eta > 0 \quad (2.49)$$

Граница савршено проводног слоја и домена, представља дисконтинуитет проводности σ_η . Да би се умањиле нумеричке рефлексије изазване дисконтинуитетима проводности, параметар σ_η је изабран да буде функција одговарајуће координате η . Уколико се изабере да је $\sigma_\eta = 0$, односно $k_\eta = 1$, граница домена модела и савршено проводног слоја постаје континуална, чиме се смањују нумеричке грешке. Повећање вредности параметра σ_η кроз савршено прилагођен слој, омогућава веће укупно слабљење, док истовремено, то повећање одржава вредност нумеричких рефлексија у оквиру граница. У [50] је предложено да профил проводности буде облика:

$$\sigma_\eta(\eta) = \frac{\sigma_{max} \cdot |\eta - \eta_0|^m}{\delta_{PML}^m} \quad (2.50)$$

где је δ_{PML} дебљина савршено прилагођеног слоја, η_0 одговарајућа координата границе између ваздуха и савршено прилагођеног слоја, а m ред полиномијалне промене. Према [50] сматра се да су оптималне вредности за m између 3 и 4. За жељени коефицијент рефлексије (Γ), σ_{max} се може одредити према изразу:

$$\sigma_{max} \approx \frac{(m+1) \cdot \ln(1/\Gamma)}{2 \cdot Z_T \cdot \delta_{PML}} \quad (2.51)$$

где је Z_T таласна импеданса савршено прилагођеног слоја. Емпиријска истраживања су показала, да је за широк опсег проблема, оптимална вредност σ_{max} дата изразом:

$$\sigma_{opt} \approx \frac{m+1}{150 \cdot \pi \cdot h_\eta \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} \quad (2.52)$$

где су h_η инкремент растојања (димензија ћелије) у η правцу, а ε_r пермитивност

материјала који се граничи са савршено прилагођеним слојем.

2.9 Параметри расејања

Преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора је одређена параметрима расејања. Општи облик матрице расејања за микро-прстенасти резонатор са два праволинијска светловода је матрица облика:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Елементи матрице расејања се могу одредити на основу израчунатог електричног поља на приступу добијеног из FEM анализе (E_i) и електричног поља одговарајућег мода на приступу добијеног из анализе модова на приступу (E_{inc} , E_{out}). Веза између електричног поља и одговарајућег параметра расејања дата је изразима:

$$S_{11} = \frac{\int_{A_1} (E_1 - E_{inc}) \cdot E_{inc} \cdot dS}{\int_{A_1} E_{inc} \cdot E_{inc} \cdot dS} \quad (2.54)$$

где је A_1 површина пресека приступа P_1 , E_1 израчунато електрично поље на приступу један, E_{inc} побудно поље на приступу један добијено методом анализе модова, односно

$$S_i = \frac{\int_{A_i} E_i \cdot E_{out} \cdot dS}{\int_{A_i} E_{out} \cdot E_{out} \cdot dS} \quad (2.55)$$

за остале параметре расејања, при чему се E_{out} добија методом анализе модова за одговарајући приступ.

2.9.1 Гранични услови на приступима

Како се талас може рефлектовати и од приступа и тиме нарушити прорачунски простор, и за приступе је неопходно дефинисати одговарајуће граничне услове. Гранични услови на приступима се добијају из мешовитих граничних услова. Израз за мешовите граничне услове се може написати у облику

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U}^{inc} \quad (2.56)$$

одакле је

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) = \vec{U}^{inc} - \gamma \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (2.57)$$

Како је

$$(\vec{W} \times (\nabla \times \vec{E})) \cdot \vec{n} = -(\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E})) \cdot \vec{W} = -\vec{W} \cdot (\vec{U}^{inc} - \gamma \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) \quad (2.58)$$

$$\vec{W} \cdot (\gamma \cdot \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) = \gamma \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{W} \times \vec{n}) = -\gamma \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) \cdot (\vec{n} \times \vec{W}) \quad (2.59)$$

$$\int_V (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) \cdot dV + \oint_S (\vec{W} \cdot \vec{U}^{inc} + \gamma \cdot (\vec{n} \times \vec{W}) \cdot (\vec{n} \times \vec{E})) \cdot dS - \int_V \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \vec{W} \cdot \vec{E} \cdot dV = 0 \quad (2.60)$$

За случај TEM мода таласа, заменом израза за поље у једначину (2.56) добија се:

$$\vec{U}^{inc} = -2\gamma \vec{E}^{inc} \quad (2.61)$$

3 Методе које се користе за прорачун микро-прстенастих резонатора

3.1 Метод коначних елемената

Основна идеја нумеричких метода је дискретизација непознате величине. Процес дискретизације подразумева генерисање мреже, која се добија дељењем читавог пробелема на мале области. Облик расподела и димензије тих области зависе од методе која се користи. Генерално, прецизност решења зависи од нивоа дискретизације. Што су елементи дискретизације мањи, то је тачност решења већа. Када димензије елемената теже нули, решење добијено нумеричком методом, тежи тачном решењу. Како су ресурси рачунара ограничени, мора се направити компромис између времена потребног за симулацију и меморијских захтева рачунара и тачности решења.

Метод коначних елемената је стандардни алат за решавање диференцијалних једначина у многим областима. Иако су почетци овог метода дати од стране Куранта 1943. године, овај метод није употребљен у решавање проблема електромагнетике све до 1968. Метод коначних разлика и метод момената концептуално су простији од метода коначних елемената, али је зато метод коначних елемената моћнији за решавање проблема који укључују комплексне геометрије и нехомогену средину. Предност методе коначних елемената лежи у коришћењу неуниформних мрежа. Ове мреже могу дати добар приказ закривљених објеката, које је тешко приказати униформним мрежама које користи метод коначних разлика. Неуниформне мреже омогућавају генерисање веће густине мреже локално, како би се добила боља структура геометрије и како би се представиле брже промене решења [51].

Општост методе, омогућава прављење општих компјутерских програма за ре-

шавање широког опсега проблема. Због тога, програми развијени за поједине дисциплине, успешно су примењени за решавање проблема у другим областима, уз мало или без модификација [52].

Ограничење методе коначних елемената у односу на методу коначних разлика лежи у томе што се занављање поља у симулацијама у временском домену не може извести за генерални случај. Уместо тога, у циљу занављања решења, мора се поново решавати линеаран систем једначина. Као последица тога, исти број елемената који би се користио код обе методе, код методе коначних елемената захтевао више ресурса како процесора, тако и меморије у односу на методу коначних разлика [51]. Са друге стране, приликом одређивања преносне карактеристике у фреквенцијском домену, метода коначних елемената је адекватнија у односу на методу коначних разлика.

3.2 Општи алгоритам методе коначних елемената

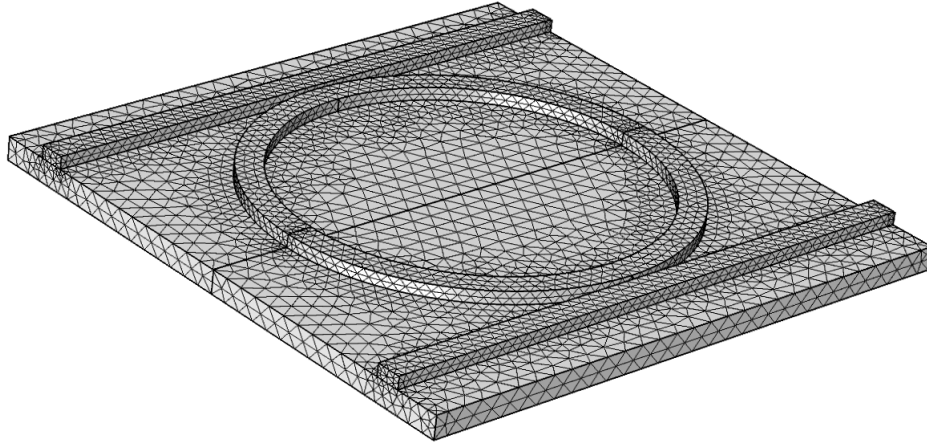
Метода коначних елемената се у суштини заснива на следећим корацима:

- дискретизација домена у коме се тражи решење на коначан број мањих региона или елемената
- апроксимација решења експанзијом на коначан број базних функција
- формирање резидуала $r = L[f] - s$, који треба минимизирати; у суштини резидуал неће у свакој тачки бити једнак нули, али ће бити једнак нули у такозваном "слабом" ("weak") смислу
- избор тежинских функција (колико има непознатих коефицијената), којима се множи резидуал; обично су тежинске функције једнаке базним функцијама и тада се метод зове Галеркинов метод
- изједначавање резидуала помножених тежинским функцијама са нулом ради одређивања непознате функције у чворовима.

3.3 Генерисање мреже

Приликом дељења структуре на елементе мора се водити рачуна, да елементи не садрже делове структура различитих физичких својстава (пермитивности

и пермеабилности) и да су делови мреже на местима где се функција брже мења гушћи, док су у деловима структуре где се функција спорије мења ређи.



Слика 3.1: FEM мрежа 3D модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода (ваздушни омотач је уклоњен како би се видели светловоди).

Уколико се решење не познаје унапред, најчешће се узима униформна густина мреже. Први корак у генерисању мреже је дељење региона на квадрилатералне блокове. Под-домени различитих конститутивних параметара морају бити представљени у различитим блоковима. Као улазни податак се уноси топологија блока и координате осам тачака које дефинишу сваки од блокова. За сваки од блокова се дефинише густина мреже у одговарајућем правцу, као и тежински коефицијенти за мрежу различите густине дуж блока. Приликом дефинисања броја елемената дуж одговарајућег правца, треба имати у виду да ће код суседних под-домена, дуж заједничке ивице густина мреже бити иста.

3.3.1 Конвергенција решења

Нумеричке методе никада не дају тачно решење. Тачност решења зависи од густине мреже, односно од броја елемената по таласној дужини. Уколико метода ради како треба, са смањењем димензија ћелије, резултат ће конвергирати ка тачном решењу [52]. Најпростији начин провере конвергенције решења је преко низа симулација са униформним повећањем густине мреже. На тај начин се мо-

же одредити ред конвергенције и екстраполирати тачна вредност резултата [51].

У општем случају, ред конвергенције није познат унапред, али стандардна линеарна метода коначних елемената конвергира ка тачном решењу са грешком реда h^2 , где је h димензија коначног елемента. Сингуларитети смањују ред конвергенције.

Једноставан начин да се одреди ред конвергенције је прорачун за геометријску секвенцу димензија ћелије $h_i/h_{i+1} = h_{i+1}/h_{i+2}$. Претпостављајући да је члан најнижег реда у Тејлоровом развоју довољан, односно да је $f(h) = f_0 + f_p \cdot h^p$, ред конвергенције се може проценити преко:

$$p = \frac{\ln \left(\frac{f(h_i) - f(h_{i+1})}{f(h_{i+1}) - f(h_{i+2})} \right)}{\ln \left(\frac{h_i}{h_{i+1}} \right)} \quad (3.1)$$

Међутим, у пракси је често тешко постићи униформну промену мреже на читавом домену. У таквим ситуацијама се, уколико конвергенција покаже неку регуларност, приступа се униформном повећању густине дела мреже који доминатно утиче на конвергенцију решења [51].

3.3.2 Адаптивно прилагођавање мреже

Троугаони елементи омогућују локалну поправку густину мреже. Висока густина се може направити на местима где се то захтева, на пример близу сингуларитета, док на осталим местима се може користити мрежа мање густине. То омогућава усмеравање рачунарских ресурса тамо где је најпотребније.

Уопштено гледано, није унапред познато како подесити мрежу да би се добила оптимална ефикасност. Зато су адаптивне шеме обично базиране на естимацији постериори грешке или индикатора грешке [51].

3.4 Развој у коначан број базних функција

Након деобе читавог домена на елементе, следећи корак је одређивање апроксимативне функције на елементу ξ . Интерполацијом решења на појединачним елементима, добија се решење за читав домен. Апроксимативно решење за читав домен се може написати у облику:

$$f(r) \approx \sum_{\xi=1}^N f_{\xi}(r) \quad (3.2)$$

где је N број елемената на који је подељен регион. Најчешћа апроксимација функције $f_{\xi}(r)$ је полиномијалног облика и може се представити као сума амплитуда функција у чворовима елемената:

$$f_{\xi}(r) = \sum_{i=1}^N \zeta_i(r) \cdot f_{\xi i} \quad (3.3)$$

где је N број чворова елемента, $f_{\xi i}$ амплитуда функције у i -том чвору елемента, док су коефицијенти $\zeta_i(r)$ облици функције везане за одговарајући елемент ("element shape functions") са особинама:

$$\zeta_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i(r) = 1 \quad (3.5)$$

3.5 Формирање резидуала

Са математичке стране гледишта, за разлику од методе коначних разлика, која се базира на диференцијалним формулацијама, метод коначних елемената се базира на интегралним формулацијама [53]. Савремене интегралне формулације, методе коначних елемената, се добијају из две процедуре: варијационе формулације и формулације тежинских остатака.

3.5.1 Вариациона формулација

Прве формулације методе коначних елемената су се заснивале на варијационој техници. Вариациони модели су обично укључивали одређивање параметара везаних за чворове, који остварују екстремну (минималну или максималну) вредност одређене интегралне релације познате као функционал. У већини случајева је могуће повезати физичко значење интеграла чији се екстремум тражи. Многи физички проблеми имају вариациону формулацију која резултује квадратном формом. То даје алгебарску једначину за систем који је симетричан и позитивно

дефинитан.

Решење које задовољава стационарни (екстремни) случај еквивалентно је решењу одговарајуће диференцијалне једначине, познате као Ојлерова једначина. Многи физички проблеми су дефинисани у виду диференцијалних једначина. Метод коначних елемената захтева интегралну формулацију. Због тога се мора потражити функционал чија Ојлерова једначина одговара датој диференцијалној једначини, заједно са граничним условима. На жалост то је често тежак или готово немогућ задатак. Зато се уместо формулације преко функционала, све више потенцира на разним техникама са тежинским резидуалима.

Пример једнодимензионог интегралног израза је функционал облика:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L [K \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + H \cdot f^2] \cdot dx \quad (3.6)$$

Минимитирање овог функционала је еквивалентно решавању диференцијалне једначине облика:

$$K \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - H \cdot f = 0 \quad (3.7)$$

3.5.2 Метод тежинских резидуала

Овај метод полази од диференцијалне једначине облика:

$$L(\Phi) = Q \quad (3.8)$$

Након тога се претпоставља апроксимативно решење (Φ^*) које се замењује у диференцијалну једначину. Пошто је претпоставка апроксимативна, заменом у једначину 3.8, добија се остатак R :

$$L(\Phi^*) - Q = R \quad (3.9)$$

Иако се не може постићи да остатак буде једнак нули, могуће је постићи да интеграл остатка помножен тежинском функцијом, у домену прорачуна буде једнак нули.

$$I = \int_{\Omega} R \cdot W_{\xi} \cdot d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

где је W_ξ тежинска функција.

Избор тежинске функције одређује која је техника употребљена:

- Галеркинов приступ: $W_\xi = \Phi^*$
- критеријум најмањих квадрата: $W_\xi = \frac{\partial R}{\partial \Phi^*}$
- процедура поклапања у тачкама: $W_\xi = \delta_D$, где је δ_D Дираков импулс.

3.6 Метода спрегнутих модова зависних од времена

Метода спрегнутих модова зависних од времена је уведена педесетих година прошлог века, за анализу микроталасних уређаја. Пирс је 1954 године развио ову теорију за апликације које укључују цеви са прогресивним таласима. Примена ове методе у анализи оптичких уређаја почела је седамдесетих година прошлог века. Метода спрегнутих модова је заживела у то време због ограничених хардверских ресурса рачунара у анализи појава које се јављају код спрегнутих светловода. Међутим, и поред брзог развоја рачунарске технике и експоненцијалног раста ресурса рачунара, метода спрегнутих модова није изгубила на значају [54].

Теорија спрегнутих модова зависних од времена полази од претпоставке да се при резонанци сва енергија налази у прстену и да се неким од механизма предаје спољашњој средини у виду губитака. Уколико се у близини прстена налазе спрегнути светловоди, мањи део енергије коју предаје прстен биће израчен у виду нежељених губитака, док ће већи део енергије бити предат спрегнутим светловодима. Параметар који описује брзину губитка енергије прстена је време (τ) за које ће амплитуда поља у прстену опасти за вредност Ојлерове константе (e). Уколико прстен губи енергију на више начина, онда ће еквивалентно време губитка енергије бити једнако:

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \quad (3.11)$$

Како и фактор добротe прстена описује губитке енергије, постоји веза између времена губитка енергије и фактора добротe. Веза је дата изразом:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot \tau}{2} \quad (3.12)$$

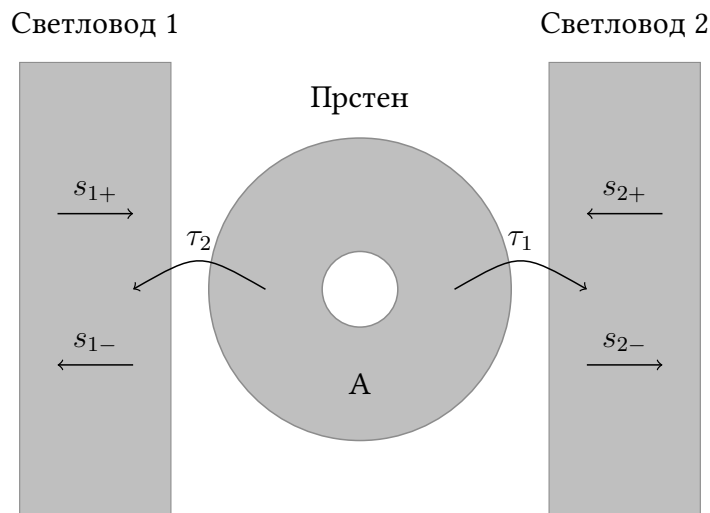
Како је веза линеарна, еквивалентна вредност фактора добротe прстена, за слу-

чај када се енергија прстена губи на више начина, биће једнака:

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \quad (3.13)$$

Извођење једначина методе спрегнутих модова се базира на неколико претпоставки, као што су: слаба спрега прстена и праволинијских светловода, линеарност, временска непроменљивост материјала и геометрије, одржање енергије. Најважнија претпоставка од свих је слаба спрега. Слаба спрега подразумева да се у току једног периода, предаје мали део енергије прстена, да је опадање енергије експоненцијално и да је решење поља у прстену приближно једнако решењу поља прстена без губитака.

Метода полази од претпоставке да је поље у прстену пропорционално некој променљивој A . Ова променљива је комплексна и у себи садржи и компоненту амплитуде и фазе. Како она може да се изабере произвољно, бира се тако да $|A|^2$ представља електромагнетну енергију смештену у прстену. Поља у праволинијским светловодима се могу представити као сума долазећих и одлазећих модова који се могу представити комплексним амплитудама $s_{l\pm}$. Са s_{l+} се означава амплитуда таласа који иде ка прстену, а са s_{l-} амплитуда таласа који иде од прстена. И ове амплитуде се бирају тако да $|s_{l\pm}|^2$ представљају снагу која иде у одговарајућем смеру. Смањење амплитуде поља у прстену, који настаје због предаје енергије праволинијским светловодима, описује се константама τ_1 и τ_2 .



Слика 3.2: Шема спреге прстена са праволинијским светловодима према теорији спрегнутих модова зависних од времена.

Како терорија спрегнутих модова зависних од времена подразумева експоненцијално слабљење амплитуде поља, функција промене амплитуде у прстену (A), мора задовољити диференцијалну једначину облика:

$$\frac{dA}{dt} = -j \cdot \omega_0 \cdot A - \frac{A}{\tau} \quad (3.14)$$

чије решење је функција експоненцијалног облика:

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t - t/\tau} \quad (3.15)$$

Ако се укључе светловоди, енергија таласа s_+ се може предати прстену (коэффициент α) или се рефлектовати (коэффициент Γ) у талас s_- или се део енергије предаје прстену а део енергије рефлектује. Једначине најопштијег облика које описују микро-прстенасти резонатор ће бити облика:

$$\frac{dA}{dt} = -j \cdot \omega_0 \cdot A - \frac{A}{\tau_1} - \frac{A}{\tau_2} + \alpha_1 \cdot s_{1+} + \alpha_2 \cdot s_{2+} \quad (3.16)$$

$$s_{1-} = \Gamma_1 \cdot s_{1+} + \gamma_1 \cdot A \quad (3.17)$$

$$s_{2-} = \Gamma_2 \cdot s_{2+} + \gamma_2 \cdot A \quad (3.18)$$

где су α_l и γ_l коэффициенти спреге праволинијског светловода и прстена, док Γ_l представља коэффициент рефлексије, а коэффициенти τ_l описују слабљење амплитуде услед предаје енергије праволинијским светловодима. Уколико се узме да $\tau_1 \rightarrow \infty$ и $s_{1+} = 0$, $s_{2+} = 0$, и применом закона о одржању енергије, добија се да су $\alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} = \gamma_2$ и да је $\Gamma_2 = -1$. Слично се добија и за $\tau_2 \rightarrow \infty$ и $s_{1+} = 0$, $s_{2+} = 0$, одакле следи да је $\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} = \gamma_1$ и да је $\Gamma_1 = -1$.

Према томе, систем једначина према методи спрегнутих модова зависних од времена ће имати облик:

$$\frac{dA}{dt} = -j \cdot \omega_0 \cdot A - \frac{A}{\tau_1} - \frac{A}{\tau_2} + \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} \cdot s_{1+} + \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} \cdot s_{2+} \quad (3.19)$$

$$s_{1-} = -s_{1+} + \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} \cdot A \quad (3.20)$$

$$s_{2-} = -s_{2+} + \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} \cdot A \quad (3.21)$$

Како код линераних система, ако улаз осцилује са кружном учестаношћу ω , поље у свакој тачки мора да осцилује са чланом $e^{-j \cdot \omega \cdot t}$ тада ће извод по времену

бити:

$$\frac{dA}{dt} = -j \cdot \omega \cdot A \quad (3.22)$$

Ако се узме да је $s_{2+} = 0$, односно да нема побуде у другом светловоду, онда ће једначине микро-прстенастог резонатора имати облик:

$$-j \cdot \omega \cdot A = -j \cdot \omega_0 \cdot A - \frac{A}{\tau_1} - \frac{A}{\tau_2} + \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} \cdot s_{1+} \quad (3.23)$$

$$s_{1-} = -s_{1+} + \sqrt{\frac{2}{\tau_1}} \cdot A \quad (3.24)$$

$$s_{2-} = \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} \cdot A \quad (3.25)$$

Решавањем једначина (3.23-3.25), избацавањем амплитуде поља у прстену (A), добијају се изрази за коефицијент трансмисије и рефлексије.

$$S_{41}(\omega) = \frac{|s_{2-}|^2}{|s_{1+}|^2} = \frac{\frac{4}{\tau_1 \cdot \tau_2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)^2} \quad (3.26)$$

$$S_{21}(\omega) = \frac{|s_{1-}|^2}{|s_{1+}|^2} = \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)^2} \quad (3.27)$$

Често се коефицијент трансмисије приказује у функцији од фактора добротe. Уколико енергија из резонатора прелази истом брзином у оба праволијска светловода, како је $1/\tau = 1/\tau_1 + 1/\tau_2 = 2/\tau_1$ и $Q = \omega_0 \cdot \tau/2$, коефицијенти трансмисије ће бити једнаки:

$$S_{41}(\omega) = \frac{\frac{1}{4 \cdot Q^2}}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \quad (3.28)$$

$$S_{21}(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \quad (3.29)$$

Из претходних израза се види да је за одређивање преносне карактеристике микро-прстенастог реонатора неопходно одредити само два параметра, резонантну учестаност прстена и одговарајући фактор добротe.

3.7 Метод коначних разлика у временском домену

Метода коначних разлика у временском домену је честа метода за моделовање електромагнетних проблема. Једноставна је и за разумевање и по питању при-

мене. То је метода која решава проблем у временском домену, тако да зависи од побуде која се користи. Фуријером анализом добијеног резултата из временског домена, добија се преносна карактеристика у фреквенцијском домену.

Ова метода директно апроксимира диференцијални оператор у Максвеловим једначинама, на мрежи дискретизованој у времену и простору. Метода коначних разлика користи експлицитан диференцијални приступ, без постављања матричних једначина. Вредности поља у следећем кораку су потпуно дате у функцији поља и струја из претходних временских корака. Главна предност методе коначних разлика је једноставна и брза примена и могућност кластеризације.

Недостатак методе коначних разлика се углавном односи на генерисање мреже. Правоугаоне мреже, које се најчешће користе код алгоритама коначних разлика, обично нису ефикасне у решавању закривљених површина или малих геометрија у основном проблему. Постоји неколико мултилевал адаптивних алгоритама за генерисање мреже, али они углавном повећавају сложеност простој природи методе коначних разлика. Било је покушаја коришћења методе коначних разлика и у фреквенцијском домену, али се наилазило на проблеме везане за спору конвергенцију решења.

4 Моделовање микро-прстенастог резонатора - 2D модел

Основни параметри који карактеришу микро-прстенасти резонатор су слободан спектрални опсег, резонантна фреквенција, и пропусни опсег. Слободан спектрални опсег и резонантна фреквенција, зависе од полупречника прстена, док пропусни опсег зависи од растојања праволинијског светловода и прстена. Прорачуни су рађени на конкретном филтру који ради у опсегу око референтне фреквенције међународног телекомуникационог стандарда (193,1 THz), са ширином канала од 100GHz.

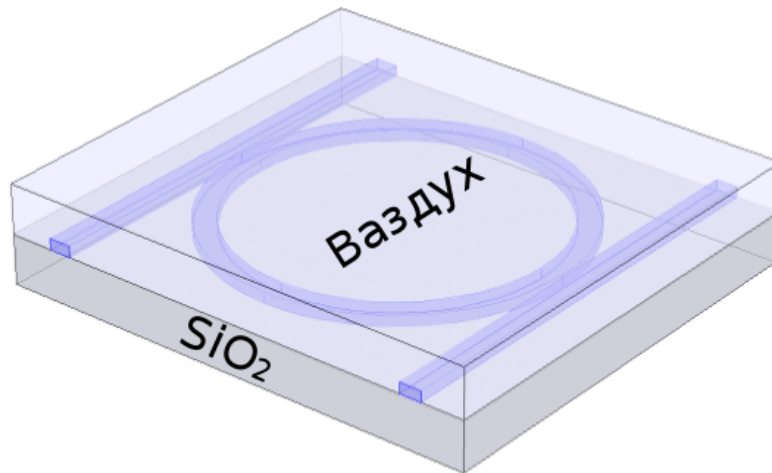
Најчешће коришћене димензије светловода микро-прстенастог резонатора малих полупречника су: ширина светловода између 400 nm и 500 nm и висина светловода између 200 nm и 250 nm [26]. Димензије светловда који су коришћени у анализи су ширина 450 nm и висина 220 nm.

Због малог полупречника прстена, ради смањења губитака расејања, за светловодни део је изабран силицијум ($n_{Si} = 3.47$) док је за супстрат изабран силицијум диоксид ($n_{SiO_2} = 1.44$). Између праволинијског светловода и прстена се налази ваздух (слика 4.1).

Симулације модела који су захтевали мање од 16Gb RAM-а су стартоване на рачунару са Intel Core i5-2320 CPU @ 3.00 GHz x 4 са 32Gb RAM, 16 GB Swap, OS Linux Mint 17, док су симулације за захтевније моделе стартоване на рачунару са AMD opteron(TM) 6272 @ 2.10 GHz x 32 са 256 Gb RAM-а, 1 Tb Swap, OS Ubuntu Linux.

4.1 Одређивање полупречника прстена

Полупречник прстена истовремено утиче и на резонантну фреквенцију прстена и на слободан спектрални опсег. Како у општем случају оба услова не могу би-



Слика 4.1: Модел микро-прстенастог резонатора са два латерално спрегнута праволинијска светловода.

ти задовољена истовремено, полупречник прстена према критеријуму слободног спектралног опсега се бира тако да слободан спектрални опсег буде већи или једнак од циљане вредности.

Веза између слободног спектралног опсега и полупречника прстена дата је изразом:

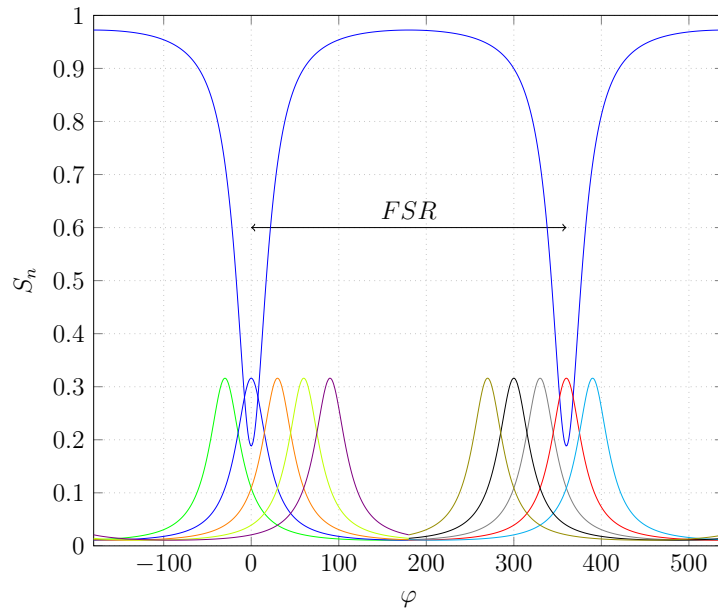
$$FSR = \frac{\lambda_r^2}{n_g \cdot L} = \frac{\lambda_r^2}{n_g \cdot 2 \cdot \pi \cdot R} \quad (4.1)$$

Из израза (4.1) се добија критеријум за одређивање полупречника прстена на основу слободног спектралног опсега:

$$R \leq \frac{\lambda_r^2}{n_g \cdot 2 \cdot \pi \cdot FSR} \quad (4.2)$$

Ширина слободног спектралног опсега је један од основних разлога који воде ка смањивању полупречника прстена. Резонатна фреквенција прстена се периодично понавља, а слободан спектрални опсег даје периоду понављања резонатне фреквенције. Како се у мултиплексу преноси више канала, слободан спектрални опсег треба да буде довољно широк, да резонатор утиче само на један канал из мултиплекса. То ће се постићи уколико се сви канали мултиплекса могу смести-

ти између две суседне резонантне фреквенције (слика 4.2). На слици 4.2 се види да ће због периодичности, преносна функција микропрстенастог резонатора, поред циљаног канала (означеног плавом бојом) утицати и на простирање још неког од канала (канал означен црвеном бојом на слици). Из тог разлога је неопходно да ширина слободног спектралног опсега буде већа од ширине спектра потребне за преношење свих канала. Према изразу (4.1), у циљу добијања ширег слободног спектралног опсега, потребно је смањити полупречник прстена.



Слика 4.2: Утицај слободног спектралног опсега на преношење мултиплекса.

За разлику од металних тасовода код којих се енергија таласа простире само кроз средину истих карактеристика, односно код којих је фазна брзина таласа иста у свим тачкама попречног пресека таласовода, код диелектричних таласовода (светловода), талас се простире кроз три различите средине (светловод, супстрат и ваздушни омотач). Простирање таласа кроз комбиновану средину се описује ефективним индексом преламања, а такви таласи се називају квази ТЕ или квази ТМ таласи. Групни индекс преламања се рачуна из ефективног индекса преламања према изразу [26]:

$$n_g = n_{eff} - \lambda_0 \cdot \frac{dn_{eff}}{d\lambda} \approx n_{eff} - \lambda_0 \cdot \frac{\Delta n_{eff}}{\Delta \lambda} \quad (4.3)$$

Ефективни индекс преламања се одређује решавањем једначине:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}(x, y)}{\partial y^2} - (\beta^2 - k_0^2 \cdot n^2) \cdot \vec{E}(x, y) = 0 \quad (4.4)$$

на попречном пресеку приступа микро-прстенастог резонатора, при чему је $n_{eff} = \frac{\beta}{k_0}$.

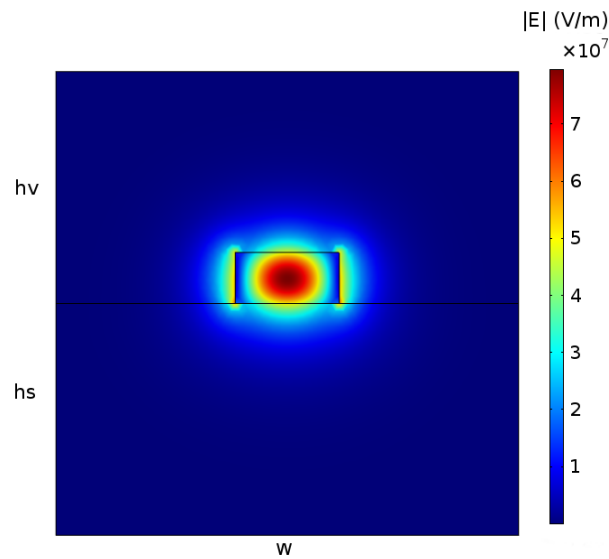
Геометрија коришћена за рачунање ефективног индекса преламања је приказана на слици 4.3. Геометрија представља попречни пресек праволинијског светлОВОДА који се налази на супстрату од силицијум-диоксида, док се око светлОВОДА налази ваздушни омотач. Искоришћена је апроксимација да је ефективни индекс преламања прстена приближно једнак ефективном индексу преламања праволинијског светлОВОДА. Ова апроксимација ће евидентно унети грешку у прорачун полупречника прстена, али се та грешка може накнадно кориговати.



Слика 4.3: Геометрија модела коришћеног за рачунање ефективног индекса преламања.

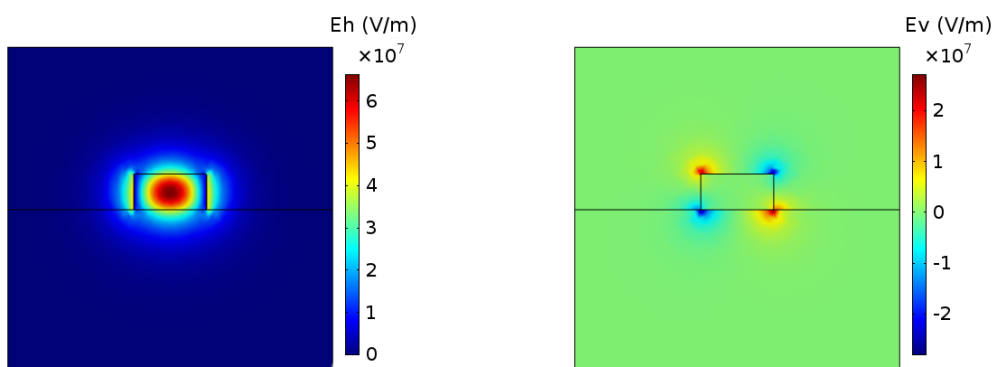
На слици 4.4 је приказана амплитуда електричног поља доминантног мода, добијена решавањем једначине 4.4, за фреквенцију $f = 193.1 THz$. Са слике 4.4 се види да се већи део енергије таласа налази унутар светлОВОДА, док се мањи део таласа простире кроз супстрат и ваздушни омотач. Са слике 4.4 се такође може видети да ван светлОВОДА поље нагло слаби. На самој граници, поље практично пада на нулу, тако да се код овог модела за граничне услове може узети савршен електрични проводник (Дирихлеови гранични услови). Димензије модела (h_s - висина супстрата, h_v - висина ваздушног слоја, W - ширина модела) морају бити довољно велике да поље довољно ослаби до границе, како се не би јавиле значајније рефлексије. У овом моделу $h_v = 1 \mu m$, $h_s = 1 \mu m$, $W = 2 \mu m$.

Електрично поље добијено решавањем једначине (4.4), у општем случају се са-



Слика 4.4: Амплитуда електричног поља доминатног мода, на фреквенцији $f = 193.1 THz$.

стоји од вертикално и хоризонтално поларисане компоненте електричног поља, при чему је једна од компоненти поља доминантна у односу на другу. Решавање Хелмхолцове једначине се може упростити уколико се занемари компонента поља која је мања по амплитуди, чиме се неће направити значајнија грешка. На слици 4.5 приказан је изглед вертикално и хоризонтално поларисане компоненте електричног поља доминантног мода светловода. Ефективни индекс преламања доминатног мода је 2,261394.



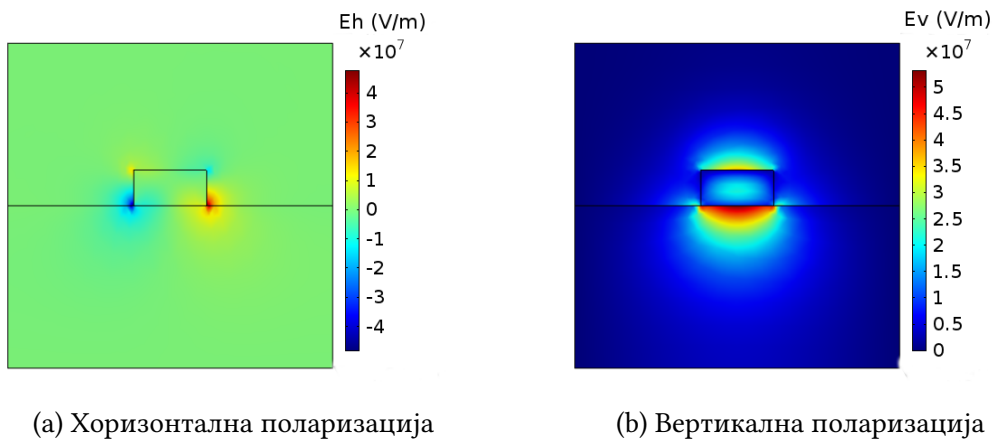
(a) Хоризонтална поларизација

(b) Вертикална поларизација

Слика 4.5: Компоненте електричног поља, а) хоризонтална (E_h), б) вертикална (E_v) поларизација, за мод на фреквенцији $f = 193.1 THz$ ($n_{eff} = 2,261394$).

Са слике 4.5 се јасно може видети да је амплитуда вертикално поларисане компоненте занемарљиво мала у односу на амплитуду хоризонтално поларисане компоненте електричног поља. Вертикално поларисана компонента електричног поља има значајније вредности у угловима светловода, али се узима да ове вредности поља неће значајније утицати на коначан резултат.

На слици 4.6 приказане су компоненте следећег мода светловода, код кога је ефективни индекс преламања $n_{eff} = 1,534162$. Нешто нижа вредност ефективног индекса преламања, говори да се у односу на светловоде са вишим индексом преламања, мањи део енергије простире у светловоду. То се јасно може видети на слици 4.6, на којој се може уочити да се велики део енергије простире кроз супстрат. Са слике 4.6 се види да је код овог мода вертикална компонента електричног поља доминатна у односу на хоризонталну.



Слика 4.6: Компоненте електричног поља, а) хоризонтална (E_h), б) вертикална (E_v) поларизација, за мод на фреквенцији $f = 193.1 THz$ ($n_{eff} = 1,534162$).

Ефективни индекс преламање је фреквенцијски зависан. За исте димензије модела на различитим фреквенцијама, добиће се различите вредности ефективног индекса преламања. За фреквенцију од $199.86133 THz$ ($\lambda = 1500nm$), за модел приказан на слици 4.3, добија се ефективни индекс преламања $n_{eff} = 2.332181$, док је за фреквенцију од $193.1 THz$, $n_{eff} = 2.261186$. Ова разлика се јавља зато што се на различитим фреквенцијама, разликује део енергије таласа који се простире унутар светловода, у односу на део енергије таласа који се простире у супстрату и ваздушном омотачу.

Поред разлике ефективног индекса преламања који потиче од расподеле поља, ефективни индекс преламања (n_{eff}) се разликује и због фреквенцијске зависности индекса преламања (n) самог светловода. Постоје одговарајући дисперзиони изрази који описују фреквенцијску зависност индекса преламања материјала микро-прстенастог резонатора, али је у даљој анализи овај утицај на промену ефективног индекса преламања занемарен.

Групни индекс (n_g) се може израчунати на основу израза (4.3). Зависност групног индекса преламања од таласне дужине, приказана је на слици 4.7. Са слике се може уочити готово линеарна зависност групног индекса од таласне дужине. Зависност групног индекса преламања од таласне дужине, се може интерполирати линеарном функцијом облика:

$$n_g = 0.0012202445 \cdot \lambda(nm) + 2.4965704545 \quad (4.5)$$

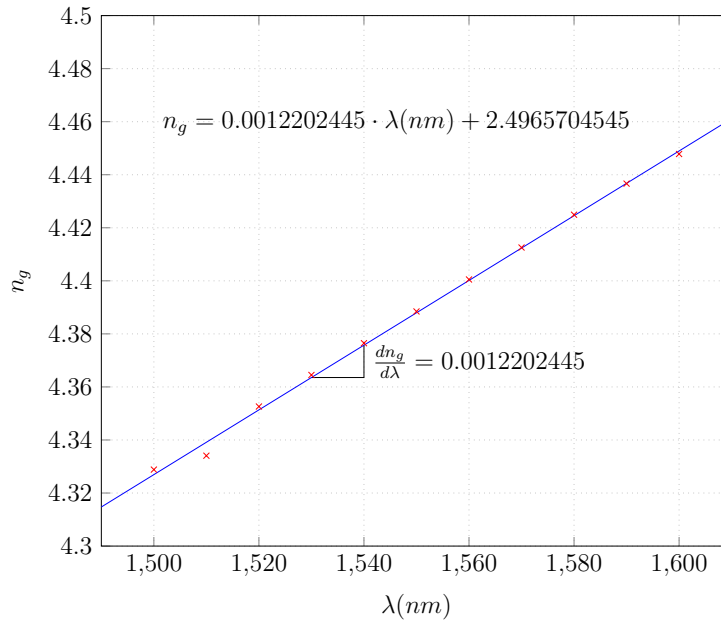
При промени таласне дужине од 25,6 nm ($\approx 3200GHz$ - 32 канала ширине 100 GHz) групни индекс се промени за 0.03 што је око 0.7 %. Том приликом би се направила грешка у процени слободног спектралног опсега од 0.179 nm што је око 22.6 GHz. Имајући у виду да није од значаја подесити слободан спектрални опсег на тачну вредност, приликом избора полупречника се може урачунати одређена резерва, тако да ова промена неће имати већи значај на даље прорачуне. За већу промену таласне дужине (1500 nm - 1600 nm), са слике 4.7 се види да се групни индекс мења у границама између 4.32 и 4.46 што представља промену од око 3 %.

Групни индекс преламања за фреквенцију 193.1 THz ($\lambda = 1552.522009nm$) износи $n_g = 4.394506493$. На основу израчунатог групног индекса преламања и израза (4.2), може се одредити неопходна дужина прстена, којом би се добио жељени слободни спектрални опсег. За слободни спектрални опсег од 25.6nm, што одговара фреквенцијском опсегу 3200 GHz (32 канала ширине 100 GHz), потребно је да дужина прстена буде мања од $21.425\mu m$, односно да полупречник прстена буде мањи од $R \leq 3.41\mu m$.

Резонатна таласна дужина прстена се може израчунати према изразу:

$$\lambda_r = \frac{n_{eff} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{M} \quad (4.6)$$

Параметар M у изразу (4.6), представља мод таласа, односно, представља однос дужине прстена и резонантне таласне дужине. Овај параметар је целобројна вред-



Слика 4.7: Зависност групног индекса преламања (n_g) од таласне дужине.

ност.

Како би се обезбедила резонантна фреквенција прстена од 193.1 THz, уз услов да је слободан спектрални опсег 25,6 nm (3200GHz), из (4.6), уз услов да M припада скупу природних бројева, добија се да највећи полупречник прстена који задовољава наведене услове $R = 3.3875312\mu m$ за $M = 31$ мод таласа.

У пракси је тешко направити прстен са прецизношћу реда величине делова нанометра. Грешка димензија прстена у поступку израде се креће реда 10nm. Међутим, израчуната вредност полупречника прстена са седам децимала ће бити коришћена у даљим симулацијама, како би се уочиле грешке прорачуна које су последица природе нумеричке методе, а не грешке у одређивању димензија светловода.

4.2 Осносиметрични модел

У претходном поглављу је приказан поступак који се може користити за одређивање полупречника прстена који би задовољио одговарајуће захтеве (слободан спектрални опсег и резонантну фреквенцију). Прорачунате димензије прстена могу се проверити помоћу дводимензионалног осносиметричног модела. Овај модел користи осну симетрију прстена како би се тродимензионални проблем свео

на две димензије. Хелмхолцове једначине у овом моделу су писане за магнетно поље, док је електрично поље накнадно израчунато из магнетног поља. Како би се тродимензионални модел апроксимирао дводимензионалним осносиметричним моделом, уведена је претпоставка да се мод таласа у прстену мења према закону $H(r, z) \cdot e^{-j \cdot M \cdot \varphi}$, где M представља ред мода [55, 48]. У ново добијеном моделу, поље зависи само од координата r и z . Комбинацијом Максвелових једначина, добија се одговарајућа векторска Хелмолтцова једначина (израз 4.7). Једначина (4.7) је решена применом нодалних базних функција, а у циљу потискивања лажних решења (решења код којих је $\Delta \cdot H \neq 0$) додат члан $(-\alpha \cdot \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}))$ са тежинским коефицијентом ($\alpha = 1$).

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \nabla \times \vec{H} \right) - \alpha \cdot \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7)$$

Због осне симетрије, магнетно поље, у једначини (4.7), се представља преко компонентата поља приказаних у цилиндричном координатном систему. Када се једначини (4.7) примене ∇ оператори који одговарају цилиндричном координатном систему, добија се одговарајућа слаба формулација за цилиндрични координатни систем ¹.

$$(\nabla \times \vec{W}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \left[\frac{A}{r} + B + r \cdot C \right] \quad (4.8)$$

где су:

$$A = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W^\varphi \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot (W^\varphi \cdot H^r - W^r \cdot H^\varphi) + M^2 \cdot H^r \cdot W^r) + \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot M^2 \cdot W^z \cdot H^z \quad (4.9)$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W_r^\varphi \cdot (H^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) + H_r^\varphi \cdot (W^\varphi + i \cdot M \cdot W^r) - \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot i \cdot M \cdot (W_z^\varphi \cdot H^z - W^z \cdot H_z^\varphi)) \quad (4.10)$$

$$C = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot W_r^\varphi \cdot H_r^\varphi + \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W_z^\varphi \cdot H_z^\varphi + (W_r^z - W_z^r) \cdot (H_r^z - H_z^r)) \quad (4.11)$$

односно:

¹детаљно извођење је дато у прилогу 5

$$\alpha \cdot (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) = \left[\frac{D}{r} + E + r \cdot F \right] \quad (4.12)$$

где су:

$$D = W^r \cdot H^r - i \cdot M \cdot (W^\varphi H^r - W^r \cdot H^\varphi) + M^2 \cdot W^\varphi \cdot H^\varphi \quad (4.13)$$

$$E = (W_r^r + W_z^z) \cdot (H^r + i \cdot M \cdot H^\varphi) + (W^r - i \cdot M \cdot W^\varphi) \cdot (H_r^r + H_z^z) \quad (4.14)$$

$$F = (W_r^r + W_z^z) \cdot (H_r^r + H_z^z) \quad (4.15)$$

при чему су:

\vec{H} - вектор магнетног поља

$\vec{W} = \vec{H}^*$ - тежинска функција.

док је извод:

$$\frac{\partial H_k}{\partial m} = H_m^k \quad (4.16)$$

уз примену одговарајућих граничних услова:

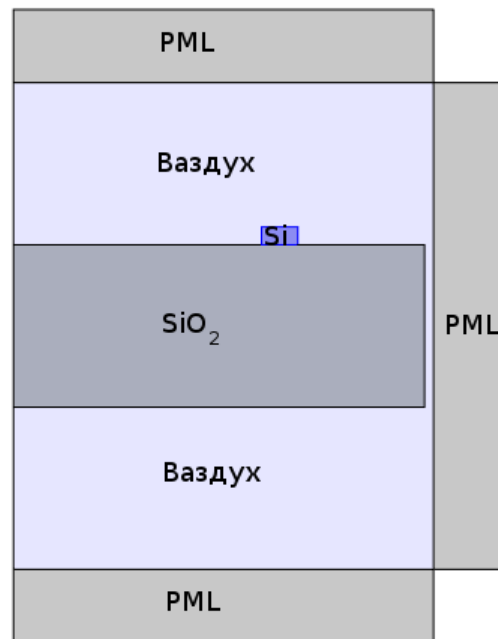
$$H^r \cdot n_r + H^z \cdot n_z = 0 \quad (4.17)$$

$$H_z^r - H_r^z = 0 \quad (4.18)$$

$$(H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) \cdot n_r - (i \cdot M \cdot H^z - r \cdot H_z^\varphi) \cdot n_z = 0 \quad (4.19)$$

На слици 4.8 приказана је геометрија осно-симетричног модела која је коришћена при одређивању резонантне фреквенције. Полупречник резонатора представља растојање од осе до средине светलोвода и на основу претходног поглавља износи $3,387531195 \mu m$. Светловодни део је од силицијума (S_i) индекса преламања $n_c = 3,47$, који се налази на супстрату од силицијум диоксида (S_iO_2) индекса преламања $n_s = 1,44$. Ширина светलोвода је $a = 450 nm$, а висина $b = 220 nm$. Око светловода се налази ваздух индекса преламања $n_v = 1$ (слика 4.8). Око ваздуха се налази савршено прилагођен слој. Да би се избегло моделовање савршено прилагођеног слоја за више различитих средина, између супстрата и савршено

прилагођеног слоја је постављен слој ваздуха. Како би се избегло дељење са нулом ($\frac{A}{r}$ у једначини (4.8)) модел је померен од осе за растојање $10^{-15}m$. Са стране модела који је близу осе није постављен савршено прилагођен слој. Према [55, 48], овај модел је верификован експерименталним резултатима.

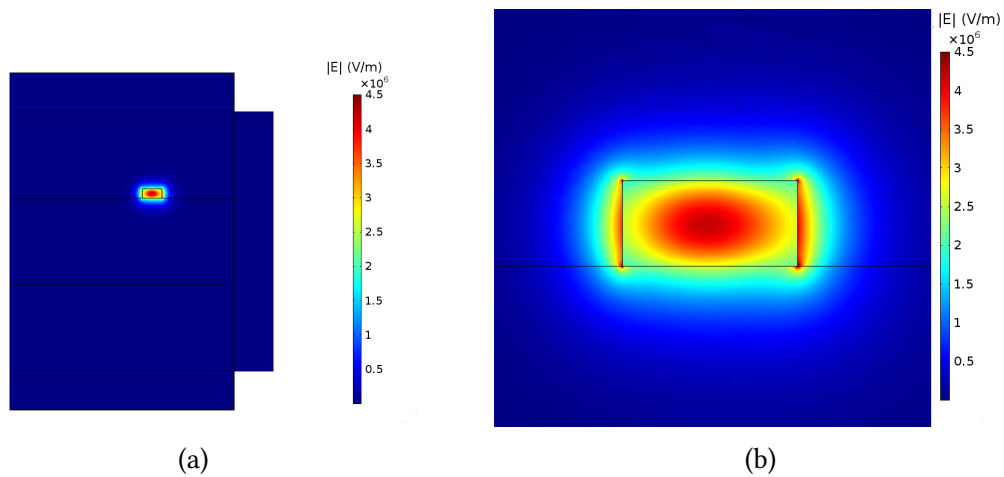


Слика 4.8: Геометрија оносиметричног модела.

На слици 4.9 је приказан доминантан мод микро-прстенастог резонатора за вредност параметра $M=31$. Са слике 4.9 а), се види да је поље скоцентрисано у светловодном делу, односно да мали део енергије долази до савршено прилагођеног слоја (PML). Из тог разлога нема слабљења таласа који напушта модел, тако да су сопствене вредности чисто реалне.

За вредност параметра $M=31$ добија се резонатна фреквенција 193,0656 THz, док се за вредност параметра $M = 32$ добија резонатна фреквенција 196,2832 THz што даје слободан фреквенцијски опсег од 3217.6 GHz, како је било пројектовано. Са друге стране за $M=30$ добија се резонатна фреквенција 189,8697 THz, што је 3195,9 GHz слободног спектралног опсега. Симулација је рађена за густину мреже код које су елементи мреже светловода димензија мањих од 5 nm.

Израчуната фреквенција се разликује у односу на пројектовану од 193,1 THz за 0,0344 THz. Овај резултат говори о проблематици моделовања микро-прстенастих



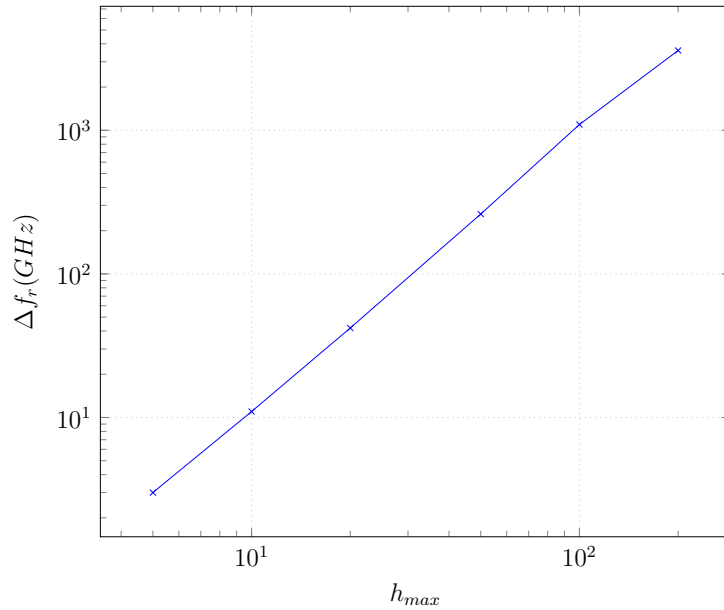
Слика 4.9: Амплитуда електричног поља доминатног мода на фреквенцији $193.0656 THz$, а) цео модел, б) доминатан мод.

резонатора. Без обзира што је грешка прорачуна релативно мала реда величине 10^{-4} , због високе централне фреквенције и узаног опсега канала од $100 GHz$, ова грешка долази до изражаја. Утицај избора густине мреже на грешку при одређивању резонатне фреквенције, приказан је у табели 4.1.

Табела 4.1: Промена резонатне фреквенције која одговара моду $M=31$ настала због промене густине мреже.

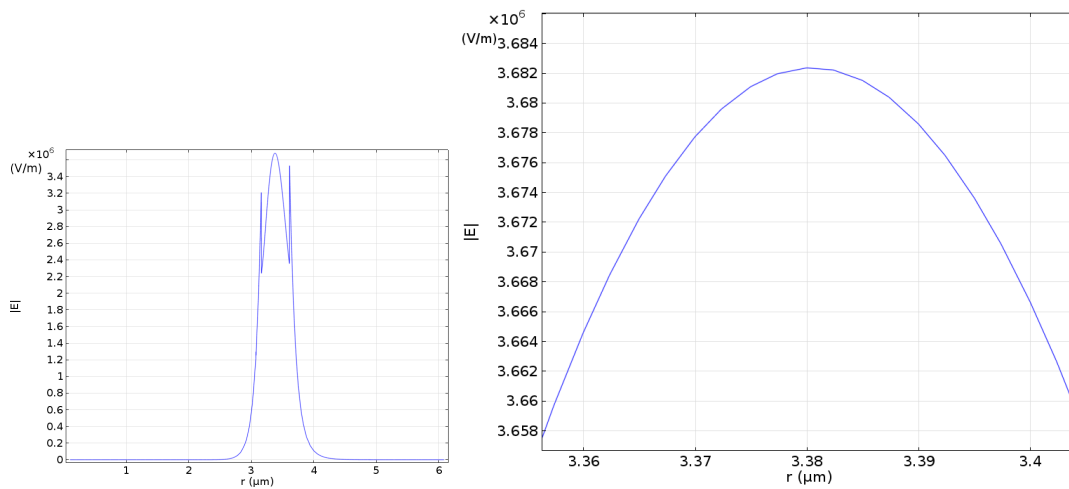
h_{max}	f_r [THz]	Δf [GHz]	број елемената (Dof)	време извршења
200	196,658	3595	9825	2s
100	194,161	1097	11085	2s
50	193,325	261	13233	2s
20	193,105	42	21405	4s
10	193,074	11	69042	6s
5	193,066	3	98985	11s

На основу последња три елемента табеле 4.1, одређен је ред конвергенције решења $p = 1,954 \approx 2$, односно одређено је да ће резултат конвергирати ка резонатној фреквенцији $f_r = 193,0632174 THz$, која се разликује у односу на пројектовану фреквенцију ($193,1 THz$). Ова разлика се јавља зато што је ефективни индекс преламања одређен из дводимензионалног модела праволинијског светловода уместо да се ефективни индекс преламања одређује из модела прстена, и зато што је у изразу (4.6) коришћена средња линија прстена, док се са слике 4.11 види да је максимум амплитуде поља прстена померен у односу на средњу ли-



Слика 4.10: Утицај густине мреже на конвергенцију решења.

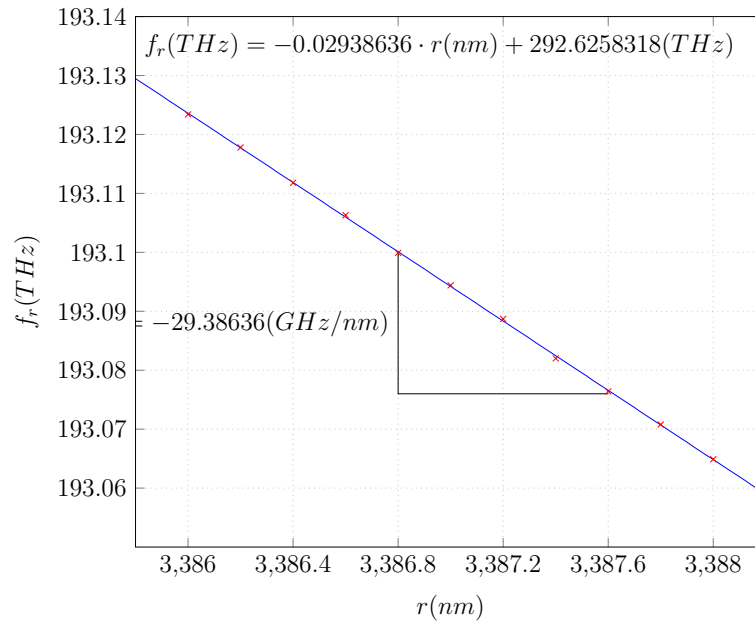
нију прстена. Максимум се налази на растојању око $3,38 \mu m$, док је у прорачуну коришћена вредност $R = 3,387531195$.



Слика 4.11: Позиција мода у односу на осу.

У процесу израде микропрстенастих резонатора из технолошких разлога се прави грешка у димензијама и до $\pm 10 nm$. Утицај грешке у дужини полупречника прстена у поступку израде, приказан је на слици 4.12. Дужина полупречника прстена осно-симетричног модела је мењана у корацима од по $0,2 nm$. Одређене су резонатне фреквенције и на слици 4.12 је приказана зависност резонатне фреквенције од полупречника прстена. Са слике се види да је зависност готово

линеарна и да промена полупречника од $10nm$ даје промену резонантне фреквенције од око $294GHz$. Релативно велика промена резонантне фреквенције, настала услед релативно мале промене полупречника прстена, имајући у виду ограничену прецизност насталу из технолошких разлога, јасно говори о проблематици пројектовања и израде микро-прстенстих резонатора.



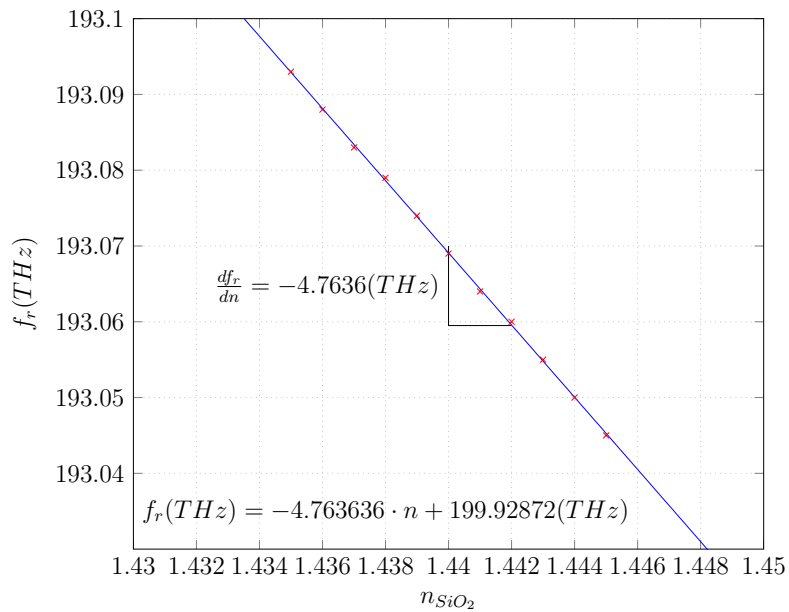
Слика 4.12: Зависност резонантне фреквенције од полупречника прстена.

На основу резултата добијених из осно-симетричног модела, резонантна фреквенција од $193,0999THz$ се добија за полупречник прстена од $3,3866\mu m$. Разлика у односу на прорачунати полупречника је нешто већа од $1nm$, што је много мање у односу на грешку димензија при изради прстена.

Имајући све претходно изнето и да је осно-симетрични модел експериментално верификуван, услед релативно мале грешке и тачно одеђеног мода таласа, може се сматрати да је дводимензионални модел који је коришћен за прорачун полупречника прстена верификован.

Према [26], грешке у димензијама прстена приликом израде су неизбежне. Међутим, постоји неколико различитих техника за подешавање микро-прстенстих филтара. Најчешће коришћена техника је термално подешавање филтра. Ова техника се базира на топлотној зависности вредности индекса преламања светлосног таласа. Промена резонантне таласне дужине овом методом се може кретати и $0,1 \frac{nm}{\text{ }^\circ C}$ (око $12,5 \frac{GHz}{\text{ }^\circ C}$). Овом методом, коришћењем микро грејача, активно се може по-

дешавати резонатна фреквенција прстена. Уколико се жели трајно подешавање филтра, користе се методе које трајно мењају индекс преламања најчешће супстрата. На слици 4.13, приказана је зависност резонатне фреквенције од промене индекса преламања супстрата. У [56], је показано да се електронским снопом индекс преламања супстрата може кориговати и до 3%. Промена индекса преламања од 3%, према слици 4.13, даје промену резонатне фреквенције од око 150 GHz.



Слика 4.13: Зависност резонатне фреквенције од индекса преламања супстрата.

5 Моделовање

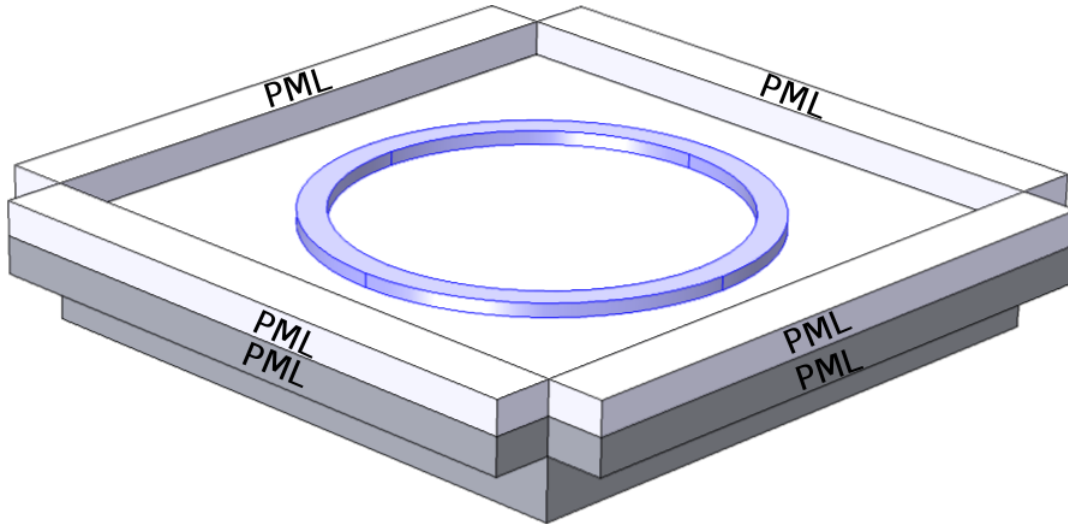
микропрстенастог-резонатора - 3D модел

5.1 Процена конвергенције тродимензионалног модела

Осно симетрични модел је направљен на основу претпоставке да постоји осна симетрија мода у прстену и та претпоставка не би требала да унесе значајнију грешку у прорачун. Како је тродимензионални модел захтеван по питању ресурса рачунара и како је проблематично одредити конвергенцију решења тродимензионалног модела (геометријска промена густине мреже превазилази тренутно расположиве ресурсе рачунара), резултати добијени из дводимензионалног осно-симетричног модела су искоришћени за процену одступања резултата тродимензионалног модела од тачне вредности.

Геометрија модела прстена је приказана на слици 5.1. Прстен се као и код осно-симетричног модела налази на супстрату од силицијум диоксида. Око прстена се налази ваздух. На слици 5.1 слој ваздуха је уклоњен ради бољег увида у геометрију модела. Са свих страна модел је затворен савршено прилагођеним слојем. Индекс преламања савршено прилагођеног слоја једнак је индексу преламања средине уз коју се налази. На спољњим ивицама савршено прилагођеног слоја је савршен електрични проводник. Како је поље скоцентрисано у прстену и околини прстена, густина мреже је изабрана тако да је у прстену и околини прстена највећа. Због ограничених ресурса рачунара, густина мреже од прстена ка савршено прилагођеном слоју је смањивана.

Резонанта фреквенција (таласна дужина) тродимензионалног модела прстена се рачуна из сопствених вредности Хелмхолцове једначине, односно на основу



Слика 5.1: Геометрија 3Д модела прстена.

решења једначине:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(x, y, z) + \omega^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}(x, y, z) = 0 \quad (5.1)$$

Након трансформације векторског производа набла оператора, једначина 5.1 добија облик:

$$\nabla^2 E + \lambda_{eig}^2 E = 0 \quad (5.2)$$

у којој λ_{eig} представља сопствену вредност. Имагинарни део сопствене вредности представља резонатну фреквенцију.

$$- \lambda_{eig} = \delta + j \cdot \omega \quad (5.3)$$

Уколико се око резонатора постави савршено прилагођен слој, из сопствене вредности се могу израчунати губици резонатора. Губици резонатора се рачунају преко фактора добротe, односно на основу израза:

$$Q = \frac{Im(\lambda_{eig})}{2 \cdot |Re(\lambda_{eig})|} \quad (5.4)$$

Приликом рачунања фактора добротe модела који садржи само прстен, добија се информација о енергији која се губи услед расејања.

У табели 5.1, приказане су резонатне фреквенције добијене из тродимензионалног модела прстена за различите густине мреже. Због ограничених ресурса рачунара повећање густине мреже је заустављено на 50 nm. Резонатна фреквен-

ција модела са густином мреже светловода до 50nm се разликује од резонатне фреквенције основно симетричног модела ($f_r = 193,0632174THz$), за 17 GHz. Из табеле се такође може видети да се повећањем густине мреже са 64 nm на 50 nm, одступање резултата релативно мало поправља (за 9 GHz), на рачун релативно великог повећања временских и меморијских ресурса рачунара. Из тог разлога су симулације тродимензионалног модела у наставку рађене на густини мреже светловода до 64 nm. Имајући у виду релативно малу разлику резонатне фреквенције тродимензионалног модела од 0.017THz у односу на резонатну фреквенцију основно симетричног модела од $f_r = 193,0632174THz$, и да је основно симетрични модел експериментално верификован, може се сматрати да је и тродимензионални модел тиме верификован.

Табела 5.1: Резонантне фреквенције прстена одређене из тродимензионалног модела.

$h[nm]$	$j \cdot \lambda_{eig1}$	Q_1	$j \cdot \lambda_{eig2}$	Q_2
256	$195,2812e12 + j \cdot 2,913e9$	$3,35e4$	$195,2920e12 + j \cdot 2,101e9$	$4,65e4$
128	$193,6414e12 - j \cdot 3,574e8$	$2,71e5$	$193,6434e12 - j \cdot 3,253e8$	$2,98e5$
64	$193,0897e12 - j \cdot 4,167e8$	$2,32e5$	$193,0903e12 - j \cdot 4,167e8$	$2,32e5$
50	$193,0807e12 - j \cdot 4,096e8$	$2,36e5$	$193,0819e12 - j \cdot 4,061e8$	$2,38e5$

Уколико се резултати приказани у табели 5.1, упореде са резултатима основно симетричног модела, могу се уочити две разлике. Фактор доброты тродимензионалног модела је коначан и резонатне фреквенције се јављају у пару. Обе разлике су последица несавршености мреже тродимензионалног модела. Наиме, основно симетрични модел, увођењем осне симетрије, задржао је глатке зидове прстена. Губици услед расејања основно симетричног модела су из тог разлога занемарљиви, због чега је фактор доброты бесконачно велик. Због тога се код основно симетричног модела јавља чисто реална сопствена вредност.

Код тродимензионалног модела, губи се савршен облик зидова светловода основно симетричног модела, тако да су губици енергије услед зрачења већи. Из табеле 5.1 се види да се са повећањем густине мреже повећава и фактор доброты, односно да се смањују губици резонатора.

Резонатне фреквенције које се код тродимензионалног модела јављају у пару, последица су раздвајања резонатне фреквенције. Наиме, у прстену се, због ре-

фелксија од несавршених зидова прстена, поред прогресивног таласа, јавља и талас који се простире у супротном смеру. Између ова два таласа се успоставља спрега. Услед постојања пертурбације (несавршености зидова тродимензионалног модела) због ефекта Фано резонанце¹, доћи ће до раздвајања фреквенција. Том приликом у прстену ће се формирати такозвани симетричан и антисиметричан ”супер мод” који се фазно разликују за $\pi/2$. На тај начин, систем добија два нова мода која нису спрегнута. У табели 5.1 се може приметити да се са повећањем густине мреже, смањује разлика између раздвојених резонантних фреквенција.

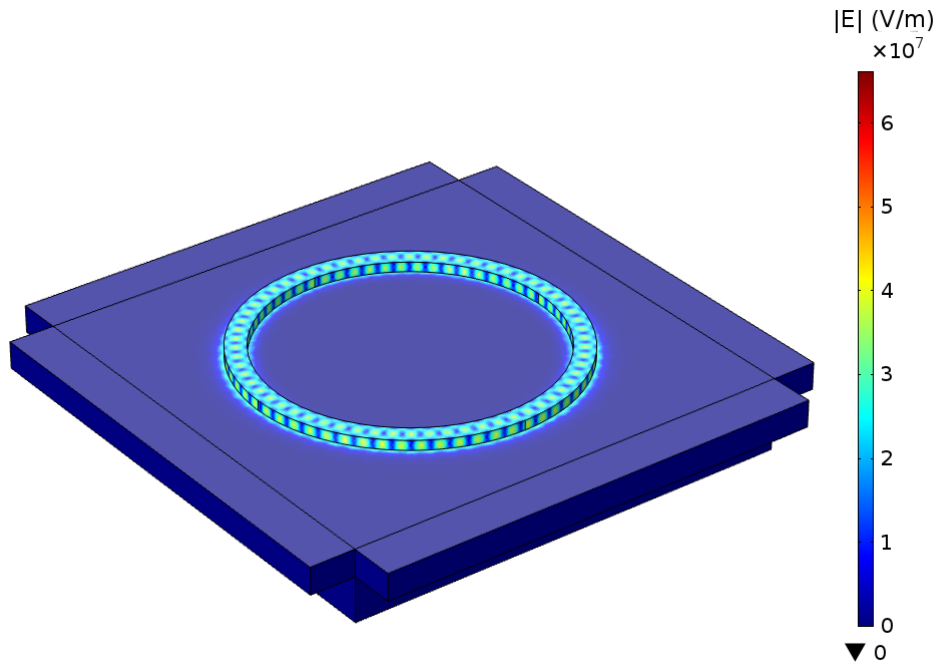
У табели 5.2, приказане су три суседне резонантне фреквенције прстена при густини мреже од 64 nm. Из табеле се види релативно мала разлика фактора добротности три различите резонантне фреквенције, која може бити последица разлике у губицима услед расејања на различитим фреквенцијама. Такође се може уочити и релативно мала разлика резонантних фреквенција ”супер модова” (0,3 GHz, 0,6 GHz и 0,5GHz). Мала разлика резонантних фреквенција ”супер модова” говори о квалитетном избору густине мреже. Наиме, када се густина мреже изабере адекватно, смањиће се рефлексије од зидова прстенастог светловода, тиме ће и разлика резонантних фреквенција ”супер модова” бити мања.

Табела 5.2: Резонантне фреквенције прстена одређене из тродимензионалног модела за густину мреже 64 nm.

λ_{eig1}	Q_1	λ_{eig2}	Q_2
$189,8913e12 - j \cdot 4,333e8$	$2,19e5$	$189,8910e12 - j \cdot 4,294e8$	$2,21e5$
$193,0897e12 - j \cdot 4,167e8$	$2,32e5$	$193,0903e12 - j \cdot 4,167e8$	$2,32e5$
$196,3101e12 - j \cdot 4,024e8$	$2,44e5$	$196,3106e12 - j \cdot 3,956e8$	$2,48e5$

На слици 5.2 је приказана амплитуда поља доминантног мода тродимензионалног модела прстена. Према слици 5.2 поље прстена је доминантно скоцентрисано у светловоду и његовој околини, међутим, коначна вредност фактора добротности указује да ће постојати одређени губици услед расејања.

¹Прилог 2



Слика 5.2: Амплитуда поља у тродимензионалном моделу прстена добијена као сопствени вектор из Хелмхолцове једначине.

5.2 Растојање прстена и светловода - модел са два праволинијска светловода

Анализа из претходног поглавља је показала да се за густину мреже од 64 nm, резонатна фреквенција тродимензионалног модела прстена разликује од резонатне фреквенције осносиметричног модела за не више од 26 GHz. Имајући у виду да конвергенција решења зависи од густине мреже, за очекивати је да се и код тродимензионални модела прстена са праволинијским светловодима исте густине мреже, одступање неће бити значајније.

Пропусни опсег, микро-прстенастог резонатора зависи од фактора добротe. Веза између фактора добротe и ширине пропусног опсега филтра дата је изразом:

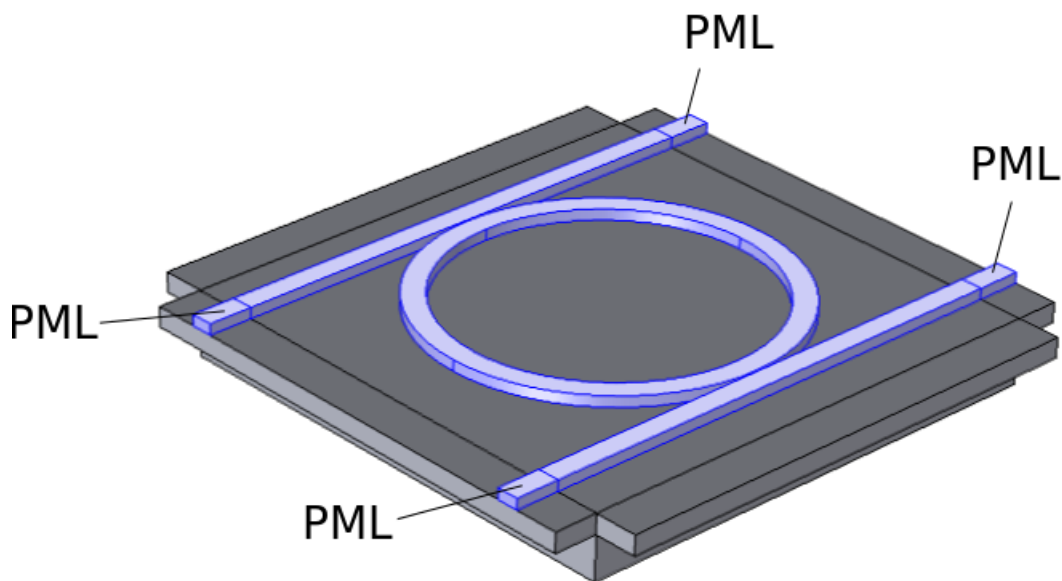
$$Q \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{f}{\Delta f} \quad (5.5)$$

Према изразу 5.5 за ширину спектра 100 GHz при резонатној фреквенцији од 193.1THz, потребно је обезбедити фактор добротe вредности око 1931.

Прстен спрегнут са праволинијским светловодима није могуће моделовати на

осносиметричном моделу. Из тог разлога, фактор доброте ове конфигурације је одређен из сопствених вредности тродимензионалног модела микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода.

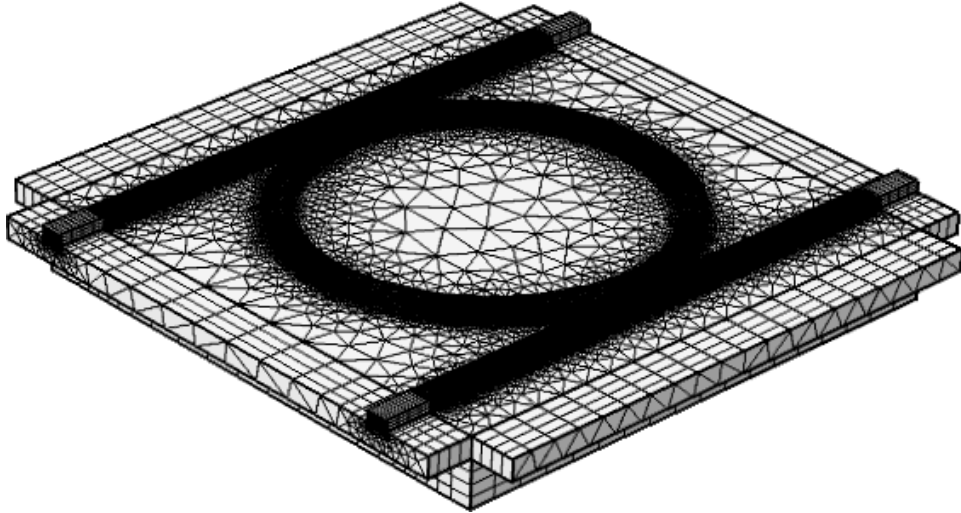
На слици 5.3 приказана је геометрија прстена спрегнутог са два праволинијска светловода. Ради бољег увида у геометрију модела, ваздушни омотач са одговарајућим слојем савршено прилагођеног слоја је уклоњен на слици. Као и код тродимензионалног модела прстена, око модела се налази савршено прилагођен слој, који је затворен савршеним електричним проводником. Праволинијски светловоди, са обе стране завршавају се савршено прилагођеним слојем чији је индекс преламања једнак индексу преламања праволинијских светловода. Овај део савршено прилагођеног слоја треба да апсорбује сву енергију коју прстен предаје светловодима, чиме ће омогућити рачунање фактора доброте спрегнутог прстена.



Слика 5.3: Геометрија тродимензионалног модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.

Мрежа тродимензионалног модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода, приказана је на слици 5.4. Због ограничених ресурса рачунара, имајући у виду да ће поље доминатно бити у светловодима и у њиховој околини,

густина мреже је тако формирана да се смањује идући од светловода према савршено прилагођеном слоју.



Слика 5.4: Мрежа тродимензионалног модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.

Вредности фактора доброте модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода, за различита растојања праволинијских светловода и прстена приказане су у табели 5.3. Густина мреже код свих модела је $64nm$. Симулације су трајале око 2 сата.

Табела 5.3: Резонатна фреквенција и фактор доброте за различита растојања прстена и праволинијских светловода.

$d[nm]$	λ_{eig1}	Q_1	λ_{eig2}	Q_2
250	$193,0636e12 + j \cdot 6,577e8$	$1,47e5$	$193,0640e12 + j \cdot 6,8509e9$	$1,41e4$
150	$193,0478e12 + j \cdot 4,617e9$	$2,09e4$	$193,0486e12 + j \cdot 4,7692e9$	$2,02e4$
100	$193,0197e12 + j \cdot 1,225e10$	$7,88e3$	$193,0187e12 + j \cdot 1,865e10$	$5,17e3$
50	$192,9324e12 + j \cdot 3,636e10$	$2,65e3$	$192,9345e12 + j \cdot 3,749e10$	$2,57e3$
25	$192,8171e12 + j \cdot 8,074e10$	$1,94e3$	$192,8227e12 + j \cdot 8,295e10$	$1,62e3$

Из табеле 5.3 се види да је за растојање прстена и светловода од 250 nm фактор доброте највећи и да се са смањењем растојања прстена и праволинијских светловода, фактор доброте смањује. Већа вредност фактора доброте одговара ужем спектралном опсегу микро-прстенастог резонатора.

У табели 5.4 приказане су резонатне фреквенције и очекивани пропусни опсег микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода за различита растојања прстена и праволинијских светловода. Из табеле се види да је за пропусни опсег од 100 GHz, потребно да растојање прстена и светловода буде 25nm.

Табела 5.4: Резонатна фреквенција и фактор доброте за различита растојања прстена и праволинијског светловода.

$d[nm]$	$f_{r1}(THz)$	Q_1	$\Delta f(GHz)$	f_{r2}	Q_2	$\Delta f(GHz)$
250	193,0636	$1,47e5$	1,31	193,0486	$1,41e5$	1,37
150	193,0478	$2,09e4$	9,24	193,0486	$2,02e4$	9,56
100	193,0197	$7,88e3$	24,49	193,0187	$5,17e3$	37,34
50	192,9324	$2,65e3$	72,80	192,9345	$2,57e3$	75,07
25	192,8171	$1,94e3$	99,39	192,8227	$1,62e3$	119,02

Поред промене фактора доброте, из табеле 5.4 се може видети да се са променом растојања прстена и праволинијских светловода, мења и резонатна фреквенција прстена. До промене резонатне фреквенције прстена долази због спреге прстена са праволинијским светловодима.

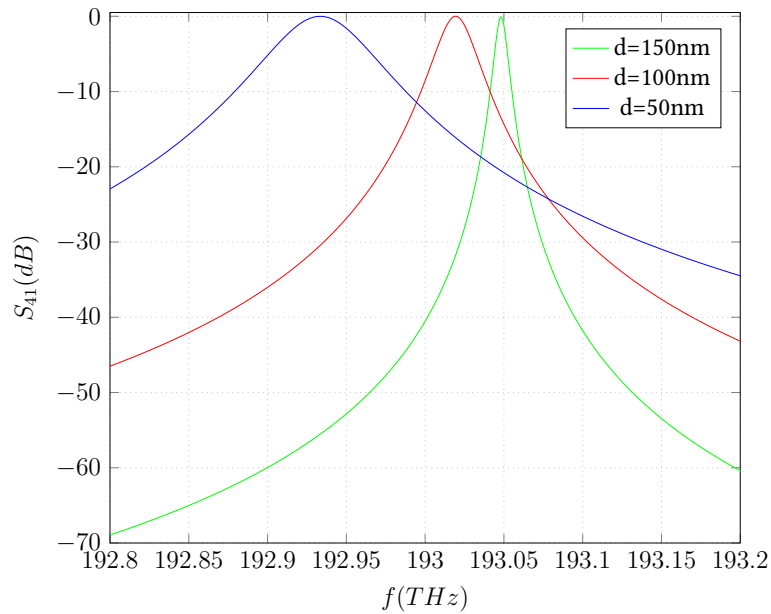
5.3 Комбинација методе коначних елемената и методе спрегнутих модова зависних од времена

За потребе одређивања преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора, на основу резултата добијених из претходног поглавља, може се искористити теорија спрегнутих модова зависних од времена. Према овој теорији, преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора се може одредити помоћу фактора доброте и резонатне фреквенције.

$$S_{41}(\omega) = \frac{\frac{1}{4 \cdot Q^2}}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \quad (5.6)$$

$$S_{21}(\omega) = \frac{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{4 \cdot Q^2}} \quad (5.7)$$

На сликама 5.5 и 5.6 су приказане преносне карактеристике микропрстенастог резонатора израчунате према теорији временски спрегнутих модова (израз (5.6)). Са слике 5.5 се јасно уочава сужавање преносне карактеристике око резонатне криве са повећањем растојања светловода и прстена. На слици 5.5 се види и да се са променом растојања између прстена и праволинијског светловода, мења и резонатна фреквенција.

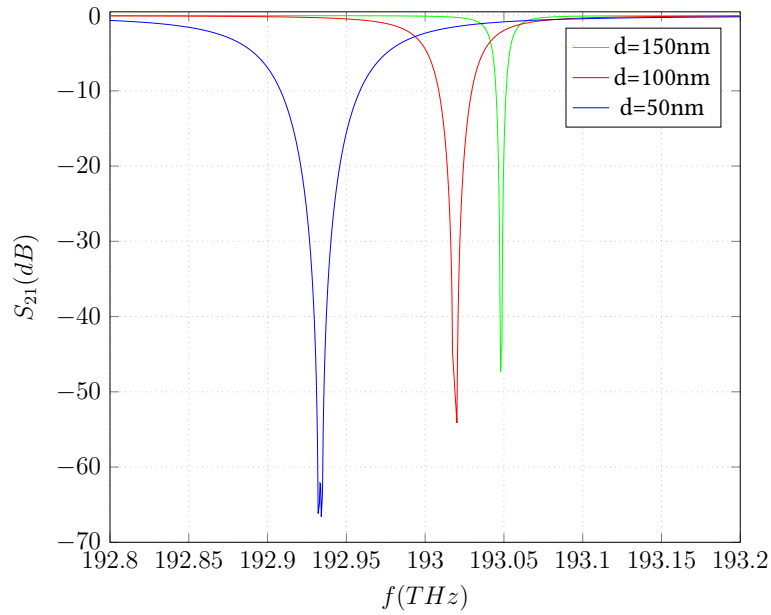


Слика 5.5: Преносна карактеристика $S_{41}(dB)$ микропрстенастог резонатора у функцији растојања прстена и праволинијског светловода.

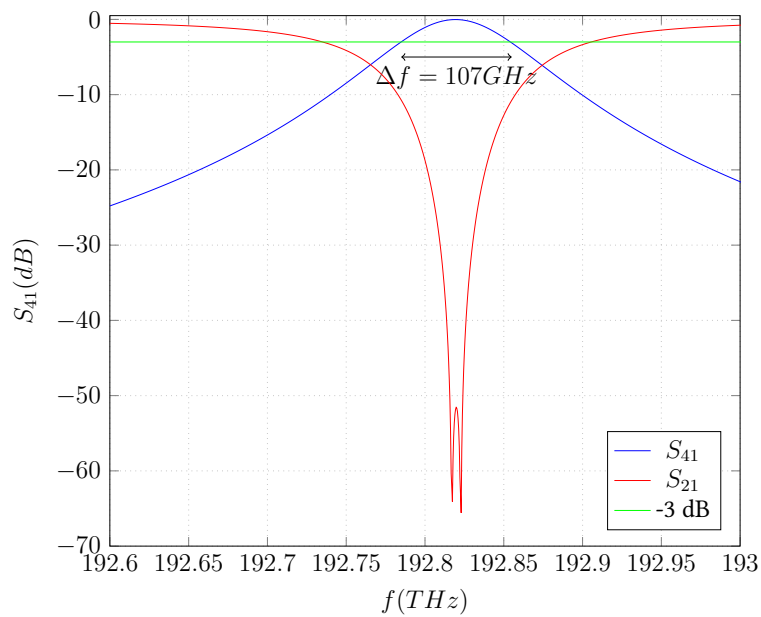
Преносна карактеристика S_{21} , микропрстенастог резонатора израчуната према изразу (5.7), приказана је на слици 5.6. Са слике се види да се смањивањем растојања прстенастог и праволинијског светловода, повећава ширина непропусног опсега, и да се централна фреквенција непропусног опсега са смањењем растојања удаљава од резонатне фреквенције усамљеног прстена. Такође се на овој слици, на растојању $d = 50nm$ (плава функција), може уочити раздвајање фреквенција у околини централне фреквенције непропусног опсега. Ово раздвајање се не може уочити на преносној карактеристици S_{41} , слика 5.6, зато што се у том делу карактеристика креће око јединице, так да је утицај раздвајања фреквенција занемарљив.

На слици 5.7, приказана је преносна карактеристика микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода на растојању $d = 25nm$.

На слици 5.7 зеленом бојом је обележен ниво од $-3dB$. Са слике се види да ће за растојање између прстена и праволинијског светловода пропусни опсег филтра



Слика 5.6: Преносна карактеристика $S_{21}(dB)$ микропрстенастог резонатора у функцији растојања прстена и праволинијског светловода.



Слика 5.7: Преносна карактеристика микропрстенастог резонатора за растојање прстена и праволинијских светловода $d = 25\text{nm}$.

бити 107GHz , што је вредност која је блиска прорачунској вредности од 100GHz . Имајући у виду да је на овој слици узет нешто ужи фреквенцијски опсег, на преносној карактеристици S_{21} (црвена функција) се јасније може уочити ефекат раздвајања резонантних фреквенција.

У табели 5.5, приказане су три суседне резонантне фреквенције, прстена спрегнутог са два праволинијска светловода на растојању 25 nm. У табели се може видети да се вредност фактора добротe за три различите резонантне фреквенције разликује, што може указати на разлику пропусних опсега око резонантних фреквенција.

Табела 5.5: Три суседне резонантне фреквенције и фактор добротe прстена спрегнутог са два светловода за растојање $d=25\text{nm}$.

$d[\text{nm}]$	$\lambda_{\text{eig}3D}$	Q_1	$\lambda_{\text{eig}3D}$	Q_2
25	$189,6124e12 + j \cdot 9,912e10$	$0.96e3$	$189,606e12 + j \cdot 9,578e10$	$0.99e3$
25	$192,8171e12 - j \cdot 8,074e10$	$1,94e3$	$192,8227e12 - j \cdot 8,295e10$	$1,62e3$
25	$196,0553e12 + j \cdot 7,142e10$	$1,37e3$	$196,050e12 + j \cdot 6,682e10$	$1.47e3$

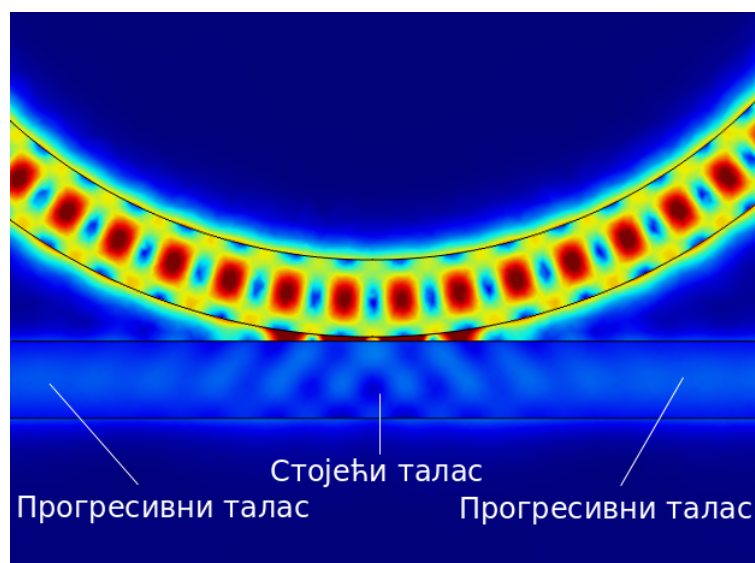
У табели 5.6 су приказани одговарајући пропусни опсези око три суседне резонантне фреквенције израчунати на основу фактора добротe према изразу (5.5). Из табеле 5.6 се види да се фреквенцијски опсег око резонантне фреквенције разликује за три различите резонантне фреквенције, што значи да није ни мало једноставно прорачунати параметре микро-претанстог резонатора који ће задовољити критеријум пропусног опсега у ширем фреквенцијском опсегу. Међутим, за резонантну фреквенцију за коју се рачуна ширина опсега, добијају се ширине пропусног опсега у границама циљаног пропусног опсега. Из табеле се такође може видети да се без обзира на ”померање” резонантне фреквенције и даље задржао слободан спектрални опсег већи од 3200GHz.

Табела 5.6: Резонантна фреквенција и фактор добротe прстена са два светловода.

$d[\text{nm}]$	$f_r(\text{THz})$	$\Delta f(\text{GHz})$	$f_r(\text{THz})$	$\Delta f(\text{GHz})$
25	$189,6124e12$	197,5	$189,606e12$	191,5
25	$192,8171e12$	99,4	$192,823e12$	119
25	$196,0553e12$	143,1	$196,050e12$	133,4

На слици 5.8, приказана је амплитуда електричног поља у делу спреге прстена са праволинијским светловодом. Са слике се види да се у делу спрежњака амплитуда поља мења што упућује на постојање стојећег таласа, док је у остатку праволинијског светловода амплитуда константна што указује на постојање про-

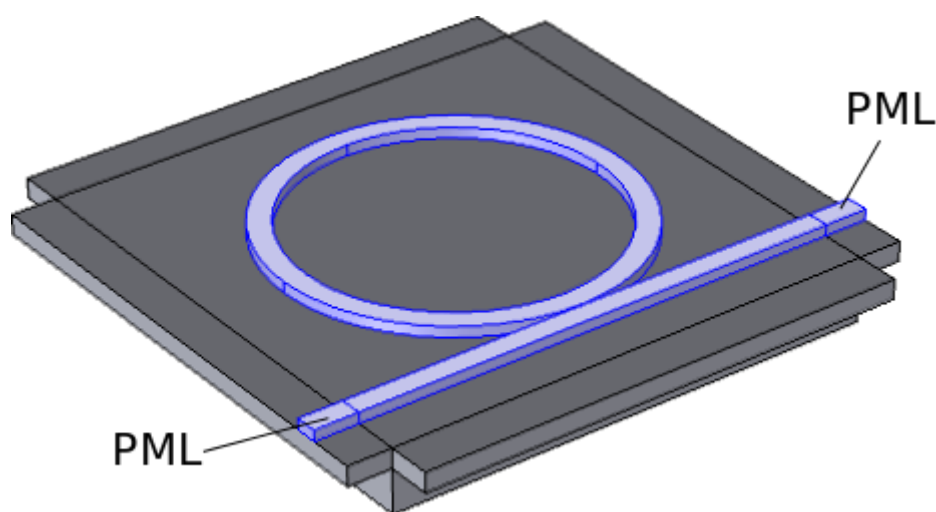
гресивног таласа.



Слика 5.8: Расподела амплитуде електричног поља у околини спрежњака.

5.4 Растојање прстена и светловода - модел са једним праволијским светловодом

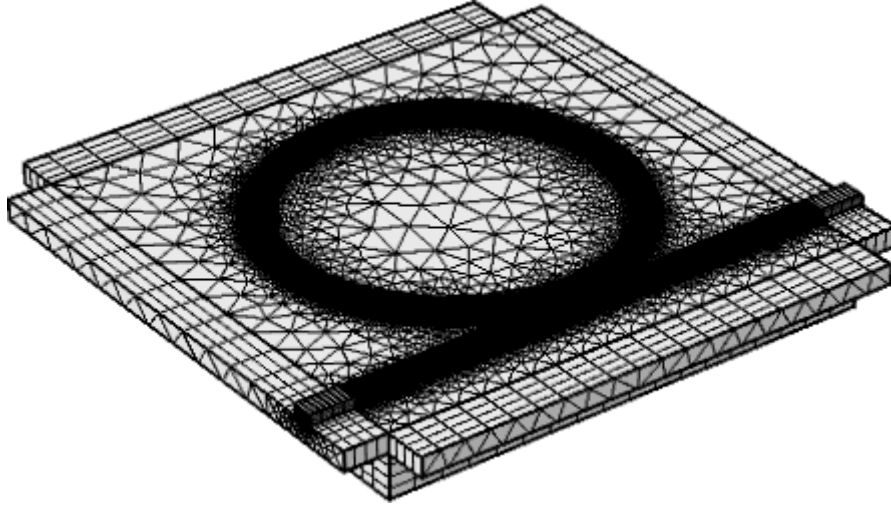
На слици 5.9 приказана је геометрија модела прстена спрегнутог са једним праволијским светловодом. Као и код модела са два праволијска светловода, слој ваздуха је уклоњен на слици како би се боље могла уочити геометрија. И код овог модела праволијски светловод је завршен савршено прилагођеним слојем. Диелектрична константа савршено прилагођеног слоја је једнака диелектричној константи средине уз коју се налази савршено прилагођен слој.



Слика 5.9: Геометрија микро-прстенастог резонатора са једним праволијским светловодом.

Густина мреже микро-прстенастог резонатора са једним праволијским светловодом је приказана на слици 5.10. Са слике се види да је густина мреже светловода и околине светловода знатно већа од густине мреже у остатку домена. На ово решење се ишло због ограничених ресурса рачунара. Наиме, претходене анализе, спроведене на дводимензионалним моделима, су показале да је енергија поља скоцентрисана у светловодима и њиховој околини. Поред тога, приликом прорачуна пропусног опсега филтра, од интереса је прорачун фактора добротe који потиче од губитака енергије прстенастог светловода због предаје енергије праволијском светловоду, а не фактор добротe који потиче од зрачења енергије у околни простор. Из тог разлога је мрежа изабрана тако да се густина мреже смањује идући од светловода ка савршено прилагођеном слоју, при чему је густина мреже савршено прилагођеног слоја, који се наставља на праволијски

светловод, знатно већа како би се што квалитетније прорачунала енергија преда-
та праволинијском светловоду.



Слика 5.10: Мрежа микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским
светловодом.

У табели 5.7 су приказане резонантне фреквенције и фактор доброте који се до-
бијају за различита растојања између праволинијског и прстенастог светловода.
Из табеле се види да је фактор доброте микро-прстенастог резонатора добијен из
модела са једним праволинијским светловодом већи од фактора доброте модела
са два праволинијска светловода, што указује да ће код микро-прстенастог резо-
натора са једним праволинијским светловодом, пропусни опсег бити ужи.

Табела 5.7: Резонатна фреквенција и фактор доброте микро-прстенастог
резонатора са једним праволинијским светловодом, за различита
растојања прстена и светловода.

$d[nm]$	λ_{eig1}	Q_1	λ_{eig2}	Q_2
250	$193,0653e12 + j \cdot 2,062e8$	$4,68e5$	$193,0655e12 + j \cdot 2,209e9$	$4,37e4$
150	$193,0574e12 + j \cdot 2,214e9$	$4,36e4$	$193,0579e12 + j \cdot 2,231e9$	$4,37e4$
100	$193,0433e12 + j \cdot 5,865e9$	$1,64e4$	$193,0439e12 + j \cdot 6,0925e10$	$1,58e4$
50	$192,9996e12 + j \cdot 1,824e10$	$5,29e3$	$193,000e12 + j \cdot 1,879e10$	$5,13e3$
25	$192,9422e12 + j \cdot 4,047e10$	$2,38e3$	$192,944e12 + j \cdot 4,163e10$	$2,32e3$

У табели 5.8 приказане су резонатне фреквенције и очекивани пропусни опсег
микро-прстенастог резонатора са једним праволинијским светловодом за разли-

чита растојања прстена и праволинијског светловода. Из табеле се види да је пропусни опсег за растојање од $d=25\text{nm}$, око 81GHz , што је мање од пропусног опсега микро-прстенастог резонатора са два праволинијска светловода који је имао при истом растојању пропусни опсег од 107GHz .

Табела 5.8: Резонатна фреквенција и фактор доброте за различита растојања прстена и праволинијског светловода.

$d[\text{nm}]$	$f_{r1}(\text{THz})$	Q_1	$\Delta f(\text{GHz})$	f_{r2}	Q_2	$\Delta f(\text{GHz})$
250	193,0653	$4,68e5$	0,41	193,0655	$4,37e5$	0,44
150	193,0574	$4,36e4$	4,42	193,0579	$4,37e4$	4,41
100	193,0433	$1,64e4$	11,77	193,0439	$1,58e4$	12,21
50	192,9996	$5,29e3$	36,48	193,000	$5,13e3$	37,62
25	192,9422	$2,38e3$	81,07	192,944	$2,32e3$	83,16

У табели 5.9 приказане су сопствене вредности добијене у околини три суседне резонатне фреквенције и одговарајући фактори доброте. У табели се јасно може уочити да постоји раздвајање резонантних фреквенција.

Табела 5.9: Резонатна фреквенција и фактор доброте прстена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.

$d[\text{nm}]$	$\lambda_{\text{eig}3D}$	Q_1	$\lambda_{\text{eig}3D}$	Q_2
25	$189,7373e12 + j \cdot 4,742e10$	$2,0e3$	$189,7414e12 + j \cdot 4,864e10$	$1,95e3$
25	$192,9422e12 - j \cdot 4,047e10$	$2,4e3$	$192,9445e12 - j \cdot 4,163e10$	$2,3e3$
25	$196,1684e12 + j \cdot 3,400e10$	$2,9e3$	$196,171e12 + j \cdot 3,157e10$	$3,1e3$

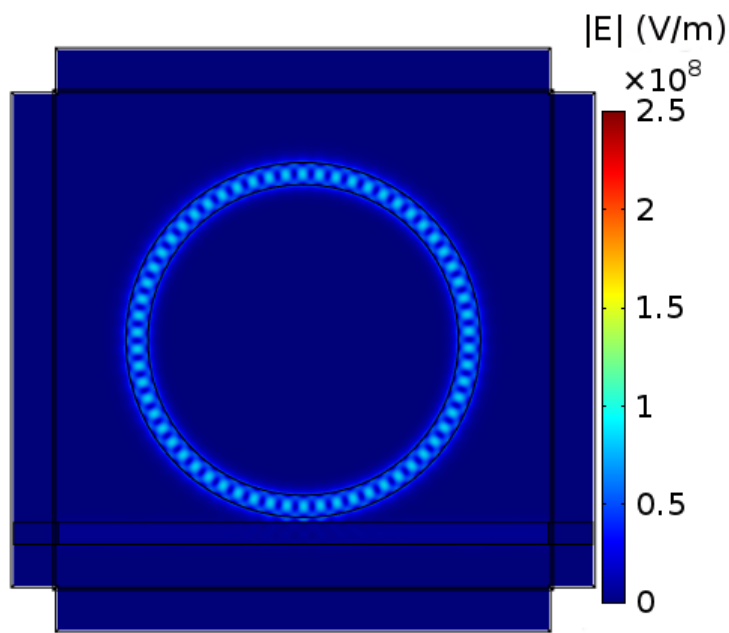
У табели 5.10 приказане су три суседне резонантне фреквенције и очекивани пропусни опсежи. Из табеле 5.10 се види да су пропусни опсежи ужи у односу на резонатор са два спрегнута светловода.

На слици 5.11 приказана је амплитуда вектора јачине електричног поља мода на фреквенцији око $193,1\text{THz}$. Са слике се може видети да је амплитуда поља у прстену већа у односу на амплитуду поља у праволинијском светловоду. Амплитуда поља у прстену је већа зато што је рачунат доминантан мод прстена и енергија коју прстен предаје праволинијском светловоду, а све у складу са теоријом спрег-

Табела 5.10: Резонатна фреквенција и фактор добротe прсена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.

$d[nm]$	$f_r(THz)$	$\Delta f(GHz)$	$f_r(THz)$	$\Delta f(GHz)$
25	$189,7373e12$	94,86	$189,7414e12$	97,3
25	$192,9422e12$	80,39	$192,9445e12$	83,88
25	$196,1684e12$	67,64	$196,171e12$	63,28

нутих модова зависних од времена.

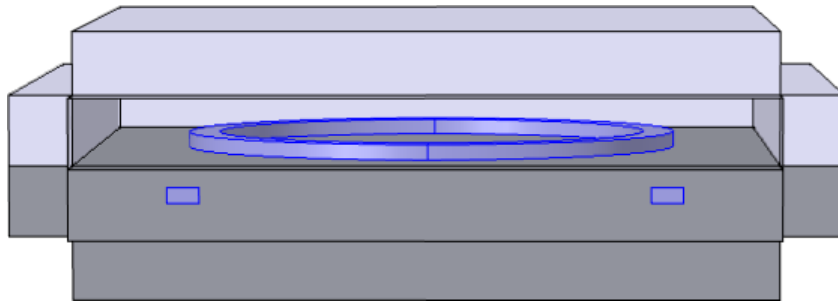


Слика 5.11: Амплитуда електричног поља прстена спрегнутог са једним праволинијским светловодом.

5.5 Преносна карактеристика вертикално спрегнутог резонатора

Због геометријског распореда компоненти, микро-прстенести резонатори са вертикалном спрегом не могу се представљати одговарајућим дводимензионалним моделом. Из тог разлога, одређивање преносне карактеристике микро-прстенестог резонатора са вертикалном спрегом, се заснива на одређивању сопствене вредности решења Хелмхолцове једначине тродимензионалног модела.

На слици 5.12, приказана је геометрија модела вертикално спрегнутих праволинијских светловода са прстенастим светловодом. Предња ивица модела је склоњена на слици како би се боље видела унутрашњост модела. Праволинијски светловоди се налазе уроњени у супстрат, на дубини $d = 250\text{nm}$, док се прстен налази на супстрату окружен ваздухом. Око целог модела је постављен савршено прилагођен слој.



Слика 5.12: Геометрија прстена вертикално спрегнутог са праволинијским светловодима.

У табели 5.11, дате су сопствене вредности Хелмхолцове једначине за две различите густине мреже. Из табеле се види да се добијене резонантне фреквенције, за две различите густине мреже разликују за мање од 10 GHz. Имајући у виду грешку одређења резонантне фреквенције и време неопходно за симулацију, у зависности од примене, може се направити компромис на рачун тачности решења а у корист неопходног времена трајања симулације.

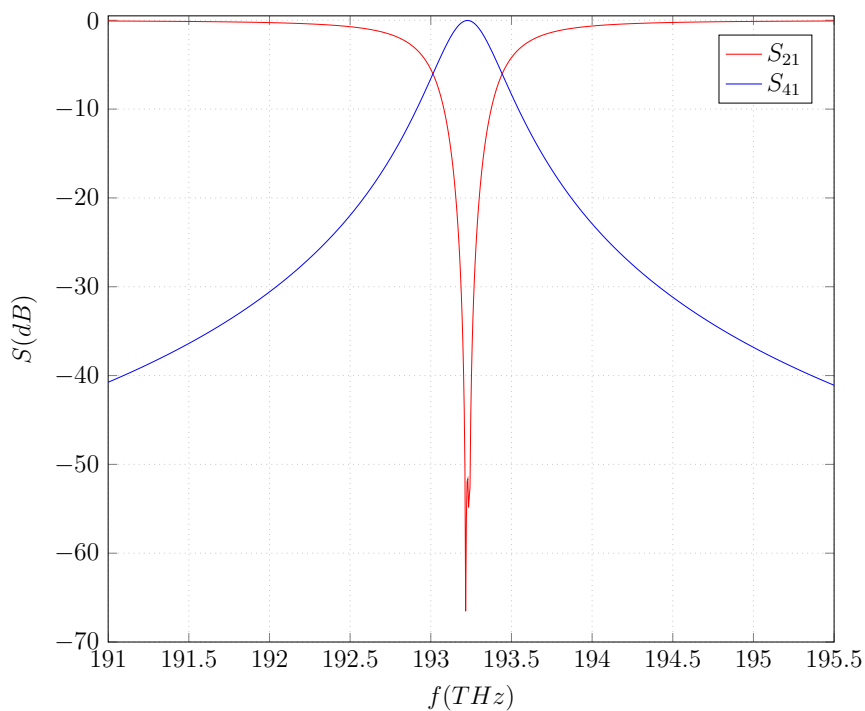
Табела 5.11: Резонантна фреквенција и фактор доброте вертикално спрегнутих светловода, за растојање прстена и светловода од 250 nm.

$h[\text{nm}]$	λ_{eig1}	Q_1	λ_{eig2}	Q_2
64	$193,2167e12 + j \cdot 2,1339e11$	452,7	$193,2389e12 + j \cdot 2,1623e11$	448,8
40	$193,2192e12 + j \cdot 2,1264e11$	454,3	$193,2291e12 + j \cdot 2,1704e11$	445,2

Из табеле 5.11, може се видети да је фактор доброте око 450, што је много мањи фактор доброте у односу на фактор доброте од $1,47e5$ колико је износио код хоризонтално спрегнутих светловода на растојању 250nm. То показује да је спрега вертикално спрегнутих светловода са прстеном, при хоризонталној поларизацији

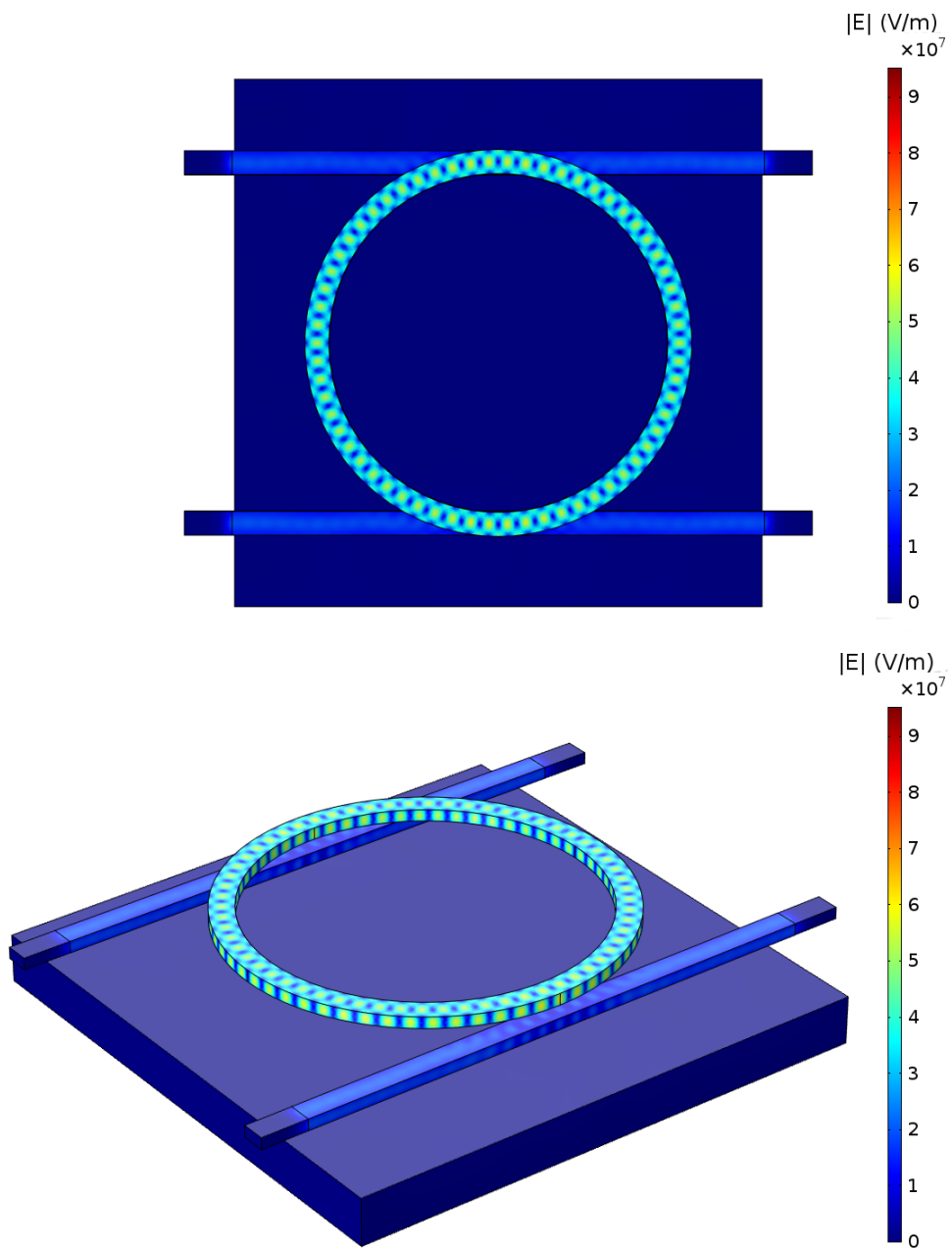
поља, значајно већа од спреге хоризонтално спрегнутих светловода и прстена. На основу израчунатог фактора доброте, добија се да је пропусни опсег вертикално спрегнутих светловода реда 400 GHz, што је значајно веће у односу на пропусни опсег од 1,31GHz хоризонтално спрегнутих светловода на растојању 250nm, као и на пропусни опсег пројектованог филтра који износи 100GHz.

На слици 5.13, приказана је преносна карактеристика вертикално спрегнутих светловода.



Слика 5.13: Преносна карактеристика вертикално спрегнутог микро-прстенастог резонатора.

На слици 5.14, приказана је амплитуда електричног поља резонантног мода вертикално спрегнутог резонатора. Праволинијски светловоди се налазе у супстрату на дубини 250 nm, док се прстен налази на површини супстрата. На слици 5.14 склоњено је поље супстрата, како би се видело поље праволинијских светловода. Са слике 5.14 се може видети формирање стојећег таласа у делу праволинијског светловода непосредно испод прстенастог светловода, док је у остатку праволинијског светловода прогресиван талас.



Слика 5.14: Амплитуда електричног поља резонатног мода вертикалне спреге.

6 Моделовање микро-прстенастог резонатора - 2,5D модел

Тродимензионални модели су доста захтевни по питању ресурса рачунара. За решавање проблема са тродимензионалним моделима, најчешће се користе рачунари са великом количином меморије. Рачунар који је коришћен за анализу тродимензионалних модела имао је 256Gb RAM меморије, али је имао могућности да директним солвером решава проблеме који су имали до седам милиона непознатих. То је био модел прстена са два праволинијска светловода са густином мреже од 64 nm.

Уколико се жели направити анализа микро-прстенастог резонатора са два или више прстена, број непознатих се значајно повећава, што превазилази границе могућности рачунара. Из тог разлога се за моделовање ових структура користе дводимензионални модели.

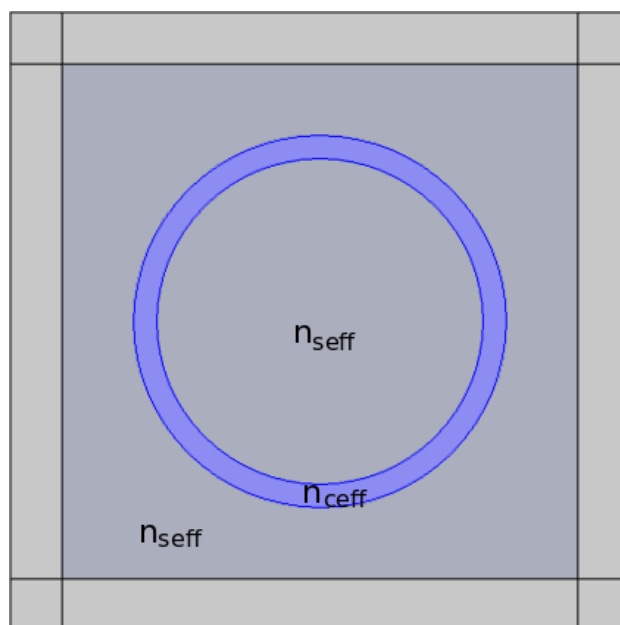
Дводимензионални модели се користе код планарних структура, као што је латерално спрегнут микро-прстенасти резонатор. Код ових модела, тродимензионална геометрија се пресликава у дводимензионалу преко ефективних индекса преламања. Одређивање ефективних индекса преламања се заснива на Маркатилијевој теорији. Проблем примене Маркатилијеве теорије код светловода квадратног попречног пресека, лежи у томе што се у делу где нема светловода не може одредити ефективни индекс преламања, па се он најчешће рачуна као средња вредност индекса преламања ваздуха и супстрата.

Показало се да овакав приступ даје велику грешку при одређивању преносне карактеристике микро-прстенастих резонатора. Како би превазишли ове недостатке, а задржали ефикасност дводимензионалног модела, развијен је тзв. 2,5-димензионални модел. Код овог модела се индекс преламања рачуна применом вариационог рачуна. Из тродимензионалног модела се рачуна ефективни индекс преламања сваке тачке дводимензионалног модела. Код тродимензионалних не-

структурираних мрежа, није погодно рачунати интеграле за сваку тачку дуж вертикалне осе.

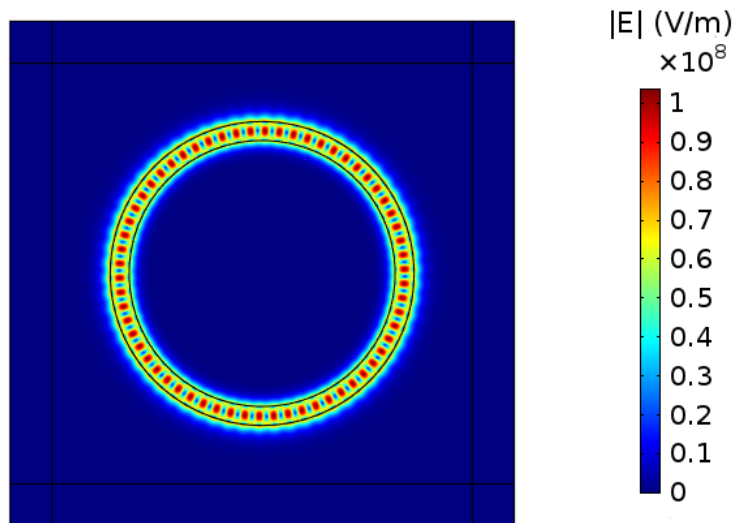
Међутим, како се 2,5D модел састоји из две средине, светловода и дела простора који окружује светловод, потребно је одредити два ефективна индекса преламања. Ова два ефективна индекса преламања се могу одредити на основу већ одређене резонантне фреквенције осно-симетричног модела.

На слици 6.1, приказана је геометрија 2,5D модела прстена. Овај модел са дводимензионалном геометријом, представља хоризонтални пресек основног модела.

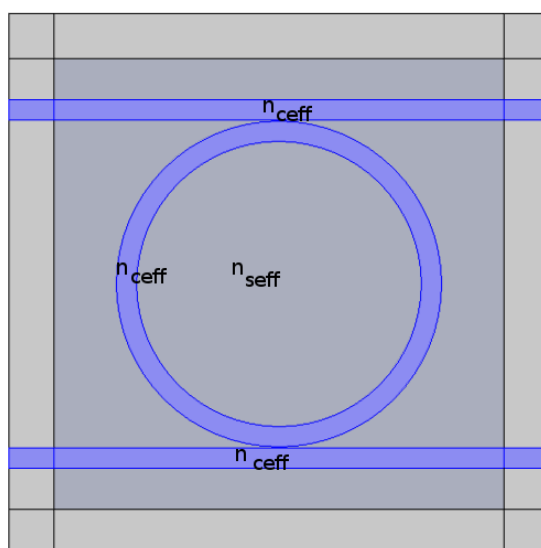


Слика 6.1: Геометрија 2,5D модела прстена.

На слици 6.2 приказана је амплитуда резонантног мода прстена добијена из 2,5D модела за вредности ефективних индекса преламања прстена и дела око прстена ($n_{ceff} = 2,8699$, $n_{seff} = 0,755$). Ефективни индекси преламања су изабрани тако да се добије доминантан мод 2,5D модела на истој резонантној учестаности као и код тродимензионалног модела, и да буде одговарајући мод ($M=31$). Резултати симулације су показали да се добија чисто реална сопствена вредност. Чисто реална сопствена вредност даје бесконачан фактор добротe, што указује да нема губитака енергије из резонатора. За разлику од 2,5D модела, тродимензионални модел је дао коначну вредност фактора добротe.



Слика 6.2: Амплитуда резонатног мода 2,5D модела прстена.



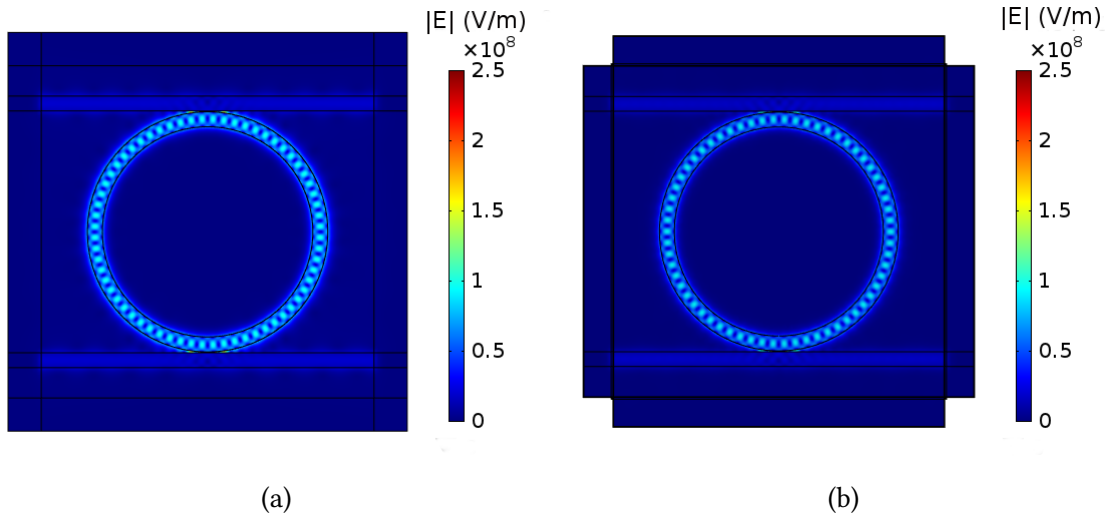
Слика 6.3: Геометрија 2,5D модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода.

На слици 6.3, приказана је геометрија 2,5D модела прстена спрегнутог са два праволинијска светловода. Око модела се налази савршено прилагођен слој чији је ефективни индекс преламања једнак индексу преламања средине на коју се наслања. Ефективни индекси преламања свих светловода су исти и једнаки ефективном индексу преламања светловода из модела који садржи само прстенасти светловод ($n_{ceff} = 2,8699$). Ефективни индекс преламања супстрата је исти као и код модела који садржи само прстенасти светловод ($n_{seff} = 0,755$).

У табели 6.1 су дате резонатне фреквенције тродимензионалног и дводимензионалног модела прстена, спрегнутог са два светловода за различита растојања светловода и прстена. Ефективни индекси преламања светловода и околне средине су $n_{eff} = 2.8699$, $n_{seff} = 0,755$. Из табеле 6.1 се види доста добро поклапање резултата добијених из дводимензионалног са резултатима добијеним из тродимензионалног модела.

Табела 6.1: Упоредни приказ резонатних фреквенција и фактора доброте тродимензионалног и 2,5D модела.

$d[nm]$	λ_{eig3D}	Q_1	λ_{eig2D}	Q_2
250	$193,0636e12 + j \cdot 6,577e8$	$1,47e5$	$193,0720e12 + j \cdot 5,89e9$	$1,64e4$
150	$193,0470e12 + j \cdot 4,617e9$	$2,09e4$	$193,0500e12 + j \cdot 3,59e9$	$2,68e4$
100	$193,0197e12 + j \cdot 1,225e10$	$7,88e3$	$193,020e12 + j \cdot 0,97e10$	$9.92e3$
50	$192,9324e12 + j \cdot 3,636e10$	$2,65e3$	$192,930e12 + j \cdot 3,26e10$	$2,96e3$
25	$192,8171e12 + j \cdot 8,074e10$	$1,19e3$	$192,823e12 + j \cdot 8,29e10$	$1,16e3$



Слика 6.4: Амплитуда електричног поља на резонатној фреквенцији у околини $192GHz$, а) 2D модел, б) 3D модел ($d=25\text{ nm}$).

На слици 6.4 приказана је амплитуда поља тродимензионалног и 2,5D модела, за растојање праволинијског и прстенастог светловода од $d=25\text{ nm}$.

6.1 2,5D модел са побудом

Код модела који се заснивају на примени методе спрегнутих модова у времену, преносна карактеристика се одређује на основу сопствених вредности добијених из Хелмхолцове једначине. Код ових модела се полази од претпоставке да је енергија електричног поља скоцентрисана у прстену и да се из прстена предаје праволинијским светловодима. Из тог разлога се електрично поље јавља равномерно на сва четири приступа микро-прстенастог резонатора.

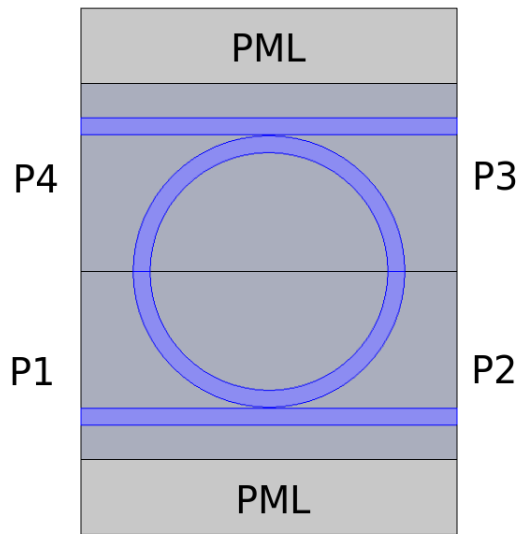
Приликом одређивања преносне карактеристике, на основу фактора добротe и резонатне фреквенције и на основу израза 5.6, на резонатној фреквенцији се увек добија да се сва енергија пренесе на "издвој" приступ, односно на основу израза 5.7, на резонатној фреквенцији се потпуно пригуши сигнал у праволинијском светловоду, међутим то није случај у пракси. Губици који настају услед зрачења из прстенастог светловода, уместо да утичу на амплитуду, утичу на еквивалентан фактор добротe, чиме мењају само пропусни опсег преносне карактеристике.

У циљу превазилажења наведених разлога, предлаже се метода моделовања микро-прстенастих резонатора помоћу модела са побудом. Овај метод се може применити како на 3D тако и на 2,5D моделу. Суштина ове метода лежи у побуди микро-прстенастог резонатора доминантним модом, преко једног приступа, на свакој од фреквенција из опсега од интереса и израчунавању параметара расејања на приступима. Параметри расејања се рачунају на основу израза:

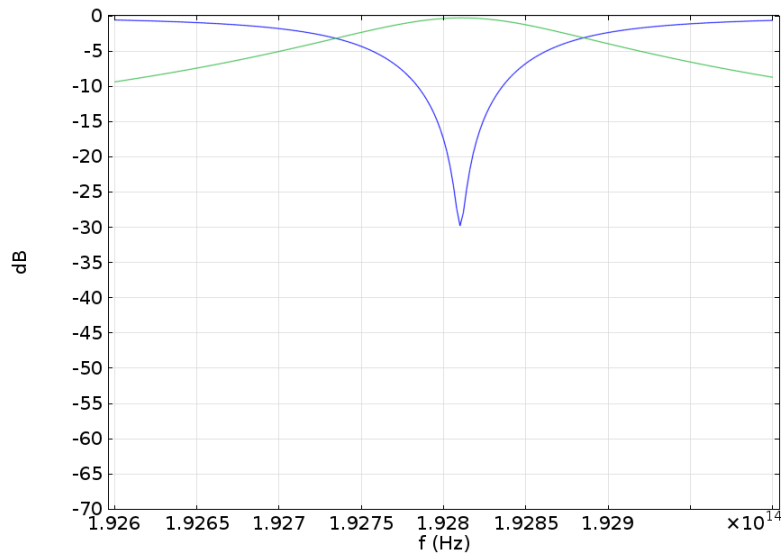
$$S_{11} = \frac{\int_{A_1} (E_1 - E_{inc}) \cdot E_{inc} \cdot dS}{\int_{A_1} E_{inc} \cdot E_{inc} \cdot dS} \quad (6.1)$$

$$S_i = \frac{\int_{A_i} E_i \cdot E_{out} \cdot dS}{\int_{A_i} E_{out} \cdot E_{out} \cdot dS} \quad (6.2)$$

Модел микро-прстенастог резонатора који се може искоритити за анализу микро-прстенастих резонатора применом методе са побудом, приказан је на слици 6.5. Модел има четири приступа, на слици означених са P1-P4. Сваки од приступа обухвата ивицу домена од савршено прилагођеног слоја до средине модела. На свком од приступа се одређује одговарајући доминантан мод. Доминантни модови на сваком од приступа су неопходни за рачунање параметара расејања. Модел се побуђује преко приступа P1. Побуђивање приступа P1 је спроведено за дискретан број фреквенција из опсега. Око модела је постављен савршено прилагођен слој како би апсорбовао евентуалне нежељене рефлексије.

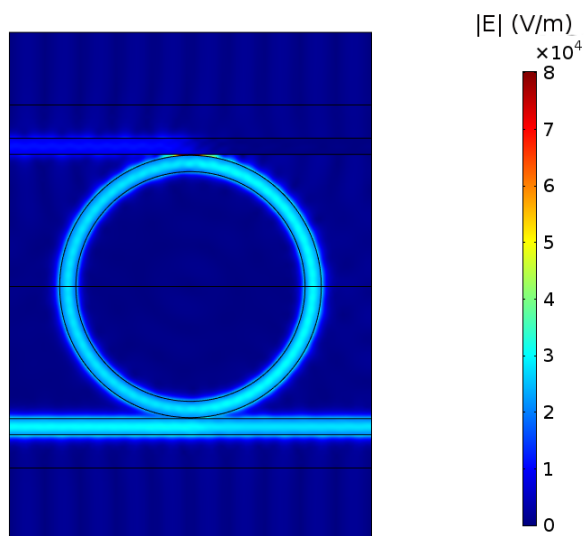


Слика 6.5: Геометрија дводимензионалног модела са побудом.

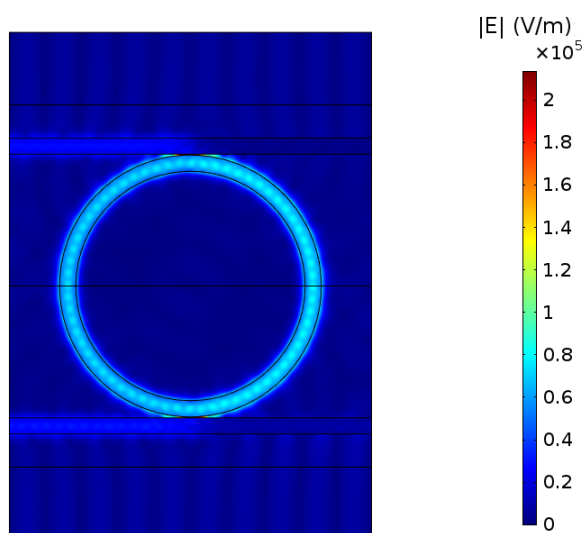


Слика 6.6: Преносна карактеристика микропрстенастог резонатора са два светловода.

Преносна карактеристика добијена овим поступком приказана је на слици 6.6. Резонантна фреквенција износи 192,81 THz, што одговара резонантној фреквенцији која је за исти 2,5D модел израчуната помоћу сопствених вредности.



Слика 6.7: Амплитуда електричног поља дводимензионалног модела када прстен није у резонанци.



Слика 6.8: Амплитуда електричног поља дводимензионалног модела са побудом на резонантној фреквенцији.

На сликама 6.7 и 6.8, приказане су амплитуде електричног поља микро-прстенастог резонатора када није и када прстен јесте у резонанци. Са слика се види расподела поља микро-прстенастог резонатора која се не може добити из сопствених вредности.

6.2 Микро-прстенести филтри вишег реда

6.2.1 Два спрегнута прстена

Поред спреге прстена и праволинијског светловода, у процесу синтезе микро-прстенастог резонатора, битну улогу игра спрега два прстена. Два прстена се понашају као два спрегнута резонатора. Услед спреге два резонатора, због Фано ефекта ¹, долази до раздвајања резонантних фреквенција. У табели 6.2 су дате резонантне фреквенције два спрегнута прстена. Из табеле се види да се код модела са два спрегнута прстена јављају четири сопствене вредности. Четири сопствене вредности се јављају првенствено зато што долази до раздвајања резонантних фреквенција прстена због утицаја спреге између прстена и због рефлексија од несавршених зидова прстена. Рефлексије од ивица прстена проузрокују да се у сваком од прстена јављају таласи који се простиру у супротним смеровима. Ови таласи су међусобно спрегнути тако да формирају нове модове чије се резонантне фреквенције међусобно разликују.

Табела 6.2: Резонантна фреквенција и фактор доброте два спрегнута прстена.

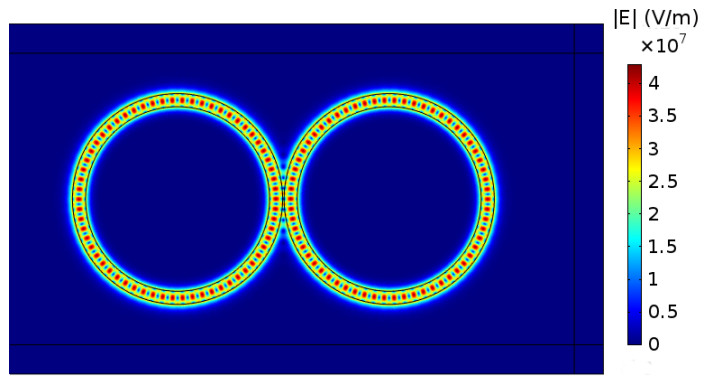
$d[nm]$	λ_{eig3D}	Q_1	$\lambda_{eig2,5D}$	Q_2
50	$192,9732e12 + j \cdot 3,888e9$	$2,48e4$	$192,9346e12 + j \cdot 2,576e9$	$3,75e4$
50	$192,9736e12 + j \cdot 3,899e9$	$2,47e4$	$192,9293e12 + j \cdot 2,702e9$	$3,57e4$
50	$193,2082e12 - j \cdot 1,364e8$	$7,08e5$	$193,1871e12 + j \cdot 2,461e8$	$3.93e5$
50	$193,2087e12 - j \cdot 1,885e8$	$5,12e5$	$193,1875e12 + j \cdot 5,462e8$	$1,77e5$

Из табеле 6.2 се може видети да је разлика између резонантних фреквенција 3D и 2,5D модела незнатно већа у односу на разлику која је била код спреге праволинијског светловода и прстена. И фактор доброте се нешто више разликује. Из тог разлога је неопходна накнадна провера резултата добијених из 2,5D модела, помоћу 3D модела.

На слици 6.9, приказана је амплитуда резонантног мода два спрегнута прстена, моделована помоћу 2,5D модела. Резонантан мод је добијен из сопствених вредности Хелмхолцове једначине.

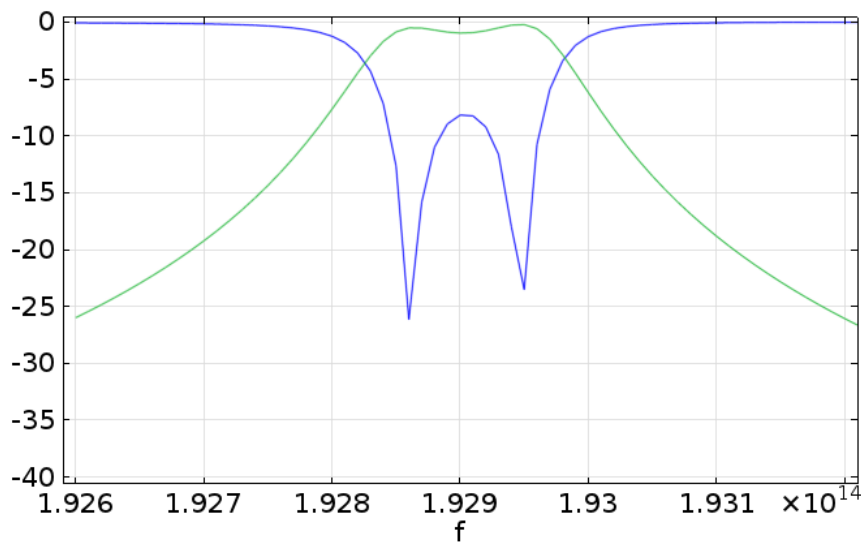
Преносна карактеристика микропрстенастог филтра са два прстена применом

¹Фано резонанца је детаљније објашњена у прилогу 5



Слика 6.9: Амплитуда електричног поља резонатног мода 2,5D модела два спрегнута прстена.

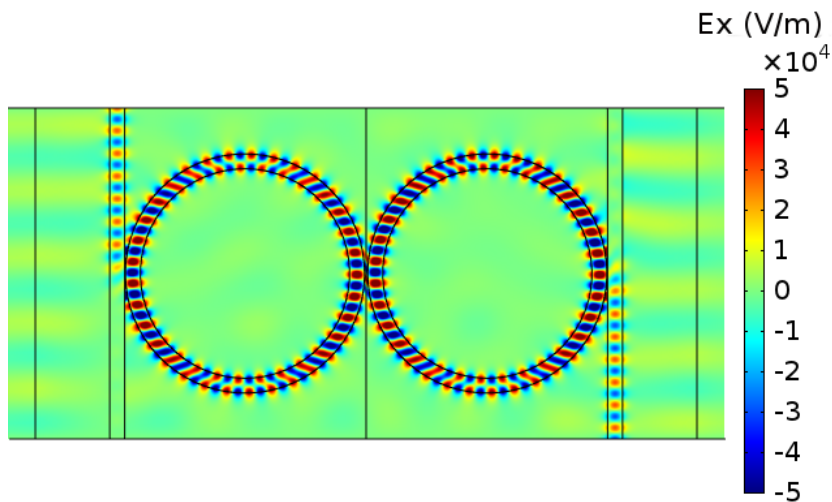
методе побуде једног приступа доминантним модом на свакој од фреквенција, приказана је на слици 6.10. Са слике се види да је преносна карактеристика у доброј мери симетрична и да је максимално равна.



Слика 6.10: Преносна карактеристика филтра са два прстена.

На слици 6.11, приказана је амплитуда хоризонтално поларисане компоненте електричног поља филтра са два спрегнута прстена на резонантној фреквенцији 192,86ТHz. Са слике се јасно може уочити да је код филтра са два прстена смер кретања електромагнетног таласа од првог ка трећем приступу.

Амплитуда електричног поља филтра са три спрегнута прстена приказана је на слици 6.12. Сва три прстена су истих карактеристика и на растојањима која

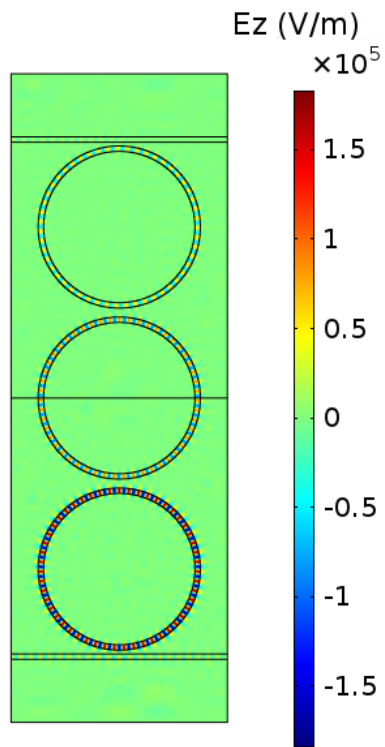


Слика 6.11: Амплитуда електричног поља филтра са два спрегнута прстена.

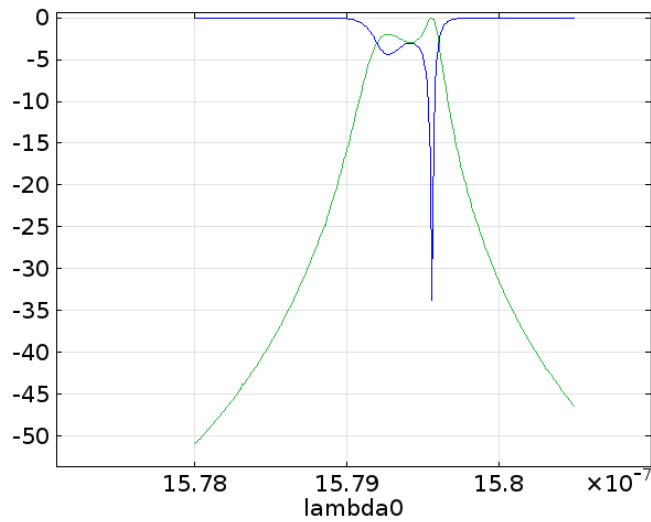
одговарају максимално равној карактеристици филтра. Овај модел је анализиран побудом доминантним модом на дискретном броју фреквенција у опсегу од интереса. Овај модел је побуђен вертикално поларисаним електромагнетним таласом.

На слици 6.13 је приказана преносна карактеристика филтра са три спрегнута прстена. Са слике се види да је нарушена симетрија фреквенцијског одзива филтра и да преносна карактеристика није максимално равна у пропусном опсегу. Симетрија филтра је нарушена због међусобне спреге прстенова, што је утицало на померање резонантних фреквенција.

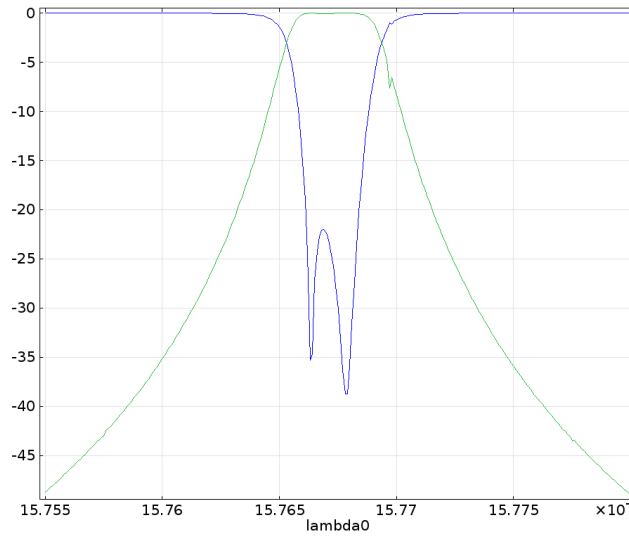
У циљу корекције преносне карактеристике, мора се кориговати резонантна фреквенција прстенова [37]. Након корекције индекса преламања средишњег прстена, добија се максимално равна и симетрична карактеристика филтра приказана на слици 6.14.



Слика 6.12: Амплитуда електричног поља филтра са три спрегнута прстена.



Слика 6.13: Преносна карактеристика филтра са три прстена пре корекције.



Слика 6.14: Преносна карактеристика филтра са три прстена након корекције.

6.3 Захтеви за ресурсима рачунара

Симулација дводимензионалног модела помоћу кога је одређен полупречник прстена, трајала је 4 минуте и 48 секунди на рачунару са 32 Gb RAM-а. Број елемената је износио 55267.

Са друге стране, симулација 3D модела код ког је густина мреже била $h = 64$ nm, и који је имао 1829938 елемената, трајала је 50 минута и 10 секунди, док је 3D модел код којег је мрежа била густине 50 nm и који је имао 3324998 елемената, симулација трајала 2 сата 6 минута и 7 секунди. Обе симулације су биле на рачунару са AMD процесорима.

Симулације са моделима који су имали до 1000000 елемената (густина мреже до 80nm), односно имале захтеве за RAM меморијом мање од 30Gb, стартоване су на рачунару са i-5 процесором. Време трајања симулација је било до 10 минута. Међутим процењена грешка у одређивању резонантне фреквенције у односу на оносиметричан модел је била већа од 60 GHz.

Код вертикално спрегнутих светловода, симулација код које је густина мреже светловода била 64 nm, на рачунару са AMD процесорима, трајала је 1 сат, 49 минута и 33 секунде, док је симулација са мрежом таласовода густине 40nm трајала 5 сати, 41 минут и 37 секунди.

7 Закључак

Моделовање микро-прстенстих резонатора, примарно се ради применом методе спрегнутих модова или применом методе коначних разлика. Ово истраживање је показало да се метода коначних елемената може успешно користити за моделовање микропрстенстих резонатора, чиме се могу искористити предности ове методе у односу на методу коначних разлика у виду коришћења неструктурираних мрежа. Уколико се узме у обзир да се у свету развијају методе које ће омогућити кластеризацију модела који користе методу коначних елемената на више рачунара, примена методе коначних елемената ће добити све више на значају.

Истраживање на пољу моделовања микропрстенстог резонатора донела су следеће резултате:

1. У првом делу, истраживање је било усмерено на развој модела за одређивање полупречника прстена који би као резултат дао циљану резонантну фреквенцију и циљани слободан спектрални опсег. Полупречник прстена је одређен помоћу ефективног индекса преламања и групног индекса добијених из одговарајућег дводимензионалног модела. Имајући у виду да је реч о дводимензионалном моделу, захтеви за ресурсима рачунара нису имали битну улогу. Помоћу овог модела су добијене основне информације о моду таласа који се простира у праволинијском светловоду.
2. Модел који је коришћен за прорачун полупречника прстена је верификован помоћу осно-симетричног модела. Осно-симетричан модел је преузет из других истраживања у којима је експериментално проверен. Корекције на моделу су се огледале само у погледу промене геометрије, што не утиче на математички апарат који се налази у позадини модела. И овај модел је дводимензионалан, тако да није показао значајније захтеве по питању ресурса рачунара. Одступање резонантне фреквенције добијене из осно-симетричног модела, а на основу прорачуна полупречника према предлогу из ове дисертације износила је мање од 0,2%. Низом симулација са различитим полупречницима прстена, показано је да прорачунати полупречник

прстена одступа у односу на полупречник прстена који би до циљану резонатну фреквенцију за око 1nm што је, имајући у виду технолошка ограничења при изради резонатора од 10nm, занемарљиво одступање. Имајући у виду релативно мала одступања, дводимензионални модел за прорачун полупречника прстена се сматра верификованим.

3. Утицај густине мреже на резултат, проверен је на осно-симетричном моделу помоћу теста конвергенције решења. Показало се да је ред конвергенције решења 1,954, што је вредност блиска теоријској вредности која износи 2 за методу коначних елемената. Међутим, због осне симетрије зидови прстена су у овом моделу иделано глатки. Из тог разлога се код осно-симетричног модела не може уочити ефекат раздвајања резонатних фреквенција.
4. Без обзира на присуство савршено прилагођеног слоја, осно-симетричан модел је давао бесконачно велику вредност фактора добротe. Бесконачно велика вредност фактора добротe се објашњава тиме што је поље доминантно скоцентрисано у прстену и непосредној околини прстена, тако да су само мале количине енергије долазиле до савршено прилагођеног слоја.
5. Како осно-симетричан модел не може истовремено да моделује и прстен и праволинијски светловод, за моделовање микро-прстенастог резонатора је направљен тродимензионални модел. Тродимензионални модел који је коришћен за моделовање микро-прстенастих резонатора верификован је поређењем са осно-симетричним моделом. Верификација је урађена тако што је направљен тродимензионални модел само прстена и резултати симулације упоређени са осно-симетричним моделом прстена. Добијено је одступање мање од 0,13%, на основу чега се тродимензионални модел сматра верификованим.
6. За разлику од осно-симетричног модела, код тродимензионалног модела, који је нешто захтевнији по питању ресурса рачунара, јавиле су се двоструке резонантне фреквенције и коначна вредност фактора добротe. На основу резултата добијених са различитим густинама мреже, показало се да двоструке резонантне фреквенције и коначна вредност настају зато што границе прстена нису глатке као код осно-симетричног модела. Повећањем густине мреже, растојање између резонантних фреквенција се смањивало, а фактор добротe се повећавао.
7. За потребе одређивања одговарајућег растојања прстена и праволинијских светловода, прстену су у тродимензионалном моделу додата два праволи-

нијска светловода. Растојање између праволинијског светловода и прстена је одређена на основу циљаног фактора доброте. Да би се добио пропусни опсег од 100GHz, био је неопходан фактор доброте од 1931, који се добија за растојање прстена и праволинијског светловода $d=25\text{nm}$.

8. Промена растојања прстена и праволинијског светловода показала је утицај праволинијског светловода на резонантну фреквенцију прстена. Наиме, са приближавањем праволинијског светловода прстену, резонантна фреквенција прстена се све више удаљавала од резонантне фреквенције прстена без праволинијских светловода.
9. У комбинацији са методом спрегнутих модова зависних од времена, фактор доброте и резонантна фреквенција су искоришћени за одређивање преносне карактеристике микро-прстенастог резонатора.
10. Моделовањем вертикалне спреге, показало се да у случају хоризонталне поларизације вертикална спрега има мањи фактор доброте, што значи да је пропусни опсег тако моделованог филтра шири односно да је спрега јача. За иста растојања између праволинијског светловода и прстена од $d=250\text{nm}$, латерална спрега је дала пропусни опсег од 1,31GHz, док је вертикална спрега дала пропусни опсег од око 400GHz.
11. Због великих захтева за ресурсима рачунара, уместо тродимензионалног модела за моделовање филтара вишег реда је предложен 2,5 димензиони модел. Код овог модела је неопходно одредити ефективне индексе преламања светловода и супстрата који ће успешно трансформисати тродимензионални модел у две димензије. Ефективни индекси преламања светловода и супстрата су изабрани тако да се резонантна фреквенција 2,5 димензионалног модела прстена, поклапа са резонантном фреквенцијом тродимензионалног модела прстена. Након тога су додати праволинијски светловоди истог ефективног индекса као и прстен и показало се добро поклапање резултата тродимензионалног модела и 2,5 димензионалног модела.
12. За одређивање преносне карактеристике филтра вишег реда, предложен је 2,5 димензиони модел са побудом. Код овог модела формирана су четири приступа који обухватају приступе светловода и део супстрата око њих. За ове приступе су одређени доминанти модови, који су искоришћени за рачунање параметара расејања. Резонантна фреквенција овог модела је упоређена са резонантном фреквенцијом тродимензионалног модела и добијено

је добро поклапање. Овај модел је искоришћен за одређивање преносне карактеристике микропрстенастих резонатора са два и три прстена. Код модела са три прстена, примећен је међусобни утицај прстенова на резонантну фреквенцију. Након корекције параметара средишњег прстена, добијена је максимално равна преносна карактеристика филтра.

Делови истраживања приказаних у овој дисертацији, објављени су у радовима:

1. Милановић Б., Рађеновић Б. и Радмиловић - Рађеновић М.: Three-dimensional finite-element modeling of optical microring resonators, *Physica Scripta*, Vol 2012, T149, 2012, 014026, (IF 1.204, за 2011. год.)
2. Рађеновић Б., Милановић Б. и Радмиловић – Рађеновић М.: Electric field enhancement in silicon slotted optical strip waveguides and microring resonators, *Physica Scripta*, Vol 2012, T149, 2012, 014027. (IF 1.204, за 2011. год.)

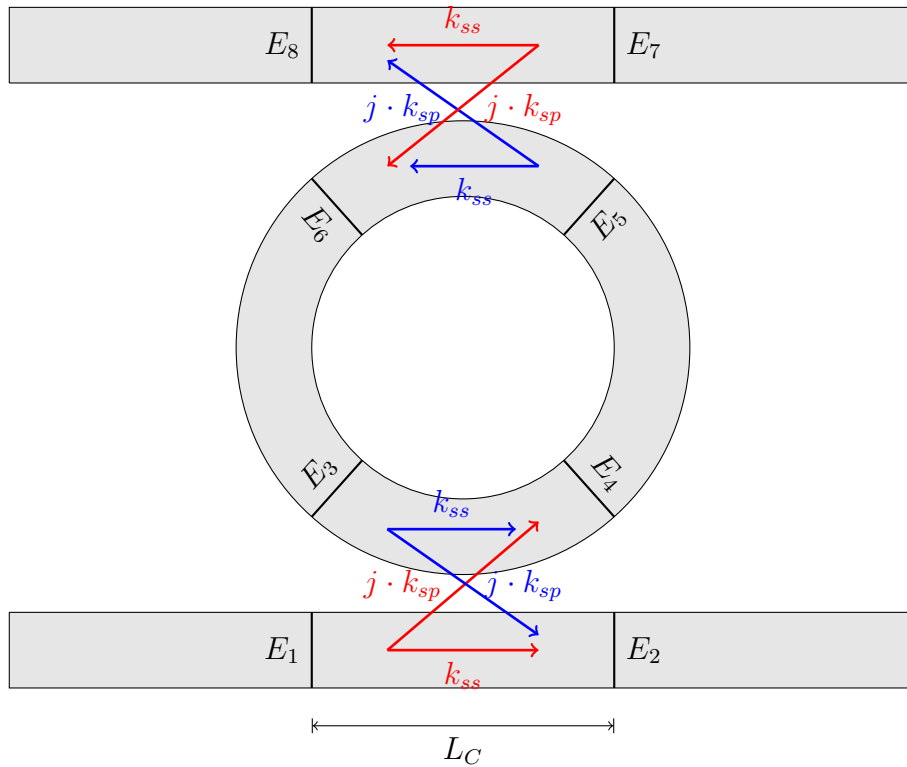
Ова истраживања су отворила пут ка могућим даљим правцима истраживања:

1. развоју алгоритма за одређивање ефективних индекса преламања 2,5 димензионог модела,
2. развоју алгоритама за кластеризацију модела који користи методу коначних елемената,
3. истраживању утицаја параметара савршено прилагођеног слоја на преносну карактеристику добијену из модела,
4. истраживању губитака енергије електромагнетних таласа који настају услед несавршености зидова прстена и губитака у материјалу.

8 Прилог 1

Матрични параметри микро-прстенастог резонатора

На слици 8.1, је приказан принцип рада спрежњака праволинијског таласовода и прстена. Фазно кашњење у спрежњаку се може представити помоћу члана $e^{j \cdot \beta \cdot L_C}$.



Слика 8.1: Спрега модова у прстену

Са слике се види да је:

$$E_2 = E_1 \cdot k_{ss} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot L_C} + E_3 \cdot j \cdot k_{sp} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot L_C} \quad (8.1)$$

$$E_4 = E_1 \cdot j \cdot k_{sp} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot L_C} + E_3 \cdot k_{ss} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot L_C} \quad (8.2)$$

Односно у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss} & j \cdot k_{sp} \\ j \cdot k_{sp} & k_{ss} \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot LC} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

На сличан начин се долази и до матричног облика везе између јачина електричног поља E_8 и E_6 са једне стране и E_5 и E_7 са друге стране.

$$\begin{bmatrix} E_6 \\ E_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ss} & j \cdot k_{sp} \\ j \cdot k_{sp} & k_{ss} \end{bmatrix} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot LC} \cdot \begin{bmatrix} E_5 \\ E_7 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Поред ових релација, могу се написати и релације које се односе на везу поља унутар прстена. Поље E_3 се може представити помоћу поља E_6 , при чему треба увести фазно кашњење због коначне дужине пута $\frac{L_P}{2}$ између ова два поља и слабљење у резонатору a .

$$E_5 = \sqrt{a} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot \frac{L_P}{2}} \cdot E_4 \quad (8.5)$$

$$E_3 = \sqrt{a} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot \frac{L_P}{2}} \cdot E_6 \quad (8.6)$$

Решавањем једначина (8.3, 8.4, 8.5, 8.6) уз претпоставку да је $E_7 = 0$, односно да нема поља на ”додај” приступу, добија се:

$$E_2 = \frac{k_{ss} - k_{ss} \cdot (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a \cdot e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)}}{1 - k_{ss}^2 \cdot a \cdot e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)}} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot LC} \cdot E_1 \quad (8.7)$$

$$E_8 = \frac{-k_{sp}^2 \cdot \sqrt{a} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot (LC + \frac{L_P}{2})}}{1 - 2 \cdot a \cdot e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)}} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot LC} \cdot E_1 \quad (8.8)$$

Променом фреквенције, у једначинама (8.7 и 8.8) се мења члан β , односно $e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)}$.

Вредност модула овог члана се креће између -1 и +1. Према томе максимална вредност интензитета електричног поља E_2 се добија за $e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)} = +1$, а минимална за $e^{j \cdot \beta \cdot (2 \cdot LC + L_P)} = -1$

$$|E_{2max}| = \frac{k_{ss} - k_{ss} \cdot (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a}{1 - k_{ss}^2 \cdot a} \cdot |E_1| \quad (8.9)$$

$$|E_{2min}| = \frac{k_{ss} + k_{ss} \cdot (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a}{1 + k_{ss}^2 \cdot a} \cdot |E_1| \quad (8.10)$$

Слично томе, из једначине (8.8), максимална и минимална вредност интензитета

поља E_8 биће:

$$|E_{8max}| = \frac{-k_{sp}^2 \cdot \sqrt{a}}{1 - k_{ss}^2 \cdot a} \cdot |E_1| \quad (8.11)$$

$$|E_{8min}| = \frac{-k_{sp}^2 \cdot \sqrt{a}}{1 + k_{ss}^2 \cdot a} \cdot |E_1| \quad (8.12)$$

Из једначина (8.9,8.10,8.11,8.12), добија се:

$$\left| \frac{E_{8max}}{E_{8min}} \right|^2 = \left| \frac{1 + k_{ss}^2 \cdot a}{1 - k_{ss}^2 \cdot a} \right|^2 \quad (8.13)$$

односно:

$$k_{ss}^2 \cdot a = \frac{\sqrt{\left| \frac{E_{8max}}{E_{8min}} \right|^2} - 1}{\sqrt{\left| \frac{E_{8max}}{E_{8min}} \right|^2} + 1} \quad (8.14)$$

А за поље E_2 ,

$$\left| \frac{E_{2max}}{E_{2min}} \right|^2 = \left| \frac{1 + (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a}{1 - (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a} \right|^2 \cdot \left| \frac{1 - k_{ss}^2 \cdot a}{1 + k_{ss}^2 \cdot a} \right|^2 \quad (8.15)$$

односно:

$$(k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a = \frac{\sqrt{\left| \frac{E_{8max}}{E_{8min}} \right|^2 \cdot \left| \frac{E_{2max}}{E_{2min}} \right|^2} - 1}{\sqrt{\left| \frac{E_{8max}}{E_{8min}} \right|^2 \cdot \left| \frac{E_{2max}}{E_{2min}} \right|^2} - 1} \quad (8.16)$$

Мерењем фреквенцијског одзива "кроз" и "издвој" приступа, могу се одредити вредности $k_{ss}^2 \cdot a$ и $(k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a$. Уколико би спрега између светловода и прстена била без губитака ($k_{ss}^2 + k_{sp}^2 = 1$) и уколико би губици услед простирања у прстену били занемарљиви ($a = 1$), количник у изразу (8.15) би тежио бесконачности. Постојање губитака услед спреге, као и унутар прстена, доводи до коначне вредности количника у изразу (8.15). Из једначине (8.9) добија се:

$$\left| \frac{E_{2max}}{E_1} \right|^2 = k_{ss}^2 \cdot \left| \frac{1 - (k_{ss}^2 + k_{sp}^2) \cdot a}{1 - k_{ss}^2 \cdot a} \right|^2 \quad (8.17)$$

9 Прилог 2

Фано резонанца

Уколико се посматра резонатор који се може описати диференцијалном једначином облика:

$$\ddot{x} + \gamma \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (9.1)$$

где је ω_0 резонантна учестаност осцилатора у одсуству слабљења ($\gamma = 0$), а ω фреквенција спољашње силе.

Опште решење једначине (9.1) је сума хомогеног и партикуларног решења. Хомогено решење је облика:

$$x_h(t) = e^{-\gamma t/2} \cdot [q_1 \cdot e^{j \cdot \lambda \cdot t} + q_2 \cdot e^{-j \cdot \lambda \cdot t}] \quad (9.2)$$

За случај $t \cdot \gamma \gg 1$, хомогено решење тежи нули, тако да неће утицати на понашање резонатора.

Партикуларно решење се може добити уколико се десна страна једначине (9.1) представи у комплексном облику:

$$\ddot{x}_p + \gamma \cdot \dot{x}_p + \omega_0^2 \cdot x_p = \frac{A}{2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot \omega \cdot t}) \quad (9.3)$$

Решење једначине (9.3) се може написати као сума $x_p = x^+ + x^-$ где су x^\pm партикуларна решења за "позитивне" односно "негативне" фреквенције. Према томе, партикуларно решење се може приказати као:

$$x_p(t) = 2 \cdot \text{Re}(x^+(t)) \quad (9.4)$$

при чему је $x^+(t)$ решење једначине:

$$\ddot{x}^+ + \gamma \cdot \dot{x}^+ + \omega_0^2 \cdot x^+ = \frac{A}{2} \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad (9.5)$$

Решење ове једначине има облик $x^+(t) = c(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ где је:

$$c(\omega) = \frac{A/2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma \cdot \omega} \quad (9.6)$$

У временском домену решење једначине осцилатора ће имати облик:

$$x(t) = |c(\omega)| \cdot \cos[\omega \cdot t - \varphi(\omega)] \quad (9.7)$$

где су:

$$|c(\omega)| = \frac{A/2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot \gamma^2}} \quad (9.8)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega \cdot \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (9.9)$$

Једначина (9.9) показује да се при проласку кроз резонантну учестаност фаза осцилатора промени за π , док је амплитуда у резонанци једнака:

$$|c(\omega_0)| = \frac{A}{2 \cdot \omega_0 \cdot \gamma} \gg |c(0)| \quad (9.10)$$

Два спрегнута осцилатора

Два спрегнута осцилатора са коефицијентом спреге k могу се анализирати преко једначина које описују само партикуларно решење јер ће хомогено решење након прелазног процеса и у овом случају тежити нули. Одговарајуће једначине имају облик:

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \cdot \dot{x}_1 + \omega_1^2 \cdot x_1 + k \cdot x_2 = a_1 \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad (9.11)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \cdot \dot{x}_2 + \omega_2^2 \cdot x_2 + k \cdot x_1 = 0 \quad (9.12)$$

Уколико не постоји спрега између ова два осцилатора ($k = 0$), они ће осциловати независно са одговарајућим фреквенцијама (ω_1 и ω_2). Спрегнути, осцилатори имају два нормална (сопствена) мода. Код једног мода осцилације се крећу у истом смеру, а код другог у супротним смеровима. Када нема слабљења ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), сопствене вредности се могу наћи решавањем једначине:

$$(\omega_1^2 - \omega^2) \cdot (\omega_2^2 - \omega^2) - k^2 = 0 \quad (9.13)$$

Ако је коефицијент спреге мале вредности ($\omega_2^2 - \omega_1^2 \gg k$), решење једначине (9.13) ће бити:

$$\omega_{1sops}^2 \approx \omega_1^2 - \frac{k^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (9.14)$$

$$\omega_{2sops}^2 \approx \omega_2^2 + \frac{k^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (9.15)$$

што представља померене сопствене вредности у односу на сопствене вредности осцилатора када нису спрегнути.

Уколико се анализира ситуација када постоји слабење ($\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$), у стационарном стању, осцилатори ће осциловати хармониски са осцилацијама облика:

$$x_1 = c_1(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad (9.16)$$

$$x_2 = c_2(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad (9.17)$$

при чему су:

$$c_1(\omega) = \frac{(\omega_2^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma_2 \cdot \omega)}{(\omega_1^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma_1 \cdot \omega) \cdot (\omega_2^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma_2 \cdot \omega) - k^2} \cdot a_1 \quad (9.18)$$

$$c_2(\omega) = -\frac{k}{(\omega_1^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma_1 \cdot \omega) \cdot (\omega_2^2 - \omega^2 + j \cdot \gamma_2 \cdot \omega) - k^2} \cdot a_1 \quad (9.19)$$

односно:

$$c_1(\omega) = |c_1(\omega)| \cdot e^{-j \cdot \varphi_1(\omega)} \quad (9.20)$$

$$c_2(\omega) = |c_2(\omega)| \cdot e^{-j \cdot \varphi_2(\omega)} \quad (9.21)$$

Уколико се упореде фазе осцилација, добија се:

$$\varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega) = \pi - \theta(\omega) \quad (9.22)$$

где је:

$$\theta(\omega) = \arctan \left(\frac{\gamma_2 \cdot \omega}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \quad (9.23)$$

Из једначине (9.18) се може видети да за ($\gamma_2 = 0$) када је $\omega = \omega_2$ амплитуда, првог осцилатора постаје нула, док амплитуда другог осцилатора тежи вредности a_1/k .

10 Прилог 3

Лоренцова теорема реципроцитета

Уколико се пође од Максвелових једначина које задовољавају два различита поља у истој средини без извора:

$$-\nabla \times \vec{E}^a = j \cdot \omega \cdot \mu^a \cdot \vec{H}^a \quad (10.1)$$

$$\nabla \times \vec{H}^a = j \cdot \omega \cdot \varepsilon^a \cdot \vec{E}^a \quad (10.2)$$

$$-\nabla \times \vec{E}^b = j \cdot \omega \cdot \mu^b \cdot \vec{H}^b \quad (10.3)$$

$$\nabla \times \vec{H}^b = j \cdot \omega \cdot \varepsilon^b \cdot \vec{E}^b \quad (10.4)$$

Уколико се једначина (10.1) скаларно помножи са \vec{E}^b , а једначина (10.3) са \vec{H}^a , добиће се једначине:

$$\vec{E}^b \cdot (\nabla \times \vec{H}^a) = j \cdot \omega \cdot \varepsilon^a \vec{E}^b \cdot \vec{E}^a \quad (10.5)$$

$$-\vec{H}^a \cdot (\nabla \times \vec{E}^b) = j \cdot \omega \cdot \mu^b \vec{H}^b \cdot \vec{H}^a \quad (10.6)$$

Сабирањем једначина (10.5 и 10.6) и применом векторског израза:

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (10.7)$$

добија се:

$$-\nabla \cdot (\vec{E}^b \times \vec{H}^a) = j \cdot \omega \cdot \varepsilon^a \cdot \vec{E}^b \cdot \vec{E}^a + j \cdot \omega \cdot \mu^b \vec{H}^b \cdot \vec{H}^a \quad (10.8)$$

Сличним поступком са преостале две једначине добија се:

$$-\nabla \cdot (\vec{E}^a \times \vec{H}^b) = j \cdot \omega \cdot \varepsilon^b \cdot \vec{E}^b \cdot \vec{E}^a + j \cdot \omega \cdot \mu^a \vec{H}^b \cdot \vec{H}^a \quad (10.9)$$

Сабирањем и интеграцијом једначина (10.8 и 10.9), добија се једначина која мора важити за било која два поља у средини:

$$\int \nabla \cdot (\vec{E}^b \times \vec{H}^a + \vec{E}^a \times \vec{H}^b) \cdot dx = -j \cdot \omega \cdot \int (\varepsilon^b - \varepsilon^a) \cdot \vec{E}^b \cdot \vec{E}^a \cdot dx \quad (10.10)$$

Спрега прстенасти светловод - праволинијски светловод

Теорија спрегнутих модова полази од претпоставке да поље има хармонијску зависност, да су светловоди мономодни и да су рефлексије занемарљиве.

Уколико се електрично поље представи као хармонијска функција:

$$\vec{E}(x, z, t) = \vec{E}(x, z) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \quad (10.11)$$

при чему је:

$$E(x, z) = \sum_m E_m(z) \cdot f_m(x) \cdot e^{-j \cdot \beta_m \cdot z} \quad (10.12)$$

где су:

$f_m(x)$ - изглед мода m у трансверзалној равни

$E_m(z)$ - споро променљива амплитуда поља у правцу z осе одговарајућег мода

$\beta_m(\omega)$ - пропагациона константа одговарајућег мода m

За укупно електрично и магнетно поље, мономодних система, могу се написати једначине облика:

$$\vec{E}(x, y) = a_b(z) \cdot \vec{E}_b(x, y) + a_s(z) \cdot \vec{E}_s(x, y) \quad (10.13)$$

$$\vec{H}(x, y) = a_b(z) \cdot \vec{H}_b(x, y) + a_s(z) \cdot \vec{H}_s(x, y) \quad (10.14)$$

где су $a_b(z)$ и $a_s(z)$, непознате амплитуде модова у светловоду и прстену у делу спреге.

Поље у прстену се може одредити решавањем одговарајуће Хелмхолцове једначине у цилиндричном координатном систему, а поље у светловоду одговарајуће једначине у Декартовом координатном систему. Решења ће имати облик:

$$\vec{E}_b(r, \theta) = \vec{E}_b^0(r) \cdot e^{-j \cdot \gamma_b \cdot R \cdot \theta} \quad (10.15)$$

$$\vec{H}_b(r, \theta) = \vec{H}_b^0(r) \cdot e^{-j \cdot \gamma_b \cdot R \cdot \theta} \quad (10.16)$$

$$\vec{E}_s(x, z) = \vec{E}_s^0(x) \cdot e^{-j \cdot \beta_s \cdot z} \quad (10.17)$$

$$\vec{H}_s(x, z) = \vec{H}_s^0(x) \cdot e^{-j \cdot \beta_s \cdot z} \quad (10.18)$$

Користећи једначину (10.10) са $\{\vec{E}, \vec{H}, \varepsilon\}$ и $\{\vec{E}_b, \vec{H}_b, \varepsilon_b\}$, затим са $\{\vec{E}, \vec{H}, \varepsilon\}$ и $\{\vec{E}_s, \vec{H}_s, \varepsilon_s\}$, и на крају четири пута са $\{\vec{E}_p, \vec{H}_p, \varepsilon_p\}$ и $\{\vec{E}_q, \vec{H}_q, \varepsilon_q\}$, где су $p, q = b, s$ добијају се једначине спрегнутих модова:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{bb} & \sigma_{bs} \\ \sigma_{sb} & \sigma_{ss} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} a_b \\ a_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{bb} & c_{bs} \\ c_{sb} & c_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_b \\ a_s \end{pmatrix} \quad (10.19)$$

где је:

$$\sigma_{pq} = \langle \vec{E}_p, \vec{H}_p | \vec{E}_q, \vec{H}_q \rangle = \frac{1}{4} \cdot \int \vec{i}_z \cdot (\vec{E}_q \times \vec{H}_p + \vec{E}_p \times \vec{H}_q) dx \quad (10.20)$$

\vec{i}_z - је јединични вектор у правцу z осе.

$$c_{pq} = -j \cdot \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{4} \cdot \int \vec{E}_p \cdot (\varepsilon - \varepsilon_q) \cdot \vec{E}_q dx, \quad p, q = b, s \quad (10.21)$$

Осим коефицијената σ_{ss} и c_{ss} сви остали коефицијенти не зависе од z координате.

Решење за два праволинијска светловода

Уколико се посматра спрега два праволинијска светловода у којима су побуђе-ни само доминантни модови, $\sigma_{bb} = 1$, док је $\sigma_{bs} = 0$. Са друге стране $c_{bb} = 0$. Једначина (10.19) ће тада имати облик:

$$\frac{\partial a_b}{\partial z} = c_{bs} \cdot a_s = -j \cdot k_{bs} \cdot a_s \quad (10.22)$$

$$\frac{\partial a_s}{\partial z} = c_{sb} \cdot a_b = -j \cdot k_{sb} \cdot a_b \quad (10.23)$$

где је:

$$k_{pq} = \frac{\omega \cdot \varepsilon_0}{4} \cdot \int \vec{E}_p \cdot (\varepsilon - \varepsilon_q) \cdot \vec{E}_q dx, \quad p, q = b, s \quad (10.24)$$

Решавањем система једначина (10.22 и 10.23), диференцирањем једне од једначина и заменом вредности из друге, уз $k_{sb} = k_{bs} = k$ добијају се једначине облика:

$$\frac{\partial^2 a_p}{\partial z^2} + k^2 \cdot a_p = 0, \quad p = b, s \quad (10.25)$$

чија су решења облика:

$$a_s(z) = a \cdot \cos(k \cdot z) + b \cdot j \cdot \sin(k \cdot z) \quad (10.26)$$

$$a_b(z) = c \cdot \cos(k \cdot z) + d \cdot j \cdot \sin(k \cdot z) \quad (10.27)$$

Вредности коефицијената (a,b,c,d), се могу добити из почетних услова, $a_s(0) = a$, $a_b(0) = 0 = c$ и заменом у једначине (10.22 и 10.23), $b = 0$, $d = k$.

Према томе, може се писати:

$$a_s(z) = a_s(0) \cdot \cos(k \cdot z) \quad (10.28)$$

$$a_b(z) = a_s(0) \cdot j \cdot \sin(k \cdot z) \quad (10.29)$$

односно у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} a_s(z) \\ a_b(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k \cdot z) & -j \cdot \sin(k \cdot z) \\ -j \cdot \sin(k \cdot z) & \cos(k \cdot z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_s(0) \\ a_b(0) \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

Решавањем система простих диференцијалних једначина (10.19), добијају се линеарне релације:

$$\begin{pmatrix} a_b(z_0) \\ a_s(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{bb} & T_{bs} \\ T_{sb} & T_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_b(z_i) \\ a_s(z_i) \end{pmatrix} \quad (10.31)$$

Коефицијенти спреге прстена и праволинијског светловода

У случају спреге прстена и светловода, због различите константе простирања, једначина (10.13) имаће облик:

$$\vec{E}(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_b \cdot z} = a_b(z) \cdot \vec{E}_b(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_b \cdot z} + a_s(z) \cdot \vec{E}_s(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_s \cdot z} \quad (10.32)$$

$$\vec{E}(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_s \cdot z} = a_b(z) \cdot \vec{E}_b(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_b \cdot z} + a_s(z) \cdot \vec{E}_s(x, y) \cdot e^{-j \cdot \beta_b \cdot s} \quad (10.33)$$

Односно

$$\vec{E}(x, y) = a_b(z) \cdot \vec{E}_b(x, y) + a_s(z) \cdot e^{-j \cdot \delta_{bs} \cdot z} \cdot \vec{E}_s(x, y) \quad (10.34)$$

$$\vec{E}(x, y) = a_b(z) \cdot e^{-j \cdot \delta_{sb} \cdot z} \cdot \vec{E}_b(x, y) + a_s(z) \cdot \vec{E}_s(x, y) \quad (10.35)$$

где је $\delta_{bs} = -\delta_{sb} = \beta_s - \beta_b = \delta$.

Једначине (10.22 и 10.23) имаће нови облик:

$$\frac{\partial a_b}{\partial z} = -j \cdot k_{bs} \cdot a_s \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot z} \quad (10.36)$$

$$\frac{\partial a_s}{\partial z} = -j \cdot k_{sb} \cdot a_b \cdot e^{j \cdot \delta \cdot z} \quad (10.37)$$

Диференцирањем једначине (10.36) по z уз $k_{bs} = k_{sb} = k$, добија се:

$$\frac{\partial^2 a_b}{\partial z^2} = -j \cdot k \cdot \frac{\partial a_s}{\partial z} \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot z} - j \cdot (-j \cdot \delta) \cdot k \cdot a_s \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot z} \quad (10.38)$$

Односно даљим сређивањем (10.38), заменом (10.36 и 10.37) и понављањем поступка са другом непознатом, добијају се диференцијалне једначине другог реда облика:

$$\frac{\partial^2 a_b}{\partial z^2} = -k^2 \cdot a_b \cdot e^{j \cdot \delta \cdot z} + (-j \cdot \delta) \cdot k \cdot \frac{\partial a_b}{\partial z} \quad (10.39)$$

$$\frac{\partial^2 a_s}{\partial z^2} = -k^2 \cdot a_s \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot z} + (-j \cdot \delta) \cdot k \cdot \frac{\partial a_s}{\partial z} \quad (10.40)$$

Решавањем диференцијалних једначина (10.39 и 10.40), добијају се решења облика:

$$a_s(z) = \{a \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) + b \cdot \cos(\delta_{eff} \cdot z)\} \cdot e^{-j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \quad (10.41)$$

$$a_b(z) = \{c \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) + d \cdot \cos(\delta_{eff} \cdot z)\} \cdot e^{j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \quad (10.42)$$

где је: $\delta_{eff} = \frac{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot k^2}}{2}$

Уколико се искористе почетни услови, односно да на једном порту постоји побуда, а да на другом порту побуде нема, добијају се вредности за коефицијенте спреге у облику:

$$\begin{bmatrix} a_s(z) \\ a_b(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_s(0) \\ a_b(0) \end{bmatrix} \quad (10.43)$$

где су:

$$\begin{aligned} T_{11}(z) &= \left\{ \cos(\delta_{eff} \cdot z) + \frac{j \cdot \delta}{2 \cdot \delta_{eff}} \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) \right\} \cdot e^{-j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \\ T_{12}(z) &= -\frac{j \cdot k}{2 \cdot \delta_{eff}} \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) \cdot e^{-j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \\ T_{21}(z) &= -\frac{j \cdot k}{2 \cdot \delta_{eff}} \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) \cdot e^{j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \\ T_{22}(z) &= \left\{ \cos(\delta_{eff} \cdot z) + \frac{j \cdot \delta}{2 \cdot \delta_{eff}} \cdot \sin(\delta_{eff} \cdot z) \right\} \cdot e^{j \cdot \frac{\delta}{2} \cdot z} \end{aligned}$$

11 Прилог 4

Савршено прилагођен слој

Максвелове једначине у комплексном домену имају облик,

$$j \cdot \omega \cdot \vec{B} = -\nabla \times \vec{E} \quad (11.1)$$

$$j \cdot \omega \cdot \vec{D} = \nabla \times \vec{H} \quad (11.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (11.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (11.4)$$

док су конститутивне једначине дате изразом,

$$\vec{B} = [\mu] \cdot \vec{H}, \quad \vec{D} = [\varepsilon] \cdot \vec{E} \quad (11.5)$$

где угаоне заграде показују да је реч о тензору. Да би дошло до слабљења поља, у савршено проводном слоју, неопходно је дефинисати нове тензоре, који карактеришу средину, у облику:

$$[\bar{\mu}] = [\mu] + \frac{\sigma_M}{j \cdot \omega}; \quad [\bar{\varepsilon}] = [\varepsilon] + \frac{\sigma_E}{j \cdot \omega} \quad (11.6)$$

тако да ће Максвелове једначине имати облик:

$$j \cdot \omega \cdot [\bar{\mu}] \cdot \vec{H} = -\nabla \times \vec{E} \quad (11.7)$$

$$j \cdot \omega \cdot [\bar{\varepsilon}] \cdot \vec{E} = \nabla \times \vec{H} \quad (11.8)$$

$$\nabla \cdot [\bar{\mu}] \cdot \vec{H} = 0 \quad (11.9)$$

$$\nabla \cdot [\bar{\varepsilon}] \cdot \vec{D} = 0 \quad (11.10)$$

За одговарајуће границе, савршено проводан слој је униаксијалан, што значи да ће слабити поље само у правцу одговарајуће координате. Овај слој карактеришу тензор електричне пермитивности и тензор магнетне пермеабилности. Уколико

се посматра равански електромагнетни талас који у савршено прилагођен слој долази из ваздуха, импеданса савршено прилагођеног слоја треба да буде прилагођена импеданси слободног простора, односно:

$$Z_0 = \frac{[\mu_0]}{[\varepsilon_0]} = \frac{[\bar{\mu}]}{[\bar{\varepsilon}]} \quad (11.11)$$

па се сходно томе, могу дефинисати параметри конститутивних једначина који се односе на карактеристике савршено прилагођеног слоја преко:

$$[\bar{\varepsilon}] = \varepsilon_0 \cdot [K] \quad (11.12)$$

$$[\bar{\mu}] = \mu_0 \cdot [K] \quad (11.13)$$

где је $[K]$ дијагонални тензор:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (11.14)$$

Уколико се узме да је $a_3 = a_2 = a$ и $\sqrt{a_1 \cdot a_2} = 1$, средина постаје апсолутно прилагођена (без рефлексја), а тензор $[S]$ добија облик:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

што значи да ће савршено прилагођен слој бити дефинисан помоћу само једног коефицијента a .

12 Прилог 5

Осно-симетрични модел

Уколико се са извођењем крене од Хелмхолмцове једначине у векторском облику и примени Галеркинов метод добија се:

$$\int_V [(\nabla \times \vec{W}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \alpha \cdot (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) + \frac{1}{c^2} \cdot \vec{W} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}] \cdot dV = 0 \quad (12.1)$$

где су:

\vec{H} - вектор магнетног поља

$\vec{W} = \vec{H}^*$ - тежинска функција.

Због осне симетрије, магнетно поље и тежинска функција се могу написати у облику:

$$\vec{H} = e^{i \cdot M \cdot \varphi} \cdot H^r(r, z) \cdot \vec{i}_r + e^{i \cdot M \cdot \varphi} \cdot H^\varphi(r, z) \cdot \vec{i}_\varphi + e^{i \cdot M \cdot \varphi} \cdot H^z(r, z) \cdot \vec{i}_z \quad (12.2)$$

$$\vec{W} = e^{-i \cdot M \cdot \varphi} \cdot W^r \cdot \vec{i}_r + e^{-i \cdot M \cdot \varphi} \cdot W^\varphi \cdot \vec{i}_\varphi + e^{-i \cdot M \cdot \varphi} \cdot W^z \cdot \vec{i}_z \quad (12.3)$$

при чему се знак минус у експоненту у једначини (12.3) јавља због коњуговане вредности ($\vec{W} = \vec{H}^*$).

Дивергенција и ротор у цилиндричном координатном систему се могу написати у облику:

$$\nabla \times \vec{u} = \vec{i}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{i}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \vec{i}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r \cdot u_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \quad (12.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (12.5)$$

Уколико се одговарајући изводи означе са:

$$\frac{\partial H_k}{\partial m} = H_m^k \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial \varphi} = i \cdot M \cdot H^k, \quad \frac{\partial W_k}{\partial \varphi} = -i \cdot M \cdot W^k \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial(r \cdot H_k)}{\partial r} = H^k + r \cdot H_r^k \quad (12.8)$$

Пермитивност домена изражена у матричном облику једнака је:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

или:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_z} \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

Из (5.2) - (12.10) добија се:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{W} &= \vec{i}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (-i \cdot M) \cdot W^z - W_z^\varphi \right) + \\ &+ \vec{i}_\varphi \cdot (W_z^r - W_r^z) + \vec{i}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot (W^\varphi + r \cdot W_r^\varphi - (-i \cdot M) \cdot W^r) \end{aligned} \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{i}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (i \cdot M) \cdot H^z - H_z^\varphi \right) + \vec{i}_\varphi \cdot (H_z^r - H_r^z) + \\ &+ \vec{i}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot (H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - (i \cdot M) \cdot H^r) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Уколико се (12.11) и (12.12) скаларно помноже,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{W}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (-i \cdot M) \cdot W^z - W_z^\varphi \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (i \cdot M) \cdot H^z - H_z^\varphi \right) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot (W_z^r - W_r^z) \cdot (H_z^r - H_r^z) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot \frac{1}{r} \cdot (W^\varphi + r \cdot W_r^\varphi - (-i \cdot M) \cdot W^r) \cdot \\ &\cdot \frac{1}{r} \cdot (H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - (i \cdot M) \cdot H^r) \end{aligned} \quad (12.13)$$

што даје:

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \vec{W}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \vec{H}) &= \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot M^2 \cdot W^z \cdot H^z + \frac{1}{r} \cdot (i \cdot M \cdot W^z \cdot H_z^\varphi - \right. \\
&\quad \left. - i \cdot M \cdot H^z \cdot W_z^\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + (W_z^\varphi \cdot H_z^\varphi + W_z^r \cdot H_z^r - W_z^r \cdot H_r^z - W_r^z \cdot H_z^r + W_r^z \cdot H_r^z) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_z \cdot r^2} \cdot [(W^\varphi \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H^\varphi + \\
&\quad + M^2 \cdot H^r \cdot W^r) + r \cdot (W^\varphi \cdot H_r^\varphi + W_r^\varphi \cdot H^\varphi - \\
&\quad - i \cdot M \cdot W_r^\varphi \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H_r^\varphi) + r^2 \cdot W_r^\varphi \cdot H_r^\varphi]
\end{aligned} \tag{12.14}$$

Из,

$$(\nabla \times \vec{W}) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \left[\frac{A}{r} + B + r \cdot C \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \tag{12.15}$$

добија се:

$$A = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W^\varphi \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H^\varphi + M^2 \cdot H^r \cdot W^r) + \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot M^2 \cdot W^z \cdot H^z \tag{12.16}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W^\varphi \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot (W^\varphi \cdot H^r - W^r \cdot H^\varphi) + M^2 \cdot H^r \cdot W^r) + \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot M^2 \cdot W^z \cdot H^z} \tag{12.17}$$

За B се добија:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W_r^\varphi \cdot H_r^\varphi + W_r^\varphi \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W_r^\varphi \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H_r^\varphi) + \\
&\quad + \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot (i \cdot M \cdot W^z \cdot H_z^\varphi - i \cdot M \cdot W_z^\varphi \cdot H^z)
\end{aligned} \tag{12.18}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W_r^\varphi \cdot (H^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) + H_r^\varphi \cdot (W^\varphi + i \cdot M \cdot W^r) - \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot i \cdot M \cdot (W_z^\varphi \cdot H^z - W^z \cdot H_z^\varphi))} \tag{12.19}$$

C је једнако:

$$C = \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot W_r^\varphi \cdot H_r^\varphi + \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot (W_z^\varphi \cdot H_z^\varphi + W_z^r \cdot H_z^r - W_z^r \cdot H_r^z - W_r^z \cdot H_z^r + W_r^z \cdot H_r^z) \tag{12.20}$$

$$C = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot W_r^\varphi \cdot H_r^\varphi + \frac{1}{\varepsilon_z} \cdot (W_z^\varphi \cdot H_z^\varphi + (W_r^z - W_z^r) \cdot (H_r^z - H_z^r)) \quad (12.21)$$

Из (12.5):

$$\nabla \cdot \vec{W} = \frac{1}{r} \cdot (W^r + r \cdot W^r) - \frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot W^\varphi + W_z^z \quad (12.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{1}{r} \cdot (H^r + r \cdot H^r) + \frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot H^\varphi + H_z^z \quad (12.23)$$

што даје:

$$\alpha \cdot (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (W^r + r \cdot W^r) - \frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot W^\varphi + W_z^z \right) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot (H^r + r \cdot H^r) + \frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot H^\varphi + H_z^z \right) \quad (12.24)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) &= \frac{1}{r^2} \cdot (W^r \cdot H^r + r \cdot W^r \cdot H_r^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H^\varphi + \\ &+ r \cdot W_r^r \cdot H^r + r^2 \cdot W_r^r \cdot H_r^r + r \cdot i \cdot M \cdot W_r^r \cdot H^\varphi - \\ &- i \cdot M \cdot W^\varphi H^r - r \cdot i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_r^r + M^2 \cdot W^\varphi \cdot H^\varphi) + \\ &+ \frac{1}{r} \cdot (W_z^z \cdot H^r + r \cdot W_z^z \cdot H_r^r + i \cdot M \cdot W_z^z \cdot H^\varphi) + \\ &+ W_z^z \cdot H_z^z + \frac{1}{r} \cdot (W^r \cdot H_z^z + r \cdot W_r^r \cdot H_z^z - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_z^z) \end{aligned} \quad (12.25)$$

или,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) &= \frac{1}{r^2} \cdot (W^r \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi H^r + \\ &+ M^2 \cdot W^\varphi \cdot H^\varphi) + \frac{1}{r} \cdot (W^r \cdot H_r^r + W_r^r \cdot H^r + \\ &+ i \cdot M \cdot W_r^r \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H^r + \\ &+ i \cdot M \cdot W_z^z \cdot H^\varphi + W^r \cdot H_z^z - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_z^z) + \\ &+ W_r^r \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H_z^z + W_r^r \cdot H_z^z \end{aligned} \quad (12.26)$$

Из:

$$\alpha \cdot (\nabla \cdot \vec{W}) \cdot (\nabla \cdot \vec{H}) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \left[\frac{D}{r} + E + r \cdot F \right] \cdot 2 \cdot \pi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz \quad (12.27)$$

се добија:

$$D = W^r \cdot H^r + i \cdot M \cdot W^r \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi H^r + M^2 \cdot W^\varphi \cdot H^\varphi \quad (12.28)$$

$$D = W^r \cdot H^r - i \cdot M \cdot (W^\varphi H^r - W^r \cdot H^\varphi) + M^2 \cdot W^\varphi \cdot H^\varphi \quad (12.29)$$

Са друге стране:

$$E = W^r \cdot H_r^r + W_r^r \cdot H^r + i \cdot M \cdot W_r^r \cdot H^\varphi - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H^r + i \cdot M \cdot W_z^z \cdot H^\varphi + W^r \cdot H_z^z - i \cdot M \cdot W^\varphi \cdot H_z^z \quad (12.30)$$

$$\boxed{E = (W_r^r + W_z^z) \cdot (H^r + i \cdot M \cdot H^\varphi) + (W^r - i \cdot M \cdot W^\varphi) \cdot (H_r^r + H_z^z)} \quad (12.31)$$

За F:

$$F = W_r^r \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H_r^r + W_z^z \cdot H_z^z + W_r^r \cdot H_z^z \quad (12.32)$$

$$\boxed{F = (W_r^r + W_z^z) \cdot (H_r^r + H_z^z)} \quad (12.33)$$

Гранични услови

Из $\text{div}(\vec{B} = 0)$, или $\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$, добија се:

$$\boxed{H^r \cdot n_r + H^z \cdot n_z = 0} \quad (12.34)$$

док се из $\vec{E} \times \vec{n} = 0$, или $(\nabla \times \vec{H}) \times \vec{n} = 0$ добија:

$$\begin{aligned} \vec{i}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{i}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \\ + \vec{i}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial(r \cdot H_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) \times (\vec{n}_r + \vec{n}_z) = 0 \end{aligned} \quad (12.35)$$

$$\begin{aligned} \vec{i}_r \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot H^z - H_z^\varphi \right) + \vec{i}_\varphi \cdot (H_z^r - H_r^z) + \vec{i}_z \cdot \\ \cdot \frac{1}{r} \cdot (H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) \times (\vec{n}_r + \vec{n}_z) = 0 \end{aligned} \quad (12.36)$$

$$\begin{aligned} (H_z^r - H_r^z) \cdot n_r \cdot (-\vec{i}_z) + \frac{1}{r} \cdot (H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) \cdot n_r \cdot (-\vec{i}_\varphi) + \\ + \left(\frac{1}{r} \cdot i \cdot M \cdot H^z - H_z^\varphi \right) \cdot n_z \cdot \vec{i}_\varphi + (H_z^r - H_r^z) \cdot n_z \cdot (-\vec{i}_r) = 0 \end{aligned} \quad (12.37)$$

или:

$$\boxed{H_z^r - H_r^z = 0} \quad (12.38)$$

док је истовремено:

$$\boxed{(H^\varphi + r \cdot H_r^\varphi - i \cdot M \cdot H^r) \cdot n_r - (i \cdot M \cdot H^z - r \cdot H_z^\varphi) \cdot n_z = 0} \quad (12.39)$$

Биографија



Бојан Ч. Милановић

Милановић (Чедомира) Бојан, магистар електротехничких наука за област Примењена Електромагнетика и Оптиелектроника, рођен је 31. августа 1976. године у Прокупљу, општина Прокупље, Република Србија. Основну школу и гимназију природно-математичког смера, завршио је у Куршумлији са просечном оценом 5.00.

Школовање је наставио 1995 године у Војно-техничкој академији у Београду, Смеру Ваздухопловно-техничке службе, односно у Одсеку за Ваздухопловну електронику и телекомуникације, Смер Ваздухопловно-технички Електротехничког факултета у Београду. Дипломирао је 2000. године са просечним оценама 8,46 и 8,29 респективно. Дипломски рад под насловом „Мерење параметара микроталасних компоненти у временском домену“, одбранио је 19. септембра 2000. године са оценом 10 (десет).

Магистарске студије на Електротехничком факултету Универзитета у Београду, уписао је 2000 године а завршио 2005. године, са просечном оценом 10, чиме је стекао академско звање магистра електротехничких наука за област Примењена Електромагнетика и Оптиелектроника. Магистарски рад под називом: „Анализа утицаја електронских дејстава на моноимпулсну радаску главу за самонавођење“, одбранио је 26.10.2005. године.

Магистар Бојан Милановић, након завршених основних студија, 2000. године је почео да ради у Војно-техничкој академији на командирским дужностима. Од 2003. године, укључен је у процес наставе као асистент на предметима: Микроталасна техника, Електромагнетика, Електротехника 1, Електротехника 2, Ваздухопловни радио уређаји и системи, Радарска техника, Радарске антене.

Током свог досадашњег научно-истраживачког рада, Бојан Ч. Милановић објавио је 2 рада у часопису међународног значаја (са SCI листе), 1 рад у часопису националног значаја, 8 радова саопштених на међународним скуповима и 20 радова саопштених на скуповима националног значаја штампаних у целини.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Бојан Милановић

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Одређивање карактеристика оптичких филтара са микро-прстенастим
резонатором методом коначних елемената

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 04.03.2015

Бојан Милановић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Бојан Милановић

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада Одређивање карактеристика оптичких филтара са микро-
прстенастим резонатором методом коначних елемената

Ментор ванредни професор др Јован Елазар

Потписани Бојан Милановић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 04.03.2015

Бојан Милановић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Одређивање карактеристика оптичких филтара са микро-прстенастим резонатором методом коначних елемената

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 04.03.2015



1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.

Литература

- [1] Cornell University. Switching one light beam with another, cornell provides a key component for photonic chips., 2004. URL www.sciencedaily.com/releases/2004/10/041030184421.htm. xv, 1
- [2] Andrei Faraon, Charles Santori, Zhihong Huang, Kai-Mei C Fu, Victor M Acosta, David Fattal, and Raymond G Beausoleil. Quantum photonic devices in single-crystal diamond. *New Journal of Physics*, 15(2):025010, 2013. xv, 1
- [3] G Cusmai, F Morichetti, P Rosotti, R Costa, and A Melloni. Circuit-oriented modelling of ring-resonators. *Optical and quantum electronics*, 37(1-3):343–358, 2005. 1
- [4] SC Hagness, D Rafizadeh, ST Ho, and A Taflove. Fdtd microcavity simulations: design and experimental realization of waveguide-coupled single-mode ring and whispering-gallery-mode disk resonators. *Lightwave Technology, Journal of*, 15(11):2154–2165, 1997. 1, 2
- [5] Masanori Koshiba, Yasuhide Tsuji, and Masafumi Hikari. Time-domain beam propagation method and its application to photonic crystal circuits. *Journal of Lightwave Technology*, 18(1):102, 2000. 1, 2
- [6] Amnon Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 9(9):919–933, 1973. 2
- [7] Shanhui Fan, Wonjoo Suh, and JD Joannopoulos. Temporal coupled-mode theory for the fano resonance in optical resonators. *JOSA A*, 20(3):569–572, 2003. 2
- [8] Remco Stoffer, Kirankumar R Hiremath, and Manfred Hammer. Comparison of coupled mode theory and fdtd simulations of coupling between bent and straight optical waveguides. In *AIP Conference Proceedings: Microresonators as building blocks for VLSI photonics (2004)*, volume 709, pages 366–377. Springer, 2004. 2
- [9] C Manolatu, MJ Khan, Shanhui Fan, Pierre R Villeneuve, HA Haus, and JD Joannopoulos. Coupling of modes analysis of resonant channel add-drop filters. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 35(9):1322–1331, 1999. 2

-
- [10] John D Joannopoulos, Steven G Johnson, Joshua N Winn, and Robert D Meade. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton university press, 2011. [2](#)
- [11] Brent E Little, Sai T Chu, Hermann A Haus, J Foresi, and J-P Laine. Microring resonator channel dropping filters. *Lightwave Technology, Journal of*, 15(6):998–1005, 1997. [2](#), [7](#), [8](#)
- [12] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Leroy Taylor, Olgierd Cecil Zienkiewicz, and Robert Lee Taylor. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977. [2](#)
- [13] Klaus-Jürgen Bathe and Edward L Wilson. Numerical methods in finite element analysis. 1976. [2](#)
- [14] Ming-Feng Xue, Young Mo Kang, Amir Arbabi, Steven J McKeown, Lynford L Goddard, and Jian-Ming Jin. Fast and accurate finite element analysis of large-scale three-dimensional photonic devices with a robust domain decomposition method. *Optics express*, 22(4):4437–4452, 2014. [2](#)
- [15] OV Ivanova, Remco Stoffer, LJ Kauppinen, and Manfred Hammer. Variational effective index method for 3d vectorial scattering problems in photonics: Te polarization. 2009. [3](#)
- [16] Manfred Hammer and Olena V Ivanova. Effective index approximations of photonic crystal slabs: a 2-to-1-d assessment. *Optical and quantum electronics*, 41(4):267–283, 2009. [3](#)
- [17] OV Ivanova, M Hammer, R Stoffer, and E Van Groesen. A variational mode expansion mode solver. *Optical and Quantum Electronics*, 39(10-11):849–864, 2007. [3](#)
- [18] PP Absil, JV Hryniewicz, BE Little, FG Johnson, KJ Ritter, and P-T Ho. Vertically coupled microring resonators using polymer wafer bonding. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 13(1):49–51, 2001. [3](#)
- [19] Sai T Chu, Brent E Little, Wugen Pan, Taro Kaneko, Shinya Sato, and Yasuo Kokubun. An eight-channel add-drop filter using vertically coupled microring resonators over a cross grid. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 11(6):691–693, 1999. [3](#)
- [20] Yasuo Kokubun, Yutaka Hatakeyama, Masashi Ogata, Shuichi Suzuki, and Nobuhiro Zaizen. Fabrication technologies for vertically coupled microring resonator with multilevel crossing busline and ultracompact-ring radius. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 11(1):4–10, 2005. [3](#)
-

-
- [21] B Milanović, B Radjenović, and M Radmilović-Radjenović. Three-dimensional finite-element modeling of optical microring resonators. *Physica Scripta*, 2012 (T149):014026, 2012. [4](#)
- [22] B Radjenović, B Milanović, and M Radmilović-Radjenović. Electric field enhancement in silicon slotted optical strip waveguides and microring resonators. *Physica Scripta*, 2012(T149):014027, 2012. [4](#)
- [23] HA Haus and RV Schmidt. Transmission response of cascaded gratings. *IEEE Transactions on Sonics Ultrasonics*, 24:94–101, 1977. [7](#)
- [24] H Haus and Y Lai. Theory of cascaded quarter wave shifted distributed feedback resonators. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 28(1):205–213, 1992. [7](#)
- [25] Wenge Yang, Amitabh Joshi, and Min Xiao. Effects of side-coupling on the phase response of cascaded microring all-pass filters. *Optics communications*, 232(1):209–216, 2004. [7](#)
- [26] Wim Bogaerts, Peter De Heyn, Thomas Van Vaerenbergh, Katrien De Vos, Shankar Kumar Selvaraja, Tom Claes, Pieter Dumon, Peter Bienstman, Dries Van Thourhout, and Roel Baets. Silicon microring resonators. *Laser & Photonics Reviews*, 6, 2012. [7](#), [13](#), [40](#), [42](#), [53](#)
- [27] Otto Schwelb. Transmission, group delay, and dispersion in single-ring optical resonators and add/drop filters—a tutorial overview. *Journal of Lightwave Technology*, 22(5):1380, 2004. [7](#)
- [28] Shijun Xiao, Maroof H Khan, Hao Shen, and Minghao Qi. Silicon-on-insulator microring add-drop filters with free spectral ranges over 30 nm. *Journal of Lightwave Technology*, 26(2):228–236, 2008. [7](#)
- [29] V Van, TA Ibrahim, PP Absil, FG Johnson, R Grover, and P-T Ho. Optical signal processing using nonlinear semiconductor microring resonators. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 8(3):705–713, 2002. [7](#)
- [30] Po Dong, Wei Qian, Hong Liang, Roshanak Shafiiha, Ning-Ning Feng, Dazeng Feng, Xuezhe Zheng, Ashok V Krishnamoorthy, and Mehdi Asghari. Low power and compact reconfigurable multiplexing devices based on silicon microring resonators. *Optics express*, 18(10):9852–9858, 2010. [7](#)
- [31] Antoine Bellemare, J-F Lemieux, Michel Tetu, and Sophie LaRochelle. Erbium-doped fiber ring lasers step-tunable to exact multiples of 100 ghz (ITU-grid) using

-
- periodic filters. In *Optical Communication, 1998. 24th European Conference on*, volume 1, pages 153–154. IEEE, 1998. 8
- [32] Magdalena S Nawrocka, Tao Liu, Xuan Wang, and Roberto R Panepucci. Tunable silicon microring resonator with wide free spectral range. *Applied physics letters*, 89(7):071110–071110, 2006. 8
- [33] Ashok M Prabhu, Alan Tsay, Zhanghua Han, and Vien Van. Ultracompact soi microring add-drop filter with wide bandwidth and wide fsr. *IEEE Photon. Technol. Lett*, 21(10):651–653, 2009. 8
- [34] Qianfan Xu, Brad Schmidt, Jagat Shakya, and Michal Lipson. Cascaded silicon micro-ring modulators for wdm optical interconnection. *Optics express*, 14(20):9431–9435, 2006. 8
- [35] Andrea Melloni. Synthesis of a parallel-coupled ring-resonator filter. *Optics letters*, 26(12):917–919, 2001. 8
- [36] Andrea Melloni and Mario Martinelli. Synthesis of direct-coupled-resonators band-pass filters for wdm systems. *Journal of Lightwave Technology*, 20(2):296, 2002. 8
- [37] Miloš Popović. *Theory and design of high-index-contrast microphotonic circuits*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2008. 8, 83
- [38] Tymon Barwicz, Miloš A Popović, Michael R Watts, Peter T Rakich, Erich P Ippen, and Henry I Smith. Fabrication of add-drop filters based on frequency-matched microring resonators. *Journal of Lightwave Technology*, 24(5):2207, 2006. 8
- [39] Miloš A Popovic, Tymon Barwicz, Michael R Watts, Peter T Rakich, Luciano Soci, Erich P Ippen, Franz X Kärtner, and Henry I Smith. Multistage high-order microring-resonator add-drop filters. *Optics letters*, 31(17):2571–2573, 2006. 8
- [40] Freddy Susanto Tan. *Integrated optical filters based on microring resonators*. PhD thesis, Twente University Press, 2004. 9, 11
- [41] Li Shuai, Wu Yuanda, Yin Xiaojie, An Junming, Li Jianguang, Wang Hongjie, and Hu Xiongwei. Tunable filters based on an soi nano-wire waveguide micro ring resonator. *Journal of Semiconductors*, 32(8):084007, 2011. 9
- [42] Edwin Jan Klein. *Densely integrated microrroring-resonator based components for fiber-to-the-home applications*. University of Twente, 2007. 11
-

-
- [43] Shayan Mookherjea and Andrea Melloni. Microring resonators in integrated optics. *Online Course, october*, 2008. [12](#), [13](#)
- [44] Dominik G Rabus. Integrated ring resonators. *Integrated Ring Resonators: The Compendium, Springer Series in Optical Sciences, Volume 127. ISBN 978-3-540-68786-3. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007*, 1, 2007. [15](#)
- [45] DV Tishinin, PD Dapkus, AE Bond, IAKI Kim, CK Lin, and J O'Brien. Vertical resonant couplers with precise coupling efficiency control fabricated by wafer bonding. *Photonics Technology Letters, IEEE*, 11(8):1003–1005, 1999. [15](#)
- [46] Nabeil Abduljallil Abubaker Abujnah. *Numerical modelling of optical micro-cavity ring resonators for WDM networks*. PhD thesis, University of Glamorgan, 2012. [20](#)
- [47] Ashok M Prabhu, Alan Tsay, Zhanghua Han, and Vien Van. Extreme miniaturization of silicon add-drop microring filters for vlsi photonics applications. *Photonics Journal, IEEE*, 2(3):436–444, 2010. [23](#)
- [48] M Imran Cheema and Andrew G Kirk. Implementation of the perfectly matched layer to determine the quality factor of axisymmetric resonators in comsol. In *COMSOL conference, Boston*, 2010. [24](#), [48](#), [50](#)
- [49] Steven G Johnson. Notes on perfectly matched layers (pmls). *Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts*, 2008. [25](#)
- [50] XL Cai, DX Huang, and XL Zhang. Numerical analysis of polarization splitter based on vertically coupled microring resonator. *Opt. Express*, 14(23):11304–11311, 2006. [26](#)
- [51] Anders Bondeson, Thomas Rylander, and Par Ingelström. *Computational electromagnetics*, volume 51. Springer, 2005. [29](#), [30](#), [32](#)
- [52] Matthew NO Sadiku. *Numerical techniques in electromagnetics*. CRC, 2000. [30](#), [31](#)
- [53] J Akin. *Application and implementation of finite element methods*. Academic Press, Inc., 1982. [33](#)
- [54] BE Little and WP Huang. Coupled-mode theory for optical waveguides. *Progress In Electromagnetics Research*, 10:217–270, 1995. [35](#)
- [55] Mark Oxborrow. Traceable 2-d finite-element simulation of the whispering-gallery modes of axisymmetric electromagnetic resonators. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 55(6):1209–1218, 2007. [48](#), [50](#)
-

-
- [56] Jonathan Schrauwen, Dries Van Thourhout, and Roel Baets. Trimming of silicon ring resonator by electron beam induced compaction and strain. *Optics express*, 16(6):3738–3743, 2008. [54](#)